



Бизнис статистика

Аудиторски вежби 8

Случајни променливи од апсолутно непрекинат тип. Рамномерна, Експоненцијална и Нормална распределба.



Задача 1

Случајната променлива X , која го претставува времето на доцнење (во часови) на еден воз има рамномерна распределба $X \sim U(0, 2)$. Да се определи веројатноста дека возот ќе доцни барем 45 минути.

Решение:

Случајна променлива X : време на доцнење (во часови) на возот, $X \sim U(0, 2)$, со параметри $a = 0$ и $b = 2$.

Да ги изразиме минутите во часови: 45 мин.=45/60 час.=3/4 час.=0.75 часови.

Тогаш

$$p(x) = \begin{cases} 1/2, & 0 < x < 2 \\ 0, & \text{инаку} \end{cases}, \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{x}{2}, & 0 < x \leq 2. \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

$$P\{X \geq 0.75\} = 1 - P\{X < 0.75\} = 1 - F(0.75) = 1 - 0.75/2 = 1 - 0.375 = 0.625.$$



Задача 2

Заради контрола на квалитетот на деловите произведени во една фирма, за време на производниот процес случајно се бираат производи и се тестираат. Од евиденцијата на овие тестови утврдено е дека бројот на најдени дефектни делови има Пуасонова распределба со просек од 4 дефекти на секој час за време на производството. Да се определи веројатноста дека ќе поминат помалку од 20 минути помеѓу било кои два последователно најдени дефекти.

Решение: Нека X и Y се случајни променливи:

X : број на најдени дефектни делови за еден час,

Y : време (во часови) помеѓу било кои два последователно најдени дефекти.



Задача 2- Решение

Решение: Просекот е 4 дефектни делови на час, па според условите во задачата Y има експоненцијална распределба $E(4)$ со параметар $\lambda = 4$.

Треба да ја определиме веројатноста времето помеѓу било кои два последователно најдени дефектни делови да биде помало од 20 мин.

Прво треба времето во минути да го изразиме во часови: 20 мин. = $20/60$ часови = $1/3$ часови.

Значи:

$$P\{Y < 1/3\} = F(1/3) = 1 - e^{-(1/3) \cdot 4} = 1 - 0.264 = 0.736.$$

Бараната веројатност е 0.736.



Задача 3

Нека X има нормална распределба со математичко очекување 10.0 и стандардна девијација 3.0. Да се најде веројатноста:

- а) X да прими вредност помала од 13.6.
- б) X да прими вредност поголема од 13.6.

Решение:

а) Треба да ја пресметаме веројатноста $P\{X < 13.6\}$, при што е дадено $\mu=10$ и $\sigma=3$. За таа цел ќе ползуваме таблица за нормална нормирана распределба.

За да ја пресметаме z – вредноста, прво ќе означиме $x=13.6$, па

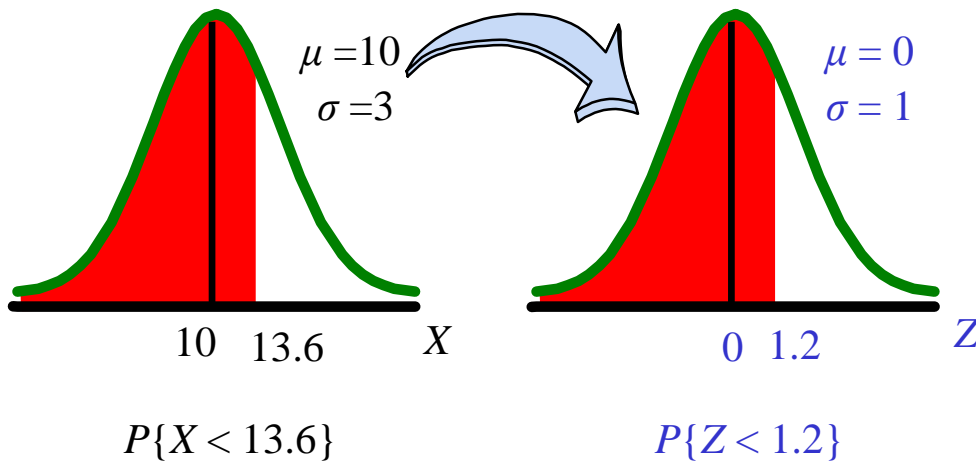
$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{13.6 - 10}{3} = 1.2.$$



Задача 3: Решение а)

Сега, според таблица за нормална нормирана распределба:

$$P\{X < 13.6\} = P\{Z < 1.2\} = \Phi(1.2) = 0.88493.$$

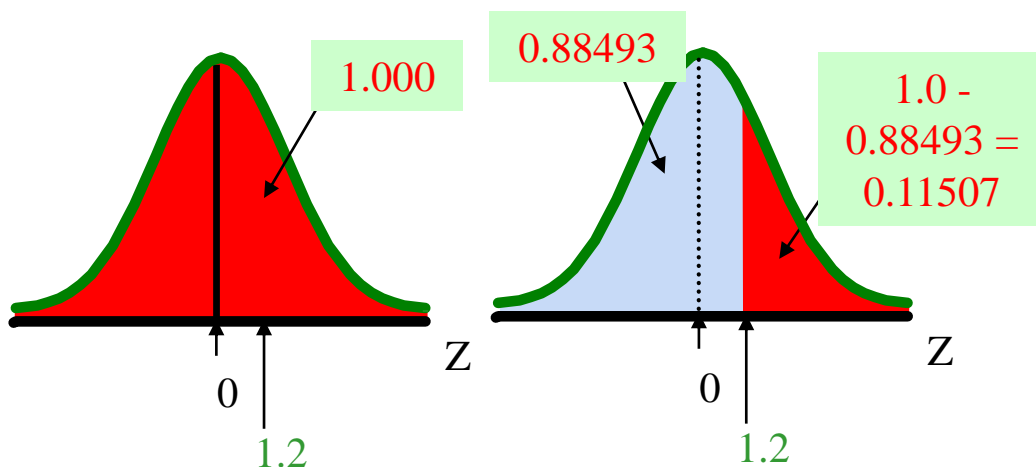
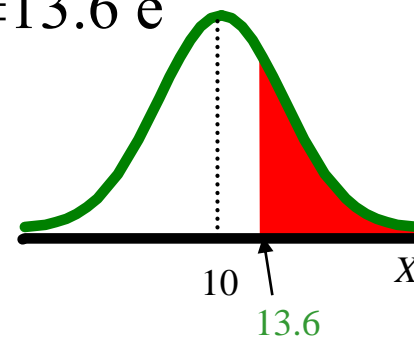


	.00	.01	.02	.03
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824

Задача 3: Решение-б)

б) Според решението под а), z – вредноста за $x=13.6$ е $z=1.2$, и треба да се определи $P\{X > 13.6\}$.

$$\begin{aligned} P\{X > 13.6\} &= 1 - P\{X < 13.6\} = 1 - P\{Z < 1.2\} \\ &= 1 - \Phi(1.2) = 1 - 0.88493 = 0.11507 \end{aligned}$$



	.00	.01	.02	.03
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824



Задача 4

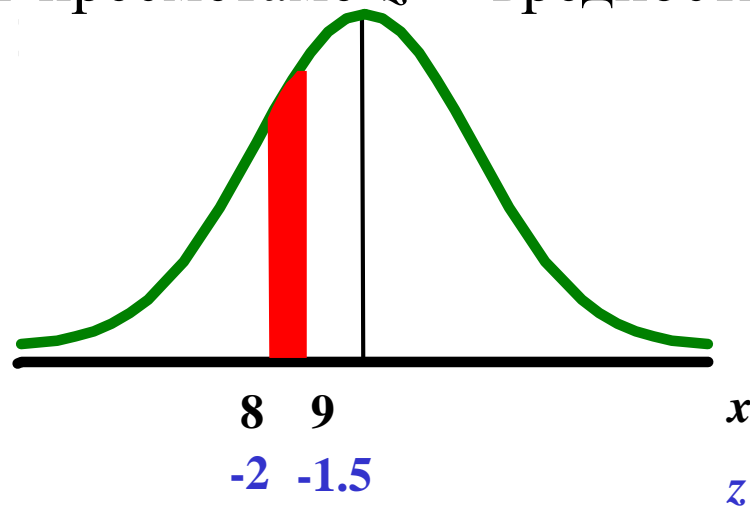
Нека X има нормална распределба со математичко очекување 12.0 и стандардна девијација 2.0. Да се најде веројатноста X да прими вредност во интервалот $[8,9]$.

Решение:

Треба да ја пресметаме веројатноста $P\{8 < X < 9\}$, при што е дадено $\mu=12$ и $\sigma=2$. За таа цел ќе ползуваме таблица за нормална нормирана распределба. За да ги пресметаме z – вредностите, прво ќе означиме $x_1=8$ и $x_2=9$.

$$z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma} = \frac{8 - 12}{2} = -2$$

$$z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma} = \frac{9 - 12}{2} = -1.5$$



Задача 4. Решение со Таблица за нормирана нормална распределба

	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
-3.9	0.00005	0.00005	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00003	0.00003
-3.8	0.00007	0.00007	0.00007	0.00006	0.00006	0.00006	0.00006	0.00005	0.00005	0.00005
-3.7	0.00011	0.00010	0.00010	0.00010	0.00009	0.00009	0.00008	0.00008	0.00008	0.00008
-3.6	0.00016	0.00015	0.00015	0.00014	0.00014	0.00013	0.00013	0.00012	0.00012	0.00011
-3.5	0.00023	0.00022	0.00022	0.00021	0.00020	0.00019	0.00019	0.00018	0.00017	0.00017
-3.4	0.00034	0.00032	0.00031	0.00030	0.00029	0.00028	0.00027	0.00026	0.00025	0.00024
-3.3	0.00048	0.00047	0.00045	0.00043	0.00042	0.00040	0.00039	0.00038	0.00036	0.00035
-3.2	0.00069	0.00066	0.00064	0.00062	0.00060	0.00058	0.00056	0.00054	0.00052	0.00050
-3.1	0.00097	0.00094	0.00090	0.00087	0.00084	0.00082	0.00079	0.00076	0.00074	0.00071
-3.0	0.00135	0.00131	0.00126	0.00122	0.00118	0.00114	0.00111	0.00107	0.00104	0.00100
-2.9	0.00187	0.00181	0.00175	0.00169	0.00164	0.00159	0.00154	0.00149	0.00144	0.00139
-2.8	0.00256	0.00248	0.00240	0.00233	0.00226	0.00219	0.00212	0.00205	0.00199	0.00193
-2.7	0.00347	0.00336	0.00326	0.00317	0.00307	0.00298	0.00289	0.00280	0.00272	0.00264
-2.6	0.00466	0.00453	0.00440	0.00427	0.00415	0.00402	0.00391	0.00379	0.00368	0.00357
-2.5	0.00621	0.00604	0.00587	0.00570	0.00554	0.00539	0.00523	0.00508	0.00494	0.00480
-2.4	0.00820	0.00798	0.00776	0.00755	0.00734	0.00714	0.00695	0.00676	0.00657	0.00639
-2.3	0.01072	0.01044	0.01017	0.00990	0.00964	0.00939	0.00914	0.00889	0.00866	0.00842
-2.2	0.01390	0.01355	0.01321	0.01287	0.01255	0.01222	0.01191	0.01160	0.01130	0.01101
-2.1	0.01786	0.01743	0.01700	0.01659	0.01618	0.01578	0.01539	0.01500	0.01463	0.01426
-2.0	0.02275	0.02222	0.02169	0.02118	0.02068	0.02018	0.01970	0.01923	0.01876	0.01831
-1.9	0.02872	0.02807	0.02743	0.02680	0.02619	0.02559	0.02500	0.02442	0.02385	0.02330
-1.8	0.03593	0.03515	0.03438	0.03362	0.03288	0.03216	0.03144	0.03074	0.03005	0.02938
-1.7	0.04457	0.04363	0.04272	0.04182	0.04093	0.04006	0.03920	0.03836	0.03754	0.03673
-1.6	0.05480	0.05370	0.05262	0.05155	0.05050	0.04947	0.04846	0.04746	0.04648	0.04551
-1.5	0.06681	0.06552	0.06426	0.06301	0.06178	0.06057	0.05938	0.05821	0.05705	0.05592
-1.4	0.08076	0.07927	0.07780	0.07636	0.07493	0.07353	0.07215	0.07078	0.06944	0.06811
-1.3	0.09680	0.09510	0.09342	0.09176	0.09012	0.08851	0.08691	0.08534	0.08379	0.08226
-1.2	0.11507	0.11314	0.11123	0.10935	0.10749	0.10565	0.10383	0.10204	0.10027	0.09853
-1.1	0.13567	0.13350	0.13136	0.12924	0.12714	0.12507	0.12302	0.12100	0.11900	0.11702
-1.0	0.15866	0.15625	0.15386	0.15151	0.14917	0.14686	0.14457	0.14231	0.14007	0.13786
-0.9	0.18406	0.18141	0.17879	0.17619	0.17361	0.17106	0.16853	0.16602	0.16354	0.16109
-0.8	0.21186	0.20897	0.20611	0.20327	0.20045	0.19766	0.19489	0.19215	0.18943	0.18673
-0.7	0.24196	0.23885	0.23576	0.23270	0.22965	0.22663	0.22363	0.22065	0.21770	0.21476
-0.6	0.27425	0.27093	0.26763	0.26435	0.26109	0.25785	0.25463	0.25143	0.24825	0.24510
-0.5	0.30854	0.30503	0.30153	0.29806	0.29460	0.29116	0.28774	0.28434	0.28096	0.27760
-0.4	0.34458	0.34090	0.33724	0.33360	0.32997	0.32636	0.32276	0.31918	0.31561	0.31207
-0.3	0.38209	0.37828	0.37448	0.37070	0.36693	0.36317	0.35942	0.35569	0.35197	0.34827
-0.2	0.42074	0.41683	0.41294	0.40905	0.40517	0.40129	0.39743	0.39358	0.38974	0.38591
-0.1	0.46017	0.45620	0.45224	0.44828	0.44433	0.44038	0.43644	0.43251	0.42858	0.42465
-0.0	0.50000	0.49601	0.49202	0.48803	0.48405	0.48006	0.47608	0.47210	0.46812	0.46414

$$P\{8 < X < 9\} =$$

$$P\{-2 < Z < -1.5\} =$$

$$P\{Z < -1.5\} - P\{Z < -2\} =$$

$$0.06681 - 0.02275 =$$

$$0.04406$$

Втор начин:

$$P\{8 < X < 9\} =$$

$$P\{-2 < Z < -1.5\} =$$

$$P\{1.5 < Z < 2\} =$$

$$P\{Z < 2\} - P\{Z < 1.5\} =$$

$$0.97725 - 0.93319 =$$

$$0.04406$$



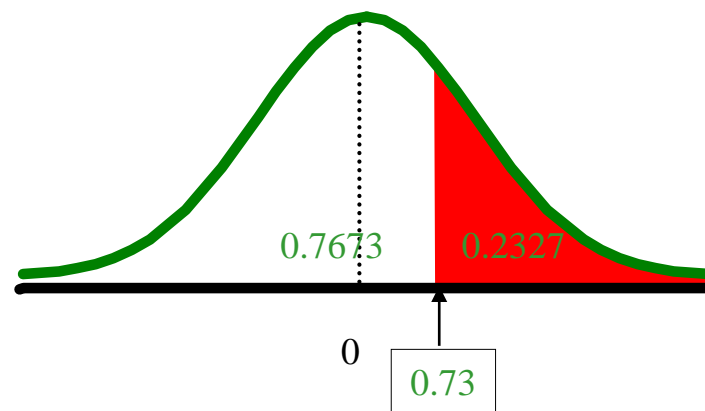
Задача 5

Нека X има нормирана нормална распределба (со мат. очекување 0 и стандардна девијација 1).

Ако знаеме дека веројатноста X да прими вредност поголема од z , е 0.2327, да се определи z .

Решение: Од условот на задачата, дадено е дека $P\{X > z\} = 0.2327$. Треба да ја определиме вредноста на z .

Од тоа што $P\{X > z\} = 1 - P\{X < z\} = 1 - \Phi(z)$, следи дека $\Phi(z) = 1 - 0.2327 = 0.7673$.





Задача 5

Решение:

$$\Phi(z) = 1 - 0.2327 = 0.7673.$$

Во таблицата со вредности на Φ ја бараме вредноста 0.7673 и потоа ја читаме вредност на z , т.ш. $\Phi(z) = 0.7673$. Се добива дека $z = 0.73$.

	.00	.01	.02	.03
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824

