Отчет по задаче о прямом численном решении уравнения Навье-Стокса

Постановка задачи

Имеется квадратная каверна $(L \times L)$ с вязкой несжимаемой ньютоновской жидкостью. Задано поле скорости $\vec{u} = (u, v)$. Одна из стенок каверны подвижна и движется со скоростью $u = u_0$, $v = 0$, а остальные неподвижны, т.е. $u = v = 0$. Появляется циркуляционное движение.

Решение задачи

Уравнение Навье-Стокса в декартовой системе координат имеет вид:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \vec{u} \quad (1)$$

$\Delta \vec{u} = 0$ – условие несжимаемости жидкости.

Слагаемое $\vec{u} \cdot \nabla \vec{u}$ отвечает за конвективный перенос вещества.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) \; (2) \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Переход к безразмерным величинам

Введем новые обозначения:

$u = u^0 \cdot u^*, x = L \cdot x^*, v = u^0 \cdot v^*, y = L \cdot y^*, t = t_x \cdot t^*, p = p_x \cdot p^*.$
Тогда система (2) примет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \frac{u^0 t_x}{L}(u^*\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^*\frac{\partial u^*}{\partial y^*}) = -\frac{p_x}{{u^0}^2\rho}\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\nu}{u^0 L}(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}) \\ \frac{\partial v^*}{\partial t^*} + \frac{u^0 t_x}{L}(u^*\frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^*\frac{\partial v^*}{\partial y^*}) = -\frac{p_x}{{u^0}^2\rho}\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\nu}{u^0 L}(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}) \\ \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = 0 \end{cases}$$

Положим, что $\frac{u^0 t_x}{L} = 1$ и $\frac{p_x}{{u^0}^2\rho} = 1$, т.е. $t_x = \frac{L}{u^0}$ и $p_x = {u^0}^2\rho$.

А множитель $\frac{\nu u^0}{L}$ обозначим $\frac{1}{Re}$, где $Re = \frac{u^0 L}{\nu}$ – число Рейнольдса.

Введем понятие вихря ω и функции тока ψ.

$$\omega = rot(\vec{u}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} = \vec{k}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \Delta\psi$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \omega}{\partial t} + u_0 \dfrac{\partial \omega}{\partial x} + v_0 \dfrac{\partial \omega}{\partial y} = \dfrac{1}{Re}\Delta\omega \\ \omega = \Delta\psi \\ u = -\dfrac{\partial \psi}{\partial y}, v = \dfrac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases}$$

Здесь u_0 и v_0 берутся со старой итерации.

Стационарная задача: $\frac{\partial \omega}{\partial t} = 0$.

Алгоритм проведения расчетов:

1) u_0 и v_0 известны, выполнить расчет;
2) обновить u_0 и v_0 и перейти к пункту 1).

Граничные условия примут вид: $\psi = 0, \frac{\partial \psi}{\partial n} = -1$ - для подвижной стенки, и $\psi = \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$ – для неподвижных стенок.

Условие Тома (Thom):

$$\psi_1 = \psi_0 + \left.\frac{\partial \psi}{\partial x}\right|_0 h + \frac{h^2}{2}\left.\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\right|_0 + O(h^3) = ch + \omega\frac{h^2}{2}$$

$$\omega_0 = 2\frac{\psi_1 - ch}{h^2}$$

<u>Метод конечных разностей</u>

1) $u_{ij}^0 \frac{\partial \omega^{(up)}}{\partial x} + v_{ij}^0 \frac{\partial \omega^{(up)}}{\partial y} = \frac{\omega_{i+1\,j}^{c} + \omega_{i-1\,j}^{\text{н}} - 4\omega_{i\,j}^{\text{н}} + \omega_{i\,j+1}^{c} + \omega_{i\,j-1}^{\text{н}}}{h^2 Re}$;
   $\omega_{i\,j}^{\text{н}} = \frac{\psi_{i+1\,j}^{c} + \psi_{i-1\,j}^{\text{н}} - 4\psi_{i\,j}^{\text{н}} + \psi_{i\,j+1}^{c} + \psi_{i\,j-1}^{\text{н}}}{h^2}$.
2) $u_{ij} = -\frac{\psi_{i\,j+1} - \psi_{i\,j-1}}{2h}$;
   $v_{ij} = \frac{\psi_{i+1\,j} - \psi_{i-1\,j}}{2h}$.

На границе: $\psi_{i\,j} = 0$; для ω записывается условие Тома.

<u>**Вводимая** релаксация при вычислении скорости</u>

Вместо прямого вычисления …:

$$\begin{cases} u_0 = (1-a)u_0 + a\left(-\dfrac{\psi_{i\,j+1} - \psi_{i\,j-1}}{2h}\right) \\ v_0 = (1-a)v_0 + a\left(-\dfrac{\psi_{i+1\,j} - \psi_{i-1\,j}}{2h}\right) \end{cases}$$

Далее обновляется скорость.

Если $a = 1$, используется старая формула. Если же $a = 0$, то $u_0 = const$.

На хорошей сетке происходит плавный процесс сходимости при $a = 0.1$.

Отложенная коррекция

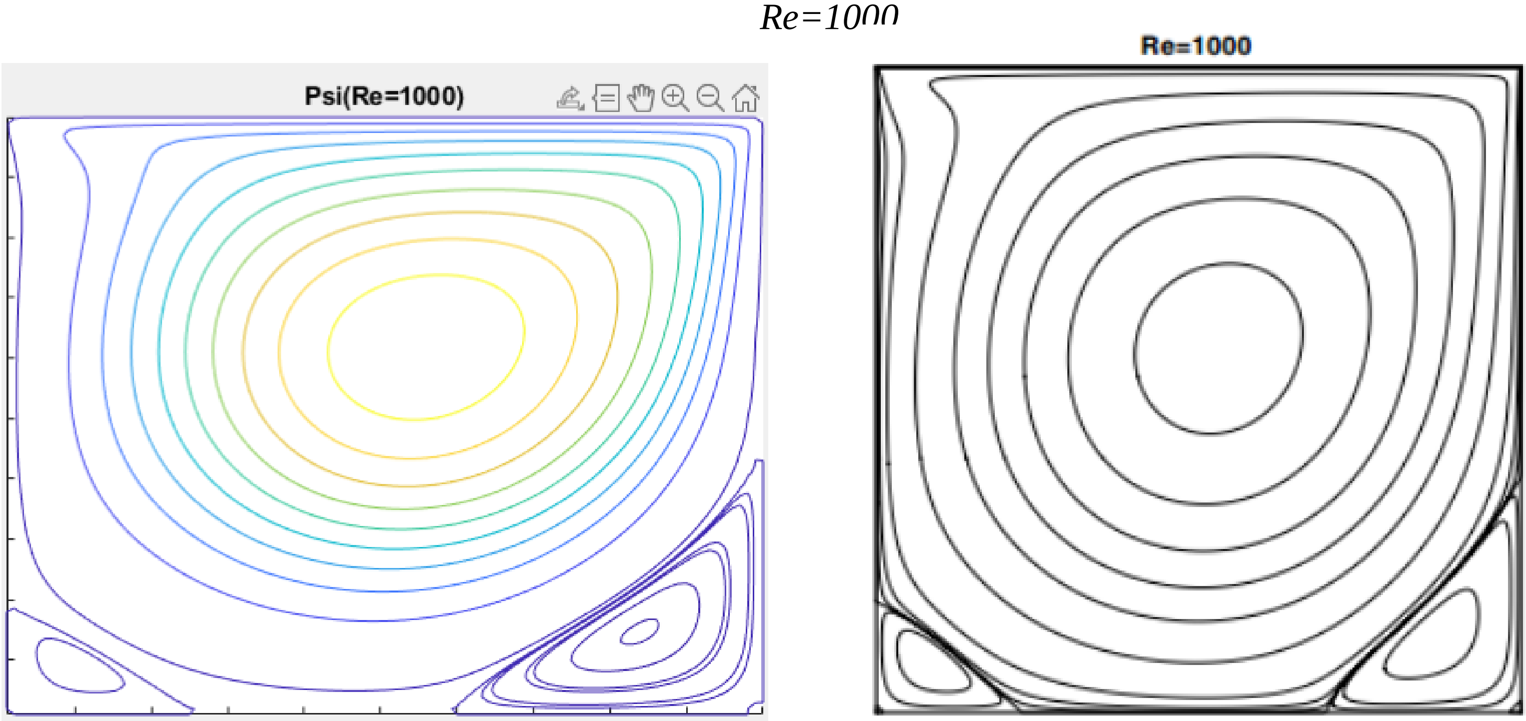
$$u_0 \frac{\partial \omega^{(up)}}{\partial x} + v_0 \frac{\partial \omega^{(up)}}{\partial y} - \frac{1}{Re} \Delta \omega^{(c)} = u_0 \frac{\partial \omega^{(up)}}{\partial x} + v_0 \frac{\partial \omega^{(up)}}{\partial y} - u_0 \frac{\partial \omega^{(c)}}{\partial x} - v_0 \frac{\partial \omega^{(c)}}{\partial y}$$

При размере сетки 100*100 для *Re = 0* и *Re = 100*

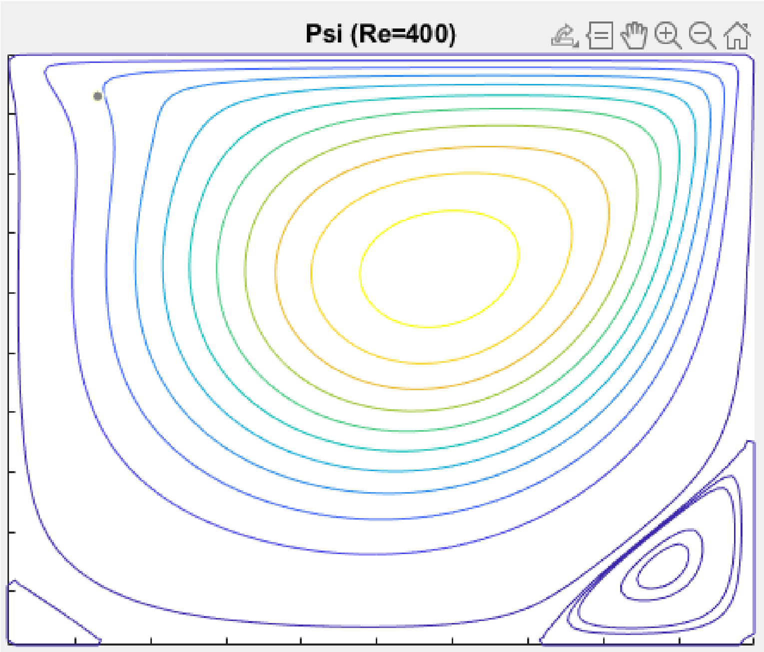
При размере сетки 200*200 для *Re = 400* и *Re = 1000*

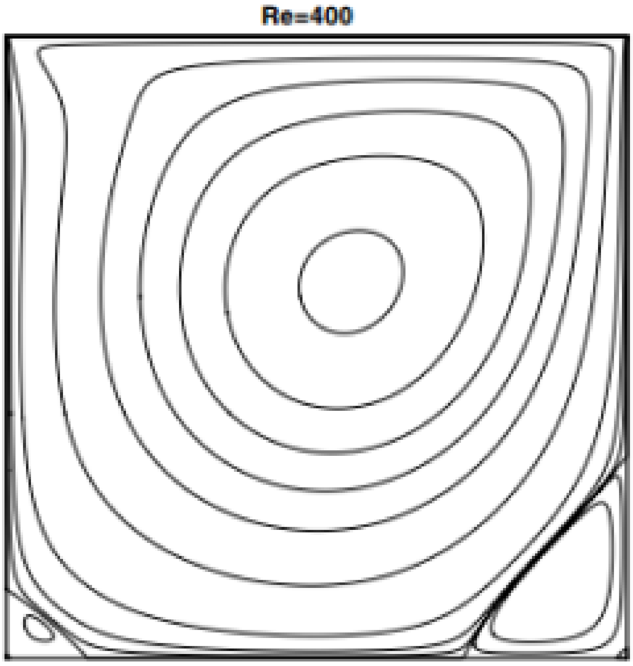
Re	0	100	400	1000
ψ_{min}	-0.1	-0.1034	-0.1139	-0.118
ψ_{min}	- 0.10067	-0.103448	-0.109942	-0.110456

Re=1000

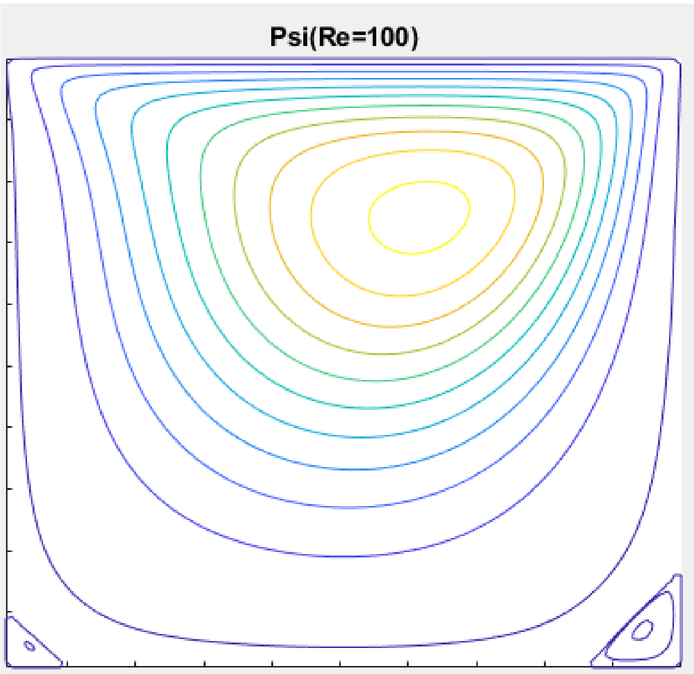


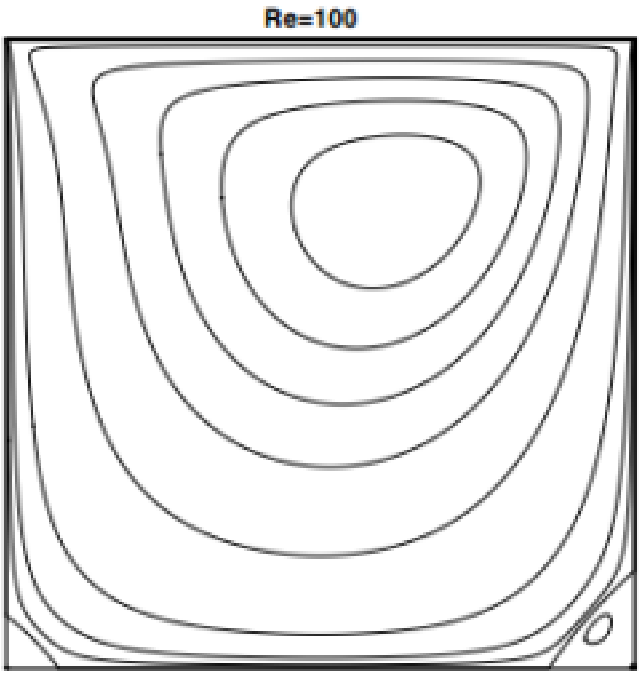
Re=400





Re=100





Re=0