Бизнис статистика

Случајни променливи од дискретен тип

Вовед

- Поимот случајна променлива е еден од основните поими во теоријата на веројатност.

- Многу често се случува на секој елементарен настан $E_i \in \Omega$ да му се придружи некој реален број.

- Да разгледаме неколку примери.

Пример 1

- Ако експериментот е фрлање коцка, тогаш $\Omega = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}$, каде елементарниот настан E_i означува дека на горната страна на коцката се појавиле i точки.
- Во врска со овој експеримент може да се разгледува функција X од множеството елементарни настани Ω во множеството реални броеви $\mathbb{R}$, зададена со

$$X(E_i) = i, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

- Оваа функција може да се опише како број на точки појавени на горната страна на коцката.
- Функцијата X има ранг (множество вредности) $R_X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Рангот на функцијата X е конечно множество.

Пример 2

- Нека експериментот се состои во фрлање на монета сѐ додека не се појави глава.

- Множеството елементарни настани за овој експеримент е $\Omega = \{E_1, E_2, \ldots\}$, каде E_n означува дека се изведени n фрлања, $n = 1, 2, \ldots$

- Во врска со овој експеримент може да се разгледува функција $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ дефинирана со

$$Y(E_n) = n, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

- Оваа функција може да се опише како број на фрлања до појавување на глава и нејзиниот ранг е $\{1, 2, \ldots\}$.

- Рангот на функцијата Y е бесконечно преброиво множество.

Пример 3

- Нека експериментот е набљудување на времето на непрекината работа на една машина.

- Соодветното множество елементарни настани е $\Omega = \{E_t \mid t \in [0, T]\}$, каде T е максималниот век на работа на машината.

- За овој експериемент може да се дефинира функција $Z\colon \Omega \to \mathbb{R}$ со

$$Z(E_t) = t,\ t \in [0, T].$$

- Оваа функција означува време на непрекината работа на набљудуваната машина и рангот на функцијата е интервалот $[0, T]$.

- Рангот на функцијата Z е интервал, т.е. бесконечно непреброиво множество.

Случајни променливи

- На ваков начин со придружување на броеви на сите елементарни настани се дефинира функција од множеството елементарни настани во множеството реални броеви.
- Таа функција прима вредности со одредена веројатност која зависи од веројатностите на елементарните настани. Затоа, таквите функции ќе ги викаме случајни променливи.

Дефиниција 1.
Случајна променлива X е реална функција над множеството елементарни настани Ω, т.е. функција од Ω во $\mathbb{R}$.

Видови на случајни променливи

- Како што видовме, рангот (множеството вредности) на една случајна променлива може да биде конечно, бесконечно преброиво, бесконечно непреброиво множество.
- Ако множеството вредности на случајната променлива е конечно или преброиво, тогаш случајната променлива е од ***дискретен тип***.
- Во спротивно, ако множеството вредности е бесконечно непреброиво, тогаш случајната променлива е од ***апсолутно непрекинат тип***.

Видови на случајни променливи

- Примери за случајни променливи со конечно множество вредности се: број на студенти во прва година кои добиле 10-ка по Бизнис статистика, број на артикли произведени во една фабрика за време на една смена, и сл.

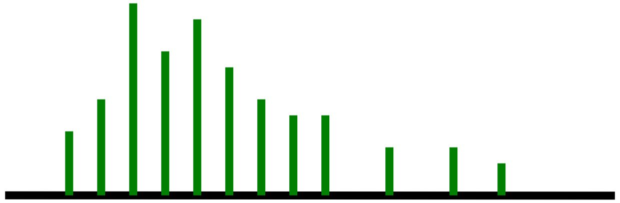
- Примери за случајни променливи од дискретен тип со преброиво множество вредности се: бројот на фрлања на коцка сè додека не се добие бројот 5, број на контролирани производи во еден магацин сè додека не се добие дефектен производ (ако секој контролиран производ се враќа во магацинот), итн.

- Случајни променливи од апсолутно непрекинат тип се на пример, висина на случајно избрано лице од дадена група луѓе, време на непрекината работа на една машина, количина на шеќер во една јаболка и сл.

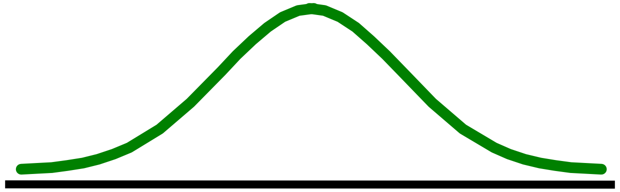
Видови на случајни променливи

Случајни променливи

Случајни променливи од дискретен тип



Случајни променливи од апсолутно непрекинат тип



Случајни променливи од дискретен тип

Дефиниција 2.
Случајна променлива X е од ***дискретен тип*** (или ***дискретна случајна променлива***), ако прима вредности од конечно множество $R_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ или преброиво множество $R_X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ и притоа веројатноста X да прими вредности од комплементот на R_X е 0, т.е. $P\{X \in \mathbb{R} \backslash R_X\} = 0$.

- Со други зборови, случајната променлива X не може да прими вредности од множеството $\mathbb{R} \backslash R_X$ со ненулта веројатност.

Случајни променливи од дискретен тип

- Случајната променлива од дискретен тип е наполно определена со множеството вредности R_X и соодветните веројатности:

$$P\{X = x_i\} = p_i, \quad \text{за} \;\; x_i \in R_X.$$

- Притоа, веројатностите p_i мора да ги задоволуваат следните услови:

$$0 \leq p_i \leq 1, \text{ за секој } i$$

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1 \text{ (во конечен случај) или } p_1 + p_2 + \ldots = 1 \text{ (во преброив случај).}$$

- На ваков начин, со множеството вредности кои ги прима случајната променлива X и соодветните веројатности, велиме дека е зададен ***закон на распределба*** на X.

Претставување на законот на распределба

- Ако множеството вредности R_X на случајната променлива X содржи мал број на вредности, вообичаено е законот на распределба да се зададе на следниот начин:

$$X:\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_n \end{pmatrix}.$$

- Воочуваме дека во првиот ред се запишуваат вредностите кои ги прима случајната променлива X, а во вториот ред се соодветните веројатности.

Пример 4

Во една кутија се наоѓаат три топчиња означени со бројот 1, четири топчиња означени со бројот 2 и две топчиња означени со бројот 3. На случаен начин се извлекува едно топче од кутијата. Нека X го означува бројот на извлеченото топче. Да се определи законот на распределба на X.

***Решение*:** Ги значуваме настаните:

A_i : извлечено е топче со бројот i, $i = 1,2,3$.

- Множеството вредности на случајната променлива X е $R_X = \{1, 2, 3\}$. За соодветните веројатности се добива:

$$P\{X=1\} = P(A_1) = \frac{3}{9}$$

$$P\{X=2\} = P(A_2) = \frac{4}{9}$$

$$P\{X=3\} = P(A_3) = \frac{2}{9}$$

Законот на распределба на X е:

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3/9 & 4/9 & 2/9 \end{pmatrix}$$

Функција на распределба

- Една случајна променлива од дискретен тип може да е наполно определена со нејзиниот закон на распределба или со нејзината ***функција на распределба*** која се дефинира на следниот начин:

$$F(x) = P\{X < x\}, \quad \text{за секој } x \in \mathbb{R}.$$

- Ако случајната променлива е зададена со нејзиниот закон на распределба, тогаш нејзината функција на распределба може да се изрази со:

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P\{X = x_i\}.$$

Пример 5

Нека случајната променлива е зададена со нејзиниот закон на распределба

$$X:\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3/9 & 4/9 & 2/9 \end{pmatrix}.$$

Да се определи нејзината функција на распределба.

Решение**:** Согласно дефиницијата на функција на распределба, таа ја менува вредноста во точките кои припаѓаат на множеството вредности R_X. Затоа множеството реални броеви ќе го поделиме на подинтервали со користење на точките од множеството $R_X = \{1, 2, 3\}$.

$$x \le 1: \qquad F(x) = 0$$

$$1 < x \le 2: \quad F(x) = P\{X = 1\} = \frac{3}{9}$$

$$2 < x \le 3: \quad F(x) = P\{X = 1\} + P\{X = 2\} = \frac{3}{9} + \frac{4}{9} = \frac{7}{9}$$

$$x > 3: \qquad F(x) = P\{X = 1\} + P\{X = 2\} + P\{X = 3\} = \frac{3}{9} + \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = 1$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1 \\ 3/9, & 1 < x \le 2 \\ 7/9, & 2 < x \le 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$

Веројатност $P\{X \in T\}$

- Ако T е подмножество од множеството реални броеви, тогаш $P\{X \in T\}$ е сума на сите веројатности $p_i = P\{X = x_i\}$, за сите $x_i \in T$, т.е.

$$P\{X \in T\} = \sum_{x_i \in T} P\{X = x_i\}.$$

- Така, во претходната задача, веројатноста дека извлечениот број е поголем од 1, а помал или еднаков на 3 е:

$$P\{1 < X \leq 3\} = P\{X = 2\} + P\{X = 3\} = \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{6}{9}.$$

Независност на случајни променливи

Нека X и Y се дискретни случајни променливи со множества вредности R_X и R_Y, соодветно. Случајните променливи X и Y се ***независни***, ако е точно равенството

$$P\{\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\}\} = P\{X = x_i\}\ P\{Y = y_j\},$$

за секој $x_i \in R_X$ и $y_j \in R_Y$.

Независност на случајни променливи: табели на заеднички веројатности

- За да се определи дали две случајни променливи X и Y од дискретен тип се независни, потребно е да биде дадена табелата на заеднички веројатности во која ќе се претстават веројатностите на производите кои се дадени во дефиницијата за независност.

- Ако $R_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ тогаш настаните $A_i = \{X = x_i\}$, за $i = 1, 2, \ldots, m$ определуваат дисјунктно разложување на Ω. Имено, $A_i \cap A_j = \varnothing$ и $\sum_{i=1}^{m} A_i = \Omega$.

- Од исти причини, ако $R_Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$, тогаш настаните $B_j = \{Y = y_j\}$, за $j = 1, 2, \ldots, n$ определуваат дисјунктно разложување на Ω.

Независност на случајни променливи: табели на заеднички веројатности

- Сега табелата на заеднички веројатности има облик:

$X \backslash Y$	$\{Y=y_1\}$	$\{Y=y_2\}$	$...$	$\{Y=y_n\}$	Маргинални
$\{X=x_1\}$	$P(\{X=x_1\}\cap\{Y=y_1\})$	$P(\{X=x_1\}\cap\{Y=y_2\})$	$...$	$P(\{X=x_1\}\cap\{Y=y_n\})$	$P\{X=x_1\}$
$\{X=x_2\}$	$P(\{X=x_2\}\cap\{Y=y_1\})$	$P(\{X=x_2\}\cap\{Y=y_2\})$	$...$	$P(\{X=x_2\}\cap\{Y=y_n\})$	$P\{X=x_2\}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
$\{X=x_m\}$	$P(\{X=x_m\}\cap\{Y=y_1\})$	$P(\{X=x_m\}\cap\{Y=y_2\})$	$...$	$P(\{X=x_m\}\cap\{Y=y_n\})$	$P\{X=x_m\}$
Маргинални	$P\{Y=y_1\}$	$P\{Y=y_2\}$		$P\{Y=y_n\}$	1

Пример

- Да се провери независноста на случајните променливи X и Y, ако тие се зададени со табелата на заеднички веројатности:

$X \backslash Y$	$\{Y = 3\}$	$\{Y = 4\}$	$\{Y = 5\}$	Маргинални
$\{X = 1\}$	0.3	0.1	0.05	0.45
$\{X = 2\}$	0.1	0.15	0.3	0.55
Маргинални	0.4	0.25	0.35	1

- Проверуваме дали е задоволен условот

$$P\{\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\}\} = P\{X = x_i\}\, P\{Y = y_j\},$$

за секој $x_i \in \{1, 2\}$ и $y_j \in \{3, 4, 5\}$.

- Ако најдеме барем еден пар x_i и y_j за кој условот не е исполнет, веднаш заклучуваме дека X и Y не се независни случајни променливи.

Пример

$X \backslash Y$	$\{Y=3\}$	$\{Y=4\}$	$\{Y=5\}$	Маргинални
$\{X=1\}$	0.3	0.1	0.05	0.45
$\{X=2\}$	0.1	0.15	0.3	0.55
Маргинални	0.4	0.25	0.35	1

- За $x_i = 1$ и $y_j = 3$, добиваме:

$$P\{\{X=1\} \cap \{Y=3\}\} = 0.3 \neq 0.45 \cdot 0.4 = P\{X=1\}\, P\{Y=3\}.$$

- Најдовме еден пар за кој условот за независнсот не е исполнет. Заклучуваме дека X и Y не се независни случајни променливи.

Бизнис статистика

Бројни карактеристики на случајни променливи од дискретен тип

Математичко очекување

- Математичкото очекување на случајната променлива X е нејзина средна вредност.
- Но, кога велиме средна вредност, тогаш се мисли на тежинска средина, а не на обична аритметичка средина на вредностите на една случајна променлива.
- Математичкото очекување на случајна променлива X се означуваме со EX.

Пример 1

- Нека случајната променлива X е зададена со следниот закон на распределба:

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

- Од законот на распределба е јасно дека ако експериментот се изведува голем број пати, тогаш во приближно половина од експериментите ќе се појави 0, а во останатите 1.

- Ако играме игра и секогаш кога ќе се појави настанот $\{X = i\}$, добиваме по i денари ($i = 0, 1$), тогаш приближно во половина од повторувањата на експериментот ќе добиеме по 1 денар, т.е. очекуваната добивка ќе биде 0.5 денари по експеримент.

- Затоа, во овој случај пишуваме дека $EX = 0.5$.

Пример 2

- Да ја разгледаме сега случајната променлива X зададена со следниот закон на распределба:

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.75 & 0.25 \end{pmatrix}.$$

- Во овој случај, ако експериментот се изведува голем број пати, тогаш во приближно четвртина од експериментите ќе се појави 1, а во останатите 0.

- Ако ја играме истата игра, тогаш приближно во четвртина од повторувањата на експериментот ќе добиеме по 1 денар, т.е. очекуваната добивка ќе биде 0.25 денари по експеримент.

- Затоа, во овој случај пишуваме дека $EX = 0.25$.

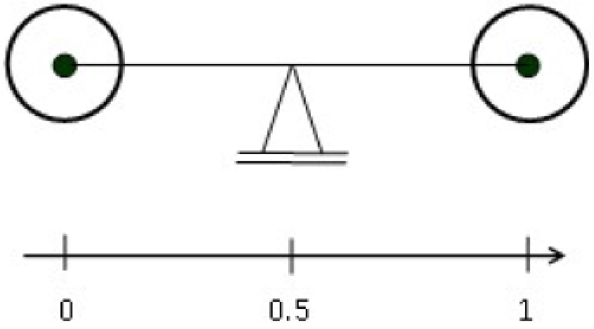
Физички модел

- Физичкиот модел на овие два примери е претставен на сликата подолу.
- Ако распределбата е

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix},$$

тогаш се ставаат два еднакви тега од по 0.5 кг во точките 0 и 1, и тие се поврзуваат со еден тврд, но бестежински лост. Масите ги претставуваат веројатностите $P\{X = 0\}$ и $P\{X = 1\}$.

- Се бара точката во која системот ќе биде во рамнотежа.
- Бидејќи станува збор за симетричен систем, точката на рамнотежа, т.е. центарот на гравитација е во средината 0.5.



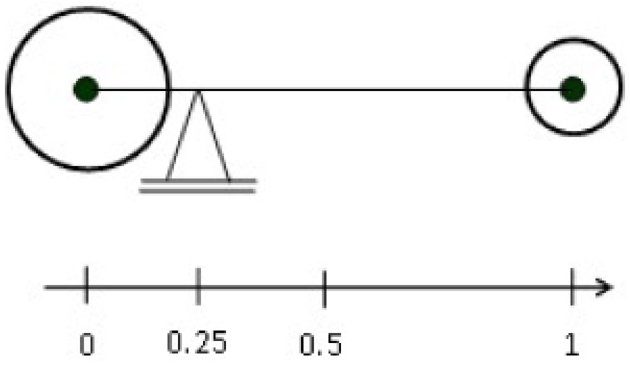
Физички модел

- Ако распределбата е

$$X:\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.75 & 0.25 \end{pmatrix},$$

тогаш се ставаат два тега од по 0.75 кг и 0.25 кг во точките 0 и 1, соодветно.

- Во овој случај, точката на рамнотежа, т.е. центарот на гравитација е во 0.25.



Дефиниција на математичко очекување на дискретна случајна променлива со конечно множество вредности

Дефиниција 1.
Ако X е случајна променлива со конечно множество вредности $R_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ и веројатности $p_i = P\{X = x_i\}$, за $i = 1, 2, \ldots, n$, тогаш математичкото очекување на X се определува со равенството:

$$EX = \sum_{i=1}^{n} x_i P\{X = x_i\} = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i .$$

- Да воочиме дека во овој случај, математичкото очекување е определено со конечна сума, па тоа сигурно ќе постои.

Пример 3

Да се определи математичкото очекување на случајната променлива X зададена со следниот закон на распределба на веројатностите:

$$X:\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0.1 & 0.4 & 0.5 \end{pmatrix}$$

***Решение*:**

- Според формулата за определување на математичко очекување имаме дека

$$EX = 2 \cdot 0.1 + 4 \cdot 0.4 + 5 \cdot 0.5 = 4.3.$$

Дефиниција на математичко очекување на дискретна случајна променлива со преброиво множество вредности

Дефиниција 2.
Ако X е случајна променлива со преброиво множество вредности $R_X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ и веројатности $p_i = P\{X = x_i\}$, за $i = 1, 2, \ldots$, тогаш математичкото очекување на X се определува со равенството:

$$EX = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i P\{X = x_i\} = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i p_i,$$

ако бесконечната сума постои.

- Да воочиме дека во овој случај, сумата со која е определено математичкото очекување може и да не постои, па нема да постои ниту математичкото очекување.

Својства на математичко очекување

Математичкото очекување ги има следните својства:

i) $Ec = c$, каде c е произволна константа.
ii) $E(cX) = cEX$
iii) $E(X + Y) = EX + EY$, ако EX и EY постојат.·
iv) Ако X и Y независни случајни променливи и EX и EY постојат, тогаш

$$E(XY) = EX \cdot EY.$$

v) Ако EX_i, за $i = 1,2,\ldots,n$ постојат и $c_1, c_2, \ldots, c_n$ се дадени константи, тогаш важи

$$E(c_1X_1 + c_2X_2 + \ldots + c_nX_n) = c_1EX_1 + c_2EX_2 + \ldots + c_nEX_n.$$

Пример 4

Нека X и Y се независни случајни променливи зададени со следните закони на распределба:

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0.4 & 0.3 & 0.3 \end{pmatrix}, \quad Y : \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}.$$

Да се определи математичко очекување на $X + Y$ и XY.

***Решение*:** За математичките очекувања на X и на Y се добива:

$$EX = 1 \cdot 0.4 + 3 \cdot 0.3 + 5 \cdot 0.3 = 2.8$$

$$EY = 1 \cdot 0.3 + 2 \cdot 0.7 = 1.7$$

- Со користење на својството 3, се добива дека

$$E(X + Y) = EX + EY = 2.8 + 1.7 = 4.5,$$

а со користење на независноста на X и Y и својството 4, го наоѓаме математичкото очекување

$$E(XY) = EX \cdot EY = 2.8 \cdot 1.7 = 4.76.$$

Дисперзија

- Нека случајната променлива X е зададена со

$$X:\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \end{pmatrix},$$

  а случајната променива Y е константа и $P\{Y=3\}=1.$

- За математичкото очекување на X се добива:

$$EX = 1\cdot 0.2 + 2\cdot 0.2 + 3\cdot 0.2 + 4\cdot 0.2 + 5\cdot 0.2 = 3,$$

- а за математичкото очекување на Y, имаме:

$$EY = 3\cdot 1 = 3.$$

- Да воочиме дека двете случајни променливи имаат исто математичко очекување, иако нивната распределба се разликува. Првата случајна променлива прима 5 вредности со еднаква веројатност, а втората случајна променлива е константа.

Дисперзија

- Затоа се јавува потребата од воведување на нова карактеристика која ќе го определува отстапувањето на вредностите на една случајна променлива од нејзиното математичко очекување. Таа карактеристика се нарекува дисперзија на случајната променлива.

Дефиниција 2.
Дисперзија (или ***варијанса***) на случајната променлива X е средноквадратно отстапување на вредностите на таа случајна променлива од нејзиното математичко очекување, т.е. тоа е бројот

$$DX = E(X - EX)^2.$$

- За случајна променлива од дискретен тип, дисперзијата се пресметува со формулата:

$$DX = \sum_{x_i \in R_X} (x_i - EX)^2 P\{X = x_i\} = \sum_{x_i \in R_X} (x_i - EX)^2 p_i.$$

Дисперзија

- Со развивање на изразот за определување на дисперзијата и применување на својствата на математичкото очекување се добива следното:

$$\begin{aligned} DX &= E(X^2 - 2X\,EX + (EX)^2) \\ &= E(X^2) - 2EX \cdot EX + (EX)^2 \\ &= EX^2 - 2(EX)^2 + (EX)^2 \\ &= EX^2 - (EX)^2 \end{aligned}$$

- Ако се користи оваа формула за определување на дисперзијата на случајна променлива од дискретен тип, тогаш EX^2 се пресметува со:

$$EX^2 = \sum_{x_i \in R_X} x_i^2 P\{X = x_i\} = \sum_{x_i \in R_X} x_i^2 p_i .$$

Стандардна девијација

- Стандардната девијација е уште една мерка за расејување на податоците. Се добива како квадратен корен од дисперзијата, т.е.

$$\sigma = \sqrt{DX} = \sqrt{\sum_{x \in R_X} (x - EX)^2 P\{X = x\}}$$

Пример 5

Да се определи дисперзијата и стандардната девијација на случајната променлива X зададена со следниот закон на распределба на веројатностите:

$$X : \begin{pmatrix} 8 & 9 & 10 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}.$$

***Решение*:** Според формулата за определување на математичко очекување имаме дека

$$EX = 8 \cdot 0.1 + 9 \cdot 0.3 + 10 \cdot 0.6 = 9.5.$$

- Сега, $EX^2 = 8^2 \cdot 0.1 + 9^2 \cdot 0.3 + 10^2 \cdot 0.6 = 90.7.$
- За дисперзијата на X се добива:

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = 90.7 - 9.5^2 = 0.45.$$

$$\sigma = \sqrt{DX} = \sqrt{0.45} = 0.67.$$

Својства на дисперзијата

Дисперзијата ги има следните својства:

i) $DX \geq 0$, за секоја случајна променлива X.
ii) $DX = 0$ ако и само ако $P\{X = a\}=1$, каде a е дадена константа.
iii) Ако DX постои, а c е дадена константа, тогаш $D(cX) = c^2DX$.
iv) Ако X и Y се независни случајни променливи и DX и DY постојат, тогаш

$$D(X + Y) = DX + DY.$$

v) Ако $X_1, X_2, \ldots, X_n$ се независни случајни променливи и DX_i, за $i = 1, 2, \ldots, n$ постојат и $c_1, c_2, \ldots, c_n$ се дадени константи, тогаш важи

$$D(c_1X_1 + c_2X_2 + \ldots + c_nX_n) = c_1^2DX_1 + c_2^2DX_2 + \ldots + c_n^2DX_n.$$

Да воочиме дека овие својства на дисперзијата, како и својствата на математичкото очекување, дадени претходно, важат не само за случајни променливи од дискретен тип, туку за случајни променливи од кој било тип.

Пример 6

Нека X и Y се две независни случајни променливи такви што $EX = 2$, $DX = 1$, $EY = 3$, $DY = 2$. Да се определи:

а) $E(5X)$

б) $E(2X + 3Y - 4)$

в) $D(X - Y)$

г) $D(X - 3Y)$

д) $D(5X)$

***Решение*:** Согласно својствата на математичкото очекување и дисперзијата, добиваме:

а) $E(5X) = 5EX = 5 \cdot 2 = 10$

б) $E(2X + 3Y - 4) = 2EX + 3EY - 4 = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 - 4 = 9$

в) $D(X - Y) = D(X + (-1)Y) = DX + D((-1)Y) = DX + (-1)^2 DY$

$= DX + DY = 1 + 2 = 3$

г) $D(X - 3Y) = D(X + (-3)Y) = DX + D((-3)Y) = DX + (-3)^2 DY$

$= 1 + 9 \cdot 2 = 19$

д) $D(5X) = 5^2 DX = 25 \cdot 1 = 25$

Бизнис статистика

Познати распределби од дискретен тип

Распределби од дискретен тип

Познати распределби од дискретен тип

- Рамномерна
- Бернулиева
- Биномна
- Хипергеометриска
- Пуасонова
- Геометриска

Дискретна рамномерна распределба

- Ако X е случајна променлива која прима вредности од конечно множество $R_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ со веројатности $p_i = P\{X = x_i\} = \frac{1}{n}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, тогаш велиме дека X има ***рамномерна распределба*** на множеството R_X и пишуваме

$$X \sim U(\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}).$$

- Математичкото очекување е:

$$EX = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = \overline{x}_n.$$

- За дисперзијата се добива:

$$DX = \sum_{i=1}^{n}(x_i - EX)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}_n)^2 = \overline{s}_n^2.$$

Пример 1

Фрлање на правилна коцка

- Нека X е бројот на точки на горната страна при фрлање на коцка. Тогаш X прима вредности од множеството $\{1, 2, ..., 6\}$ и притоа $P\{X = i\} = 1/6$ за сите $i \in \{1,2, 3, 4, 5, 6\}$. Според тоа, законот на распределба на веројатностите за X е даден со

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

т.е., $X \sim U(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\})$

- Притоа,

$$\mu = EX = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = 3.5$$

$$\sigma^2 = DX = \frac{1}{6}((1-3.5)^2 + (2-3.5)^2 + (3-3.5)^2 + (4-3.5)^2 + (5-3.5)^2 + (6-3.5)^2) = 2.9167$$

$$\sigma = \sqrt{2.9167} = 1.7078$$

Бернулиева распределба

- Нека $p = P(A)$ и нека $q = P(\overline{A}) = 1 - p$.
- Нека случајната променлива X е број на појавувања на настанот A во еден изведен експеримент.
- Јасно е дека $R_X = \{0, 1\}$ бидејќи во еден експеримент може или да се појави или да не се појави настанот A.
- Значи, оваа случајна променлива, прима вредност 0, ако не се појави настанот A ("неуспех") или вредност 1 ако се појави настанот A ("успех").
- Велиме дека X има ***Бернулиева распределба***, и законот на распределба на X е:

$$P\{X=0\}=1-p \;=\; q \quad \text{и} \quad P\{X=1\}=p.$$

$$X:\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$

- Оваа распределба се нарекува уште и ***индикатор на настанот А***, затоа што покажува дали се појавил или не настанот A.

Бернулиева распределба

- Ако X има Бернулиева распределба:

$$X:\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$

- Тогаш,

$$\mu = EX = \sum_{x=0}^{1} xP\{X=x\} = 0\cdot(1-p) + 1\cdot p = p$$

$$\sigma^2 = DX = \sum_{x=0}^{1} (x-\mu)^2 P\{X=x\}$$

$$= (0-p)^2(1-p) + (1-p)^2 p = p(1-p)$$

Биномна распределба

- Нека се изведува серија од n независни и еднакви експерименти и во секое изведување на експериментот се набљудува дали се појавил или не настанот A. Нека
$$p = P(A) \text{ и } q = P(\overline{A}) = 1 - p.$$

- Случајната променлива X – број на појавувања на настанот A во серијата од n експерименти има ***Биномна распределба*** со параметри n и p, $X \sim B(n, p)$.

- Множеството вредности е $R_X = \{0, 1, ..., n\}$.

Биномна распределба

- Нека означиме A_i: настанот A се појави во i-тиот експеримент, $i = 0, 1,\ldots, n$.
- Да воочиме дека $P(A_i) = p$, за секој $i = 1, 2, \ldots, n$ и $A_1, A_2,\ldots, A_n$ се независни настани.
- Да воочиме дека настанот $\{X = 0\}$ ќе се појави, ако во ниеден од експериментите не се појави настанот A, т.е. се појавува неговиот спротивен настан. Затоа,

$$\{X = 0\} = \bar{A}_1\bar{A}_2\ldots\bar{A}_n,$$

па од независноста на настаните A_i, следува:

$$P\{X = 0\} = P(\bar{A}_1\bar{A}_2\ldots\bar{A}_n) \overset{\text{нез.}}{=} P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)\ldots P(\bar{A}_n) = q^n$$

- Аналогно, настанот $\{X = n\}$ ќе се појави, ако во секој експеримент се појави настанот A, па

$$\{X = n\} = A_1A_2\ldots A_n,$$

па од независноста

$$P\{X = n\} = P(A_1A_2\ldots A_n) \overset{\text{нез.}}{=} P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n) = p^n$$

Биномна распределба

- Да ја определиме веројатноста $P\{X = k\}$, за $k = 1, 2,\ldots, n-1$.
- Нека B_k е настанот дека во првите k експерименти ќе се појави настанот A, а во следните $n-k$ нема да се појави овој настан, т.е.

$$B_k = A_1 \ldots A_k \bar{A}_{k+1} \ldots \bar{A}_n$$

- Тогаш

$$P(B_k) = P(A_1 \ldots A_k \bar{A}_{k+1} \ldots \bar{A}_n) \overset{\text{нез.}}{=} P(A_1) \ldots P(A_k) P(\bar{A}_{k+1}) \ldots P(\bar{A}_n) = p^k q^{n-k}.$$

- Но, настанот $\{X = k\}$ ќе се појави ако настанот A се појави во било кои k од n изведени експерименти, а не само во првите. Затоа, од вкупно n експерименти се избираат k во кои ќе се појави настанот A, а во останатите ќе се појави $\bar{A}$. Бројот на такви избори е

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

- Оттука,

$$P\{X = k\} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0,1,2,\ldots,n.$$

Да воочиме дека во оваа општа формула влегуваат и случаите $P\{X = 0\}$ и $P\{X = n\}$.

Пример 2

Коцка се фрла 4 пати. Нека X е бројот на фрлања во кои паднал парен број.

- Бидејḱи експериментот се повторува 4 пати, $n = 4$.
- Во секој експеримент набљудуваме дали се појавил настанот

  A: паднал парен број.
- Притоа, $p = P(A) = 1/2$, $q = 1 - p = 1/2$.
- Значи, $X \sim B(4, 1/2)$, и законот на распредбата е даден со:

$$P\{X = k\} = \binom{4}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-k} = \binom{4}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad \text{за секое } k \in R_X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

Биномна распределба, бројни карактеристики

- Ако $X \sim B(n, p)$ тогаш:
  - математичкото очекување е $\mu = EX = np$;
  - дисперзијата е $\sigma^2 = DX = np(1-p) = npq$;
  - стандардната девијација е $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{npq}$.

- На пример, ако $X \sim B(5, 0.1)$ тогаш:

$$\mu = np = 5 \cdot 0.1 = 0.5$$

$$\sigma^2 = np(1-p) = 5 \cdot 0.1 \cdot (1-0.1) = 0.45$$

$$\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{5 \cdot 0.1 \cdot (1-0.1)} = 0.6708$$

Таблици за биномна распределба

N	x	…	p=.20	p=.25	p=.30	p=.35	p=.40	p=.45	p=.50
10	0	…	0.1074	0.0563	0.0282	0.0135	0.0060	0.0025	0.0010
	1	…	0.2684	0.1877	0.1211	0.0725	0.0403	0.0207	0.0098
	2	…	0.3020	0.2816	0.2335	0.1757	0.1209	0.0763	0.0439
	3	…	0.2013	0.2503	0.2668	**0.2522**	0.2150	0.1665	0.1172
	4	…	0.0881	0.1460	0.2001	0.2377	0.2508	0.2384	0.2051
	5	…	0.0264	0.0584	0.1029	0.1536	0.2007	0.2340	0.2461
	6	…	0.0055	0.0162	0.0368	0.0689	0.1115	0.1596	0.2051
	7	…	0.0008	0.0031	0.0090	0.0212	0.0425	0.0746	0.1172
	8	…	0.0001	0.0004	0.0014	0.0043	0.0106	**0.0229**	0.0439
	9	…	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0016	0.0042	0.0098
	10	…	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0010

Примери:

За $n = 10$, $x = 3$, $p = 0.35$, т.е., за $X \sim B(10, 0.35)$ од таблицата може да прочитаме $P\{X = 3\} = 0.2522$

За $n = 10$, $x = 8$, $p = 0.45$, т.е., за $X \sim B(10, 0.45)$ од таблицата може да прочитаме $P\{X = 8\} = 0.0229$

Пример 3

За една група од 25 луѓе, веројатноста секој од нив да биде далтонист, независно од останатите е 0.1. Да се определи веројатноста дека во групата

а) нема ниту еден далтонист,

б) има 5 или помалку далтонисти,

в) има шест или повеќе далтонисти,

г) има најмалку 3 и најмногу 5 далтонисти,

д) има двајца, тројца или четворица далтонисти.

Решение: Нека X е бројот на далтонисти во групата од 25 луѓе. X има биномна распределба $B(25, 0.1)$, односно $n = 25$, $p = 0.1$.

а) $P\{X=0\} = \binom{25}{0} 0.1^0 0.9^{25} = 0.072$

б) $P\{X \le 5\} = \sum_{k=0}^{5} P(X=k) = \sum_{k=0}^{5} \binom{25}{k} 0.1^k 0.9^{25-k} = 0.967$

в) $P\{X \ge 6\} = 1 - P(X \le 5) = 1 - 0.967 = 0.033$

г) $P\{3 \le X \le 5\} = \sum_{k=3}^{5} P(X=k) = \sum_{k=3}^{5} \binom{25}{k} 0.1^k 0.9^{25-k} = 0.43$

д) $P\{X=2\} + P\{X=3\} + P\{X=4\} = 0.631$

Хипергеометриска распределба

- Друг вид на дискретна распределба е хипергеометриската распределба.

- Нека во дадено множество од n различни објекти, m објекти поседуваат одредено својство ($m < n$).

- Од даденото множество со n објекти случајно се избираат k ($k < n$) објекти.

- Тогаш, случајната променлива X – број на објекти од избраните k кои го поседуваат разгледуваното својство, велиме дека има ***Хипергеометриска распределба*** со параметри n, m, k.

Хипергеометриска распределба

- Множеството вредности на X која има Хипергеометриска распределба со параметри n, m, k е $R_X = \{\max\{0, m + k - n\}, \ldots, \min\{m, k\}\}$.
- За веројатноста $P\{X = i\}$ во избраните k да има точно i објекти со разгледуваното својство (во популацијата m објекти го имаат својството, $n - m$ го немаат) се добива:

$$P\{X = i\} = \frac{\binom{m}{i}\binom{n-m}{k-i}}{\binom{n}{k}}, \quad i \in R_X.$$

- Математичко очекување е:

$$\mu = EX = \frac{m \cdot k}{n}$$

- Дисперзијата е: $$\sigma^2 = DX = \frac{m(n-m)k(n-k)}{n^2(n-1)}$$

Пример 4

- Во една пратка од 18 лаптоп компјутери има 12 Mac компјутери. Ако случајно се избрани три компјутери, колку е веројатноста дека еден или повеќе се Mac компјутери.

Решение: Нека X е бројот на Mac компјутери во избраните три компјутери.

- X има хипергеометриска распределба со n = 18, m = 12, k = 3.
- $R_X = \{0, 1, 2, 3\}$
- Треба да се определи $P\{X \geq 1\}$, т.е., веројатноста X = 1 или X = 2 или X = 3.

$$P\{X \geq 1\} = P\{X = 1\} + P\{X = 2\} + P\{X = 3\} = \frac{(C_{12}^{1})(C_{6}^{2})}{C_{18}^{3}} + \frac{(C_{12}^{2})(C_{6}^{1})}{C_{18}^{3}} + \frac{(C_{12}^{3})(C_{6}^{0})}{C_{18}^{3}}$$

$$= 1 - P\{X = 0\} = 1 - \frac{\binom{12}{0}\binom{18-12}{3-0}}{\binom{18}{3}} = 1 - 0.0245 = 0.9755$$

Пример 5

- Во една кутија има 5 црвени и 4 црни топчиња. Од кутијата се извлекуваат 6 топчиња наеднаш. Да се определи распределбата на случајната променлива X – број на црвени топчиња (од извлечените 6).

Решение: X има хипергеометриска распределба со $n = 9$, $m = 5$, $k = 6$.

- Множеството вредности на оваа случајна променлива е

$$R_X = \{\max\{0, m + k - n\}, \ldots, \min\{m, k\}\} = \{2, 3, 4, 5\}$$

- За соодветните веројатности се добива:

$$P\{X = i\} = \frac{\binom{5}{i}\binom{4}{6-i}}{\binom{9}{6}}, \quad i \in \{2, 3, 4, 5\}$$

Пуасонова распределба

- Случајна променлива X има ***Пуасонова распределба*** $P(\lambda)$, ако $R_X = \{0, 1, 2, ...\}$ и

$$p_i = P\{X = i\} = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda},$$

  каде $\lambda > 0$ е дадена константа, а бројот $e \approx 2.71828$.
- Означуваме, $X \sim P(\lambda)$.
- Пуасоновата распределба е дискретна распределба и $X \sim P(\lambda)$ може да се опише како број на независни настани кои се појавуваат во единица време, каде λ е просечниот број на настани.
- Притоа, не може да има повеќе од едно појавување истовремено, т.е., во секој доволно мал подинтервал.
- Просечниот (очекуваниот) број на настани во единица време е λ и е константен за целиот експеримент.

Пуасонова распределба - примери

- Број на телефонски повици во текот на еден час во некоја мала фирма.
- Бројот на клиенти кои влегуваат во една филијала во текот на една минута.
- Бројот на сообраќајни незгоди на една раскрсница во текот на еден ден.
- Бројот на пораки низ комуникациски канал во една минута.

Пуасонова распределба – бројни карактеристики

- Математичко очекување:

$$\mu = EX = \lambda$$

- Дисперзија и стандардна девијација:

$$\sigma^2 = DX = \lambda$$

$$\sigma = \sqrt{\lambda}$$

Пример 6

- Нека X е бројот на клиенти кои пристигнуваат во една експозитура на банка во тек на еден час. Да се определи распределбата на X, ако е познато дека просечниот број на пристигнати клиенти во експозитурата е 5.

Решение: Според условите на задачата, X има Пуасонова распределба со параметар λ = 5, т.е. $X \sim P(5)$.

- Множеството вредности на оваа случајна променлива е

$$R_X = \{0,1,\ldots\},$$

- а за соодветните веројатности се добива:

$$P\{X = i\} = \frac{5^i}{i!}e^{-5}, \quad i \in \{0,1,\ldots\}$$

Користење на таблици за Пуасонова распределба

X	λ								
	0.10	0.20	0.30	0.40	**0.50**	0.60	0.70	0.80	0.90
0	0.9048	0.8187	0.7408	0.6703	0.6065	0.5488	0.4966	0.4493	0.4066
1	0.0905	0.1637	0.2222	0.2681	0.3033	0.3293	0.3476	0.3595	0.3659
2	0.0045	0.0164	0.0333	0.0536	**0.0758**	0.0988	0.1217	0.1438	0.1647
3	0.0002	0.0011	0.0033	0.0072	0.0126	0.0198	0.0284	0.0383	0.0494
4	0.0000	0.0001	0.0003	0.0007	0.0016	0.0030	0.0050	0.0077	0.0111
5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0004	0.0007	0.0012	0.0020
6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0003
7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Пример 7: Да се определи $P\{X = 2\}$ ако X има $P(0.5)$ распределба (Пуасонова распределба со $\lambda = 0.5$).

$$P\{X = 2\} = \frac{(0.5)^2}{2!} e^{-0.5} = 0.0758$$

Геометриска распределба

- Се изведува серија од независни и еднакви експерименти сѐ додека не се појави настанот A.
- Притоа, $p = P(A)$ и $q = 1 - p$. Нека случајната променлива X означува број на изведени експерименти од предходно опишаната серија.
- Бројот на изведени експерименти до појавување на настанот A може да биде 1 или 2 или 3 или ... Оттука, $R_X = \{1, 2, 3, \dots\}$.
- Ќе ги означиме со A_i настаните: во i-тиот по ред експеримент се појави настанот A, $i = 1, 2, \dots$
- Овие настани се независни, поради независноста на експериментите и $P(A_i) = p$, за секој $i = 1, 2, \dots$

Геометриска распределба

- $P\{X = 1\} = P(A_1) = p$.
- Нека $i = 2, 3, \ldots$ Настанот $\{X = i\}$ ќе се појави, ако во првите $i - 1$ изведувања на експериментот не се појавил настанот A, т.е. се појавил настанот $\bar{A}$, а во последниот (i-тиот) експеримент се појавил настанот A.
- Оттука,

$$
\begin{aligned}
P\{X = i\} &= P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \ldots \bar{A}_{i-1} A_i) \\
&\overset{\text{нез.}}{=} P(\bar{A}_1) P(\bar{A}_2) \ldots P(\bar{A}_{i-1}) P(A_i) \\
&= q^{i-1} p
\end{aligned}
$$

за $i = 1, 2, \ldots$ (да воочиме дека и веројатноста $P\{X = 1\}$ се вклопува во последната општа формула.)

- За случајната променлива X велиме дека има геометриска распределба и пишуваме $X \sim \text{Geo}(p)$.

Геометриска распределба: бројни карактеристики

Ако $X \sim Geo(p)$ тогаш:

- математичкото очекување е $\mu = EX = \frac{1}{p}$;
- дисперзијата е $\sigma^2 = DX = q/p^2$;
- стандардната девијација е $\sigma = \sqrt{q/p^2}$.

Пример 8

- Стрелец гаѓа во целта сè додека не постигне погодок. Веројатноста за постигнување погодок во едно гаѓање е 0.4.
- Нека X е број на изведени експерименти сè додека стрелецот не ја погоди целта.
- Тогаш $X \sim \mathrm{Geo}(0.4)$.
- За математичкото очекување на X се добива:

$$\mu = EX = 1/0.4 = 2.5.$$

- Дисперзијата на X е

$$\sigma^2 = DX = \frac{0.6}{0.4^2} = 3.75$$

- а стандардната девијација:

$$\sigma = \sqrt{3.75} = 1.94$$