Бизнис статистика

Аудиториски вежби 6

Веројатност

Задача 1

На случаен начин се генерира последната цифра од еден телефонски број. Колку е веројатноста дека цифрата е:

а) 8, б) 8 или 9, в) непарна или 2, г) парна или 2, д) непарна, но не 3.

***Решение*:** $\Omega = \{E_i\ ,\ i=0,1,2,\ \ldots,\ 9\}$, при што елементарниот настан E_i е: генерирана е цифрата i.

Бидејќи цифрата се генерира случајно, веројатноста на сите елементарни настани е еднаква на (1/10) и може да се примени класичната дефиниција за определување на веројатност на случајни настани.

Задача 1- продолжување

Решение: Нека ги дефинираме настаните:

A: генерираната цифра е 8

B: генерираната цифра е 8 или 9

C: генерираната цифра е непарна или 2

D: генерираната цифра е парна или 2

F: генерираната цифра е непарна, но не 3.

а) $A=\{E_8\}, \quad P(A)=\frac{1}{10}=0.1$

б) $B=\{E_8,E_9\}, \quad P(B)=\frac{2}{10}=0.2$

в) $C=\{E_1,E_3,E_5,E_7,E_9,E_2\}, \quad P(C)=\frac{6}{10}=0.6$

г) $D=\{E_0,E_2,E_4,E_6,E_8\}, \quad P(D)=\frac{5}{10}=0.5$

д) $F=\{E_1,E_5,E_7,E_9\}, \quad P(F)=\frac{4}{10}=0.4$

Задача 2

На случаен начин се генерира 6-цифрен телефонски број. Колку е веројатноста дека сите негови цифри се различни?

***Решение*:**

Нека означиме настан А: сите цифри на генерираниот тел. број се различни.

Според дадените податоци и класичната дефиниција на веројатност, $k = |A|$, $n = |\Omega|$:

$$P(A)=\frac{k}{n}\ ,\qquad k=V_{10}^{6}=\frac{10!}{4!}=151200\ ,\qquad n=\overline{V}_{10}^{6}=10^{6}$$

$$P(A)=\frac{151200}{10^{6}}=0.1512$$

Задача 3

Што е поверојатно, при истовремено фрлање на две коцки, збирот да е 11 или 12?

Решение:

Множеството елементарни настани е од облик:

$\Omega = \{(x, y) | \, x, y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}, \; |\Omega| = 6^2 = 36$

x - исход од прва коцка, y - исход од втора коцка

A_1: при истовремено фрлање на две коцки се добива збир 11

A_2: при истовремено фрлање на две коцки се добива збир 12

$A_1 = \{(5, 6), (6, 5)\}, \quad |A_1| = 2, \; A_2 = \{(6, 6)\}, \quad |A_2| = 1.$

$$P(A_1) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} \qquad\qquad P(A_2) = \frac{1}{36}$$

Задача 4

Во една кутија се наоѓаат 6 бели и 4 црвени топчиња. Од кутијата одеднаш се извлекуваат три топчиња. Да се определи веројатноста дека во извлечените топчиња има барем едно бело топче. Да се определи бојата на топчињата со најголема веројатност на извлекување.

***Решение*:**
Да ги означиме настаните:
A: во извлечените топчиња има барем едно бело топче и
B: извлечени се 3 црвени топчиња. Тогаш $A = \overline{B}$.
Да ја пресметаме веројатноста на настанот *B, P*(*B*), според класичната дефиниција:

$$P(B) = \frac{k}{n} \qquad k = C_4^3 = 4 \qquad n = C_{10}^3 = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = 120$$

Задача 4- продолжување

B: извлечени се 3 црвени топчиња.

A: во извлечените топчиња има барем едно бело топче,

$$P(B)=\frac{4}{120}=\frac{1}{30},P(A)=1-P(B)=1-\frac{1}{30}=\frac{29}{30}.$$

Веројатноста сите три топчиња да се бели е $p_1=\frac{C_6^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{6}$

Вероj-ста да има едно бело и две црвени топчиња е: $p_2=\frac{C_6^1\cdot C_4^2}{C_{10}^3}=\frac{3}{10}$

Вероj-ста да има едно црвено и две бели топчиња е: $p_3=\frac{C_4^1\cdot C_6^2}{C_{10}^3}=\frac{1}{2}$

Според тоа, со најголема веројатност на извлекување е комбинацијата од две бели и едно црвено топче.

Задача 5

На приземјето на зграда која има 7 спрата, во лифтот влегле три лица. Секое од лицата на случаен начин, независно од другите двајца, одбира на кој спрат ќе се симне. Да се најде веројатноста дека:

а) сите тројца да излезат на првиот спрат;

б) ниеден да не излезе пред третиот спрат;

в) сите тројца да излезат на различни спратови;

г) барем еден да излезе на третиот спрат.

Задача 5- продолжување

Решение:

Седум спрата ги распоредуваме по трите лица, т.е. нека *x* е спратот на кој ќе се симне првото лице, *y* - спратот за второто и *z*- спратот за третото лице. Множеството од елементарни настани е

$\Omega = \{(x, y, z) | \, x, y, z \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6,7\}\}, \ |\,\Omega\,| = 7^3 = 343$

Бројот на елементи на Ω е $\overline{V}_7^3$ (можно е да повеќе луѓе да излезат на ист спрат).

а) $A_1=\{(1, 1, 1)\}$, $P(A_1) = \dfrac{1}{7^3} \approx 0.003$

б) $A_2=\{(x, y, z) | \, x, y, z \in \{3, 4, 5, 6,7\}\}$, $P(A_2) = \dfrac{\overline{V}_5^3}{\overline{V}_7^3} \approx 0.364$

в) $A_3=\{(x, y, z) | \, x, y, z \in \{1,2,3, 4, 5, 6,7\}, x \neq y, y \neq z, x \neq z\}$,

$$P(A_3) = \frac{V_7^3}{\overline{V}_7^3} \approx 0.612$$

Задача 5- продолжување 2

$\Omega = \{(x, y, z) | \ x, y, z \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6,7\}\}$

г) барем еден да излезе на третиот спрат.

Ако означиме настан A_4: барем еден од тројцата да излезе на третиот спрат, тогаш неговиот спротивен настан е $\overline{A}_4$ - ниеден да не излезе на третиот спрат. Тогаш

$$\overline{A}_4 = \{(x, y, z) | \ x, y, z \in \{1,2, 4, 5, 6,7\}\},$$

$$P(\overline{A}_4) = \frac{\overline{V}_6^3}{\overline{V}_7^3} \approx 0.63$$

Следи дека $P(A_4) = 1 - P(\overline{A}_4) \approx 0.37$.

Условна веројатност.

Независни настани.

Формула за тотална веројатност

Баесови формули

Задача 1

Од множеството $T = \{1,2,\ldots,30\}$ на случаен начин се избира еден број. Да се определи веројатноста дека извлечениот број е непарен, ако е познато дека е делив со 5.

***Решение*:**

A: извлечениот број е непарен

B: извлечениот број е делив со 5

$A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29\}$

$B = \{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$

$AB = \{5, 15, 25\}$

$$P(A\,|\,B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{30}}{\frac{6}{30}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Задача 2

Во табелата се дадени податоци за 200 фирми, според типот на индустријата: финансии, производство или комуникации и според географската локација. Да се провери дали типот на индустријата е независен од географската локација.

RAW VALUES MATRIX

		Geographic Location				
		Northeast D	Southeast E	Midwest F	West G	
Industry Type	Finance A	24	10	8	14	56
	Manufacturing B	30	6	22	12	70
	Communications C	28	18	12	16	74
		82	34	42	42	200

Решение. Ако избереме еден тип на индустрија, на пример A - Финансии, и географска локација G - Запад, треба да провериме дали $P(A|G) = P(A)$.

$$P(A\,|\,G) = \frac{14}{42} = 0.33 \qquad P(A) = \frac{56}{200} = 0.28$$

Значи, типот на индустријата не е независен од географската локација.

Задача 3

Според дадената табела на контингенција, да се провери дали некои од паровите настани (*A*, *D*), (*A*, *E*), (*B*, *D*), (*B*, *E*), (*C*, *D*) и (*C*, *E*) се зависни настани.

	D	*E*	
A	8	12	20
B	20	30	50
C	6	9	15
	34	51	85

Решение: Ако ја провериме првата ќелија во табелата, се добива:

$$P(A|D)=\frac{8}{34}=0.2353 \qquad P(A)=\frac{20}{85}=0.2353$$

Тоа значи дека овие два настани се независни. Проверката ја продолжуваме, се додека не добиеме пар зависни настани.
Но, деталната проверка покажува дека сите парови настани се независни.

Задача 4

Дете шутира топка кон гол и веројатноста да направи погодок во еден обид е 0.3. Детето при исти услови шутира кон голот се додека не постигне гол. Да се определи веројатноста на случајните настани: *C*: детето ќе шутира точно четири пати, и *B*: детето ќе мора да направи обид и четврти пат.

Решение**:** Нека дефинираме настани:

A_i: погодокот е направен во i-тиот по ред обид, i=1,2, ...

Бидејќи имаме серија од независни настани, настаните A_i се независни во целина.

Од тоа што условите за шутирање се еднакви, следува дека

$P(A_i) = 0.3,\ i = 1, 2, \dots$

$$B = \bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3 \qquad P(B) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3) = 0.7^3 = 0.343$$

$$C = \bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3A_4 \qquad P(C) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)P(A_4) = 0.7^3 \cdot 0.3 = 0.1029$$

Задача 5*

(Задача на четворица лажговци) Еден од четворица луѓе добил некоја информација која во вид на сигнал „да“ или „не“ ја соопштува на вториот, кој на истиот начин ја соопштува на третиот, третиот на четвртиот, а четвртиот ја кажува гласно. Познато е дека секој од нив ја кажува вистината само во 1/3 од случаите. Ако е утврдено дека четвртиот ја кажал вистинската информација (таа што му е соопштена на првиот), колкава е веројатноста дека и првиот ја кажал вистинската информација?

***Решение*:**

Ги дефинираме настаните:

A: Првиот ја кажал вистинската информација

B: Четвртиот ја кажал вистинската информација

C_k: k-тиот учесник го пренел тоа што го слушнал

$P(A|B)=?$

$P(C_k)=1/3$ и настаните C_k, $k = 1,2,3,4$ се независни настани

Задача 5: продолжение

Настанот B ќе се појави ако сите ја кажат вистината или ако излажат парен број од четворицата, т.е. ако се случи еден од следните настани:

$$C_1C_2C_3C_4,\ \overline{C_1}\,\overline{C_2}C_3C_4,\ \overline{C_1}C_2\overline{C_3}C_4,\ \overline{C_1}C_2C_3\overline{C_4},\ C_1\overline{C_2}\,\overline{C_3}C_4,\ C_1\overline{C_2}C_3\overline{C_4},\ C_1C_2\overline{C_3}\,\overline{C_4},\ \overline{C_1}\,\overline{C_2}\,\overline{C_3}\,\overline{C_4}$$

Настанот AB ќе се појави ако сите ја кажат вистината или ако првиот ја каже вистинската информација, а парен број од останатите излажат, т.е. ако се случи еден од следните настани:

$$C_1C_2C_3C_4,\ C_1\overline{C_2}\,\overline{C_3}C_4,\ C_1\overline{C_2}C_3\overline{C_4},\ C_1C_2\overline{C_3}\,\overline{C_4}$$

Тогаш

$$P(B)=\left(\frac{1}{3}\right)^4+6\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{1}{81}+\frac{24}{81}+\frac{16}{81}=\frac{41}{81}$$

$$P(AB)=\left(\frac{1}{3}\right)^4+3\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{13}{81}$$

$$P(A\,|\,B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{\frac{13}{81}}{\frac{41}{81}}=\frac{13}{41}$$

Задача 6*

90% од авионските летови тргнуваат на време, а 80% од летовите пристигнуваат на време. 75% тргнуваат и пристигнуваат на време.

а) Чекате лет кој тргнал на време. Која е веројатноста дека тој авион ќе пристигне на време?

б) Авионот кој го чекате само што пристигнал на време. Која е веројатноста дека тргнал на време?

в) Дали настаните тргнување и пристигнување на време се независни?

***Решение*:** Ги дефинираме настаните:

A: авионот тргнал на време

B: авионот пристигнал на време

$$P(A) = 0.9$$
$$P(B) = 0.8$$
$$P(AB) = 0.75$$

а) $$P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{0.75}{0.9} = 0.8333$$

б) $$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{0.75}{0.8} = 0.9375$$

в) $$P(AB) = 0.75 \neq 0.9 \cdot 0.8 = P(A)P(B),$$

па A и B не се независни настани.

$P(A \mid B) > P(A)$ и $P(B \mid A) > P(B)$, значи пристигнувањето на време ја зголемува веројатноста дека авионот тргнал на време и тргнување на време ја зголемува веројатноста дека авионот ќе пристигне на време.

Задача 7

Студент од прва година се подготвува за испит по Дискретна математика. Делот од материјалот, што го научил е два пати поголем, од делот од материјалот, кој студентот не го научил.

Да се пресмета веројатноста на испит да му се падне дел што го научил.

Решение: Нека настанот A е: на студентот му се паднал дел што го научил, тогаш шансите се 2 спрема 1:

$$\boxed{\text{шанси} = \frac{2}{1} = \frac{\mathrm{P(A)}}{1 - \mathrm{P(A)}}}$$

Ги множиме двете страни со $1 - P(A)$ и решаваме за $P(A)$

$$2 \cdot (1 - P(A)) = P(A)$$

$$2 - 2\,P(A) = P(A)$$

$$2 = 3\,P(A),\ P(A) = 2/3 \approx 0.67$$

Формула за тотална веројатност

Баесови формули

Задача 8

Во една компанија машините А, Б и В произведуваат два типа производи X и Y. Од сите производи, машината А произведува 60%, машината Б 30%, а машината В произведува 10%.

Покрај тоа, знаеме дека производот X претставува 40% од вкупното производство од машината А, 50% од производите направени од машината Б се производи од тип X, и 70% од производите направени од машината В се производи од тип X.

Случајно се зема еден производ што го произведува оваа компанија.

а) Да се пресмета веројатноста производот да е од тип X.

б) Ако знаеме дека производот е од тип X, да се ревидира (определи) веројатноста дека производот доаѓа од машината А, Б или В.

Задача 8: Решение

Решение: Прво ги дефинираме хипотезите H_1, H_2, H_3 и настанот C:

H_1, H_2, H_3 – случајно избран производ е од машината А, Б или В, соодветно.

$$P(H_1) = 0.6,\ P(H_2) = 0.3 \text{ и } P(H_3) = 0.1.$$

C - случајно избран производ е од тип X.

Условните веројатности се:

$$P(C \mid H_1) = 0.4,\ P(C \mid H_2) = 0.5,\ P(C \mid H_3) = 0.7.$$

Задача 8: Решение

а) Според формулата за тотална веројатност:

$$P(C) = P(C \mid H_1)P(H_1) + P(C \mid H_2)P(H_2) + P(C \mid H_3)P(H_3)$$

$$= 0.4 \cdot 0.6 + 0.5 \cdot 0.3 + 0.7 \cdot 0.1 = 0.46$$

Задача 8: Решение

б) Според Баесовите формули:

$$P(H_i \mid C) = \frac{P(C \mid H_i)P(H_i)}{P(C)}$$

$$= \frac{P(C \mid H_i)P(H_i)}{P(C \mid H_1)P(H_1) + P(C \mid H_2)P(H_2) + P(C \mid H_3)P(H_3)}$$

$$P(H_1 \mid C) = \frac{P(C \mid H_1)P(H_1)}{P(C)} = \frac{0.4 \cdot 0.6}{0.46} = 0.52.$$

Задача 8: Решение

На сличен начин:

$$P(H_2 \mid C) = \frac{P(C \mid H_2)P(H_2)}{P(C)} = \frac{0.5 \cdot 0.3}{0.46} = 0.326$$

$$P(H_3 \mid C) = \frac{P(C \mid H_3)P(H_3)}{P(C)} = \frac{0.7 \cdot 0.1}{0.46} = 0.15.$$

Задача 9

Утврдено е дека приближно 67% од сите домаќинства со телевизор имаат еден телевизор, а 33% од сите домаќинства со телевизор имаат два или повеќе телевизори. Утврдено е дека 55% од сите домаќинства со еден телевизор имаат барем две деца, а 82% од домаќинствата со два или повеќе телевизори имаат барем две деца. Случајно е избрано домаќинство со телевизор.

а) Да се пресмета веројатноста дека во него има најмногу едно дете.

б) Колку е веројатноста избраното домаќинство да има еден телевизор, ако веќе се знае дека во него има најмногу едно дете?

Задача 9: Решение

Решение: Нека дефинираме хипотези H_1, H_2 и настан C:

H_1 –домаќинството има еден телевизор.

H_2- домаќинството има два или повеќе телевизори.

$$P(H_1) = 0.67,\ P(H_2) = 0.33.$$

C - домаќинството има барем две деца.

Условните веројатности се:

$$P(C\,|\,H_1) = 0.55,\ P(\overline{C}\,|\,H_1) = 0.45,\ P(C\,|\,H_2) = 0.82,\ P(\overline{C}\,|\,H_2) = 0.18$$

а) Според формулата за тотална веројатност (со хипотезите H_1и H_2 се прави дисјунктно разложување на Ω):

$$P(\overline{C}) = P(\overline{C}\,|\,H_1)P(H_1) + P(\overline{C}\,|\,H_2)P(H_2)$$

$$= 0.45 \cdot 0.67 + 0.18 \cdot 0.33 = 0.36$$

Задача 9: Решение

$$P(H_1) = 0.67,\ P(H_2) = 0.33.$$

$$P(C\mid H_1) = 0.55,\ P(\overline{C}\mid H_1) = 0.45,\ P(C\mid H_2) = 0.82,\ P(\overline{C}\mid H_2) = 0.18$$

C - домаќинството има барем две деца.

б) Според Баесовите формули:

$$P(H_1\mid\overline{C}) = \frac{P(\overline{C}\mid H_1)P(H_1)}{P(\overline{C})}$$

$$= \frac{0.45\cdot 0.67}{0.45\cdot 0.67 + 0.18\cdot 0.33} = 0.83$$

Задача 10*

Осигурувач во електрично коло откажува во следните случаи: при краток спој во електронската ламба - со веројатност 0.5, при спој во намотките на трансформаторот - со веројатност 0.6, при пробој на кондензаторот - со веројатност 0.7 и од други причини - со веројатност 0.9. Нека веројатностите да појави секоја од горенаведените причини за откажување се 0.35, 0.3, 0.25, 0.1, соодветно.

а) Да се определи веројатноста осигурувачот да прегори;

б) Ако осигурувачот е прегорен, да се најде најверојатната причина.

Решение: Ги дефинираме следните настани:

H_1 : краток спој во електронската ламба

H_2 : спој во намотките на трансформаторот

H_3 : пробој на кондензаторот

H_4 : други причини

A: осигурувачот ќе откаже

Задача 10: решение

Од условите на задачата, имаме:

$$P(H_1) = 0.35; \quad P(H_2) = 0.3; \quad P(H_3) = 0.25; \quad P(H_4) = 0.1;$$

$$P(A \mid H_1) = 0.5; \quad P(A \mid H_2) = 0.6; \quad P(A \mid H_3) = 0.7; \quad P(A \mid H_4) = 0.9.$$

а) Од формулата за тотална веројатност се добива:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(H_i)P(A \mid H_i) = 0.35 \cdot 0.5 + 0.3 \cdot 0.6 + 0.25 \cdot 0.7 + 0.1 \cdot 0.9 = 0.62.$$

б) Со користење на Баесовите формули, добиваме:

$$P(H_1 \mid A) = \frac{0.35 \cdot 0.5}{0.62} = 0.28, \qquad P(H_2 \mid A) = \frac{0.3 \cdot 0.6}{0.62} = 0.29,$$

$$P(H_3 \mid A) = \frac{0.7 \cdot 0.25}{0.62} = 0.28, \qquad P(H_4 \mid A) = \frac{0.1 \cdot 0.9}{0.62} = 0.145.$$

Значи, најверојатна причини за откажување на осигурувачот е спој во намотките на трансформаторот.