Бизнис статистика

Аудиториски вежби 7

Случајни променливи од дискретен тип

Задача 1

Еден стрелец два пати гаѓа во мета, при што веројатноста да ја погоди метата во едно гаѓање е 0.5.

Нека X е вкупен број на погодоци при двете гаѓања. Да се определи законот на распределба и функцијата на распределба на случајната променлива X.

***Решение*:** Множеството на елементарни настани да го означиме со:

$\Omega=\{(1,1),(1,0),(0,1),(0,0)\}$,

при што 0 значи промашување, а 1- погодок на мета. Сите елементарни настани се еднакво веројатни и нивната веројатност е ¼. Множеството вредности на X е $R_X=\{0,1,2\}$.

$$P\{X=0\} = P\{(0,0)\} = 1/4$$

$$P\{X=1\} = P\{(0,1),(1,0)\} = 1/2$$

$$P\{X=2\} = P\{(1,1)\} = ¼$$

Законот на распределба на X е: $X:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

Задача 1: продолжение

Функцијата на распределба на X е дефинирана со $F(x)=P\{X < x\}$, за $x \in R$.

$$x \le 0: F(x) = P(\varnothing) = 0$$

$$0 < x \le 1: F(x) = P\{X = 0\} = \frac{1}{4}$$

$$1 < x \le 2: F(x) = P\{X \in \{0,1\}\} = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} = \frac{3}{4}$$

$$x > 2: F(x) = P\{X \in \{0,1,2\}\} = P\{X \in R_x\} = 1$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{1}{4}, & 0 < x \le 1 \\ \frac{3}{4}, & 1 < x \le 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

Задача 2

Нека X е случајна променлива зададена со:

$$X : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ \frac{k}{4} & \frac{k}{3} & \frac{k}{3} & \frac{k}{4} \end{pmatrix}$$

Да се определи константата k.

Решение**:** За да имаме закон на распределба на случајната променлива X, сумата на веројатностите на X треба да е 1.

$$\frac{k}{4} + \frac{k}{3} + \frac{k}{3} + \frac{k}{4} = 1$$

$$2k(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}) = 2k\frac{7}{12} = 1$$

$$7k = 6, k = \frac{6}{7}$$

Математичко очекување, дисперзија и стандардна девијација на дискретна случајна променлива.

Задача 1

Да се пресмета математичкото очекување, дисперзијата и стандардната девијација на дискретна случајна променлива која означува вкупен број на точки на горната страна, при фрлање на две коцки на рамна површина.

Решение: Нека X означува вкупен број на точки на горната страна од двете коцки. $R_X = \{2,3,4,\ldots,12\}$.

Збир	Можни исходи					
2	(1,1)					
3	(1,2)	(2,1)				
4	(1,3)	(3,1)	(2,2)			
5	(1,4)	(4,1)	(2,3)	(3,2)		
6	(1,5)	(5,1)	(2,4)	(4,2)	(3,3)	
7	(1,6)	(6,1)	(2,5)	(5,2)	(3,4)	(4,3)
8	(2,6)	(6,2)	(3,5)	(5,3)	(4,4)	
9	(3,6)	(6,3)	(4,5)	(5,4)		
10	(4,6)	(6,4)	(5,5)			
11	(5,6)	(6,5)				
12	(6,6)					

x	$P\{X=x\}$
2	1/36
3	2/36
4	3/36
5	4/36
6	5/36
7	6/36
8	5/36
9	4/36
10	3/36
11	2/36
12	1/36

За математичкото очекување на X се добива:

$$EX = \sum_{x=2}^{12} xP\{X=x\} =$$

$$= 2\cdot\frac{1}{36} + 3\cdot\frac{2}{36} + 4\cdot\frac{3}{36} + 5\cdot\frac{4}{36} +$$

$$+6\cdot\frac{5}{36} + 7\cdot\frac{6}{36} + 8\cdot\frac{5}{36} + 9\cdot\frac{4}{36} +$$

$$+10\cdot\frac{3}{36} + \cdot 11\frac{2}{36} + 12\cdot\frac{1}{36} = \frac{252}{36} = 7$$

Задача 1: продолжение

За пресметување на дисперзијата на сл. променлива X имаме:

$$\boxed{\sigma^2 = \sum_x (x - EX)^2 P\{X = x\} = \sum_x (x-7)^2 P\{X = x\} = \frac{35}{6} = 5.83.}$$

- Во табелата се дадени потребните меѓурезултати за пресметување на дисперзијата.

x	$P\{X = x\}$	$(x\text{-}EX)^2$	$(x\text{-}EX)^2P\{X=x\}$
2	1/36	25	25/36
3	2/36	16	32/36
4	3/36	9	27/36
5	4/36	4	16/36
6	5/36	1	5/36
7	6/36	0	0
8	5/36	1	5/36
9	4/36	4	16/36
10	3/36	9	27/36
11	2/36	16	32/36
12	1/36	25	25/36

Задача 1: продолжение

- Втор начин: за пресметување на дисперзијата може да ја користиме формулата $\sigma^2 = DX = EX^2 - (EX)^2$ и податоците од следната табела:

x	$P\{X=x\}$	x^2	$x^2 P\{X=x\}$
2	1/36	4	4/36
3	2/36	9	18/36
4	3/36	16	48/36
5	4/36	25	100/36
6	5/36	36	180/36
7	6/36	49	294/36
8	5/36	64	320/36
9	4/36	81	324/36
10	3/36	100	300/36
11	2/36	121	242/36
12	1/36	144	144/36
			1974/36

За EX^2 и DX се добива:

$$EX^2 = \sum_x x^2 P\{X=x\} = \frac{1974}{36}$$

$$\sigma^2 = DX = EX^2 - (EX)^2$$

$$= \frac{1974}{36} - 7^2 = \frac{210}{36} = 5.83$$

Стандардната девијација на дискретната случајна променлива X се пресметува според формулата:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{DX} = 2.41$$

Задача 2

Во една кутија има 6 бели и 3 црни топчиња. Едно лице извлекува три топчиња и добива по 10 денари за секое извлечено бело топче и 20 денари за секое црно топче. Да се определи очекуваната заработувачка на лицето и нејзината дисперзија.

Решение: Нека случајната променлива X е остварената заработувачка. Тогаш

$$R_X = \{30, 40, 50, 60\}.$$

Добивка за бело топче = 10 ден.

Добивка за црно топче = 20 ден

Дефинираме настан A_i: извлечени се i бели и $3 - i$ црни топчиња, $i = 0,1,2,3$.

Задача 2: решение

$$P\{X=30\}=P(A_3)=\frac{C_6^3}{C_9^3}=\frac{20}{84}$$

$$P\{X=40\}=P(A_2)=\frac{C_6^2\cdot C_3^1}{C_9^3}=\frac{45}{84}$$

$$P\{X=50\}=P(A_1)=\frac{C_6^1\cdot C_3^2}{C_9^3}=\frac{18}{84}$$

$$P\{X=60\}=P(A_0)=\frac{C_3^3}{C_9^3}=\frac{1}{84}$$

$$X:\begin{pmatrix} 30 & 40 & 50 & 60 \\ \frac{20}{84} & \frac{45}{84} & \frac{18}{84} & \frac{1}{84} \end{pmatrix}$$

За математичкото очекување и дисперзијата на X се добива:

$$EX=30\cdot\frac{20}{84}+40\cdot\frac{45}{84}+50\cdot\frac{18}{84}+60\cdot\frac{1}{84}=40$$

$$EX^2=30^2\cdot\frac{20}{84}+40^2\cdot\frac{45}{84}+50^2\cdot\frac{18}{84}+60^2\cdot\frac{1}{84}=1650$$

$$DX=EX^2-(EX)^2=50$$

Задача 3

Нека X е бројот на случајно извлечена карта од шпил со 52 карти (A=1, J = 12, Q = 13, K=14). Да се определи законот на распределба на X.

Решение: X прима вредности од множеството

$$R_X=\{1, 2, ..., 9, 10 , 12, 13, 14\}$$

притоа $P\{X = i\}= 1/13$, за секое $i \in R_X$.

Според тоа, законот за распределба на веројатностите за X е даден со:

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 12 & 13 & 14 \\ 1/13 & 1/13 & 1/13 & 1/13 & 1/13 & 1/13 & 1/13 & 1/13 & 1/13 & 1/13 & 1/13 & 1/13 & 1/13 \end{pmatrix}$$

Задача 4

Колку е веројатноста за еден погодок во мета, ако во метата се гаѓа 8 пати и веројатноста за погодок во секој обид е 0.3 ?

Решение: Нека дефинираме настан A: погодок во мета при едно гаѓање, и случајна променлива X: број на погодоци во мета во сите 8 обиди.

Случајната променлива X го определува на бројот на појавување на настан A во серијата од 8 експерименти, каде $P(A)$=0.3. Затоа, X има биномна распределба B(8, 0.3).

$$P\{X=1\}=\binom{8}{1}0.3^1(1-0.3)^{8-1}=8\cdot 0.3\cdot 0.7^7=0.1976.$$

Веројатноста метата да биде погодена само еднаш е 0.1976.

Задача 5

Познато е дека 20 проценти од сите студенти на ФИНКИ, се активни спортисти. Ако се избере примерок од 10 студенти од оваа популација (под претпоставка дека примерокот се зема со враќање), да се определи веројатноста дека:

а) ниту еден нема да е активен спортист,

б) 5 или помалку се активни спортисти,

в) шест или повеќе се активни спортисти,

г) помеѓу 3 и 5 вклучително се активни спортисти,

д) Двајца, тројца или четворица се активни спортисти.

Задача 5: Решение

- Нека X е број на активни спортисти во групата од 10 студенти.
- X има биномна распределба $B(10, 0.2)$, односно n=10, p=0.2. Според Таблицата за биномна распределба, следи:

N	x	…	p=.20	p=.25	p=.30	p=.35	p=.40	p=.45	p=.50
10	0	…	0.1074	0.0563	0.0282	0.0135	0.0060	0.0025	0.0010
	1	…	0.2684	0.1877	0.1211	0.0725	0.0403	0.0207	0.0098
	2	…	0.3020	0.2816	0.2335	0.1757	0.1209	0.0763	0.0439
	3	…	0.2013	0.2503	0.2668	**0.2522**	0.2150	0.1665	0.1172
	4	…	0.0881	0.1460	0.2001	0.2377	0.2508	0.2384	0.2051
	5	…	0.0264	0.0584	0.1029	0.1536	0.2007	0.2340	0.2461
	6	…	0.0055	0.0162	0.0368	0.0689	0.1115	0.1596	0.2051
	7	…	0.0008	0.0031	0.0090	0.0212	0.0425	0.0746	0.1172
	8	…	0.0001	0.0004	0.0014	0.0043	0.0106	**0.0229**	0.0439
	9	…	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0016	0.0042	0.0098
	10	…	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0010

Задача 5: Решение - продолжение

а) $P\{X = 0\} = 0.1074.$

б) $P\{X \leq 5\} = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} + P\{X = 2\} +$

$+ P\{X = 3\} + P\{X = 4\} + P\{X = 5\}$

$= 0.1074 + 0.2684 + 0.3020 + 0.2013 + 0.0881 + 0.0264$

$= 0.9936.$

в) $P\{X \geq 6\} = 1 - P\{X \leq 5\} = 1 - 0.9936 = 0.0064.$

г) $P\{3 \leq X \leq 5\} = P\{X = 3\} + P\{X = 4\} + P\{X = 5\} =$

$= 0.2013 + 0.0881 + 0.0264 = 0.3158.$

д) $P\{X = 2\} + P\{X = 3\} + P\{X = 4\} = 0.3020 + 0.2013 + 0.0881 =$

$= 0.5914.$

Задача 6

Познато е дека претпладне до службата за информации стигаат просечно по 2 повици во еден саат. Ако претпоставиме дека повиците пристигнуваат независно еден од друг и не може да има повеќе од еден повик во мал временски интервал, да се пресмета веројатноста дека за еден саат ќе пристигнат 4 повици.

***Решение*:** Нека случајната променлива X е број на пристигнати повици за еден саат. Од условите во задачата јасно е дека X има Пуасонова распределба и притоа

$$P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, k = 0,1,\ldots$$

Бидејќи просечниот број на повици во еден саат е 2, (т.е. $\lambda = 2$), бараната веројатност е $P\{X = 4\} = (2^4 \cdot e^{-2})/4! = 0.09$.

Задача 7

Бројот на компоненти на еден компјутер кои откажуваат во текот на една година е случајна променлива X со Пуасонова распределба со параметар 5. Колку е веројатноста:

а) во случајно избрана година да откажат најмногу две компоненти;

б) да откажат барем две компоненти во текот на еден месец?

Решение.

а) Веројатност да откажат најмногу две компоненти во случајно избрана година е:

$$P\{X \le 2\} = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} + P\{X = 2\} =$$

$$= \frac{5^0}{0!}e^{-5} + \frac{5^1}{1!}e^{-5} + \frac{5^2}{2!}e^{-5} = e^{-5}(1+5+12.5) = \frac{18.5}{e^5} = 0.125$$

Задача 7: Решение а) со Таблица на Пуасонова распределба

	λ									
X	**4.1**	**4.2**	**4.3**	**4.4**	**4.5**	**4.6**	**4.7**	**4.8**	**4.9**	**5.0**
0	0.0166	0.0150	0.0136	0.0123	0.0111	0.0101	0.0091	0.0082	0.0074	0.0067
1	0.0679	0.0630	0.0583	0.0540	0.0500	0.0462	0.0427	0.0395	0.0365	0.0337
2	0.1393	0.1323	0.1254	0.1188	0.1125	0.1063	0.1005	0.0948	0.0894	0.0842
3	0.1904	0.1852	0.1798	0.1743	0.1687	0.1631	0.1574	0.1517	0.1460	0.1404
4	0.1951	0.1944	0.1933	0.1917	0.1898	0.1875	0.1849	0.1820	0.1789	0.1755
5	0.1600	0.1633	0.1662	0.1687	0.1708	0.1725	0.1738	0.1747	0.1753	0.1755
6	0.1093	0.1143	0.1191	0.1237	0.1281	0.1323	0.1362	0.1398	0.1432	0.1462
7	0.0640	0.0686	0.0732	0.0778	0.0824	0.0869	0.0914	0.0959	0.1002	0.1044
8	0.0328	0.0360	0.0393	0.0428	0.0463	0.0500	0.0537	0.0575	0.0614	0.0653
9	0.0150	0.0168	0.0188	0.0209	0.0232	0.0255	0.0280	0.0307	0.0334	0.0363
10	0.0061	0.0071	0.0081	0.0092	0.0104	0.0118	0.0132	0.0147	0.0164	0.0181
11	0.0023	0.0027	0.0032	0.0037	0.0043	0.0049	0.0056	0.0064	0.0073	0.0082
12	0.0008	0.0009	0.0011	0.0014	0.0016	0.0019	0.0022	0.0026	0.0030	0.0034
13	0.0002	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006	0.0007	0.0008	0.0009	0.0011	0.0013
14	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004	0.0005
15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002

$$P\{X \leq 2\} = P\{X=0\} + P\{X=1\} + P\{X=2\}$$

$$= 0.0067 + 0.0337 + 0.0842 = 0.125$$

Задача 7: Решение б)

Колку е веројатноста да откажат барем две компоненти во текот на еден месец?

Решение.

Бидејќи X има Пуасонова распределба со параметар $\lambda = 5$, т.е. просечниот број на компоненти кои откажуваат во текот на една година е 5. Бројот на компоненти кои откажуваат во тек на еден месец е случајна променлива Y со Пуасонова распределба со параметар $\lambda = 5/12$:

$$P\{Y \geq 2\} = 1 - P\{Y < 2\} = 1 - (P\{Y = 0\} + P\{Y = 1\}) =$$

$$= 1 - \frac{\left(\frac{5}{12}\right)^0}{0!} e^{-\frac{5}{12}} - \frac{\left(\frac{5}{12}\right)^1}{1!} e^{-\frac{5}{12}} = 1 - e^{-\frac{5}{12}}\left(1 + \frac{5}{12}\right) = 0.066$$

Задача 8

Да претпоставиме дека во еден шешир има 50 топчиња: 5 бели и 45 црни. На случаен начин се извлекуваат 10 топчиња. Колкава е веројатноста дека од 10-те извлечени топчиња, 4 ќе бидат бели?

Решение: Според условите во задачата случајната променлива X - број на извлечени бели топчиња има хипергеометриска распределба со параметри $n = 50$, $k = 10$, $m = 5$.

Множеството вредности на X е

$$R_X = \{\max\{0, m + k - n\}, \ldots, \min\{m, k\}\},$$

па за овој експеримент $R_X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Задача 8: Решение

$$P\{X=i\}=\frac{\binom{m}{i}\binom{n-m}{k-i}}{\binom{n}{k}},\quad i\in R_X.$$

$$P\{X=4\}=\frac{C_5^4 C_{45}^6}{C_{50}^{10}}=\frac{\frac{5!}{4!\cdot 1!}\cdot\frac{45!}{6!\cdot 39!}}{\frac{50!}{10!\cdot 40!}}=0.003965$$

Веројатноста дека од 10-те извлечени топчиња, 4 ќе бидат бели е 0.003965.

Задача 9

Од шпил со 52 карти се извлекува една карта и ако картата не е дама, се враќа во шпилот. Извлекувањето продолжува се додека не се извлече дама. Нека случајната променлива X е бројот на извлекувања сѐ додека не се извлече дама. Каква распределба има случајната променлива X? Колку е веројатноста:

а) барем три пати да се извлекува карта;

б) најмногу два пати да се извлекува карта?

Решение: Нека X: број на извлекувања сѐ додека не се извлече дама. Веројатноста да се извлече дама при извлекување на една карта е

$$p = \frac{C_4^1}{C_{52}^1} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}.$$

X има геометриска распределба со параметар $p = 1/13$.

Задача 9: Решение а)

$$P\{X=k\}=\left(\frac{12}{13}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{13}\right),\quad k\in\{1,2,3,\ldots\}$$

а) $P\{X\geq 3\}=1-P\{X<3\}=1-P\{X=1\}-P\{X=2\}=$

$$=1-\frac{1}{13}-\frac{12}{13}\cdot\frac{1}{13}=\frac{144}{169}=0.852.$$

Веројатноста дека барем три пати ќе се извлекува карта е 0.852.

Задача 9: Решение б)

б) најмногу два пати да се извлекува карта.

$$P\{X \le 2\} = 1 - P\{X \ge 3\} = 1 - 0.852 = 0.148.$$

Веројатноста дека ќе бидат потребни најмногу две извлекувања е 0.148.

Да забележиме дека настанот под б) е спротивен на настанот под а), па неговата веројатност може да се пресмета и со: $P\{X\le 2\}=1-P\{X>2\}=1-P\{X\ge 3\}=1-0.852=0.148$.

Задача 10

На рутата на движење на еден тркачки велосипедист се наоѓаат четири препреки. Секоја од нив велосипедистот ја поминува со веројатност $p = 0.4$, а со веројатност $q = 0.6$ не успева да ја помине и ја завршува трката. Велосипедистот ги поминува препреките независно една од друга. Нека сл. променлива X е број на препреки кои велосипедистот успешно ги поминал до крајот на трката.

а) Да се определи законот на распределба на случајната променлива X;

б) Да се пресмета математичко очекување и дисперзија на X.

Решение: Множеството вредности на случајната променлива X е $R_X = \{0,1,2,3,4\}$. Ги дефинираме следните настани:

A_i : Велосипедистот успешно ја поминува i-тата препрека, $i = 1,2,3,4$.

Настаните A_i се независни.

Задача 10: продолжение

Решение:

$R_X = \{0,1,2,3,4\}$.

A_i : Велосипедистот успешно ја поминува i-тата препрека, i =1,2,3,4.

$$P\{X=0\}=P(\bar{A}_1)=0.6$$

$$P\{X=1\}=P(A_1\bar{A}_2)=0.4\cdot 0.6=0.24$$

$$P\{X=2\}=P(A_1A_2\bar{A}_3)=0.4^2\cdot 0.6=0.096$$

$$P\{X=3\}=P(A_1A_2A_3\bar{A}_4)=0.4^3\cdot 0.6=0.0384$$

$$P\{X=4\}=P(A_1A_2A_3A_4)=0.4^4=0.0256$$

$$X:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0.6 & 0.24 & 0.096 & 0.0384 & 0.0256 \end{pmatrix}$$

$$EX=0\cdot 0.6+1\cdot 0.24+2\cdot 0.096+3\cdot 0.0384+4\cdot 0.0256=0.6496$$

$$EX^2=0\cdot 0.6+1\cdot 0.24+4\cdot 0.096+9\cdot 0.0384+16\cdot 0.0256=1.3792$$

$$DX=EX^2-(EX)^2=0.9572$$

Задача 11

Стрелец гаѓа во мета додека не погоди два пати или додека не промаши три пати. Веројатноста да ја погоди целта е 0.4, а сите гаѓања се независни и при исти услови. Нека X е бројот на гаѓања, а Y е бројот на погодоци.

а) Да се определат заедничките веројатности на случајните променливи X и Y

б) Да се најдат законот и функцијата на распределба на случајните променливи X и Y,

в) Колку е веројатноста стрелецот да гаѓа најмногу три пати;

г) Колку е веројатноста стрелецот да погоди барем еднаш?

д) Да се провери независноста на случајните променливи X и Y.

***Решение*:** Ги воведуваме следните ознаки:

0 - при едно гаѓање целта е промашена, а

1 - при едно гаѓање целта е погодена.

Ω={(11), (000), (101), (1001), (011), (0011), (0101), (0100), (0010), (1000)}.

Задача 11: Решение а)

а) Треба да се определат заедничките веројатности:

$$P\{\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\}\},$$

за секој $x_i \in \{2,3,4\}$ и $y_j \in \{0, 1, 2\}$.

Ω={(11), (000), (101), (1001), (011), (0011), (0101), (0100), (0010), (1000)}

$P\{\{X = 2\}\cap\{Y = 0\}\} = 0$

$P\{\{X = 2\}\cap\{Y = 1\}\} = 0$

$P\{\{X = 2\}\cap\{Y = 2\}\} = P\{(11)\} = 0.4^2 = 0.16$

$P\{\{X = 3\}\cap\{Y = 0\}\} = P\{(000)\} = 0.6^3 = 0.216$

$P\{\{X = 3\}\cap\{Y = 1\}\} = 0$

$P\{\{X = 3\}\cap\{Y = 2\}\} = P\{(101), (011)\} = 0.4^2 \cdot 0.6 \cdot 2 = 0.192$

$P\{\{X = 4\}\cap\{Y = 0\}\} = 0$

$P\{\{X = 4\}\cap\{Y = 1\}\} = P\{(0100), (0010), (1000)\} = 3 \cdot 0.4 \cdot 0.6^3 = 0.2592$

$P\{\{X = 4\}\cap\{Y = 2\}\} = P\{(1001), (0011), (0101)\} = 3 \cdot 0.4^2 \cdot 0.6^2 = 0.1728$

Задача 11: Решение б)

Табелата на заеднички веројатности е следната

$X \backslash Y$	$\{Y=0\}$	$\{Y=1\}$	$\{Y=2\}$	Маргинални верој.
$\{X=2\}$	0	0	0.16	0.16
$\{X=3\}$	0.216	0	0.192	0.408
$\{X=4\}$	0	0.2592	0.1728	0.432
Маргинални верој.	0.216	0.2592	0.5248	1.000

- Сега, маргиналните закони на распределба на X и на Y може да се добијат од табелата на заеднички веројатности. Имено.

$$X:\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0.16 & 0.408 & 0.432 \end{pmatrix} \qquad Y:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.216 & 0.2592 & 0.5248 \end{pmatrix}$$

Задача 11: Решение б)

Функцијата на распределба на X е дефинирана со $F(x)=P\{X < x\}$, за $x \in R$.

$$x \le 2 : F(x) = P(\varnothing) = 0$$

$$2 < x \le 3 : F(x) = P\{X = 2\} = 0.16$$

$$3 < x \le 4 : F(x) = P\{X \in \{2,3\}\} = P\{X = 2\} + P\{X = 3\} = 0.16 + 0.432 = 0.568$$

$$x > 4 : F(x) = P\{X \in \{2,3,4\}\} = P\{X \in R_X\} = 1$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2 \\ 0.16, & 2 < x \le 3 \\ 0.568, & 3 < x \le 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}$$

Задача 11: Решение б)

Функцијата на распределба на Y е дефинирана со $F(x)=P\{Y<x\}$, за $x\in R$.

$$x\le 0: F(x)=P(\varnothing)=0$$

$$0<x\le 1: F(x)=P\{Y=0\}=0.216$$

$$1<x\le 2: F(x)=P\{Y\in\{0,1\}\}=$$

$$P\{Y=0\}+P\{Y=1\}=0.216+0.2592=0.4752$$

$$x>2: \quad F(x)=P\{Y\in\{0,1,2\}\}=P\{Y\in R_Y\}=1$$

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ 0.216, & 0<x\le 1 \\ 0.4752, & 1<x\le 2 \\ 1, & x>2 \end{cases}$$

Задача 11: Решение в), г)

в) Веројатноста стрелецот да гаѓа најмногу три пати е:

$$P\{X \leq 3\} = P\{X = 2\} + P\{X = 3\} = 0.16 + 0.408 = 0.568.$$

г) Веројатноста стрелецот да погоди барем еднаш е:

$$P\{Y \geq 1\} = P\{Y = 1\} + P\{Y = 2\} = 0.2592 + 0.5248 = 0.784$$

$$X : \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0.16 & 0.408 & 0.432 \end{pmatrix} \qquad Y : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.216 & 0.2592 & 0.5248 \end{pmatrix}$$

Задача 11: Решение д)

Табелата на заеднички веројатности е следната

X \ Y	$\{Y=0\}$	$\{Y=1\}$	$\{Y=2\}$	Маргинални вероj.
$\{X=2\}$	0	0	0.16	0.16
$\{X=3\}$	0.216	0	0.192	0.408
$\{X=4\}$	0	0.2592	0.1728	0.432
Маргинални вероj.	0.216	0.2592	0.5248	1.000

Треба да провериме дали е задоволен условот $P\{\{X=x_i\} \cap \{Y=y_j\}\} = P\{X=x_i\}\, P\{Y=y_j\}$, за секој $x_i \in \{2,3,4\}$ и $y_j \in \{0, 1, 2\}$.

Ако за барем еден пар x_i и y_j условот не е исполнет, може да заклучиме дека X и Y не се независни случајни променливи.

За $x_i = 2$ и $y_j = 0$: $P\{\{X=2\} \cap \{Y=0\}\} = 0 \neq 0.16 \cdot 0.216 = P\{X=2\}\, P\{Y=0\}$, па заклучуваме дека X и Y не се независни случајни променливи.