Бизнис статистика

Аудиториски вежби 10

Оценување на параметри

Задача 1.

- Бојан секој ден трча по 3 km. Од искуство, знае дека стандардната девијација на неговото време на трчање е $\sigma = 2.40$ min. За просекот на времето на трчање за случаен примерок од 90 трчања добил $\bar{x} = 22.5$ min. Да се определи 99 % интервал на доверба за просечното време на трчање на Бојан.

Решение на Задача 1

$\sigma = 2.40$.

Примерокот има големина $n = 90$ и просек $\bar{x} = 22.5$ min.

За да добиеме ниво на доверба 99% $(1-\alpha = 0.99)$, потребно е $\alpha = 1-0.99 = 0.01$, т.е. $\alpha/2 = 0.005$. Од таблица читаме дека $z_{0.005}$ така што $\Phi(z_{0.005}) = 1 - 0.005 = 0.995$, $z_{0.005} = 2.58$. Го добиваме следниот интервал на доверба

$$\bar{x} \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 22.5 \pm 2.58 \cdot \frac{2.4}{\sqrt{90}} \approx 22.5 \pm 0.65$$

или (21.85, 23.15) .

Ние сме 99% сигурни дека овој интервал го содржи просечното време на обележјето.

Задача 2

- Испитувањето на брзината на трансакциски одзив на еден компјутерски систем е нормално распределена случајна променлива со стандардна девијација од 25 милисекунди. По воведувањето на нов оперативен систем пожелно е повторно да се оцени просечниот одзив μ во „новиот“ систем. Земен е примерок од 28 трансакции при што е измерено просечно време на одзив од 118.6 милисекунди. Под претпоставка дека стандардната девијација повторно е $\sigma = 25$ милисекунди, да се определи 95% интервал на доверба за очекуваното време на одзив. Колкав примерок треба да се земе за ширината на интервалот да биде најмногу 10 милисекунди?

Решение на Задача 2

Имајќи предвид дека $z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$, добиваме:

$$P\left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = P\left(118.6 - 1.96\frac{25}{\sqrt{28}} < \mu < 118.6 + 1.96\frac{25}{\sqrt{28}}\right)$$

$$= P\left(109.34 < \mu < 127.86\right) = 0.95$$

Значи со 95% шанси, просечното време на одзив е меѓу 109.34 и 127.86 милисекунди.

Од барањето ширината на интервалот да биде најмногу 10 имаме дека

$$\frac{2 \cdot 1.96 \cdot 25}{\sqrt{n}} \leq 10$$

$$\sqrt{n} \geq \frac{2 \cdot 1.96 \cdot 25}{10} = 9.8$$

Значи $n \geq 96.04$, т.е. $n \geq 97$.

Задача 3

- Бројот на жртви при евакуација од пожари во 14 хотели низ САД биле: 5, 36, 5, 8, 10, 4, 7, 8, 5, 9, 4, 0, 16, 0. Под претпоставка дека бројот на жртви има приближно нормална распределба, да се определи 98% и 99% интервал на доверба за просечниот број жртви. Колкава е довербата за интервал со ширина помала или еднаква на 6?

Решение на Задача 3

Од податоците добиваме $\bar{x} = \frac{117}{14} = 8.36$ и $s = 8.94$.

Имајќи предвид дека за ниво на доверба 0.98 и 13 степени на слобода $t_{\alpha/2,13} = t_{0.01,13} = 2.65$, 98% интервал на доверба е:

$$P\left(\bar{x} - t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}\right) = P\left(8.36 - 2.65\frac{8.94}{\sqrt{14}} < \mu < 8.36 + 2.65\frac{8.94}{\sqrt{14}}\right)$$

$= P(2.03 < \mu < 14.69) = 0.98.$

За доверба 99%, $t_{\frac{\alpha}{2},13} = t_{0.005,13} = 3.012$, па интервалот е поширок

$$P\left(8.36 - 3.012\frac{8.94}{\sqrt{14}} < \mu < 8.36 + 3.012\frac{8.94}{\sqrt{14}}\right) = P(1.16 < \mu < 15.56) = 0.99.$$

За интервал со ширина до 6, треба

$$t_{\frac{\alpha}{2},13}\frac{8.94}{\sqrt{14}} \leq 3, \text{т. е.} \quad t_{\frac{\alpha}{2},13} \leq 3\frac{\sqrt{14}}{8.94} = 1.2555$$

Оттука следува $\frac{\alpha}{2} \geq 0.25$, т. е. $\alpha \geq 0.5$, што дава доверба $1 - \alpha \leq 0.5 = 50\%$.

Задача 4

- Бил спроведен експеримент за испитување на прецизноста на уред за мерење на нивото на јод присутно во супстанци по извесен период на континуирано мешање. Податоците прикажани во табелата претставуваат 10 мерења на концентрација на јод во една супстанца.

Обид	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Концетрат	5.507	5.506	5.500	5.497	5.506	5.527	5.504	5.490	5.500	5.497

- Користејќи ги овие податоци да се определи 95% интервал на доверба за дисперзијата на обележјето, ако е познато дека концентрацијата на јод во сустанцата има нормална распределба.

Решение на Задача 4

Од податоците добиваме дека

$\bar{x} = 5.5034$ и $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_i^n (x_i - \bar{x})^2 = 0.00009649$, т.е. $s = 0.009823$.

$$\chi^2_{0.025,9} = 19.02, \quad \chi^2_{1-0.025,9} = \chi^2_{0.975,9} = 2.7$$

За интервалот на доверба добиваме:

$$P\left(\frac{9\cdot 0.00009649}{19.02} \le \sigma^2 \le \frac{9\cdot 0.00009649}{2.7}\right) =$$

$$P\left(0.0000457 \le \sigma^2 \le 0.0003216\right) = 0.95$$

Значи со 95% сигурност може да тврдиме дека варијабилноста на мерењата на јод во еден ист примерок се движи во интервалот (0.0000457, 0.0003216) што одговара на прецизноста на инструментот.

Задача 5

- Компанијата Coopers&Lybrand анкетирала 210 главни извршни директори на брзорастечки мали компании. Само 51% од овие директори имале воспоставено план за наследување во управувањето. Потпаролот на компанијата изјавил дека многу компании не се грижат за наследувањето на водечките менаџерски функции, освен ако тоа не е непосреден проблем. Сепак, неочекуваното завршување на ангажманот на некој од главните менаџери може сериозно да ја наруши работата на компанијата.
- Искористете ги дадените податоци за да пресметате 92% интервал на доверба за процентот на сите брзорастечки мали компании кои имаат план за управување со наследство.

Решение на Задача 5

$$n = 210, \quad \alpha = 0.08, \quad z_{\alpha/2} = z_{0.04} = 1.75,$$

$$\hat{p} = 0.51, 1 - \hat{p} = 0.49$$

Бараниот интервал на доверба е:

$$\left(\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right) =$$

$$= \left(0.51 - 1.75\sqrt{\frac{0.51(1-0.51)}{210}}, 0.51 + 1.75\sqrt{\frac{0.51(1-0.51)}{210}} \right) = (0.45, 0.57)$$

Значи, со 92% сигурност може да тврдиме дека процентот на брзорастечки мали компании кои имаат план за наследување на управувачки функции е помеѓу 45% и 57%.