Бизнис статистика

Тестирање хипотези – две обележја

Задача 1

Финансиските средства дозволуваат поправка само на еден од два патишта кои се во лоша состојба. За да се утврди оптеретеноста на случаен начин се избираат 19 датуми за да се измери оптеретеноста на првиот пат (број на возила кои поминуваат помеѓу две точки на патот во текот на 24 часа) и 13 датуми за да се измери оптеретеноста на вториот пат.

I пат: 150 170 210 150 197 200 170 211 192 162
167 94 210 160 190 174 93 200 170

II пат: 93 143 176 204 200 170 155 120 180 130 140 140 50

Финансиерите одлучиле да го поправат првиот пат. Дали со ризик од 5% се во право? Се претпоставува дека оптеретеноста на патиштата има нормална распределба.

***Решение*:**

$$n = 19,\ \bar{x} = 172.105,\ s_X^2 = 1161.32$$

$$m = 13,\ \bar{y} = 146.231,\ s_Y^2 = 1835.86$$

Задача 1: решение

За да знаеме која тест статистика да ја употреби за тестирање на еднаквост на просеци, прво ја проверуваме хипотезата за еднаквост на дисперзиите:

$H_0 : \sigma_X = \sigma_Y$

$H_a : \sigma_X \neq \sigma_Y$

За тестирање се користи статистиката $F_0 = \dfrac{S_X^2}{S_Y^2}$.

Критичниот домен е $C = (0, f_{1-\alpha/2,n-1,m-1}) \cup (f_{\alpha/2,n-1,m-1}, +\infty)$.

Во нашиот случај,

$$f_0 = \frac{s_X^2}{s_Y^2} = \frac{1161.32}{1835.86} = 0.6325.$$

$f_{\alpha/2,\, n-1,\, m-1} = f_{0.025,\, 18,12} \approx f_{0.025,\, 20,12} = 3.07$ (во таблицата што ја користиме нема колона за 18 с.с. во броителот, затоа земена е вредноста за 20 с.с.)

$f_{1-\alpha/2,\, n-1,\, m-1} = f_{0.975,\, 18,12} = 1 / f_{0.025,\, 12,18} = 1/ 2.77 = 0.36$

па критичниот домен е $C = (0, 0.36) \cup (3.07, +\infty)$. .

$f_0 \notin$ C, затоа не ја отфрламе нултата хипотеза. Може да се заклучи дека дисперзиите на двете обележја се еднакви.

Задача 1: решение

Сега ќе тестираме еднаквост на очекувани вредности користејќи тест за мали примероци со непознати, но еднакви дисперзии:

H_0: $\mu_X = \mu_Y$

H_a: $\mu_X > \mu_Y$

Бидејќи дисперзиите се еднакви, односно $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2$, заедничката дисперзија ќе ја оцениме со статистиката

$$S_p^2 = \frac{(n-1)S_X^2 + (m-1)S_Y^2}{n+m-2}$$

За тестирање се користи статистиката

$$T_0 = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{S_p\sqrt{(1/n)+(1/m)}} \sim t_{n+m-2}.$$

Критичниот домен е $C = (t_{\alpha,n+m-2}, +\infty)$, каде $P\{T > t_{\alpha,n+m-2} \mid H_0\} = \alpha$.

Задача 1: решение

Во нашиот случај,

$$s_p^2 = \frac{(n-1)s_X^2 + (m-1)s_Y^2}{n+m-2} = \frac{18\cdot 1161,32 + 12\cdot 1812,52}{19+13-2} = 1421,1$$

$$s_p = \sqrt{s_p^2} = \sqrt{1421,1} = 37,7$$

$$t_0 = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{s_p\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} = \frac{172,105\text{-}147,769}{37,7\sqrt{\frac{1}{19} + \frac{1}{13}}} = 1.793$$

$t_{\alpha,n+m-2} = t_{0.05,\,30} = 1.697$, па критичниот домен е $C = (1.697, +\infty)$.
$t_0 \in$ C, па затоа ја отфрламе нултата хипотеза, т.е. финансиерите биле во право со ризик од 5%.

Задача 2

Користењето на CD режач влијае на искористувањето/траењето на батеријата на лаптоп. За да се процени влијанието на CD режачот, 30 корисници работат на нивните лаптопи сѐ додека не се добие порака за минимална батерија. 12 корисници го користеле CD режачот и работеле во просек 4.8 часа со стандардна девијација од 1.6 часа. Останатите 18 корисници работеле на нивните лаптопи без користење на CD режачот 5.3 часа со стандардна девијација 1.4 часа. Ако се претпостави нормална распределба на двете популации со $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2$, дали со ниво на значајност од 5%, CD режачот користи дополнителна енергија поради која се намалува траењето на батеријата на лаптопот?

***Решение*:**

$$n = 12, \quad \bar{x} = 4.8, \quad s_X = 1.6$$
$$m = 18, \quad \bar{y} = 5.3, \quad s_Y = 1.4$$

Задача 2: решение

Ги тестираме следните хипотези

H_0: $\mu_X = \mu_Y$ (т.е. $\mu_X - \mu_Y = 0$)
H_a: $\mu_X < \mu_Y$ (т.е. $\mu_X - \mu_Y < 0$)

Од условите на задачата, дисперзиите се еднакви, односно $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2$, заедничката дисперзија ќе ја оцениме со статистиката

$$S_p^2 = \frac{(n-1)S_X^2 + (m-1)S_Y^2}{n+m-2}$$

За тестирање се користи статистиката $T_0 = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y}}{S_p\sqrt{(1/n) + (1/m)}} \sim t_{n+m-2}.$

Критичниот домен е $C = (-\infty, -t_{\alpha,n+m-2})$, каде $P\{T < -t_{\alpha,n+m-2} \mid H_0\} = \alpha.$

Задача 2: решение

Во нашиот случај,

$$s_p^2 = \frac{(n-1)s_X^2 + (m-1)s_Y^2}{n+m-2} = \frac{11 \cdot 1,6^2 + 17 \cdot 1,4^2}{12+18-2} = 2.195$$

$$s_p = 1.4818$$

$$t_0 = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{s_p\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} = \frac{4.8 - 5.3}{1.4818\sqrt{\frac{1}{18} + \frac{1}{12}}} = -0.9045$$

$t_{\alpha,n+m-2} = t_{0.05,\,28} = 1.701$, па критичниот домен е $C = (-\infty, -1.701)$.
$t_0 \notin$ C, па затоа не ја отфрламе нултата хипотеза, т.е. CD - режачот не користи дополнителна енергија.

Задача 3

Сметката на серверот A е поскапа од сметката на серверот B, но се претпоставува дека серверот A е побрз. За да види дали се исплати да биде на поскапиот сервер, еден менаџер сака да дознае дали серверот A е побрз. За таа цел еден алгоритам се извршува 100 пати на серверот A и 80 пати на серверот B со следните резултати.

	A	***B***
Просек на примерокот	6.7	7.5
Стандардна девијација на примерокот	0.6	1.2

Дали, со ниво на значајност од 5%, серверот A е побрз од B?

***Решение*:** Имаме големи примероци и различни и непознати дисперзии. Ги тестираме хипотезите:

$H_0 : \mu_X = \mu_Y$

$H_a : \mu_X < \mu_Y$

Задача 3: решение

$H_0 : \mu_X = \mu_Y$
$H_a : \mu_X < \mu_Y$

За тестирање се користи статистиката $Z_0 = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{(S_X^2 / n) + (S_Y^2 / m)}}$.

и критичниот домен е $C = (-\infty, -z_\alpha)$, каде $P\{Z < -z_\alpha \mid H_0\} = \alpha$.

Во нашиот случај,

$$z = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\dfrac{s_X^2}{n} + \dfrac{s_Y^2}{m}}} = \frac{6.7 - 7.5}{\sqrt{\dfrac{0.6^2}{100} + \dfrac{1.2^2}{80}}} = -5.44$$

$$\Phi(z_\alpha) = 1 - \alpha = 0.95, \text{ па } z_\alpha = 1.65.$$

Значи критичниот домен е $C = (-\infty, -1.65)$.
$z_0 \in C$, па ја отфрламе нултата хипотеза, т.е серверот A е побрз од серверот B.

Задача 4

Пет нови работници во една фирма се испратени за обука на една работилница. Во следната табела дадени се бројот на грешки кои ги направиле во текот на една недела, пред и после тренингот. Дали со ниво на значајност 0.01 може да се смета дека тренингот бил ефективен?

Решение:

	Број на грешки			
Вработен	Пред	После	Разлика d_i	d_i^2
М.В.	6	4	2	4
Т.Ф.	20	6	14	196
Д.Р.	3	2	1	1
Ј.Б.	0	0	0	0
С.Ж.	4	0	4	16
			21	217

$$\bar{d} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i = \frac{21}{5} = 4.2$$

$$s_D = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} d_i^2 - n\bar{d}^2}{n-1}}$$

$$= \sqrt{\frac{217 - 5 \cdot 4.2^2}{4}} = 5.67$$

Задача 4: Решение

$$H_0: \mu_D = 0 \qquad \bar{d} = 4.2,$$
$$H_a: \mu_D > 0 \qquad s_D = 5.67$$

- За вредноста на тест статистиката, се добива:

$$t_0 = \frac{\bar{d}}{s_D}\sqrt{n} = \frac{4.2}{5.67}\sqrt{5} = 1.66.$$

- Нивото на значајност на тестот е $\alpha = 0.01$.
- Од таблица за t-распределба, наоѓаме $t_{\alpha,\ n-1} = t_{0.01,\ 4} = 3.747$, па критичниот домен е $C = (3.747, +\infty)$.
- Бидејќи $t_0 = 1.66 \notin C$, нултата хипотеза не се отфрла.
- Оттука, заклучуваме дека нема значајна разлика во бројот на грешки на вработените пред и по обуката.