Бизнис статистика

Аудиториски вежби 9

Гранични теореми

Распределба на статистики на примерок

Распределба на просек, пропорции и дисперзија на примерок.

Задача 1

Една група од 200 ученици изведуваат гаѓање и притоа секој ученик гаѓа по еднаш во метата и погодува со веројатност 0.8. Да се определи веројатноста да бидат постигнати:

а) барем 120 погодоци;

б) најмногу 160 погодоци;

в) најмногу 190, а најмалку 150 погодоци.

Задача 1: решение под а)

Нека X – број на погодоци на метата

$X \sim B(200, 0.8)$

$n = 200 > 30$, $p = 0.8$, $np = 160 > 10$, па биномната распределба може да се апроксимира со нормална.

а)

$$P\{120 \leq X \leq 200\} \approx P\left\{\frac{120 - 200 \cdot 0.8}{\sqrt{200 \cdot 0.8 \cdot 0.2}} \leq Z \leq \frac{200 - 200 \cdot 0.8}{\sqrt{200 \cdot 0.8 \cdot 0.2}}\right\}$$

$$= P\{-7.07 \leq Z \leq 7.07\} = P\{-7.07 < Z < 7.07\}$$

$$= \Phi(7.07) - \Phi(-7.07) = 1 - 0$$

$$= 1$$

Задача 1: решение под б) и в)

б) $$P\{0 \le X \le 160\} \approx P\left\{\frac{0-200\cdot 0.8}{\sqrt{200\cdot 0.8\cdot 0.2}} \le Z \le \frac{160-200\cdot 0.8}{\sqrt{200\cdot 0.8\cdot 0.2}}\right\}$$

$$= P\{-28.28 \le Z \le 0\} = P\{-28.28 < Z < 0\}$$

$$= \Phi(0) - \Phi(-28.28) = 0.5 - 0$$

$$= 0.5$$

в) $$P\{150 \le X \le 190\} \approx P\left\{\frac{150-200\cdot 0.8}{\sqrt{200\cdot 0.8\cdot 0.2}} \le Z \le \frac{190-200\cdot 0.8}{\sqrt{200\cdot 0.8\cdot 0.2}}\right\}$$

$$= P\{-1.76 \le Z \le 5.3\} = P\{-1.76 < Z < 5.3\}$$

$$= \Phi(5.3) - \Phi(-1.76) = 1 - 0.0392$$

$$= 0.9608$$

Задача 2

Ако 15% од нови автомобилски делови произведени во една фабрика се дефектни, колку е веројатноста случајно избран примерок (избор со враќање) од 80 автомобилски делови да содржи 15 или повеќе од 15 дефектни автомобилски делови.

Решение:

Случајната променлива X - број на дефектни делови ви примерок од 80 случајно избрани има $B(80, 0.15)$ распределба.

Бидејќи $n > 30$, $np = 12 > 10$, а $npq = 10.2$, распределбата на X може да се апроксимира со нормална распределба $N(12, 10.2)$.

$$P\{X \geq 15\} = 1 - P\{X < 15\} = 1 - P\left\{\frac{X-12}{\sqrt{10.2}} < \frac{15-12}{\sqrt{10.2}}\right\} =$$

$$= 1 - P\{Z < 0.94\} \approx 1 - \Phi(0.94) = 1 - 0.82639 = 0.17361$$

Задача 3

Случајната променлива X е просек на 3200 независни еднакво распределени случајни променливи со математичко очекување $\mu = 3$ и дисперзија $\sigma^2 = 2$. Да се определи веројатноста дека просекот на овие случајни променливи ќе прими вредности од интервалот (2.96, 3.075).

Решение: Бидејќи $n = 3200 > 30$, може да се примени централна гранична теорема. Според оваа теорема $\bar{X}$ има приближно нормална распределба со математичко очекување $\mu = 3$ и стандардна девијација

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3200}} = \sqrt{\frac{2}{3200}} = \sqrt{\frac{1}{1600}} = \frac{1}{40} = 0.025$$

Задача 3: Решение

$$P\left\{2.96 < \bar{X} < 3.075\right\} = P\left\{\frac{2.96-3}{0.025} < \frac{\bar{X}-3}{0.025} < \frac{3.075-3}{0.025}\right\}$$

$$\approx P\left\{-1.6 < Z < 3\right\}$$

$$= \Phi(3) - \Phi(-1.6)$$

$$= 0.99865 - 0.05480$$

$$= 0.94385$$

Задача 4

Група истражувачи вршела истражување на Охридско езеро. Нека X ја претставува должината на парче пастрмка уловена на случаен начин од езерото. Оваа група биолози одредила дека X има нормална распределба со μ =10.2 инчи и стандардна девијација σ = 1.4 инчи.

а) Да се одреди веројатноста дека едно парче пастрмка уловена на случаен начин од езерото е долга помеѓу 8 и 12 инчи.

б) Да се одреди веројатноста дека просечната должина $\bar{X}$ на пет парчиња пастрмка кои се случајно уловени е помеѓу 8 и 12 инчи.

Задача 4: решение под а)

а) Случајната променлива $X \sim N(10.2,\, 1.4^2)$. Оттука,

$$Z = \frac{X - EX}{\sqrt{DX}} \sim N(0,1)\ ,$$

па

$$P\{8 < X < 12\} = P\left\{\frac{8-10.2}{1.4} < \frac{X-EX}{\sqrt{DX}} < \frac{12-10.2}{1.4}\right\}$$

$$= P\left\{\frac{8-10.2}{1.4} < Z < \frac{12-10.2}{1.4}\right\}$$

$$= P\{-1.57 < Z < 1.29\}$$

$$= 0.9015 - 0.0582$$

$$= 0.8433$$

парче пастрмка уловено на случаен начин е долго помеѓу 8 и 12 инчи е 0.8433.

Задача 4: решение под б)

б) $\mu_{\bar{X}}$ $-$ очекување на просеците на примероци
$\sigma_{\bar{X}}$ $-$ стандардна девијација на просеците на примероците

$$\mu_{\bar{X}} = \mu = 10.2$$

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1.4}{\sqrt{5}} \approx 0.63$$

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \approx \frac{\bar{X} - 10.2}{0.63}$$

Задача 4: решение под б)

б) Бидејќи X_i имаат нормална распределба и $\bar{X}$ има нормална распределба со математичко очекување $\mu_{\bar{X}} = 10.2$ и стандардна девијација $\sigma_{\bar{X}} = 0.63$, па

$$P\{8 < \bar{X} < 12\} = P\left\{\frac{8 - 10.2}{0.63} < \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}} < \frac{12 - 10.2}{0.63}\right\}$$

$$= P\left\{\frac{8-10.2}{0.63} < Z < \frac{12-10.2}{0.63}\right\}$$

$$= P\{-3.49 < Z < 2.86\}$$

$$= 0.9979 - 0.0002$$

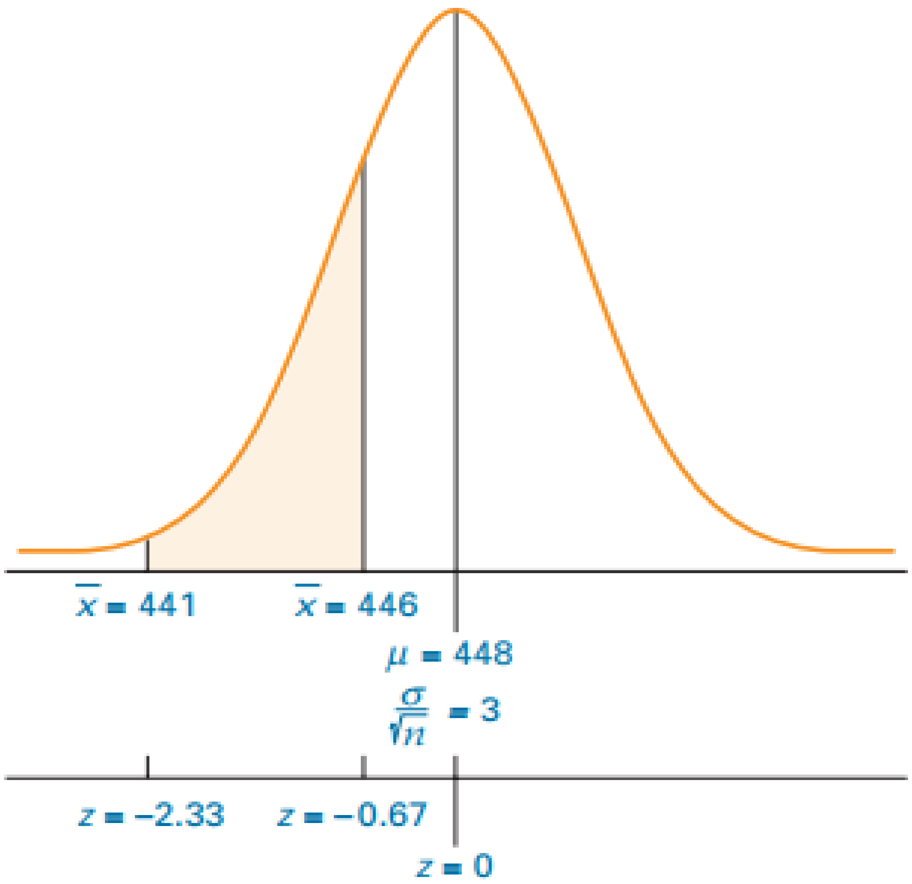
$$= 0.9977$$

Задача 5

Во голем трговски центар бројот на купувачи во било кој работен час во просек е 448, со стандардна девијација од 21 купувач. Која е веројатноста дека просечниот број на купувачи во случаен примерок од 49 различни работни часови ќе биде меѓу 441 и 446?

Задача 5: Решение

$\mu = 448, \qquad \sigma = 21, \qquad n = 49$



Задача 5: Решение

$$P\{441 < \bar{X} < 446\} = P\left\{\frac{441-448}{\frac{21}{\sqrt{49}}} < \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}} < \frac{446-448}{\frac{21}{\sqrt{49}}}\right\}$$

$$= P\{-2.33 < Z < -0.67\}$$

$$= \Phi(-0.67) - \Phi(-2.33)$$

$$= 0.25143 - 0.00990$$

$$= 0.24153$$

Значи постојат 24.15% шанси, во случајно избран период од 49 часа просечниот број на купувачи да биде помеѓу 441 и 446 купувачи.

Задача 6

Одреден број бактерии се појавува во сите видови сурово млеко. Нека X ги означува бактериите измерени во еден мililитар од млеко. Институтот за јавно здравје открил дека ако млекото не е контаминирано, тогаш X има нормална распределба со математичко очекување $\mu = 2500$ и стандардна девијација $\sigma = 300$. Инспекторот зема 42 случајни примероци од млеко и го пресметува просекот $\bar{X}$ на измерениот број на бактерии во 42-та примероци.

а) Ако претпоставиме дека млекото не е контаминирано, која е распределбата на $\bar{X}$?

б) Ако претпоставиме дека млекото не е контаминирано, колкава е веројатноста дека просечниот број на бактерии во примероците е помеѓу 2350 и 2650 бактерии во мililитар?

в) На крајот на денот инспекторот одлучува дали ќе ја одобри или забрани продажбата на собраното млеко што се чува во пропишани услови. Тој ја забранува продажбата, ако претпоставиме дека $\bar{X}$ не се наоѓа во интервалот (2350, 2650). Ако сте вие инспектор, како ќе ја коментирате оваа ситуација?

Задача 6: решение под а) и б)

а) Распределбата на X е нормална, па и просекот $\bar{X}$ има нормална распределба со очекување $\mu_{\bar{X}}$ и стандардна девијација $\sigma_{\bar{X}}$:

$$\mu_{\bar{X}} = \mu = 2500$$

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{300}{\sqrt{42}} \approx 46.3$$

б)

$$P\{2350 < \bar{X} < 2650\} = P\left\{\frac{2350-2500}{46.3} < \frac{\bar{X}-\mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}} < \frac{2650-2500}{46.3}\right\} =$$

$$= \{-3.24 < Z < 3.24\} = \Phi(3.24) - \Phi(-3.24) = 0.9994 - 0.0006 = 0.9988$$

Задача 6: решение под в)

Од решението под б) имаме дека

$$P\{2350 < \bar{X} < 2650\} = 0.9988$$

што е прилично висока вредност. Ако инспекторот открие дека очекуваниот број бактерии за 42-та примероци не е во интервалот (2350, 2650), тогаш разумно е да заклучи дека нешто не е во ред со млекото.

1) Ако $\bar{X} < 2350$, тогаш оправдано е сомневањето дека во млекото се додадени хемикалии за на вештачки начин да се намали бројот на бактериите.

2) Ако пак $\bar{X} > 2650$, тогаш може да се посомневаме во други видови биолошки контаминации.

Задача 7

Општиот етнички профил на Денвер го сочинуваат 42% припадници на малцинствата и 58% припадници на мнозинското население. Градот Денвер неодамна вработил 56 нови работници за одржување на зеленилото. Според законските одредби, изборот на нововработените работници треба да биде непристрасен. Сепак, само 25% од нововработените работници биле луѓе кои припаѓаат на малцинствата. Затоа незадоволните кандидати до градот Денвер доставиле приговор. Која е веројатноста дека најмногу 25% од нововработените работници припаѓаат на малцинствата, ако изборот е непристрасен и множеството на пријавени кандидати го отсликува етничкиот профил на Денвер.

Задача 7: Решение

- Нека случајната променлива X е дефинирана со: $X = 1$ ако вработениот припаѓа на малцинствата и $X = 0$ ако вработениот не припаѓа на малцинствата. Тогаш

$$p = P\{X = 1\} = 0.48 \text{ и } q = P\{X = 0\} = 0.52,$$

- $\mu = EX = p = 0.48$, $\sigma^2 = pq = 0.48 \cdot 0.52 = 0.2496$
- Нека $\hat{P}$ е пропорцијата на малцинства во целата популација.
- Обемот на примерокот $n > 30$, па $\hat{P}$ има приближно нормална распределба со математичко очекување

$$\mu_{\hat{P}} = p = 0.42$$

и дисперзија

$$\sigma_{\hat{P}} = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{(0.42)(0.58)}{56}} \approx 0.066$$

Задача 7: Решение

- Оттука, $$Z = \frac{\hat{P} - 0.42}{0.066} \quad \sim \quad N(0,1)$$

Се бара $P(\hat{P} \leq 0.25)$

$$P\{\hat{P} \leq 0.25\} \approx P\left\{Z \leq \frac{0.25 - 0.42}{0.066}\right\}$$

$$= P\{Z \leq -2.58\}$$

$$= 0.00494$$

Веројатноста дека пропорцијата на вработени припадници на малцинствата ќе биде 25% или помала, е помала од 0.5%. Тоа значи дека процесот на вработување можеби не е целосно непристрасен или множеството на пријавени кандидати не го отсликува етничкиот профил на Денвер.

Задача 8

Според Заводот за статистика, 85.2% од сите полнолетни граѓани на Скопје имаат завршено средно образование. Одреди ја веројатноста дека не повеќе од 80% од лицата во случаен примерок од вкупно 200 полнолетни граѓани на Скопје имаат завршено средно образование.

Задача 8: Решение

$$\mu_{\hat{P}} = p = 0.852$$

$$\sigma_{\hat{P}} = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{(0.852)(1-0.852)}{200}} \approx 0.0251$$

$$P\{\hat{P} < 0.800\} = P\left\{\frac{\hat{P}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} < \frac{0.800-0.852}{0.0251}\right\}$$

$$= P\{Z < -2.07\} = 0.0192$$

Задача 9

Заводот за статистика на САД објавил податоци за примањата по работен час на работниците во производство во повеќе држави. Според овие податоци, во Грција, работникот за еден час заработува 16.1 долари. Да претпоставиме дека Стопанската комора на Грција сака да знае колку е прецизен овој податок. Тие по случаен избор одбрале 25 работници од производство од целата држава. Колку е горната граница K за дисперзијата на примерокот за да веројатноста да се надмине оваа граница е 0.025, ако стандардната девијација на обележјето е 1.12.

Задача 9: Решение

- Се бара K така што $P\{S^2 > K\} = 0.025$.
- Од условите на задачата $\sigma = 1.12$, па $\sigma^2 = 1.2544$ и случајната променлива

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{24 \cdot S^2}{1.2544} \sim \chi^2_{24}$$

- Сега,

- $P\{S^2 > K\} = P\left\{\frac{(n-1)S^2}{1.2544} > \frac{24 \cdot K}{1.2544}\right\} = P\left\{\chi^2 > \frac{24 \cdot K}{1.2544}\right\} = 0.025$

- Оттука,

$$\frac{24 \cdot K}{1.2544} = \chi^2_{0.025,24} = 39.36$$

$$K = \frac{(39.36) \cdot (1.2544)}{(25-1)} = 2.57216$$