Бизнис статистика

Тестирање на хипотези – две обележја

Вовед

- Во ова предавање ќе разгледаме статистички тестови за параметарски хипотези во кои се споредуваат вредностите на некој параметар за две обележја.
- Ќе ги разгледаме следните тестови:
  - тест за еднаквост на дисперзии на две независни обележја со нормална распределба
  - тест за еднаквост на математички очекувања на две независни обележја
    - со нормална распределба со познати и непознати дисперзии и мали примероци
    - со произволна распределба со познати и непознати дисперзии и големи примероци
  - тест за еднаквост на математички очекувања на две зависни обележја, чија разлика е нормално распределена.

ТЕСТ ЗА ЕДНАКВОСТ НА ДИСПЕРЗИИ (СТАНДАРДНИ ДЕВИЈАЦИИ) НА ДВЕ НЕЗАВИСНИ ОБЕЛЕЖЈА СО НОРМАЛНИ РАСПРЕДЕЛБИ

Тестирање на еднаквост на дисперзии на две независни обележја со нормални распределби

- Нека X и Y се две статистички обележја на две независни популации од интерес и нека нивните распределби се $N(\mu_X, \sigma_X^2)$ и $N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$, соодветно, при што параметрите се непознати.
- Врз база на два независни случајни примероци со обем n и m соодветно сакаме да ја тестираме нултата хипотеза

$$H_0: \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$$

наспроти една од алтернативните хипотези

$$H_a: \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2 \quad \text{или} \quad H_a: \sigma_X^2 > \sigma_Y^2 \quad \text{или} \quad H_a: \sigma_X^2 < \sigma_Y^2$$

- Нека S_X^2 и S_Y^2 се соодветните дисперзии на двата примероци.

Тестирање на еднаквост на дисперзии на две независни обележја со нормални распределби

- Ако е точна нултата хипотеза статистиката

$$F_0 = \frac{S_X^2}{S_Y^2}$$

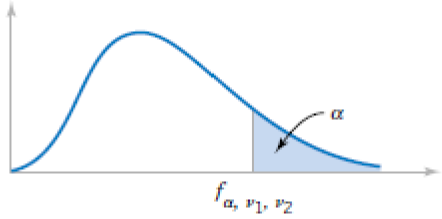
има Фишерова F-распределба со $n-1$ степени на слобода во броителот и $m-1$ степени на слобода во именителот и критичните домени ќе ги дефинираме преку оваа распределба. Означуваме со $F_{n-1,m-1}$.

- Постојат таблици за F-распределба од кои за дадени степени на слобода во броителот ν_1, степени на слобода во именителот ν_2 и дадено α, се чита вредноста f_{α,ν_1,ν_2} така што $P\{F > f_{\alpha,\nu_1,\nu_2}\} = \alpha$, каде што F е случајна променлива која има F_{ν_1,ν_2} распределба.

Таблица за F-распределба за $\alpha = 0.025$

$f_{0.025,\nu_1,\nu_2}$

ν_2 \ ν_1 (Degrees of freedom for the denominator (ν_2))	Degrees of freedom for the numerator (ν_1)																		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	647.8	799.5	864.2	899.6	921.8	937.1	948.2	956.7	963.3	968.6	976.7	984.9	993.1	997.2	1001	1006	1010	1014	1018
2	38.51	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40	39.41	39.43	39.45	39.46	39.46	39.47	39.48	39.49	39.50
3	17.44	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42	14.34	14.25	14.17	14.12	14.08	14.04	13.99	13.95	13.90
4	12.22	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84	8.75	8.66	8.56	8.51	8.46	8.41	8.36	8.31	8.26
5	10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62	6.52	6.43	6.33	6.28	6.23	6.18	6.12	6.07	6.02
6	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46	5.37	5.27	5.17	5.12	5.07	5.01	4.96	4.90	4.85
7	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76	4.67	4.57	4.47	4.42	4.36	4.31	4.25	4.20	4.14
8	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30	4.20	4.10	4.00	3.95	3.89	3.84	3.78	3.73	3.67
9	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96	3.87	3.77	3.67	3.61	3.56	3.51	3.45	3.39	3.33
10	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72	3.62	3.52	3.42	3.37	3.31	3.26	3.20	3.14	3.08
11	6.72	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.59	3.53	3.43	3.33	3.23	3.17	3.12	3.06	3.00	2.94	2.88
12	6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37	3.28	3.18	3.07	3.02	2.96	2.91	2.85	2.79	2.72
13	6.41	4.97	4.35	4.00	3.77	3.60	3.48	3.39	3.31	3.25	3.15	3.05	2.95	2.89	2.84	2.78	2.72	2.66	2.60
14	6.30	4.86	4.24	3.89	3.66	3.50	3.38	3.29	3.21	3.15	3.05	2.95	2.84	2.79	2.73	2.67	2.61	2.55	2.49
15	6.20	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06	2.96	2.86	2.76	2.70	2.64	2.59	2.52	2.46	2.40
16	6.12	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99	2.89	2.79	2.68	2.63	2.57	2.51	2.45	2.38	2.32
17	6.04	4.62	4.01	3.66	3.44	3.28	3.16	3.06	2.98	2.92	2.82	2.72	2.62	2.56	2.50	2.44	2.38	2.32	2.25
18	5.98	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	2.87	2.77	2.67	2.56	2.50	2.44	2.38	2.32	2.26	2.19
19	5.92	4.51	3.90	3.56	3.33	3.17	3.05	2.96	2.88	2.82	2.72	2.62	2.51	2.45	2.39	2.33	2.27	2.20	2.13
20	5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77	2.68	2.57	2.46	2.41	2.35	2.29	2.22	2.16	2.09
21	5.83	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80	2.73	2.64	2.53	2.42	2.37	2.31	2.25	2.18	2.11	2.04
22	5.79	4.38	3.78	3.44	3.22	3.05	2.93	2.84	2.76	2.70	2.60	2.50	2.39	2.33	2.27	2.21	2.14	2.08	2.00
23	5.75	4.35	3.75	3.41	3.18	3.02	2.90	2.81	2.73	2.67	2.57	2.47	2.36	2.30	2.24	2.18	2.11	2.04	1.97
24	5.72	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64	2.54	2.44	2.33	2.27	2.21	2.15	2.08	2.01	1.94
25	5.69	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61	2.51	2.41	2.30	2.24	2.18	2.12	2.05	1.98	1.91
26	5.66	4.27	3.67	3.33	3.10	2.94	2.82	2.73	2.65	2.59	2.49	2.39	2.28	2.22	2.16	2.09	2.03	1.95	1.88
27	5.63	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.63	2.57	2.47	2.36	2.25	2.19	2.13	2.07	2.00	1.93	1.85
28	5.61	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.61	2.55	2.45	2.34	2.23	2.17	2.11	2.05	1.98	1.91	1.83



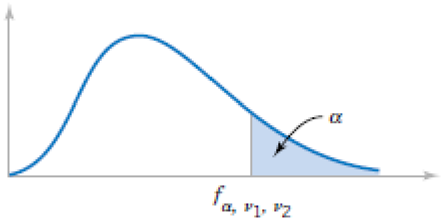
$f_{0.025,10,5} = 6.62$

Таблица за F-распределба за $\alpha = 0{,}05$

$f_{0.05,\nu_1,\nu_2}$

ν_2 \ ν_1	Degrees of freedom for the numerator (ν_1)																		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	240.5	241.9	243.9	245.9	248.0	249.1	250.1	251.1	252.2	253.3	254.3
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.41	19.43	19.45	19.45	19.46	19.47	19.48	19.49	19.50
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.36
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76

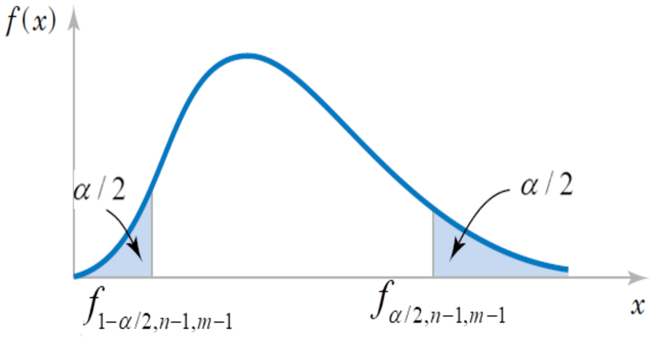
Degrees of freedom for the denominator (ν_2)



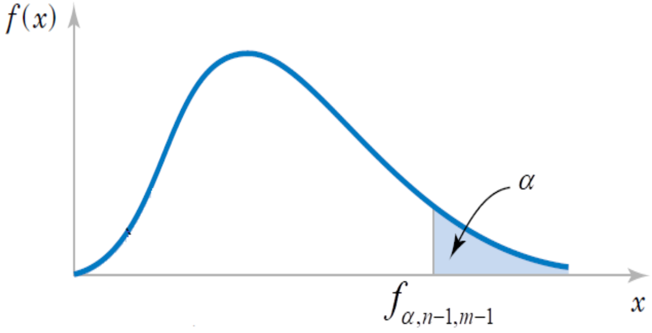
$f_{0.05,5,10} = 3.33$

Тестирање на еднаквост на дисперзии на две независни обележја со нормални распределби

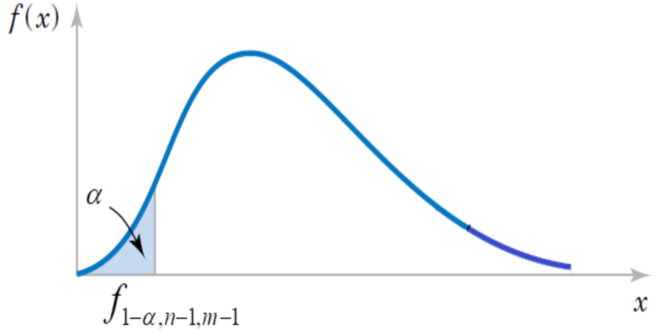
- Исто како и кај претходните тестови, критичниот домен зависи од алтернативната хипотеза.
  - За H_a: $\sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$, критичниот домен е
  $$C = (0,\, f_{1-\alpha/2,n-1,m-1}) \cup (f_{\alpha/2,n-1,m-1},\, +\infty)$$
  - За H_a: $\sigma_X^2 > \sigma_Y^2$, критичниот домен е $C = (f_{\alpha,n-1,m-1},\, +\infty)$.
  - За H_a: $\sigma_X^2 < \sigma_Y^2$, критичниот домен е $C = (0,\, f_{1-\alpha,n-1,m-1})$.



H_a: $\sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$



H_a: $\sigma_X^2 > \sigma_Y^2$



H_a: $\sigma_X^2 < \sigma_Y^2$

Тестирање на еднаквост на дисперзии на две независни обележја со нормални распределби

- Проблем кај овие тестови може се јави при определување на критичниот домен кога треба да се прочита вредноста од таблица за F – распределба.
- Таблици за F – распределба има само за неколку (главно помали) вредности на α.
- Затоа, определувањето на критичниот домен, кога алтернативната хипотеза е $H_a: \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$ или $H_a: \sigma_X^2 < \sigma_Y^2$ не може да се направи директно.
- Но, тогаш може да се искористи следното равенство за вредностите на F – распределбите. Имено,

$$f_{1-\alpha,m,n} = \frac{1}{f_{\alpha,n,m}}.$$

Пример 1

Една од мерките за квалитет на лентите за мерење на гликоза во крвта е конзистентноста на резултатите од тестот на ист примерок на крв. Конзистентноста се мери со дисперзијата на отчитувањата при повторено тестирање.

Да претпоставиме дека се споредуваат два вида ленти, A и B, за нивната конзистентност. За тестирање биле земени 16 ленти од типот A тестирани со капки крв од една епрувета (претходно добро промешана) и добиена е дисперзија $s_X^2 = 2.09$ и 21 лента од типот B биле тестирани со капки крв од истата епрувета и добиена е дисперзија $s_Y^2 = 1.1$.

Се претпоставува дека двата примероци се земени за обележја со нормална распределба.

Со ниво на значајност од 0.1, да се тестира дали конзистентноста на двата вида ленти е еднаква.

Пример 1 - решение

Решение: Ги поставуваме следните хипотези:

$$H_0: \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$$

$$H_a: \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$$

- За вредноста на тест статистиката се добива:

$$f_0 = \frac{s_X^2}{s_Y^2} = \frac{2.09}{1.1} = 1.9$$

- Критичниот домен е од облик:

$$C = (0, f_{1-\alpha/2,n-1,m-1}) \cup (f_{\alpha/2,n-1,m-1}, +\infty)$$

- Вредноста $f_{0.05,15,20} = 2.20$ се чита од таблица за F – распределба.
- За $f_{0.95,15,20}$ го користиме следното равенство:

$$f_{0.95,15,20} = \frac{1}{f_{0.05,20,15}} = \frac{1}{2.33} = 0.43.$$

Пример 1 - решение

- Според тоа, се добива дека критичниот домен е:

$$C = (0, 0.43) \cup (2.20, +\infty)$$

- Вредноста на тест статистиката $f_0 = 1.9 \notin C$, па заклучуваме дека нултата хипотеза не се отфрла.
- Значи, конзистентноста на двата типа ленти е еднаква.

ТЕСТ ЗА МАТЕМАТИЧКИ ОЧЕКУВАЊА НА ДВЕ НЕЗАВИСНИ ОБЕЛЕЖЈА

Тестирање на еднаквост на математички очекувања на две независни статистички обележја

- Нека $\boldsymbol{X} = (X_1,\ldots X_n)$ е случаен примерок од обележје X мерено на една популација и $\boldsymbol{Y} = (Y_1, \ldots, Y_m)$ – случаен примерок за обележје Y мерено на друга популација при што μ_X и μ_Y се математичките очекувања на X и Y, соодветно, и тие се непознати.
- Може да тестираме некоја од следниве комбинации на нулта и алтернативна хипотеза

$$H_0: \mu_X = \mu_Y \qquad H_0: \mu_X = \mu_Y \text{ (или } \mu_X \leq \mu_Y) \qquad H_0: \mu_X = \mu_Y \text{ (или } \mu_X \geq \mu_Y)$$

$$H_a: \mu_X \neq \mu_Y \qquad H_a: \mu_X > \mu_Y \qquad H_a: \mu_X < \mu_Y$$

- Тврдењата во хипотезите може да се изразат и преку разликата на μ_X и μ_Y, на пример

$$H_0: \mu_X - \mu_Y = 0 \quad (\mu_X = \mu_Y)$$

$$H_a: \mu_X - \mu_Y > 0 \quad (\mu_X > \mu_Y)$$

- Разликуваме два случаи
  - мали примероци за обележја со нормални распределби со познати и непознати стандардни девијации и
  - големи примероци за обележја со познати и непознати стандардни девијации.

$X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$, $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$, дисперзиите σ_X^2 и σ_Y^2 се познати, а n, $m < 30$

- Нека $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$, а $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$, пришто дисперзиите σ_X^2 и σ_Y^2 се познати, а n, $m < 30$ (примероците се мали). За тестирање во овој случај, се користи следната тест статистиката

$$Z_0 = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{(\sigma_X^2 / n) + (\sigma_Y^2 / m)}}$$

која ако е точна нултата хипотеза има нормална $N(0,1)$ распределба.

- Критичниот домен зависи од алтернативната хипотеза и се чита од таблица на нормална нормирана распределба ($C = (-\infty, -z_{\alpha/2}) \cup (z_{\alpha/2}, +\infty)$ или $C = (z_\alpha, +\infty)$ или $C = (-\infty, -z_\alpha)$).

$X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$, $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$, дисперзиите σ_X^2 и σ_Y^2 се непознати, а n, $m < 30$

- Ако имаме мали примероци за обележја $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$, $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ и притоа дисперзиите не се познати, но се еднакви, односно $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2$, тогаш заедничката дисперзија ќе ја оцениме со статистиката

$$S_p^2 = \frac{(n-1)S_X^2 + (m-1)S_Y^2}{n+m-2}$$

и кога е точна нултата хипотеза, статистиката

$$T_0 = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_p\sqrt{(1/n)+(1/m)}}$$

има t-распределба со $n + m - 2$ степени на слобода.

- Користејќи го овој факт ги определуваме соодветните критични домени за t-тест.
- Зависно од алтернативната хипотеза за критичниот домен добиваме:

$C = (-\infty, -t_{\alpha/2,\, n+m-2}) \cup (t_{\alpha/2,\, n+m-2}, +\infty)$ или $C = (t_{\alpha,\, n+m-2}, +\infty)$ или $C = (-\infty, -t_{\alpha,\, n+m-2})$.

$X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$, $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$, дисперзиите σ_X^2 и σ_Y^2 се непознати, а n, $m < 30$

- Претпоставката за овој тест е дека дисперзиите на двете обележја се еднакви, т.е. $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2$.
- Но, со оглед на тоа што дисперзиите се непознати, се поставува прашање, како ќе знаеме дали тие се еднакви?
- Во ваков случај, прво се спроведува тест за еднаквост на дисперзии.
  - Ако овој тест помине, тогаш може да се пристапи кон тестот за еднаквост на математичките очекувања.
  - Во спротивно, тестот за еднаквост на математички очекувања нема да даде релевантни резултати.
- Забелешка: Бидејќи во таблицата за t распределба има вредности само за степени на слобода ≤ 30, доколку $n + m - 2$ е поголемо од 30 (n, $m < 30$), при определување на критичниот домен може да користиме дека во овој случај $t_{\alpha,n+m-2}$ е приближно еднакво на z_α (т.е. во овој случај вредностите може да ги читате од таблицата за $N(0, 1)$).

Произволна распределба на X и Y, $m, n \geq 30$

- Кога станува збор за големи примероци повторно ја користиме централна гранична теорема.
- Ако дисперзиите на обележјата се познати, тогаш ја користиме статистиката

$$Z_0 = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{(\sigma_X^2 / n) + (\sigma_Y^2 / m)}}$$

- Ако дисперзиите на обележјата се непознати, тест статистиката е

$$Z_0 = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{(S_X^2 / n) + (S_Y^2 / m)}}$$

- Во двата случаи, кога е точна нултата хипотеза, статистиката Z_0 има приближно $N(0,1)$ распределба, па за тестирањето се користат критичните домени со z-вредности.

Пример 2

Примерок од 87 вработени жени покажува дека нивната просечната уплата во приватен пензиски фонд е 3352 ден., со стандардната девијација од 1100 ден. За примерок од 76 вработени мажи добиено е дека нивната просечната уплата во приватен пензиски фонд е 5727 ден., а стандардната девијација на уплатата е 1700 ден.. Група активисти за правата на жените сака да “докаже” дека жените плаќаат колку и мажите во приватните пензиски фондови, а не помалку од мажите. Со ниво на значајност $\alpha = 0.1$ да се тестира хипотезата дека жените просечно плаќаат исто колку што и мажите во приватните пензиски фондови, наспроти хипотезата дека плаќаат помалку.

Решение: Нека X е обележјето - висина на уплата во пензиски фонд на жените, а Y обележјето - висина на уплата во пензиски фонд на мажите. Дадените примероци имаат обем поголем од 30 и дисперзиите не се познати.

Пример 2

- Ги поставуваме следните хипотези

$$H_0\colon \mu_X = \mu_Y$$
$$H_a\colon \mu_X < \mu_Y$$

- Бидејќи дисперзиите на обележјата не се познати, но имаме големи примероци се користи следната тест статистика

$$Z_0 = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{(S_X^2 / n) + (S_Y^2 / m)}}$$

- Вредноста на оваа хипотеза, во конкретниот случај е

$\bar{x} = 3352 \qquad \bar{y} = 5727$

$s_X = 1100 \qquad s_Y = 1700$

$n = 87 \qquad m = 76$

$$z_0 = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{(s_X^2 / n) + (s_Y^2 / m)}} = \frac{3352 - 5727}{\sqrt{(1100^2 / 87) + (1700^2 / 76)}} = -10.42$$

Од таблица читаме $z_\alpha = z_{0.1}$ така што $\Phi(z_{0.1}) = 1 - 0.1 = 0.9$. Наоѓаме $z_{0.1} = 1.28$. Значи, критичниот домен е $C = (-\infty, -1.28)$. Вредноста на тест статистиката $z_0 = -10.42 \in C$, па H_0 се отфрла.

Со ниво на значајност $\alpha = 0.1$, заклучуваме дека жените во просек плаќаат помалку од мажите.

Пример 3

При вработувањето во една компанија, нововработените треба да поминат тридневен семинар за запознавање со компанијата кој се состои од предавања и дискусија (Метод А). Потоа прават тест на стекнатите знаења. Бидејќи ваков метод на учење е доста скап, компанијата решила да проба нововработените да поминат по 2 дена во самостојно следење на видео предавања без делот за дискусија (Метод В). Меѓутоа постои сомневање дека новиот метод дава полоши резултати на тестот. Затоа тестирани се 15 нововработени кои следеле настава со метод А и 12 нововработени кои следеле настава со методот В. Во табелите дадени се резултатите на тестот за двете групи.

Метод А		
56	51	45
47	52	43
42	53	52
50	42	48
47	44	44

Метод В		
59	57	53
52	56	65
53	55	53
54	64	57

Со ниво на значајност од 0.05 менаџерите сакаат да проверат дали има значајна разлика во просечните резултати на тестот на двете групи. Познато е дека дисперзиите на резултатите за двата метода се исти, и резултатите се нормално распределени.

Пример 3 (решение)

Нека X е обележјето – резултат на тестот на вработен кој следел настава со метод А, а Y обележјето - резултат на тестот на вработен кој следел настава со метод В.

Метод А		
56	51	45
47	52	43
42	53	52
50	42	48
47	44	44

Метод В		
59	57	53
52	56	65
53	55	53
54	64	57

H_0: $\mu_X = \mu_Y$

H_a: $\mu_X \neq \mu_Y$

$n = 15$, $\bar{x} = 47.73$, $s_X^2 = 19.495$

$m = 12$, $\bar{y} = 56.5$, $s_Y^2 = 18.273$

$$s_p^2 = \frac{(n-1)s_X^2 + (m-1)s_Y^2}{n+m-2} = \frac{(15-1)\cdot 19.495 + (12-1)18.273}{15+12-2} = 18.96$$

$$t_0 = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{s_p\sqrt{(1/n)+(1/m)}} = \frac{47.73 - 56.5}{\sqrt{18.96}\cdot\sqrt{(1/15)+(1/12)}} = -5.2$$

Од таблица за t-распределба, се чита $t_{\alpha/2,\, m+n-2} = t_{0,025,\, 25} = 2.06$.
Значи, критичниот домен е $C = (-\infty, -2{,}06) \cup (2.06, +\infty)$.
Вредноста на тест статистиката $t_0 = -5.2 \in C$, па H_0 се отфрла. Заклучуваме дека има разлика во просечните резултати на тестот на двете групи.

ТЕСТ ЗА СПОРЕДБА НА МАТЕМАТИЧКИ ОЧЕКУВАЊА НА ДВЕ ЗАВИСНИ ОБЕЛЕЖЈА

Зависни обележја

- Во претходните тестови за споредба на математичките очекувања на две обележја, обележјата (а со тоа, и соодветните примероци) беа независни едни од други.
- Но, постојат ситуации кога треба да се тестираат хипотези кои вклучуваат примероци кои не се независни.
- На пример,
  - треба да се испита продуктивноста на одделни вработени пред и после промената на нивното работно место
  - или да се спореди брзината на читање на индивидуални учесници пред и после завршување на курс за брзо читање.
- Во такви случаи, ние немаме два различни примерока на лица, туку пред и потоа мерења за истите лица.
- Како резултат, ќе имаме само една променлива: разликата во измерените вредности евидентирани за секоја индивидуа.

Тест за математички очекувања на зависни обележја

- Тестовите во кои примероците не се независни се нарекуваат тестови со поврзани парови и тие во суштина се сведуваат на тестови за вредност на математичко очекување за едно обележје.
- Нека X и Y се две статистички обележја, каде X е вредноста на обележјето пред одредена активност, а Y е вредноста на обележјето после завршената активност.
- Тогаш $D = X - Y$ ја претставува разликата на вредностите пред и после завршената активност. Претпоставуваме дека D има нормална распределба. Треба да се спроведе тест кој ќе провери дали постои разлика во овие вредности или таа разлика е еднаква на 0.
- Затоа, нултата и алтернативните хипотези ќе бидат една од следниве:

$H_0: \mu_D = 0$, $H_a: \mu_D \neq 0$

$H_0: \mu_D = 0$ или $(\mu_D \leq 0)$, $H_a: \mu_D > 0$

$H_0: \mu_D = 0$ или $(\mu_D \geq 0)$, $H_a: \mu_D < 0$

Тест за математички очекувања на зависни обележја

$H_0: \mu_D = 0$
$H_a: \mu_D \neq 0$

$H_0: \mu_D = 0$ или ($\mu_D \leq 0$)
$H_a: \mu_D > 0$

$H_0: \mu_D = 0$ или ($\mu_D \geq 0$)
$H_a: \mu_D < 0$

- Тест статистиката која се користи во овој случај е:

$$T_0 = \frac{\bar{D} - \mu_D}{S_D / \sqrt{n}} = \frac{\bar{D}}{S_D}\sqrt{n}.$$

која ако е точна H_0 има t-распределба со $n - 1$ степени на слобода.

- Во формулата, $\bar{D} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D_i$

$$S_D^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(D_i - \bar{D})^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} D_i^2 - n\bar{D}^2}{n-1}$$

- Притоа, $D_i = X_i - Y_i$, каде X_i и Y_i се мерките за i-тата индивидуа или тест објект пред и после разгледуваната активност, соодветно.

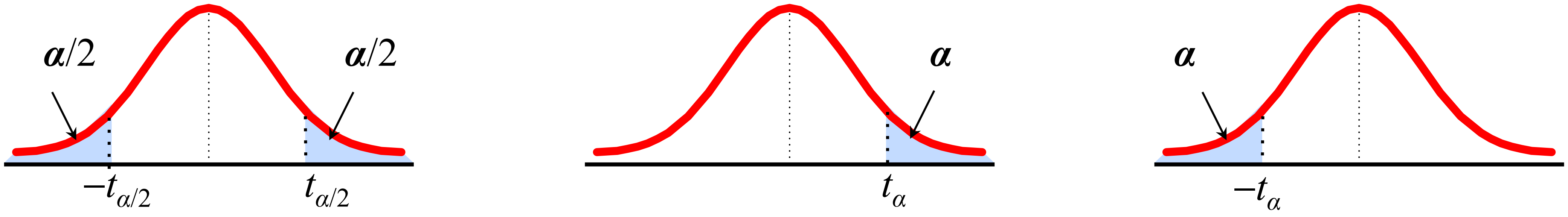
Тест за математички очекувања на зависни обележја

- Со оглед на тоа што тест статистиката има t-распределба, критичниот домен се определува со користење на таблица за t-распределба.

$H_0: \mu_D = 0$
$H_a: \mu_D \neq 0$

$H_0: \mu_D = 0$ или $(\mu_D \leq 0)$
$H_a: \mu_D > 0$

$H_0: \mu_D = 0$ или $(\mu_D \geq 0)$
$H_a: \mu_D < 0$



$C = (-\infty, -t_{\alpha/2,\, n-1}) \cup (t_{\alpha/2,\, n-1}, +\infty)$

$C = (t_{\alpha,n-1}, +\infty)$

$C = (-\infty, -t_{\alpha\,,\, n-1})$

Пример 4

- Еден инвеститор на берза се интересира дали има значајна разлика во односот Ц/З (цена/заработувачка) за компаниите во две последователни години. Затоа од берзанските билтени избира на случаен начин девет компании и ги забележува нивните Ц/З односи на крајот на првата и втората година. Се претпоставува дека разликите на количниците Ц/З се нормално распределени.
- Со ниво на значајност $\alpha = 0.01$ да се спроведе тест кој ќе му даде одговор на инвеститорот.

Компанија	2011 Ц/З однос	2012 Ц/З однос
1	8.9	12.7
2	38.1	45.4
3	43.0	10.0
4	34.0	27.2
5	34.5	22.8
6	15.2	24.1
7	20.3	32.3
8	19.9	40.1
9	61.9	106.5

Пример 4: решение

- Нека X е односот Ц/З во 2011, а Y – односот Ц/З во 2012 година. Да воочиме дека овие обележја се зависни, затоа што станува збор за мерења спроведени за исти компании во две години.

- Затоа треба да се спроведе тест со поврзани парови.

- Бидејќи од претходни информации не можеме да заклучиме дали овој однос расте или опаѓа, ќе користиме двостран тест:

$$H_0: \mu_D = 0$$
$$H_a: \mu_D \neq 0$$

Пример 3: решение

- Најпрво ги пресметуваме разликите:

Компанија	2011 Ц/З однос	2012 Ц/З однос	Разлики d_i	d_i^2
1	8.9	12.7	–3.8	14.44
2	38.1	45.4	–7.3	53.29
3	43.0	10.0	33.0	1089
4	34.0	27.2	6.8	46.24
5	34.5	22.8	11.7	136.89
6	15.2	24.1	–8.9	79.21
7	20.3	32.3	–12.0	144
8	19.9	40.1	–20.2	408.4
9	61.9	106.5	–44.6	1989.16
		вкупно	–45.3	3960.27

$$\bar{d} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i = \frac{-45.3}{9} = -5.033$$

$$s_D^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i^2 - n\bar{d}^2}{n-1} = \frac{3960.27 - 9\cdot(-5.033)^2}{9-1} = 466.536$$

$$s_D = \sqrt{466.536} = 21.599$$

Пример 3: решение

$$\bar{d} = -5.033, \qquad s_D = 21.599$$

- За вредноста на тест статистиката, се добива:

$$t_0 = \frac{\bar{d}}{s_D}\sqrt{n} = \frac{-5.033}{21.599}\sqrt{9} = -0.7.$$

- Нивото на значајност на тестот е $\alpha = 0.01$, па $\alpha/2 = 0.005$. Од таблица за t-распределба, наоѓаме $t_{\alpha/2,\, n-1} = t_{0.005,\, 8} = 3.355$, па критичниот домен е

$$C = (-\infty, -3.355) \cup (3.355, +\infty)$$

- Бидејќи $t_0 = -0.7 \notin C$, нултата хипотеза не се отфрла.
- Оттука, заклучуваме дека нема значајна разлика во односот Ц/З (цена/заработувачка) за компаниите во две последователни години.