

# Бизнис статистика

---

**Експерименти и настани**



# Експеримент

---

- Секоја реализација на множество услови  $S$  се нарекува *експеримент* или *опит*.
- Ваквото определување на поимот експеримент напoлно одговара и за таканаречените пасивни експерименти (во кои човекот не влијае) и за таканаречените активни експерименти (кои човекот ги организира и спроведува со одредена цел).



## Примери на експерименти

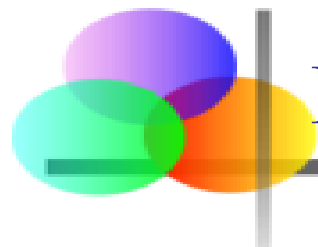
Да ги разгледаме следните примери на експерименти.

- Една монета се фрла во воздух и по нејзиното паѓање на земја, на горната страна од монетата може да се појави ”петка” или ”глава”. Со фрлањето на монетата сме извршиле еден експеримент и како резултат на тој експеримент може да се добие еден од следните исходи: ”на горната страна од монетата се појави петка” или ”на горната страна од монетата се појави глава”.
- Ако вода се загрева на  $100^{\circ}\text{C}$ , тогаш таа ќе почне да врие. Овде е извршен еден експеримент (загревање на вода) и како резултат на тој експеримент се јавува исходот ”водата врие”.
- Ако се проверува исправноста на производите во една фабрика, тогаш се зема по еден производ, се проверува неговиот квалитет и се утврдува дали е исправен или не. Значи, експериментот е проверка на квалитетот, а можни исходи се: ”производот е исправен” и ”производот не е исправен”.
- Се спроведува тест за да се провери знаењето на учениците. Оценувањето на тестот се прави со поени од 0 до 100. Тогаш експериментот е оценување на еден ученик, а можни исходи се ”ученикот освои  $i$  поени”, каде што  $i = 0, 1, \dots, 100$ .



# Настани

- Секој резултат (исход) од експериментот  $S$  се нарекува настан во врска со експериментот  $S$ .
- Настаните се обележуваат со големи печатни букви од латиницата:  $A, B, C, \dots$
- Еден експеримент може да биде детерминистички и недетерминистички. Ако исходот на еден експеримент е однапред познат, тогаш тој експеримент е детерминистички, во спротивно, ако исходот не може со сигурност да се знае однапред, тој експеримент е недетерминистички.
  - Експериментот со загревање на вода е детерминистички.
  - Останатите експерименти од претходните примери се недетерминистички.



## Цели на теоријата на веројатност

---

- При подлабоко проучување на природните и општествените појави се забележува дека постојат сосема малку закони кои се строго детерминистички.
- Најголем дел од експериментите во себе го вклучуваат елементот на случајност.
- Во теоријата на веројатноста се наоѓаат законитостите за настаните кои се резултат на експериментите кои имаат нееднозначен исход.
- Имено, и кај експериментите со нееднозначен исход се воочуваат одредени законитости.



## Пример

- Да го разгледаме повторно експериментот фрлање монета и настанот  $A$ : ”падна петка”. Ако експериментот се изведува еднаш, тогаш не може со сигурност да се каже кој ќе биде неговиот исход.
- Затоа, нека се изведени 8 серии од по 1000 експерименти под еднакви услови.
- Со  $n_i(A)$  се означува бројот на експериментите од  $i$ -тата серија во кои се појавил настанот  $A$ .
- Резултатите од овие осум серии се претставени во следнатата табела.

$i$	$n_i(A)$	$\frac{n_i(A)}{1000}$
1	502	0.502
2	504	0.504
3	492	0.492
4	500	0.500
5	510	0.510
6	490	0.490
7	493	0.493
8	509	0.509



# Случаен настан

- Настанот  $A$  во врска со експериментот  $S$  се нарекува *случаен настан*, ако се исполнети следните два услова:

1° Експериментот  $S$  може да се повтори при исти услови колку што сакаме пати;

2° Релативните фреквенции на настанот  $A$ , во секоја од повеќе изведени серии експерименти, се броеви кои се приближно еднакви. Тоа значи дека ако се изведат серии од по  $n_1, n_2, \dots, n_k$  експерименти, тогаш:

$$\frac{n_1(A)}{n_1} \approx \frac{n_2(A)}{n_2} \approx \dots \approx \frac{n_k(A)}{n_k}.$$

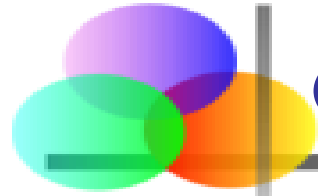


# Статистичка веројатност

---

- Релативната фреквенција  $\frac{n_i(A)}{n}$  во една серија експерименти е приближна објективна мерка за можноста за појавување на настанот  $A$ .
- Меѓутоа, релативните фреквенции за различни серии експерименти се разликуваат помеѓу себе.
- Но, сепак тие се натрупуваат околу некој реален број.
- Реалниот број околу кој се натрупуваат релативните фреквенции на настанот  $A$  се нарекува *статистичка* (или *емпириска*) веројатност на настанот  $A$ .
- Во дефиницијата на случаен настан, условот 2° обезбедува статистичка стабилност (непроменливост) на релативните фреквенции, а условот 1° обезбедува проверка на условот 2°.





# Сигурен и невозможен настан

- За секој експеримент  $S$  може да се разгледаат два специјални настани.
  - **Сигурен настан** во врска со даден експеримент е настанот кој се појавува при секоја реализација на тој експеримент.
  - **Невозможен настан** во врска со даден експеримент е настан што не се појавува никогаш при реализација на дадениот експеримент.

## Примери.

Нека експериментот е фрлање коцка.  
Се разгледуваат настаните:

$A_1$ : падна број од 1 до 6

$A_2$ : падна бројот 7.

Тогаш

$A_1$  е сигурен настан.

$A_2$  е невозможен настан.

Експериментот е извлекување на топче од кутија во која има 5 бели топчиња.

Се разгледуваат настаните:

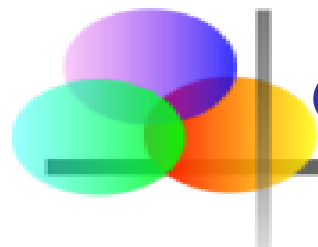
$B_1$ : извлечено е бело топче,

$B_2$ : извлечено е црно топче.

Тогаш

$B_1$  е сигурен настан.

$B_2$  е невозможен настан.



## Сигурниот и невозможниот настан се случајни настани

- Ако експериментот  $S$  се изведува  $n$  пати, тогаш сигурниот настан ќе се појави  $n$  пати, а невозможниот настан  $0$  пати.
- Релативната зачестеност на сигурниот настан е  $\frac{n}{n} = 1$ , а на невозможниот настан  $\frac{0}{n} = 0$ .
- Ова важи за секоја серија експерименти  $S$ .
- Така, сигурниот и невозможниот настан ги задоволуваат условите  $1^\circ$  и  $2^\circ$ , па тие се случајни настани.



# **Множество елементарни настани**

## **Случајни настани**

---



## Пример 1

- Да го разгледаме експериментот фрлање коцка. Некои од можните настани во врска со овој експеримент се следните:

$A$ : падна парен број;

$B$ : падна број делив со 3;

$E_1$ : падна бројот 1;

$E_2$ : падна бројот 2;

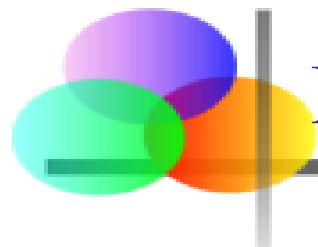
$E_3$ : падна бројот 3;

$E_4$ : падна бројот 4;

$E_5$ : падна бројот 5;

$E_6$ : падна бројот 6.

- Да воочиме дека настанот  $A$  се појавува ако се појави еден од настаните  $E_2$ ,  $E_4$  или  $E_6$ , а настанот  $B$  се појавува ако се појави настанот  $E_3$  или ако се појави  $E_6$ . Значи, настанот  $A$  може да се разложи на настаните  $E_2$ ,  $E_4$  и  $E_6$ , а настанот  $B$  може да се разложи на настаните  $E_3$  и  $E_6$ .
- Од друга страна, настаните  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$ ,  $E_4$ ,  $E_5$  и  $E_6$  не може да се разложат на други настани. Затоа, тие настани ги нарекуваме елементарни настани.
- Елементарните настани ќе ги означуваме со симболот  $E$  со индекс 1,2,...



# Множество елементарни настани

## Дефиниција 1.

- i) *Елементарен настан* во врска со даден експеримент е секој логички исход на експериментот кој не може да се разложи на други настани. Притоа, при секоја реализација на експериментот се појавува еден и само еден елементарен настан.
- ii) Множеството од сите вакви настани во врска со еден експеримент се нарекува *множество елементарни настани* и се означува со  $\Omega$ .



## Пример 2

---

- Експериментот се состои во фрлање коцка. При секоја реализација на експериментот се појавува еден и само еден од настаните  $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5$  и  $E_6$ .
- Затоа множеството елементарни настани во врска со овој експеримент е

$$\Omega = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}.$$



## Пример 3

---

- Експериментот се состои во фрлање на две монети.
- При фрлање на една монета, можен исход е ”падна петка” или ”падна глава” (ќе пишуваме кратко ”петка” или ”глава”).
- Но, експериментот се состои од фрлање на двете монети заедно, па можните исходи ќе бидат подредени парови, каде што првиот елемент ќе го означува исходот на првата монета, а вториот елемент исходот на втората.
- Множеството елементарни настани е следното:

$$\Omega = \{(\text{глава}, \text{глава}), (\text{глава}, \text{петка}), (\text{петка}, \text{глава}), (\text{петка}, \text{петка})\}.$$



## Пример 4

- Нека експериментот е фрлање на монета сè додека не се појави петка.
- Множеството елементарни настани е од облик  $\Omega = \{E_1, E_2, \dots\}$ , каде што

$$E_1 = (\text{петка}),$$

$$E_2 = (\text{глава, петка}), \text{ итн.}$$

- Во општ случај, за фиксно  $i = 2, 3, \dots$ , елементарниот настан

$$E_i = (\underbrace{\text{глава, глава } \dots, \text{ глава}}_{i-1}, \text{петка})$$

и тој се појавува ако во првите  $i - 1$  фрлање на монетата се појави глава, а во  $i$ -тото фрлање се појави петка.

- Во овој случај, множеството елементарни настани е бесконечно преброиво множество, бидејќи теоретски експериментот може никогаш да не заврши.





## Пример 5

---

- Се набљудува времето на непрекината работа на некоја машина.
- Елементарни настани за овој експеримент се:

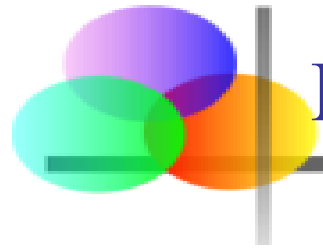
$$E_t : \text{машината работи време } t, \quad t \in [0, T]$$

каде  $T$  е максималниот (гарантиран) век на работа на набљудуваната машина.

- Оттука, множеството елементарни настани за овој експеримент е:

$$\Omega = \{E_t \mid t \in [0, T]\}$$

- Во овој случај,  $\Omega$  е интервал, т.е. е бесконечно непреброиво множество.



## Множество елементарни настани

---

- Од претходните примери можеме да воочиме дека зависно од експериментот, множеството елементарни настани може да биде конечно, бесконечно преброиво или бесконечно непретроиво множество.



## Пример 6

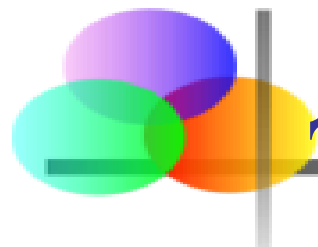
---

- Во примерот со фрлање коцка заклучивме дека настанот  $A$ : падна парен број, ќе се појави ако се појави еден од настаните  $E_2, E_4$  или  $E_6$ , а настанот  $B$ : падна број делив со три, се појавува ако се појави еден од настаните  $E_3$  или  $E_6$ .
- Оттука, настаните  $A$  и  $B$  може да се запишат на следниот начин

$$A = \{E_2, E_4, E_6\}$$

$$B = \{E_3, E_6\}$$

- Да воочиме дека настаните  $A$  и  $B$  се претставени како подмножества од множеството елементарни настани  $\Omega$ .



## Дефиниција на случаен настан

**Дефиниција 2.** Случаен настан е произволно подмножество од множеството елементарни настани  $\Omega$ .

- Ќе велиме дека се појавил настанот  $A$ , ако се појавил некој од елементарните настани кои припаѓаат на подмножеството елементарни настани соодветно на настанот  $A$ .



## Пример 7

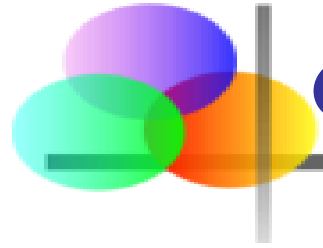
---

- Нека експериментот е фрлање на две монети. Да се опише настанот

$C$ : барем еднаш падна петка.

- Настанот  $C$  ќе се појави ако на една од монетите падне петка, а на другата глава или ако на двете монети падне петка, т.е.

$$C = \{(\text{глава}, \text{петка}), (\text{петка}, \text{глава}), (\text{петка}, \text{петка})\}.$$



## Сигурен и невозможен настан

---

- Сигурниот настан се појавува секогаш кога се реализира експериментот, т.е. секој елементарен настан доведува до негово појавување. Затоа, тој се означува со  $\Omega$ .
- Невозможниот настан, пак, не се појавува никогаш кога се реализира експериментот, односно ниеден елементарен настан не доведува до негово појавување. Оттука, невозможниот настан ќе го означуваме со  $\emptyset$ .



## Производ на настани

**Дефиниција 3.** *Производ* на настаните  $A$  и  $B$  е настан кој се појавува тогаш и само тогаш кога ќе се појават и двата настани  $A$  и  $B$  истовремено. Тој настан е определен со множество елементарни настани што е пресек од множествата елементарни настани на настанот  $A$  и настанот  $B$ . Производот на два настани  $A$  и  $B$  се означува со  $A \cap B$  или  $AB$ .



## Пример 8

---

- Нека експериментот е фрлање коцка. Ги разгледуваме настаните:  
     $A$ : падна број помал или еднаков на 3;  
     $B$ : падна број делив со 3;  
     $C$ : падна број поголем од 4.
- Да се определи производот на било кои два од дадените три настани.

**Решение:** Множеството елементани настани за овој експеримент е

$$\Omega = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}.$$

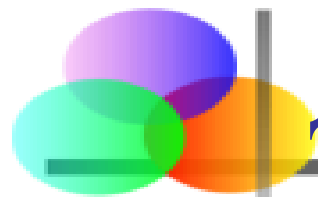
Притоа,  $A = \{E_1, E_2, E_3\}$ ,  $B = \{E_3, E_6\}$ ,  $C = \{E_5, E_6\}$ . Сега,

$$AB = \{E_3\}$$

$$AC = \emptyset$$

$$BC = \{E_6\}$$





## Дисјунктни настани

**Дефиниција 4.** Ако два настани  $A$  и  $B$  не може да се појават истовремено тогаш тие се нарекуваат *дисјунктни настани* или *несогласни настани* или *исклучувачки настани*. Нивниот производ е невозможен настан, т.е.  $A \cap B = \emptyset$ .

Во претходниот пример,  $A$  и  $C$  се дисјунктни настани.



## Збир на настани

**Дефиниција 5.** *Збир* на настаните  $A$  и  $B$  е настан кој се појавува тогаш и само тогаш кога ќе се појави барем еден од настаните  $A$  или  $B$ .

Тој настан е определен со множество елементарни настани што е унија од множествата елементарни настани на настанот  $A$  и настанот  $B$ .

Збирот на два настани  $A$  и  $B$ , во општ случај, се означува со  $A \cup B$ . Доколку настаните  $A$  и  $B$  се дисјунктни, тогаш нивниот збир ќе го означуваме со  $A + B$ .



## Збир на настани

---

- Кога се вели дека се појавил барем еден од настаните  $A$  или  $B$ , тогаш се подразбира дека се појавил или само настанот  $A$  или само настанот  $B$  или и двата настани истовремено.
- Ако настаните  $A$  и  $B$  се дисјунктни, тогаш истовремено појавување на двата настани е невозможно, па појавување на настанот  $A \cup B$  подразбира да се појави или само настанот  $A$ , или само настанот  $B$ .
- Затоа, во овој случај, за збир на два настани се користи ознаката  $A + B$ . Значи,

$$A + B = A \cup B, \text{ ако } AB = \emptyset.$$



## Пример 9

- Нека експериментот е фрлање коцка. Ги разгледуваме настаните:
  - $A$ : падна број помал или еднаков на 3;
  - $B$ : падна број делив со 3;
  - $C$ : падна број поголем од 4.
- Да се определи збирот на било кои два од дадените три настани.

**Решение:**

$$\Omega = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}.$$

$$A = \{E_1, E_2, E_3\}, B = \{E_3, E_6\}, C = \{E_5, E_6\}.$$

Сега,

$$A \cup B = \{E_1, E_2, E_3, E_6\}$$

$$A \cup C = A + C = \{E_1, E_2, E_3, E_5, E_6\}$$

$$B \cup C = \{E_3, E_5, E_6\}$$



## Спротивен настан

**Дефиниција 6.** *Спротивен настан* на настанот  $A$  е настанот кој се појавува тогаш и само тогаш кога не се појавува настанот  $A$ .

Овој настан се означува со  $\bar{A}$ .

Множеството елементарни настани на настанот  $\bar{A}$  е комплемент на множеството елементарни настани соодветно на настанот  $A$  во однос на  $\Omega$ .

За секој настан  $A$  важи:

$$A \cap \bar{A} = \emptyset, \quad A \cup \bar{A} = \Omega.$$



## Пример 10

---

- Нека експериментот е фрлање коцка. Ги разгледуваме настаните:
  - $A$ : падна број помал или еднаков на 3;
  - $B$ : падна број делив со 3;
  - $C$ : падна број поголем од 4.
- Да се определат спротивните настани на дадените три настани.

**Решение:**

$$\Omega = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}.$$

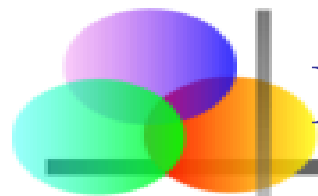
$$A = \{E_1, E_2, E_3\}, B = \{E_3, E_6\}, C = \{E_5, E_6\}.$$

Сега,

$$\bar{A} = \{E_4, E_5, E_6\}$$

$$\bar{B} = \{E_1, E_2, E_4, E_5\}$$

$$\bar{C} = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$$



## Настанот $A$ го повлекува настанот $B$

**Дефиниција 7.** Настанот  $A$  го повлекува настанот  $B$  (пишуваме  $A \subseteq B$ ), ако секогаш кога се појавува настанот  $A$  се појавува и настанот  $B$ .

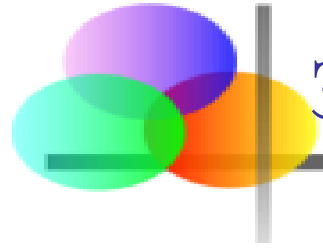
**Пример 11.** Да го разгледаме повторно експериментот фрлање на две монети. Нека

$A$  : падна точно една глава

$B$  : падна барем една глава.

- Може да се воочи дека секогаш кога ќе се појави настанот  $A$  се појавува и настанот  $B$ , т.е.  $A \subseteq B$ .

**Дефиниција 8.** Ако  $A \subseteq B$  и  $B \subseteq A$ , тогаш за настаните  $A$  и  $B$  велиме дека се еднакви.



## Закони за операции со настани

- Бидејќи случајните настани се подмножества од множеството елементарни настани во врска со еден експеримент, за операциите со настани важат истите закони како за операциите со множества.
- Некои од нив, кои ќе ги користиме во понатамошните излагања се следните.

Дистрибутивните закони:

$$A(B \cup C) = AB \cup AC$$

$$(A \cup B)C = AC \cup BC$$

Де Морганови закони

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$





## Збир и производ на повеќе настани

**Дефиниција 9.** Збир на настаните  $A_1, A_2, \dots, A_n$  е настанот кој се појавува тогаш и само тогаш кога ќе се појави барем еден од настаните  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . Овој настан се означува со  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ , а неговото множество елементарни настани е унија од множествата елементарни настани соодветни на секој од настаните  $A_1, A_2, \dots, A_n$ .

**Дефиниција 10.** Производ на настаните  $A_1, A_2, \dots, A_n$  е настанот кој се појавува тогаш и само тогаш кога ќе се појават сите настани  $A_1, A_2, \dots, A_n$  истовремено.

Овој настан се означува со  $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ , а неговото множество елементарни настани е пресек од множествата елементарни настани соодветни на секој од настаните  $A_1, A_2, \dots, A_n$ .



## Обопштување

---

- Дефинициите за збир и производ на настани може да се обопштат и за преброиво многу настани. Имено, збир на настаните  $A_1, A_2, \dots$  е настанот кој се појавува тогаш и само тогаш кога ќе се појави барем еден од настаните  $A_1, A_2, \dots$ , а нивен производ е настанот кој се појавува тогаш и само тогаш кога ќе се појават истовремено сите настани  $A_1, A_2, \dots$



## Пример 12

Во цел се стрела три пати. Се разгледуваат настаните  $A_1$ ,  $A_2$  и  $A_3$  кои означуваат погодување на целта во првото, второто и третото стрелање, соодветно. Со помош на овие настани, да се опишат следните случајни настани:

$B$ : постигнати се три погодоци;

$C$ : целта е три пати промашена;

$D$ : постигнат е барем еден погодок;

$E$ : постигнато е барем едно промашување;

$F$ : постигнати се не повеќе од два погодока;

$G$ : до третото стрелање немало погодок.

**Решение:**

$$B = A_1 A_2 A_3$$

$$E = \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \bar{A}_3$$

$$C = \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3$$

$$F = E$$

$$D = A_1 \cup A_2 \cup A_3$$

$$G = \bar{A}_1 \bar{A}_2$$



## Дисјунктно разложување на $\Omega$

**Дефиниција 11.** Нека  $A_1, A_2, \dots, A_n$  се настани во врска со еден експеримент така што  $A_i A_j = \emptyset$ , за  $i \neq j$  и  $\sum_{i=1}^n A_i = \Omega$  тогаш за настаните  $A_1, A_2, \dots, A_n$  велиме дека се дисјунктно разложување на  $\Omega$ , т.е.  $\Omega$  е дисјунктна сума на настаните  $A_1, A_2, \dots, A_n$ .

**Забелешка:**  $\Omega$  може да се претстави и како дисјунктна сума на преброиво многу настани  $A_1, A_2, \dots$ , ако  $A_i A_j = \emptyset$ , за  $i \neq j$  и  $\sum_{i=1}^{+\infty} A_i = \Omega$ .



## Пример 13

---

- Експериментот се состои во фрлање на три монети. Ако со 0 се означат исходот ”падна петка”, а со 1 - исходот ”падна глава”, тогаш множеството елементарни настани за овој експеримент е

$$\Omega = \{(x, y, z) | x, y, z \in \{0, 1\}\}.$$

- Со  $A_i$  го означуваме настанот ”глава падна  $i$  пати”,  $i = 0, 1, 2, 3$ . Тогаш

$$A_0 = \{(0, 0, 0)\}$$

$$A_1 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

$$A_2 = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$$

$$A_3 = \{(1, 1, 1)\}$$

- Јасно е дека настаните  $A_i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$  се дисјунктни и  $A_0 + A_1 + A_2 + A_3 = \Omega$ , т.е.  $A_0, A_1, A_2$  и  $A_3$  се дисјунктно разложување на  $\Omega$ .