Лабораторная работа №1. Циклические алгоритмы.

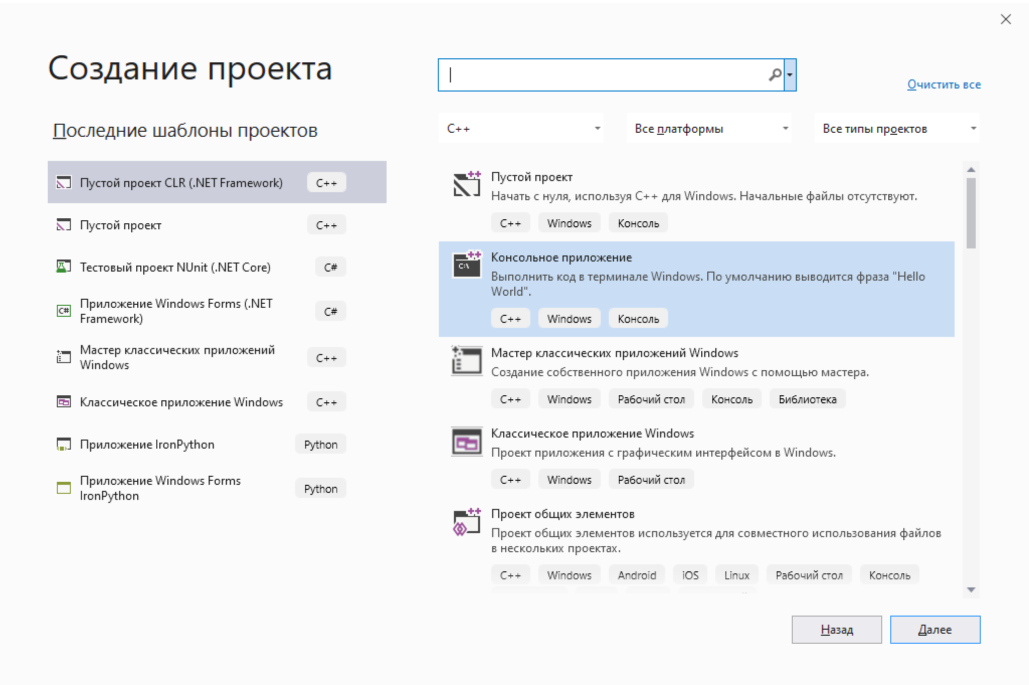
Часть 1. *Вычисление суммы ряда*

В задачах этого раздела предлагается составить алгоритм и программу на языке С++ для нахождения суммы ряда с заданной точностью Е. Использовать рекуррентные соотношения при вычислении очередного члена ряда. Для оценки правильности результата предусмотреть вычисление по контрольной формуле.

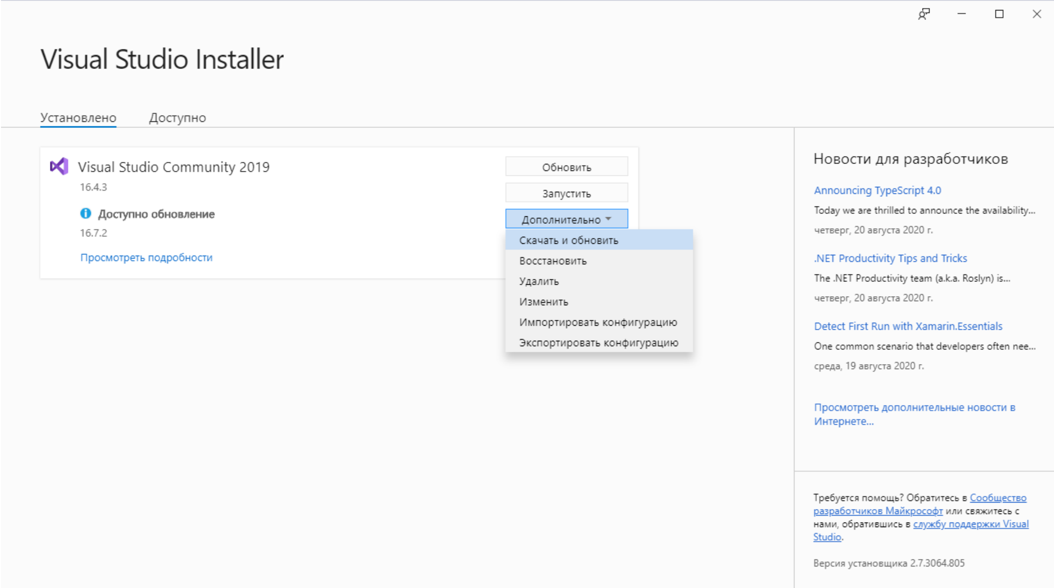
Вычисление суммы заканчивается, если модуль очередного слагаемого оказывается меньше заданного значения точности (Е), причем для этих рядов (при $|x| < 1$) абсолютная величина суммы всех отброшенных членов ряда при этом оказывается меньше Е.

Номер решаемой задачи соответствует номеру варианта, выданному преподавателем.

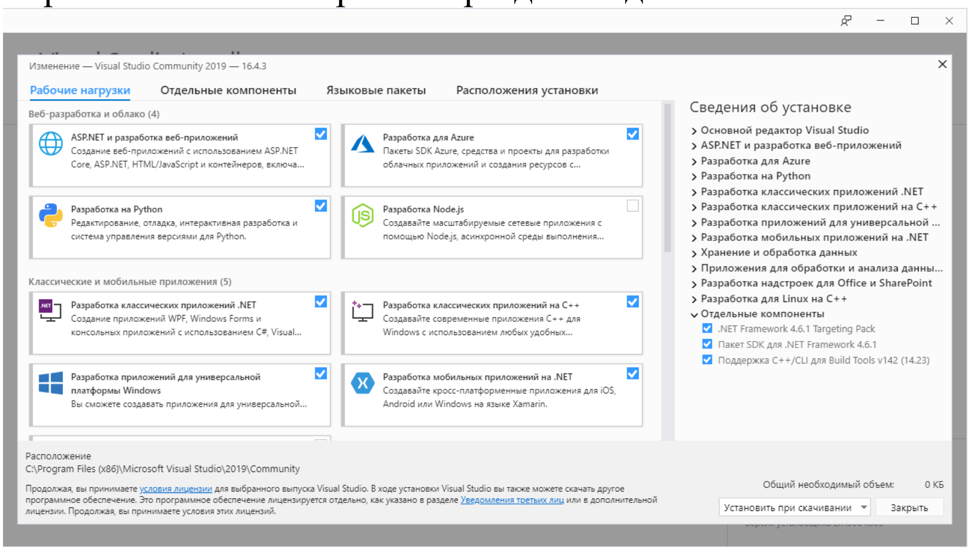
В качестве среди разработки (для этой и последующих лабораторных работ) использовать Visual Studio 2019. При создании проекта необходимо выбрать консольное приложение С++ По желанию в последующих работах можно создавать оконное приложение для знакомства с визуальными компонентами среды.



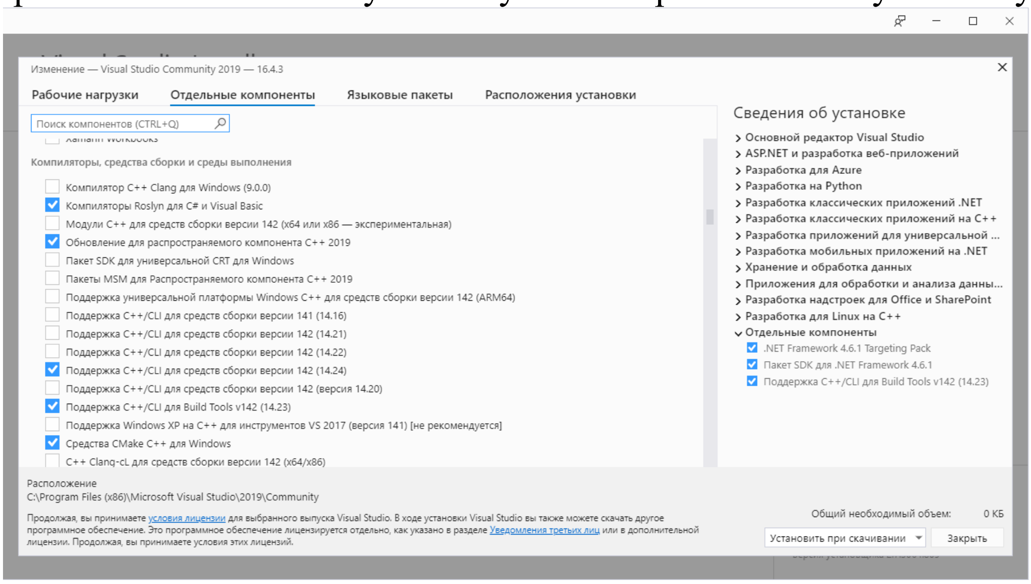
Для создания консольных или оконных приложений на С++ в среде Visual Studio 2019 необходимо провести ряд манипуляций. При установке среды не забыть поставить галочку в пункте *C++/CLI support* (в разделе *Desktop development with C++*). Если этого не сделано во время установки, то можно доставить нужные компоненты в любой момент. Для этого нужно запустить *Visual Studio Installer* и пункте ***Дополнительно*** выбрать ***Изменить***.



В открывшемся окне перейти в раздел **Отдельные компоненты**.



Проставить галочки в нужные пункты и произвести их установку.



После установки нужно правильно создать проект. После запуска VS2019 выбрать пункт **Создание проекта**.

Пример решения задачи

Пусть задан ряд вида:

$$x\left(\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}\right)-x^2\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{4!}\right)+x^3\left(\frac{1}{3!}-\frac{1}{6!}\right)-\ldots\pm x^i\left(\frac{1}{i!}-\frac{1}{(2i)!}\right)\mp\ldots$$

И контрольная формула $\cos(\sqrt{x})-e^{-x}$

Для решения данной задачи необходимо вычислить рекуррентное соотношение. Рекуррентным соотношением называется такое выражение, домножая на которое предыдущий член ряда получается следующий член ряда:

$$a_{i+1}=R(x,i)*a_i.$$

Из этого выражения можно вывести само рекуррентное соотношение:

$$R(x,i)=\frac{a_{i+1}}{a_i}.$$

В нашем примере каждый член ряда представляет собой разность, поэтому представим исходный ряд как разность двух более простых сумм ряда $\sum x^i\frac{1}{i!}$ и $\sum x^i\frac{1}{(2i)!}$. Для вычисления каждой из сумм необходимо свое рекуррентное соотношение:

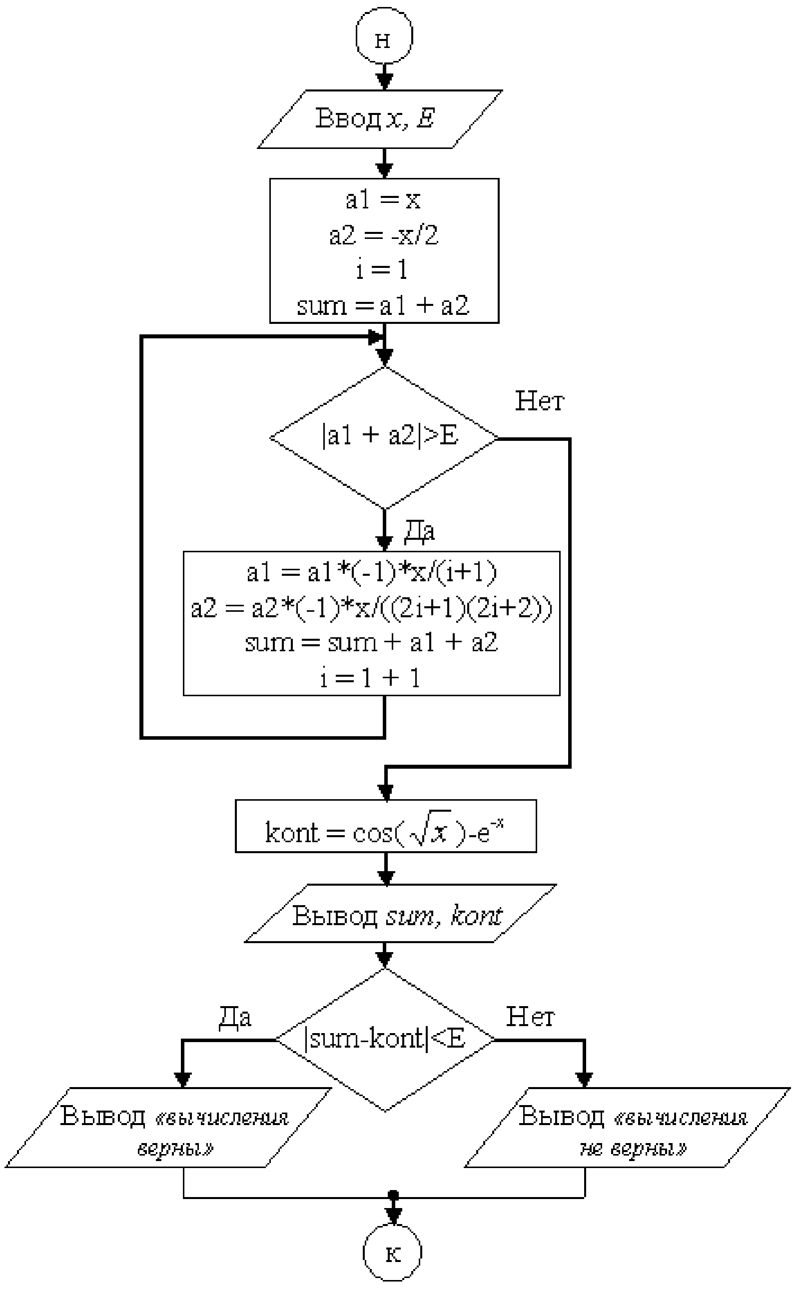
$$R1(x,i)=\frac{a1_{i+1}}{a1_i}=\frac{x^{i+1}}{(i+1)!}\cdot\frac{i!}{x^i}=\frac{x}{i+1}$$

$$R2(x,i)=\frac{a2_{i+1}}{a2_i}=\frac{x^{i+1}}{(2(i+1))!}\cdot\frac{(2i)!}{x^i}=\frac{x^{i+1}}{(2i)!(2i+1)(2i+2)}\cdot\frac{(2i)!}{x^i}=\frac{x}{(2i+1)(2i+2)}$$

Сумма ряда вычисляется с использованием цикла с предусловием. В качестве начальных присваиваний вычисляется первые члены каждого из подрядов. Условием окончания цикла является вводимая точность вычислений E, т.е. когда очередное слагаемое по модулю окажется меньше E.

Для проверки правильности вычислений дана контрольная формула. Значение суммы ряда не должно отличаться от значения контрольной формулы больше чем на E.

На основании всего сказанного можно построить следующую блок-схему алгоритма:



Для контроля правильности необходимо вывести как результат вычисления ряда, так и контрольной формулы.

Задание на программирование

	Ряд	Контрольная формула
1.	$x-\frac{2}{6}x^2+\frac{2\cdot 5}{6\cdot 9}x^3-\ldots\pm\frac{2\cdot 5\ldots(3i-4)}{6\cdot 9\ldots 3i}x^i\mp\ldots$	$3\sqrt[3]{1+x}-3$
2.	$x^2\left(\frac{1}{1!}+\frac{1}{1!}\right)-x^4\left(\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}\right)+\ldots\pm x^{2i}\left(\frac{1}{i!}+\frac{1}{(2i-1)!}\right)\mp\ldots$	$x\sin(x)-e^{-x^2}+1$

3.	$\frac{x(2+x)}{2!}-\frac{x^3(4+x)}{4!}+\frac{x^5(6+x)}{6!}-\ldots\pm\frac{x^{2i-1}(2i+x)}{(2i)!}\mp\ldots$	$\sin(x)-\cos(x)+1$
4.	$\frac{1}{4}x-\frac{1\cdot 5}{4\cdot 8}x^2+\frac{1\cdot 5\cdot 9}{4\cdot 8\cdot 12}x^3-\ldots\pm\frac{1\cdot 5\cdot 9\ldots(4i-3)}{4\cdot 8\cdot 12\ldots 4i}x^i\mp\ldots$	$1-\frac{1}{\sqrt[4]{1+x}}$
5.	$\frac{3x^2}{4!}-\frac{5x^4}{6!}+\frac{7x^6}{8!}-\frac{9x^8}{10!}+\ldots\pm\frac{(2i+1)x^{2i}}{(2i+2)!}\mp\ldots$	$\frac{1-\cos(x)-\sin(x)}{x^2}+$ $+0{,}5$
6.	$\frac{1}{3}x-\frac{1\cdot 4}{3\cdot 6}x^2+\frac{1\cdot 4\cdot 7}{3\cdot 6\cdot 9}x^3-\ldots\pm\frac{1\cdot 4\cdot 7\ldots(3i-2)}{3\cdot 6\cdot 9\ldots 3i}x^i\mp\ldots$	$1-\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}$
7.	$x^3-\frac{1}{8}x^4+\frac{1\cdot 3}{8\cdot 10}x^5-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{8\cdot 10\cdot 12}x^6+\ldots$ $\pm\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2i-3)}{8\cdot 10\cdot 12\ldots 2(i+2)}x^{i+2}\mp\ldots$	$\frac{48}{15}\left(\sqrt{(x+1)^5}-1\right)-$ $-8x-6x^2$
8.	$\frac{2x^3}{4\cdot 1^2-1}-\frac{2x^5}{4\cdot 2^2-1}+\frac{2x^7}{4\cdot 3^2-1}-\ldots\pm\frac{2x^{2i+1}}{4i^2-1}\mp\ldots$	$(1+x^2)arctg(x)-x$
9.	$\frac{x^2}{4!}-\frac{x^4}{6!}+\frac{x^6}{8!}-\frac{x^8}{10!}+\ldots\pm\frac{x^{2i}}{(2i+2)!}\mp\ldots$	$\frac{\cos(x)-1}{x^2}+\frac{1}{2}$
10.	$1-\frac{3}{2}x+\frac{3\cdot 5}{2\cdot 4}x^2-\frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\ldots\pm\frac{3\cdot 5\cdot 7\ldots(2i+1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2i}x^i\mp\ldots$	$\frac{1}{\sqrt{(1+x)^3}}$
11.	$x^2\left(\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\right)-x^4\left(\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}\right)+x^6\left(\frac{1}{3!}+\frac{1}{6!}\right)-\ldots$ $\pm x^{2i}\left(\frac{1}{i!}+\frac{1}{(2i)!}\right)\mp\ldots$	$2-e^{-x^2}-\cos(x)$
12.	$\frac{x(4-x)}{4!}-\frac{x^5(8-x)}{8!}+\frac{x^9(12-x)}{12!}-\ldots\pm\frac{x^{4i-3}(4i-x)}{(4i)!}\mp\ldots$	$\frac{2-\sin(x)-\cos(x)}{2x^2}-$ $-\frac{e^{-x}}{2x^2}$
13.	$x-\frac{3}{8}x^2+\frac{3\cdot 7}{8\cdot 12}x^3-\frac{3\cdot 7\cdot 11}{8\cdot 12\cdot 16}x^4+\ldots$ $\pm\frac{3\cdot 7\cdot 11..(4i-5)}{8\cdot 12\cdot 16\ldots 4i}x^i\mp\ldots$	$4\sqrt[4]{1+x}-4$

14.	$\frac{(2x)^2}{2!}-\frac{(2x)^4}{4!}+\frac{(2x)^6}{6!}-\ldots\pm\frac{(2x)^{2i}}{(2i)!}\mp\ldots$	$2\sin^2(x)$
15.	$\frac{2\cdot1^2+1}{2!}x^2-\frac{2\cdot2^2+1}{4!}x^4+\frac{2\cdot3^2+1}{6!}x^6-\ldots$ $\pm\frac{2\cdot i^2+1}{(2i)!}x^{2i}\mp\ldots$	$1+\frac{x}{2}\sin(x)+$ $+\left(\frac{x^2}{2}-1\right)\cos(x)$
16.	$\frac{1}{2}x-\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^2+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x^3-\ldots\pm\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2i-1)}{2\cdot4\cdot6\ldots2i}x^i\mp\ldots$	$1-\frac{1}{\sqrt{1+x}}$
17.	$\frac{x}{3!}-\frac{x^3}{5!}+\frac{x^5}{7!}-\frac{x^7}{9!}+\ldots\pm\frac{x^{2i-1}}{(2i+1)!}\mp\ldots$	$\frac{x-\sin(x)}{x^2}$
18.	$\frac{2x}{1!}-\frac{3x^2}{2!}+\frac{4x^3}{3!}-\frac{5x^4}{4!}+\ldots\pm\frac{(i+1)x^i}{i!}\mp\ldots$	$xe^{-x}-e^{-x}+1$
19.	$x^2-\frac{1}{6}x^3+\frac{1\cdot3}{6\cdot8}x^4-\frac{1\cdot6\cdot5}{6\cdot8\cdot10}x^5+\ldots$ $\pm\frac{1\cdot3\cdot5..(2i-3)}{6\cdot8\cdot10\ldots(2i+2)}x^{i+1}\mp\ldots$	$\frac{8}{3}\left(\sqrt{(1+x)^3}-1\right)-$ $-4x$
20.	$\frac{x(2-x)}{2!}-\frac{x^5(6-x)}{6!}+\frac{x^9(10-x)}{10!}-\ldots$ $\pm\frac{x^{4i-3}(4i-2-x)}{(4i-2)!}\mp\ldots$	$\frac{\sin(x)+\cos(x)-e^{-x}}{2}$
21.	$x^3\left(\frac{1}{1!}+\frac{1}{3!}\right)-x^5\left(\frac{1}{2!}+\frac{1}{5!}\right)+x^7\left(\frac{1}{3!}+\frac{1}{7!}\right)-\ldots$ $\pm x^{2i+1}\left(\frac{1}{i!}+\frac{1}{(2i+1)!}\right)\mp\ldots$	$2x-xe^{-x^2}-\sin(x)$
22.	$1-\frac{5}{2}x+\frac{5\cdot7}{2\cdot4}x^2-\frac{5\cdot7\cdot9}{2\cdot4\cdot6}x^3+\ldots\pm\frac{5\cdot7\cdot9\ldots(2i+3)}{2\cdot4\cdot6\ldots2i}x^i\mp\ldots$	$\frac{1}{\sqrt{(1+x)^5}}$
23.	$1-\frac{3x^2}{2!}+\frac{5x^4}{4!}-\frac{7x^6}{6!}+\ldots\pm\frac{(2i+1)x^{2i}}{(2i)!}\mp\ldots$	$\cos(x)-x\sin(x)$
24.	$\frac{x^2}{1(2\cdot1-1)}-\frac{x^4}{2(2\cdot2-1)}+\frac{x^6}{3(2\cdot3-1)}-\ldots\pm\frac{x^{2i}}{i(2i-1)}\mp\ldots$	$2x\cdot arctg(x)-$ $-2\ln\left(\sqrt{1+x^2}\right)$

25.	$x-\frac{1}{4}x^2+\frac{1\cdot 3}{4\cdot 6}x^3-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{4\cdot 6\cdot 8}x^4+\ldots$ $\pm\frac{1\cdot 3\cdot 5..(2i-3)}{4\cdot 6\cdot 8\ldots 2i}x^i\mp\ldots$	$2\sqrt{1+x}-2$
26.	$\frac{2x^6}{3!}-\frac{4x^{10}}{5!}+\frac{6x^{14}}{7!}-\frac{8x^{18}}{9!}+\ldots\pm\frac{2i\cdot x^{4i+2}}{(2i+1)!}\mp\ldots$	$\sin\left(x^2\right)-x^2\cos\left(x^2\right)$
27.	$-1+\frac{x(3+x)}{3!}-\frac{x^3(5+x)}{5!}+\frac{x^5(7+x)}{7!}-\ldots$ $\pm\frac{x^{2i-1}(2i+1+x)}{(2i+1)!}\mp\ldots$	$\frac{1-\cos(x)-\sin(x)}{x}$
28.	$\frac{2x^2+1}{2^2}-\frac{3x^3+1}{3^2}+\frac{4x^4+1}{4^2}-\ldots\pm\frac{(i+1)i^{i+1}+1}{(i+1)^2}\mp\ldots$	$x+1-\frac{\pi^2}{12}-\ln(1+x)$
29.	$x\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{1!}\right)-x^2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2!}\right)+x^3\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3!}\right)-\ldots\pm x^i\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i!}\right)\mp\ldots$	$\ln(1+x)-e^{-x}+1$

Часть 2. *Вычисление корня функционального уравнения*

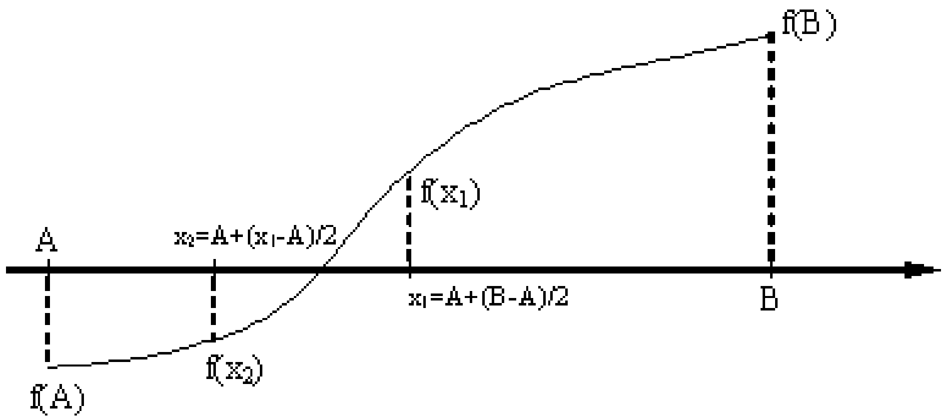
В задачах этого раздела предлагается разработать алгоритм и программу на языке С++ для поиска корня уравнения f(x)=0, заключенного на отрезке [A,B], с допустимой погрешностью E. Для проверки программы ввести A=0, B=2, $E=10^{-4}$

Номер решаемой задачи соответствует номеру варианта, выданному преподавателем.

Пример решения задачи

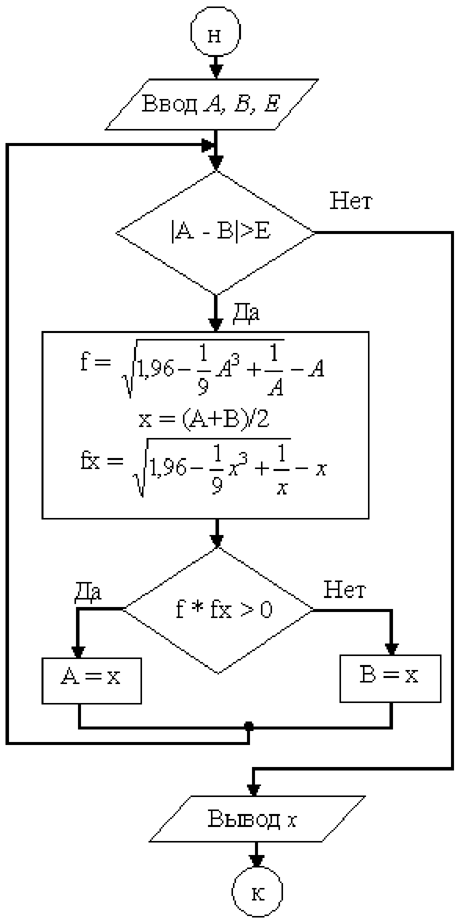
Пусть задано уравнение вида f(x) = $\sqrt{1{,}96-\frac{1}{9}x^3+\frac{1}{x}}-x$.

Рассмотрим метод деления отрезка пополам. В качестве аргумента функции берется середина отрезка $x_1 = A+\frac{B-A}{2}=\frac{A+B}{2}$, на котором ищется корень, и вычисляется значение функции в этой точке $f(x_1)$. Полученное значение умножается на значение функции на границе отрезка, например f(A).



Если произведение положительно $f(x_1)*\ f(A) > 0$, то заменяется левая граница отрезка серединным значением $A = x_1$, иначе правая – $B = x_1$. Действия повторяются, постепенно сужая отрезок, пока длина отрезка не окажется меньше допустимой погрешности (B – A<E).

На основании всего сказанного построим блок-схему алгоритма:



Задание на программирование

1. $\dfrac{\sqrt[3]{4}-\sin^2(x/10)}{\sqrt{x}}-x$

2. $\dfrac{1}{10}e^{-\cos^2 x}+\dfrac{\sqrt{x}}{1+\ln x}-x$

3. $\dfrac{\ln 44{,}8-\sin\sqrt{x}}{2}-x$

4. $2{,}5-\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)/e^{3/2}-x$

5. $1/\left(\sqrt{5}+\sin(0{,}1x)+\ln(1+x)\right)-x$

6. $\sqrt[3]{0,07} - 2x + arctg\sqrt{x} - x$

7. $0,5\left(2 - \sin\frac{1+x}{x} + \frac{1}{2}\ln\sqrt{x}\right) - x$

8. $-\cos\left(x^{0,49} + \sqrt{\frac{30}{7}}\right) + \frac{\sqrt[5]{x}}{x} - x$

9. $\left(\ln(1+x) + \frac{10}{3}e^{0,01x}\right) / 2\sqrt{x} - x$

10. $\ln x + \sqrt{3,73} - \sqrt[3]{(x-1)^2} - x$

11. $\cos\left(\frac{0,7854 - x\sqrt{1-x^2}}{2-x^2} + \frac{2}{7}\right) - x$

12. $\sqrt[5]{e^{-x}} + \frac{\sqrt[7]{x}\sin^2 x}{1+\ln x} - x$

13. $1/(1,2tgx + \sqrt{x+1}) - x$

14. $\frac{2}{3}\arccos\sqrt{x} + 0,577\ln(x+1) + \sqrt[3]{0,01} - x$

15. $(\sqrt[7]{x} + \ln(x+0,3)) / \sqrt{x+1} - x$

16. $(\sin x + \cos x)^2 / \sqrt[3]{33,5^2} + \sqrt{\frac{3}{7}} - x$

17. $\sqrt{\ln 7{,}9 + e^{-x} - \frac{x^2}{11}} - x$

18. $\sqrt{\sqrt[3]{e^x} - \frac{6}{7} x \cdot \sin x - 0{,}3} - x$

19. $\sqrt{1 - 0{,}4x^2} + 4e^{-x-1{,}5} - \frac{2}{3} - x$

20. $\frac{1}{3}(e^{-x} - \sqrt{e^x} + 3{,}7) - x$

21. $\ln \frac{20}{\sqrt{0{,}009}} - 1{,}5(e^{x/3} + e^{-x/3}) - x$

22. $\cos(x) + \sqrt[3]{x^2} e^{-\sqrt{x}} - x$

23. $1/(\sqrt[3]{x^2} + 0{,}7 \sin x - \ln(x+1)) - x$

24. $1/(x\sqrt{x + 0{,}3} + e^{-x} + \frac{1}{7}) - x$

25. $\ln(1 + x) - 0{,}95 \sin x + \frac{6}{7} - x$

26. $e^{-\sin^2 x} + \frac{3/7x}{1 + \sqrt{x}} - x$

27. $\cos x - e^{-(x+1)^2} + \frac{1}{9} - x$

28. $1/(e^{\sqrt[5]{x}} - \sqrt{x} + \ln x + \frac{4}{9}) - x$

29. $\ln(2 + \sqrt{1 + e^{-2x}}) - x$