Бизнис статистика

Експерименти и настани

Експеримент

- Секоја реализација на множество услови S се нарекува ***експеримент*** или ***опит***.
- Ваквото определување на поимот експеримент наполно одговара и за таканаречените пасивни експерименти (во кои човекот не влијае) и за таканаречените активни експерименти (кои човекот ги организира и спроведува со одредена цел).

Примери на експерименти

Да ги разгледаме следните примери на експерименти.

- Една монета се фрла во воздух и по нејзиното паѓање на земја, на горната страна од монетата може да се појави ”петка” или ”глава”. Со фрлањето на монетата сме извршиле еден експеримент и како резултат на тој експеримент може да се добие еден од следните исходи: ”на горната страна од монетата се појави петка” или ”на горната страна од монетата се појави глава”.
- Ако вода се загрева на 100°C, тогаш таа ќе почне да врие. Овде е извршен еден експеримент (загревање на вода) и како резултат на тој експеримент се јавува исходот ”водата врие”.
- Ако се проверува исправноста на производите во една фабрика, тогаш се зема по еден производ, се проверува неговиот квалитет и се утврдува дали е исправен или не. Значи, експериментот е проверка на квалитетот, а можни исходи се: ”производот е исправен” и ”производот не е исправен”.
- Се спроведува тест за да се провери знаењето на учениците. Оценувањето на тестот се прави со поени од 0 до 100. Тогаш експериментот е оценување на еден ученик, а можни исходи се ”ученикот освои i поени”, каде што $i = 0, 1, \ldots, 100$.

Настани

- Секој резултат (исход) од експериментот S се нарекува настан во врска со експериментот S.
- Настаните се обележуваат со големи печатни букви од латиницата: A, B, C, . . .
- Еден експеримент може да биде детерминистички и недетерминистички. Ако исходот на еден експеримент е однапред познат, тогаш тој експеримент е детерминистички, во спротивно, ако исходот не може со сигурност да се знае однапред, тој експеримент е недетерминистички.
  - Експериментот со загревање на вода е детерминистички.
  - Останатите експерименти од претходните примери се недетерминистички.

Цели на теоријата на веројатност

- При подлабоко проучување на природните и општествените појави се забележува дека постојат сосема малку закони кои се строго детерминистички.
- Најголем дел од експериментите во себе го вклучуваат елементот на случајност.
- Во теоријата на веројатноста се наоѓаат законитостите за настаните кои се резултат на експериментите кои имаат нееднозначен исход.
- Имено, и кај експериментите со нееднозначен исход се воочуваат одредени законитости.

Пример

- Да го разгледаме повторно експериментот фрлање монета и настанот A: ”падна петка”. Ако експериментот се изведува еднаш, тогаш не може со сигурност да се каже кој ќе биде неговиот исход.
- Затоа, нека се изведени 8 серии од по 1000 експерименти под еднакви услови.
- Со $n_i(A)$ се означува бројот на експериментите од i-тата серија во кои се појавил настанот A.
- Резултатите од овие осум серии се претставени во следнатата табела.

i	$n_i(A)$	$\frac{n_i(A)}{1000}$
1	502	0.502
2	504	0.504
3	492	0.492
4	500	0.500
5	510	0.510
6	490	0.490
7	493	0.493
8	509	0.509

Случаен настан

- Настанот A во врска со експериментот S се нарекува ***случаен настан***, ако се исполнети следните два услова:

  1° Експериментот S може да се повтори при исти услови колку што сакаме пати;

  2° Релативните фреквенции на настанот A, во секоја од повеќе изведени серии експерименти, се броеви кои се приближно еднакви. Тоа значи дека ако се изведат серии од по $n_1, n_2, \ldots, n_k$ експерименти, тогаш:

$$\frac{n_1(A)}{n_1} \approx \frac{n_2(A)}{n_2} \approx \ldots \approx \frac{n_k(A)}{n_k}.$$

Статистичка веројатност

- Релативната фреквенција $\frac{n_i(A)}{n}$ во една серија експерименти е приближна објективна мерка за можноста за појавување на настанот A.
- Меѓутоа, релативните фреквенции за различни серии експерименти се разликуваат помеѓу себе.
- Но, сепак тие се натрупуваат околу некој реален број.
- Реалниот број околу кој се натрупуваат релативните фреквенции на настанот A се нарекува *статистичка* (или *емпириска*) веројатност на настанот A.
- Во дефиницијата на случаен настан, условот $2°$ обезбедува статистичка стабилност (непроменливост) на релативните фреквенции, а условот $1°$ обезбедува проверка на условот $2°$.

Сигурен и невозможен настан

- За секој експеримент S може да се разгледаат два специјални настани.
  - ***Сигурен настан*** во врска со даден експеримент е настанот кој се појавува при секоја реализација на тој експеримент.
  - ***Невозможен настан*** во врска со даден експеримент е настан што не се појавува никогаш при реализација на дадениот експеримент.

Примери.

Нека експериментот е фрлање коцка. Се разгледуваат настаните:
A_1: падна број од 1 до 6
A_2: падна бројот 7.

Тогаш
A_1 е сигурен настан.
A_2 е невозможен настан.

Експериментот е извлекување на топче од кутија во која има 5 бели топчиња. Се разгледуваат настаните:
B_1: извлечено е бело топче,
B_2: извлечено е црно топче.

Тогаш
B_1 е сигурен настан.
B_2 е невозможен настан.

Сигурниот и невозможниот настан се случајни настани

- Ако експериментот S се изведува n пати, тогаш сигурниот настан ќе се појави n пати, а невозможниот настан 0 пати.
- Релативната зачестеност на сигурниот настан е $\frac{n}{n} = 1$, а на невозможниот настан $\frac{0}{n} = 0$.
- Ова важи за секоја серија експерименти S.
- Така, сигурниот и невозможниот настан ги задоволуваат условите 1° и 2°, па тие се случајни настани.

Множество елементарни настани
Случајни настани

Пример 1

- Да го разгледаме експериментот фрлање коцка. Некои од можните настани во врска со овој експеримент се следните:

A: падна парен број;
B: падна број делив со 3;
E_1: падна бројот 1;
E_2: падна бројот 2;
E_3: падна бројот 3;
E_4: падна бројот 4;
E_5: падна бројот 5;
E_6: падна бројот 6.

- Да воочиме дека настанот A се појавува ако се појави еден од настаните E_2, E_4 или E_6, а настанот B се појавува ако се појави настанот E_3 или ако се појави E_6. Значи, настанот A може да се разложи на настаните E_2, E_4 и E_6, а настанот B може да се разложи на настаните E_3 и E_6.
- Од друга страна, настаните E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 и E_6 не може да се разложат на други настани. Затоа, тие настани ги нарекуваме елементарни настани.
- Елементарните настани ќе ги означуваме со симболот E со индекс 1,2,...

Множество елементарни настани

Дефиниција 1.

i) *Елементарен настан* во врска со даден експеримент е секој логички исход на експериментот кој не може да се разложи на други настани. Притоа, при секоја реализација на експериментот се појавува еден и само еден елементарен настан.

ii) Множеството од сите вакви настани во врска со еден експеримент се нарекува *множество елементарни настани* и се означува со Ω.

Пример 2

- Експериментот се состои во фрлање коцка. При секоја реализација на експериментот се појавува еден и само еден од настаните E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 и E_6.
- Затоа множеството елементарни настани во врска со овој експеримент е

$$\Omega = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}.$$

Пример 3

- Експериментот се состои во фрлање на две монети.
- При фрлање на една монета, можен исход е ”падна петка” или ”падна глава” (ќе пишуваме кратко ”петка” или ”глава”).
- Но, експериментот се состои од фрлање на двете монети заедно, па можните исходи ќе бидат подредени парови, каде што првиот елемент ќе го означува исходот на првата монета, а вториот елемент исходот на втората.
- Множеството елементарни настани е следното:

$$\Omega = \{(\text{глава, глава}), (\text{глава, петка}), (\text{петка, глава}), (\text{петка, петка})\}.$$

Пример 4

- Нека експериментот е фрлање на монета сѐ додека не се појави петка.
- Множеството елементарни настани е од облик $\Omega = \{E_1, E_2, \ldots\}$, каде што

$$E_1 = (\text{петка}),$$

$$E_2 = (\text{глава, петка}), \text{ итн.}$$

- Во општ случај, за фиксно $i = 2, 3, \ldots,$ елементарниот настан

$$E_i = (\underbrace{\text{глава}, \text{глава} \ldots, \text{глава}}_{i-1}, \text{петка})$$

и тој се појавува ако во првите $i - 1$ фрлање на монетата се појави глава, а во i-тото фрлање се појави петка.

- Во овој случај, множеството елементарни настани е бесконечно преброиво множество, бидејќи теоретски експериментот може никогаш да не заврши.

Пример 5

- Се набљудува времето на непрекината работа на некоја машина.
- Елементарни настани за овој експеримент се:

$$E_t : \text{машината работи време } t, \qquad t \in [0, T]$$

кадe T е максималниот (гарантиран) век на работа на набљудуваната машина.

- Оттука, множеството елементарни настани за овој експеримент е:

$$\Omega = \{E_t \mid t \in [0, T]\}$$

- Во овој случај, Ω е интервал, т.е. е бесконечно непреброиво множество.

Множество елеметарни настани

- Од претходните примери можеме да воочиме дека зависно од експериментот, множеството елементарни настани може да биде конечно, бесконечно преброиво или бесконечно непреброиво множество.

Пример 6

- Во примерот со фрлање коцка заклучивме дека настанот A: падна парен број, ќе се појави ако се појави еден од настаните E_2, E_4 или E_6, а настанот B: падна број делив со три, се појавува ако се појави еден од настаните E_3 или E_6.
- Оттука, настаните A и B може да се запишат на следниот начин

$$A = \{E_2, E_4, E_6\}$$

$$B = \{E_3, E_6\}$$

- Да воочиме дека настаните A и B се претставени како подмножества од множеството елементарни настани Ω.

Дефиниција на случаен настан

Дефиниција 2. Случаен настан е произволно подмножество од множеството елементарни настани Ω.

- Ќе велиме дека се појавил настанот A, ако се појавил некој од елементарните настани кои припаѓаат на подмножеството елементарни настани соодветно на настанот A.

Пример 7

- Нека експериментот е фрлање на две монети. Да се опише настанот

C: барем еднаш падна петка.

- Настанот C ќе се појави ако на една од монетите падне петка, а на другата глава или ако на двете монети падне петка, т.е.

$$C = \{(\text{глава, петка}), (\text{петка, глава}), (\text{петка, петка})\}.$$

Сигурен и невозможен настан

- Сигурниот настан се појавува секогаш кога се реализира експериментот, т.е. секој елементарен настан доведува до негово појавување. Затоа, тој се означува со Ω.

- Невозможниот настан, пак, не се појавува никогаш кога се реализира експериментот, односно ниеден елементарен настан не доведува до негово појавување. Оттука, невозможниот настан ќе го означуваме со $\emptyset$.

Производ на настани

Дефиниција 3. *Производ* на настаните A и B е настан кој се појавува тогаш и само тогаш кога ќе се појават и двата настани A и B истовремено. Тој настан е определен со множество елементарни настани што е пресек од множествата елементарни настани на настанот A и настанот B. Производот на два настани A и B се означува со $A \cap B$ или AB.

Пример 8

- Нека експериментот е фрлање коцка. Ги разгледуваме настаните:

  A: падна број помал или еднаков на 3;

  B: падна број делив со 3;

  C: падна број поголем од 4.

- Да се определи производот на било кои два од дадените три настани.

Решение: Множеството елементани настани за овој експеримент е

$$\Omega = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}.$$

Притоа, $A = \{E_1, E_2, E_3\}$, $B = \{E_3, E_6\}$, $C = \{E_5, E_6\}$. Сега,

$$AB = \{E_3\}$$

$$AC = \varnothing$$

$$BC = \{E_6\}$$

Дисјунктни настани

Дефиниција 4. Ако два настани A и B не може да се појават истовремено тогаш тие се нарекуваат *дисјунктни настани* или *несогласни настани* или *исклучувачки настани*. Нивниот производ е невозможен настан, т.е. $A \cap B = \varnothing$.

Во претходниот пример, A и C се дисјунктни настани.

Збир на настани

Дефиниција 5. *Збир* на настаните A и B е настан кој се појавува тогаш и само тогаш кога ќе се појави барем еден од настаните A или B.
Тој настан е определен со множество елементарни настани што е унија од множествата елементарни настани на настанот A и настанот B.
Збирот на два настани A и B, во општ случај, се означува со $A \cup B$. Доколку настаните A и B се дисјунктни, тогаш нивниот збир ќе го означуваме со $A + B$.

Збир на настани

- Кога се вели дека се појавил барем еден од настаните A или B, тогаш се подразбира дека се појавил или само настанот A или само настанот B или и двата настани истовремено.
- Ако настаните A и B се дисјунктни, тогаш истовремено појавување на двата настани е невозможно, па појавување на настанот $A \cup B$ подразбира да се појави или само настанот A, или само настанот B.
- Затоа, во овој случај, за збир на два настани се користи ознаката $A + B$. Значи,

$$A + B = A \cup B \,, \text{ ако } AB = \varnothing.$$

Пример 9

- Нека експериментот е фрлање коцка. Ги разгледуваме настаните:

  A: падна број помал или еднаков на 3;

  B: падна број делив со 3;

  C: падна број поголем од 4.

- Да се определи збирот на било кои два од дадените три настани.

Решение:

$$\Omega = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}.$$

$$A = \{E_1, E_2, E_3\}, B = \{E_3, E_6\}, C = \{E_5, E_6\}.$$

Сега,

$$A \cup B = \{E_1, E_2, E_3, E_6\}$$

$$A \cup C = A + C = \{E_1, E_2, E_3, E_5, E_6\}$$

$$B \cup C = \{E_3, E_5, E_6\}$$

Спротивен настан

Дефиниција 6. *Спротивен настан* на настанот A е настанот кој се појавува тогаш и само тогаш кога не се појавува настанот A.
Овој настан се означува со $\bar{A}$.
Множеството елементарни настани на настанот $\bar{A}$ е комплемент на множеството елементарни настани соодветно на настанот A во однос на Ω.
За секој настан A важи:

$$A \cap \bar{A} = \emptyset, \qquad A \cup \bar{A} = \Omega.$$

Пример 10

- Нека експериментот е фрлање коцка. Ги разгледуваме настаните:

  A: падна број помал или еднаков на 3;

  B: падна број делив со 3;

  C: падна број поголем од 4.

- Да се определат спротивните настани на дадените три настани.

Решение:

$$\Omega = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}.$$

$$A = \{E_1, E_2, E_3\},\ B = \{E_3, E_6\},\ C = \{E_5, E_6\}.$$

Сега,

$$\bar{A} = \{E_4, E_5, E_6\}$$

$$\bar{B} = \{E_1, E_2, E_4, E_5\}$$

$$\bar{C} = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$$

Настанот A го повлекува настанот B

Дефиниција 7. Настанот A го повлекува настанот B (пишуваме $A \subseteq B$), ако секогаш кога се појавува настанот A се појавува и настанот B.

Пример 11. Да го разгледаме повторно експериментот фрлање на две монети. Нека

A : падна точно една глава

B : падна барем една глава.

- Може да се воочи дека секогаш кога ќе се појави настанот A се појавува и настанот B, т.е. $A \subseteq B$.

Дефиниција 8. Ако $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, тогаш за настаните A и B велиме дека се *еднакви*.

Закони за операции со настани

- Бидејќи случајните настани се подмножества од множеството елементарни настани во врска со еден експеримент, за операциите со настани важат истите закони како за операциите со множества.
- Некои од нив, кои ќе ги користиме во понатамошните излагања се следните.

Дистрибутивните закони:

$$A(B \cup C) = AB \cup AC$$

$$(A \cup B)C = AC \cup BC$$

Де Морганови закони

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

Збир и производ на повеќе настани

Дефиниција 9. Збир на настаните $A_1, A_2, \ldots, A_n$ е настанот кој се појавува тогаш и само тогаш кога ќе се појави барем еден од настаните $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Овој настан се означува со $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$, а неговото множество елементарни настани е унија од множествата елементарни настани соодветни на секој од настаните $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Дефиниција 10. Производ на настаните $A_1, A_2, \ldots, A_n$ е настанот кој се појавува тогаш и само тогаш кога ќе се појават сите настани $A_1, A_2, \ldots, A_n$ истовремено.
Овој настан се означува со $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$, а неговото множество елементарни настани е пресек од множествата елементарни настани соодветни на секој од настаните $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Обопштување

- Дефинициите за збир и производ на настани може да се обопштат и за преброиво многу настани. Имено, збир на настаните $A_1, A_2, \ldots$ е настанот кој се појавува тогаш и само тогаш кога ќе се појави барем еден од настаните $A_1, A_2, \ldots$, а нивен производ е настанот кој се појавува тогаш и само тогаш кога ќе се појават истовремено сите настани $A_1, A_2, \ldots$

Пример 12

Во цел се стрела три пати. Се разгледуваат настаните A_1, A_2 и A_3 кои означуваат погодување на целта во првото, второто и третото стрелање, соодветно. Со помош на овие настани, да се опишат следните случајни настани:

B: постигнати се три погодоци;

C: целта е три пати промашена;

D: постигнат е барем еден погодок;

E: постигнато е барем едно промашување;

F: постигнати се не повеќе од два погодока;

G: до третото стрелање немало погодок.

Решение:

$$B = A_1 A_2 A_3 \qquad E = \overline{A}_1 \cup \overline{A}_2 \cup \overline{A}_3$$

$$C = \overline{A}_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 \qquad F = E$$

$$D = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \qquad G = \overline{A}_1 \overline{A}_2$$

Дисјунктно разложување на Ω

Дефиниција 11. Нека $A_1, A_2, \ldots, A_n$ се настани во врска со еден експеримент така што $A_i A_j = \varnothing$, за $i \neq j$ и $\sum_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ тогаш за настаните $A_1, A_2, \ldots, A_n$ велиме дека се дисјунктно разложување на Ω, т.е. Ω е дисјунктна сума на настаните $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Забелешка: Ω може да се претстави и како дисјунктна сума на преброиво многу настани $A_1, A_2, \ldots$, ако $A_i A_j = \varnothing$, за $i \neq j$ и $\sum_{i=1}^{+\infty} A_i = \Omega$.

Пример 13

- Експериментот се состои во фрлање на три монети. Ако со 0 се означи исходот ”падна петка”, а со 1 - исходот ”падна глава”, тогаш множеството елементарни настани за овој експеримент е

$$\Omega = \{(x, y, z) | x, y, z \in \{0, 1\}\}.$$

- Со A_i го означуваме настанот ”глава падна i пати”, $i = 0, 1, 2, 3$. Тогаш

$$A_0 = \{(0, 0, 0)\}$$
$$A_1 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$
$$A_2 = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$$
$$A_3 = \{(1, 1, 1)\}$$

- Јасно е дека настаните A_i, $i = 0, 1, 2, 3$ се дисјунктни и $A_0 + A_1 + A_2 + A_3 = \Omega$, т.е. A_0, A_1, A_2 и A_3 се дисјунктно разложување на Ω.