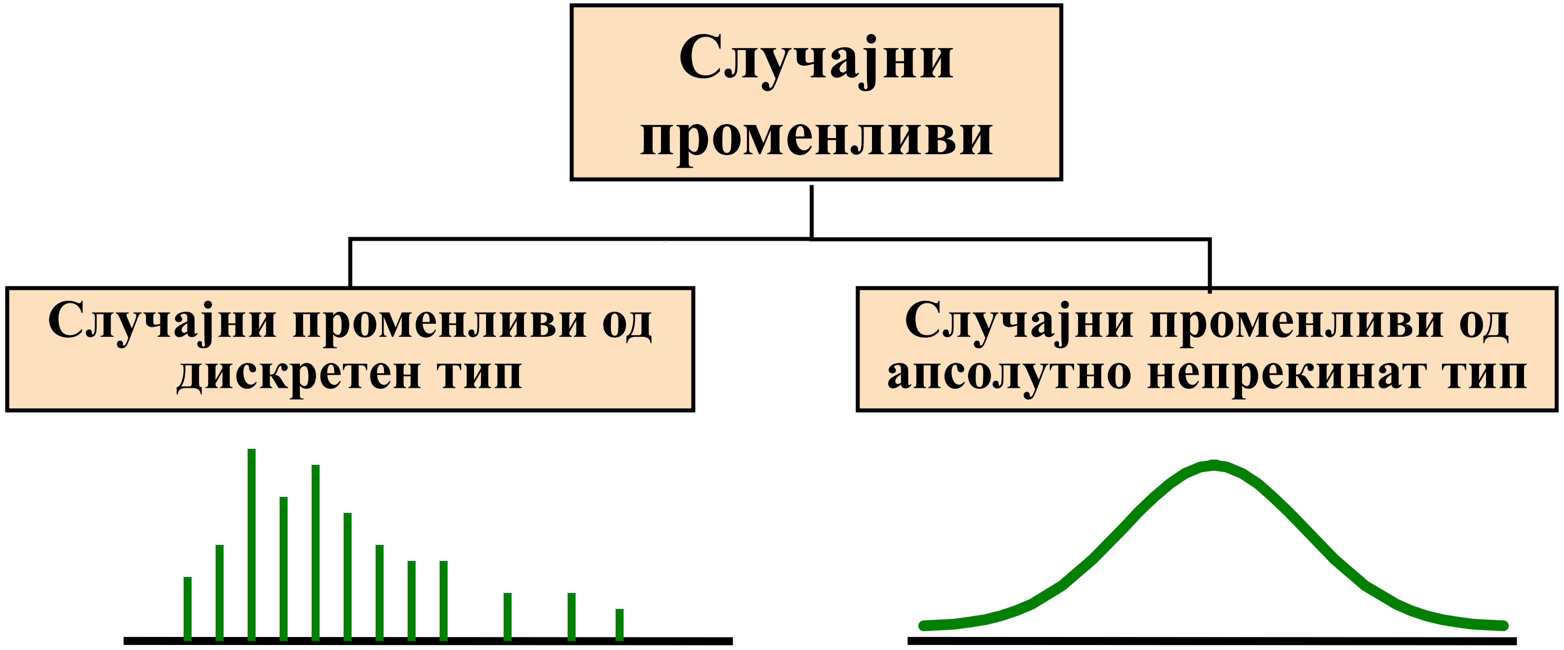
Бизнис статистика

Случајни променливи од апсолутно непрекинат тип

Вовед

Дефиниција 1.
Случајна променлива X е реална функција над множеството елементарни настани Ω, т.е. функција од Ω во $\mathbb{R}$.



Распределби од апсолутно непрекинат тип

- Една случајна променлива е од ***апсолутно непрекинат тип*** ако множеството вредности на таа случајна променлива е бесконечно непреброиво множество.
- Тоа е случајна променлива која може да прими било која вредност од даден интервал.
- Веројатноста случајна променлива од апсолутно непрекинат тип да прими една конкретна вредност е 0.
- Неколку примери на случајни променливи од апсолутно непрекинат тип:
  - Брзина на пренос на податоци
  - Време потребно да се заврши задача
  - Температура на раствор
  - Висина во сантиметри.

Распределби од апсолутно непрекинат тип

- Бидејќи веројатноста случајна променлива од апсолутно непрекинат тип да прими конкретна реална вредност е 0, распределбата на случајна променлива од апсолутно непрекинат тип не може да се претстави со закон на распределба.

- Затоа е потребно да се дефинираат некои функции кои ќе ја определуваат распределбата на случајните променливи од овој тип.

- Такви функции се густина на распределба и функција на распределба на случајна променлива од апсолутно непрекинат тип.

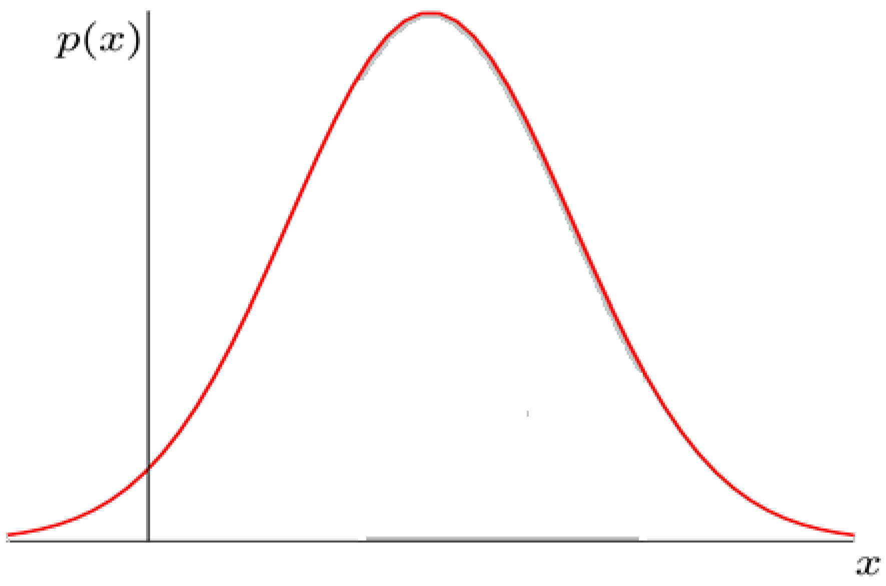
Густина на распределба

Густина на распределба на веројатности (или само ***густина***) на непрекината случајна променлива X се означува со $p(x)$ и ги има следните три основни својства:

1. $p(x) \geq 0$, за секој $x \in \mathbb{R}$ (графикот на функцијата $p(x)$ е над x-оската).
2. Плоштината на површината под графикот на густината $p(x)$ и x-оската над интервалот од сите вредности на случајната променлива X е 1.
3. Веројатноста случајната променлива X да прими вредност помеѓу a и b ($a < b$) е еднаква на плоштината на површината под графикот на густината и x-оската над интервалот $[a, b]$.

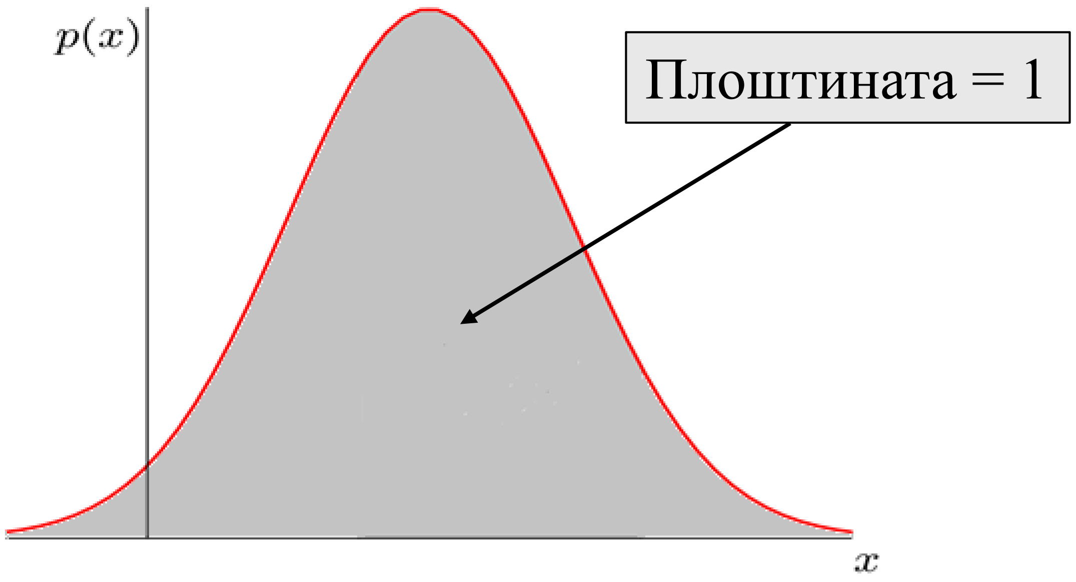
Густина на распределба: Својство 1

- $p(x) \geq 0$, за секој $x \in \mathbb{R}$ (графикот на функцијата $p(x)$ е над x-оската)



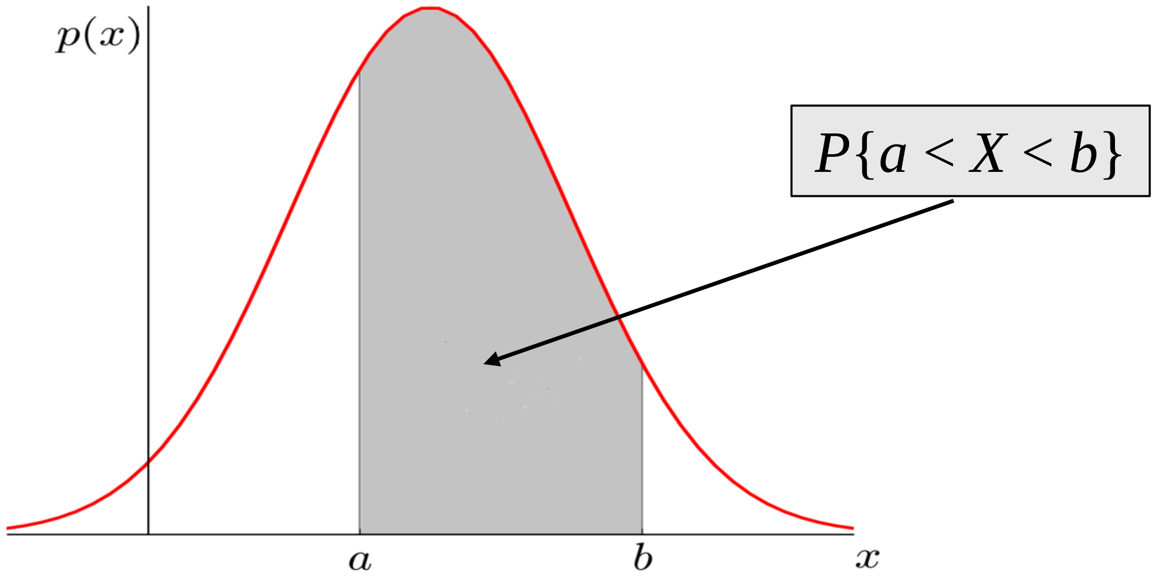
Густина на распределба: Својство 2

- Плоштината на површината под графикот на густината $p(x)$ и x-оската над интервалот од сите вредности на случајната променлива X е 1.



Густина на распределба: Својство 3

- Веројатноста случајната променлива X да прими вредност помеѓу a и b ($a < b$) е еднаква на плоштината на површината под графикот на густината и x-оската над интервалот $[a, b]$.

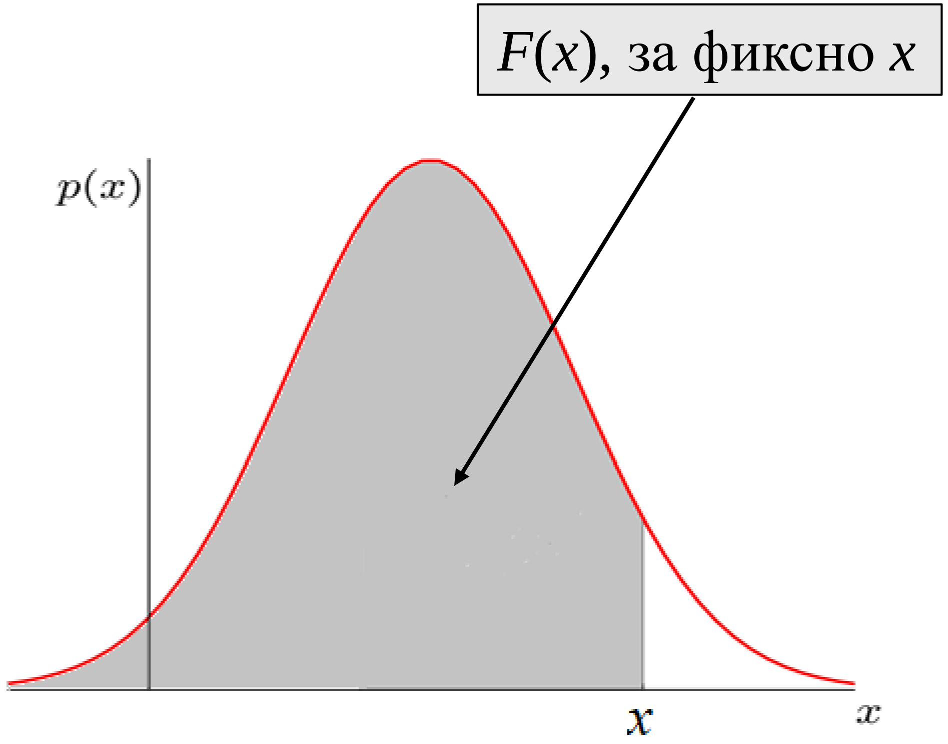


Функција на распределба

- Друга функција која наполно определува случајна променлива од апсолутно непрекинат тип е ***функција на распределба*** $F(x)$.
- За фиксно $x \in \mathbb{R}$, функцијата на распределба на непрекината случајна променлива X ја дава веројатноста случајната променлива X да прими вредност која е помала од x, т.е.

$$\boxed{F(x) = P\{X < x\},\ \text{за секој } x \in \mathbb{R}}$$

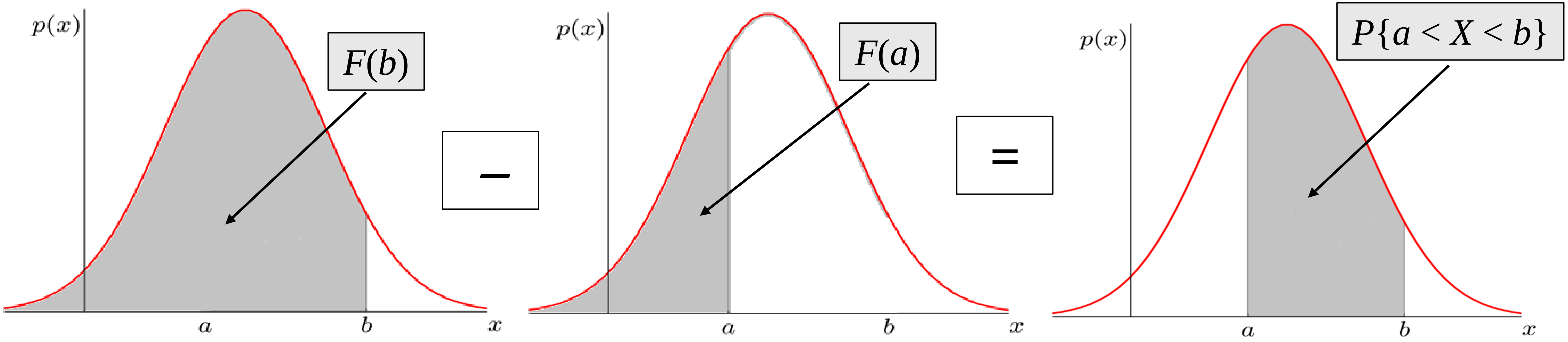
- Имено, за фикно x, вредноста на $F(x)$ се совпаѓа со плоштината помеѓу графикот на густината $p(x)$ и x-оската над интервалот $(-\infty, x)$.



Функција на распределба

- Нека $F(x)$ е функцијата на распределба на случајната промелива X. Тогаш веројатноста X да прими вредност помеѓу a и b е

$$\boxed{P\{a < X < b\} = F(b) - F(a).}$$



Случајни променливи од апсолутно непрекинат тип

- Со оглед на тоа што веројатноста една случајна променлива X од апсолутно непрекинат тип да прими некоја конкретна вредност е секогаш 0, точни се следниве равенства:

$$P\{a < X < b\} = P\{a \le X < b\} = P\{a < X \le b\} = P\{a \le X \le b\} = F(b) - F(a).$$

Бројни карактеристики на случајни променливи од апсолутно непрекинат тип

- Математичкото очекување и дисперзијата на случајните променливи од апсолутно непрекинат тип се определува со користење на интеграли.
- Поради тоа, формални дефиниции на овие карактеристики нема да бидат дадени.
- Подоцна, за познатите распределби од овој тип, математичкото очекување и дисперзијата ќе бидат дадени како веќе изведени.
- Само да наведеме дека својствата на математичко очекување и дисперзија кои ги дадовме за случајни променливи од дискретен тип, важат и во овој случај.

Бизнис статистика

Познати распределби од апсолутно-непрекинат тип

Распределби од апсолутно непрекинат тип

**Познати распределби
од апсолутно непрекинат тип**

- **Рамномерна**
- **Нормална**
- **Експоненцијална**

Рамномерна распределба

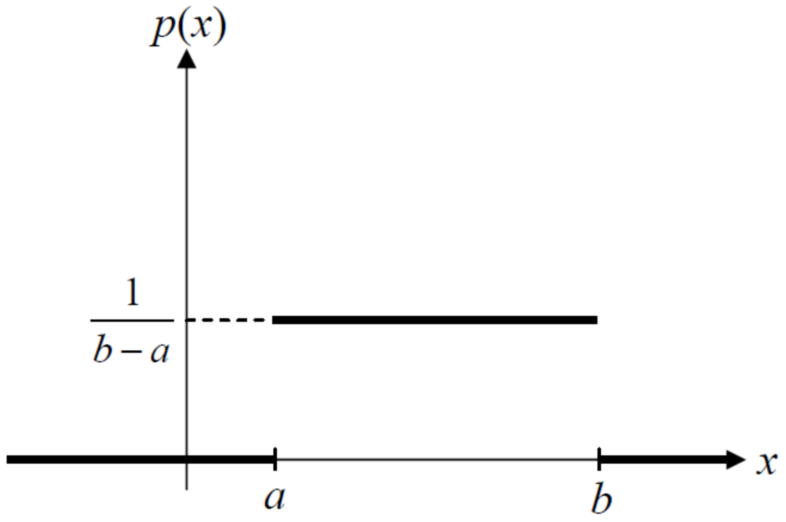
- Кај рамномерната распределба (од апсолутно-непрекинат тип) над даден интервал (a, b), густината на распределба има иста вредност за сите можни вредности на случајната променлива X од интервалот (a, b), односно $p(x)$ е константна функција над интервалот (a, b), а за вредности надвор од овој интервал $p(x) = 0$.

- Означуваме, $X \sim U(a, b)$

Рамномерна распределба

- Густина на распределба на непрекината рамномерна распределба $U(a, b)$ е:

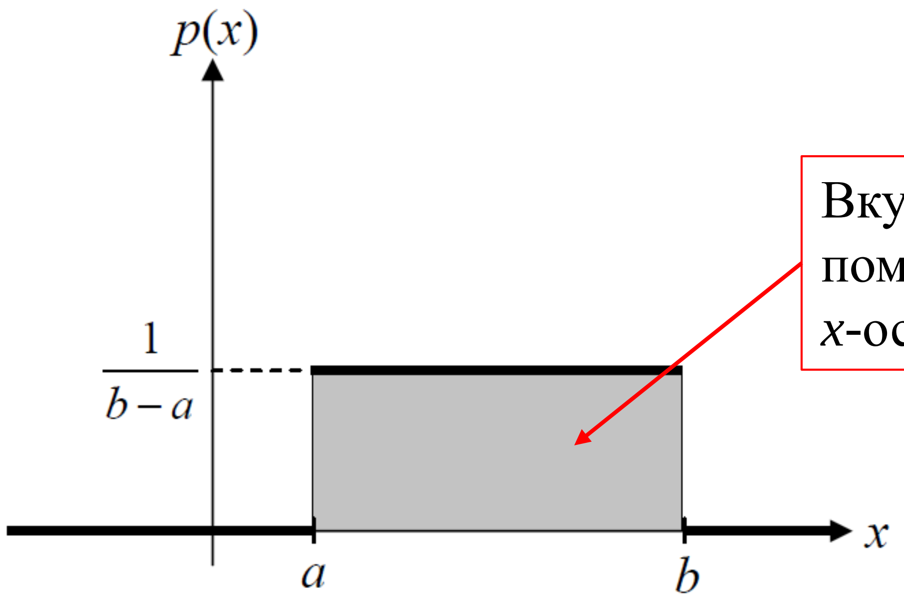
$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{ако } a < x < b \\ 0, & \text{инаку} \end{cases}$$



Рамномерна распределба

- Вредноста $\frac{1}{b-a}$, за $x \in (a,b)$, се добива така што вкупната плоштина помеѓу графикот на $p(x)$ и x-оската да биде 1.

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{ако } a < x < b \\ 0, & \text{инаку} \end{cases}$$

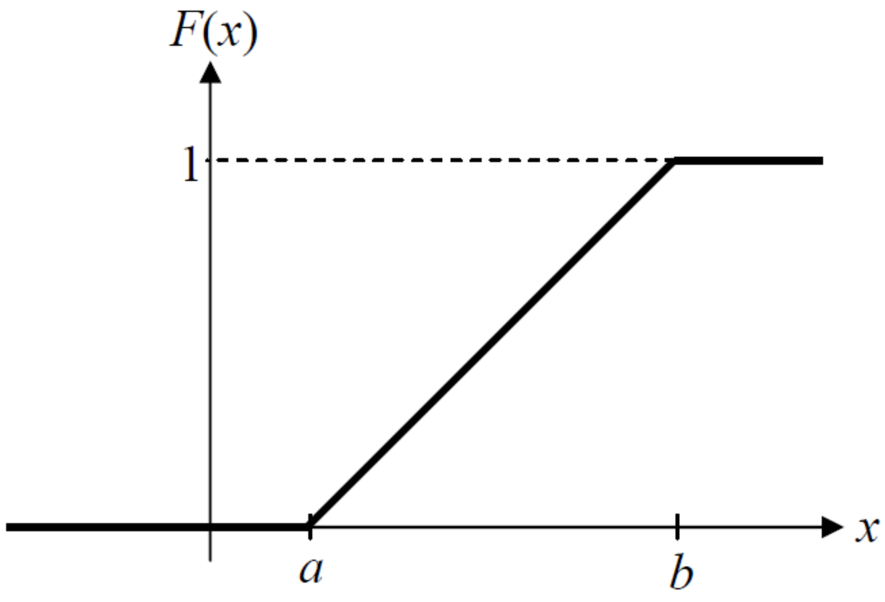


Вкупната плоштина помеѓу графикот и x-оската е 1

Рамномерна распределба

- Функцијата на распределба на непрекината рамномерна распределба $U(a, b)$ е:

$$F(x) = P\{X < x\} = \begin{cases} 0, & x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a < x \le b \\ 1, & x > b \end{cases}$$



Рамномерна распределба

- Ако x_1 и x_2 се вредности од интервалот (a, b), т.е. $a < x_1 < x_2 < b$, тогаш веројатноста дека X е меѓу x_1 и x_2 е:

$$P\{x_1 \le X \le x_2\} = P\{x_1 < X < x_2\} = F(x_2) - F(x_1) = \frac{x_2 - x_1}{b - a}$$

- Значи, веројатноста случајната променлива X (со рамномерна распределба на интервалот (a, b)) да прима вредност од подинтервалот (x_1, x_2) е еднаква на количникот од должината на тој подинтервал и должината на интервалот (a, b).
- Оттука, ако се дадени два произволни поднитервали од (a, b) со иста должина, тогаш веројатноста X да припаѓа на кој било од овие два подинтервали е еднаква.

Бројни карактеристики на рамномерна распределба

- Математичкото очекување на рамномерна распределба $U(a, b)$ е:

$$\mu = EX = \frac{a+b}{2}$$

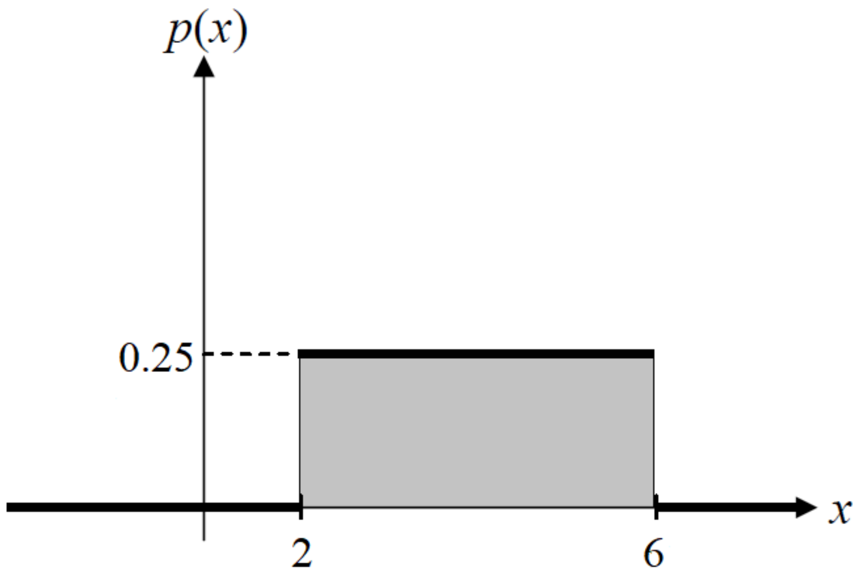
- Да воочиме дека математичкото очекување за рамномерна распределба е еднакво на средината на интервалот (a, b).

- Дисперзијата е:

$$\sigma^2 = DX = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Пример 1

- Нека X има рамномерна распределба над интервалот (2, 6). Тогаш



$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{6-2}, & \text{ако } 2 < x < 6 \\ 0, & \text{инаку} \end{cases}$$

$$\mu = \frac{a+b}{2} = \frac{2+6}{2} = 4$$

$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(6-2)^2}{12} = 1.333$$

Пример 2

Автобусот доаѓа на станица секои 20 минути. Времето, во минути, на чекање на автобусот на станицата може да се опише со рамномерна распределба со $a = 0$ и $b = 20$. Да се определи веројатноста дека ќе треба да чекате

а) повеќе од 10 минути,

б) помалку од 6 минути,

в) меѓу 8 и 15 минути.

Решение: Дефинираме случајна променлива X – време на чекање на автобусот на станицата (во минути), $X \sim U(0, 20)$. Тогаш

$$p(x) = \begin{cases} 1/20, & 0 < x < 20 \\ 0, & \text{инаку} \end{cases}, \qquad F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \dfrac{x}{20}, & 0 < x \le 20. \\ 1, & x > 20 \end{cases}$$

Пример 2: продолжение

$$p(x) = \begin{cases} 1/20, & 0 < x < 20 \\ 0, & \text{инаку} \end{cases}, \qquad F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \dfrac{x}{20}, & 0 < x \le 20. \\ 1, & x > 20 \end{cases}$$

а) $P\{X > 10\} = 1 - P\{X \le 10\} = 1 - P\{X < 10\} = 1 - F(10) = 1 - 10/20 = 1/2.$

б) $P\{X < 6\} = F(6) = 6/20 = 0.30$

в) $P\{8 < X < 15\} = F(15) - F(8) = 15/20 - 8/20 = 0.35.$

Експоненцијална распределба

- Друга позната распределба од апсолутно непрекинат тип е експоненцијалната распределба.

- Тесно е поврзана со Пуасоновата распределба.
- Ако бројот на појавувања на некои (еднородни) настани во даден временски интервал има Пуасоновата распределба со параметар λ, тогаш времето меѓу две последователни појавувања на настани има експоненцијалната распределба со параметар λ.

- Примери:
  - Време помеѓу доаѓање на два автобуси на станица.
  - Време помеѓу пристигнување на два материјали за печатење на мрежен принтер.
  - Време помеѓу две пристигнувања на пораки на сервер.

Експоненцијална распределба

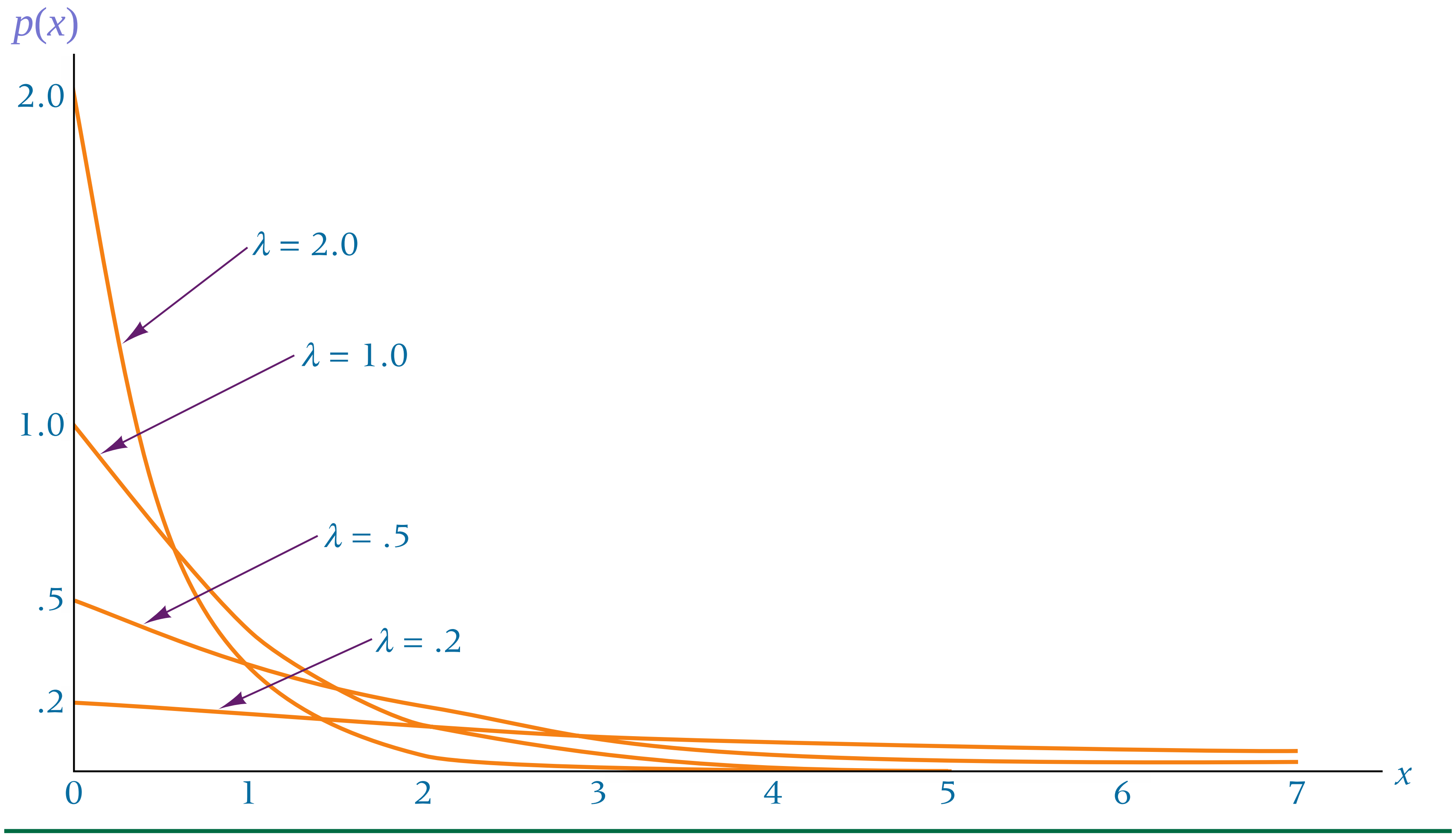
- Ако X има експоненцијална распределба со параметар λ, означуваме $X \sim E(\lambda)$, тогаш множеството вредности на X е интервалот $(0, +\infty)$, а густината на распределба е дадена со:

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{за } x \geq 0 \\ 0, & \text{инаку} \end{cases}$$

e - математичка константа која се апроксимира со 2.71828

λ - параметар за кој се покажува дека е просечниот број на појавувања на настани во дадениот интервал.

Експоненцијална распределба



Експоненцијална распределба

- Функцијата на распределба на случајна променлива X со експоненцијална распределба $E(\lambda)$ е:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases}$$

- За веројатноста $X > x_0$ се добива:

$$P\{X > x_0\} = 1 - F(x_0) = e^{-\lambda x_0}, \quad \text{за} \quad x_0 \geq 0$$

- Математичкото очекување и дисперзијата на случајна променлива $X \sim E(\lambda)$ се:

$$EX = \frac{1}{\lambda}, \;\; DX = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Пример 3

Пред еден шалтер доаѓаат во просек по 15 луѓе на час. Колку е веројатноста времето меѓу две последователни доаѓања да биде помало од 3 минути?

Решение:

- Нека случајна променлива X е времето помеѓу две последователни доаѓања.
- Просечниот број пристигнувања е 15 на час, па $\lambda = 15$.
- Значи X има експоненцијална $E(15)$ распределба.
- Треба да ја определиме веројатноста времето помеѓу две доаѓања да биде помало од 3 минути, но прво треба времето да го изразиме во часови: 3 мин. се $3/60 = 0.05$ часови.
- Сега, $P\{X < 0.05\} = F(0.05) = 1 - e^{-\lambda \cdot 0.05} = 1 - e^{-(15)(0.05)} = 0.5276.$

Нормална распределба

- Нормалната распределба е најзначајна распределба во статистика. Тоа доаѓа од следните три клучни причини:
  - Распределбата на многу природни и економски феномени може да се апроксимира со нормална распределба;
  - Нормалната распределба може да се користи за апроксимирање на многу други распределби, вклучувајќи ја и биномната распределба;
  - Математичкото очекување на прост случаен примерок има приближно нормална распределба.
- На пример, се покажува дека висината, тежината кај луѓето имаат нормална распределба. Исто така, кога се прават одредени мерења (при разни испитувања) се прават грешки при тие мерења. Се покажува дека таквите грешки имаат нормална распределба.

Нормална распределба

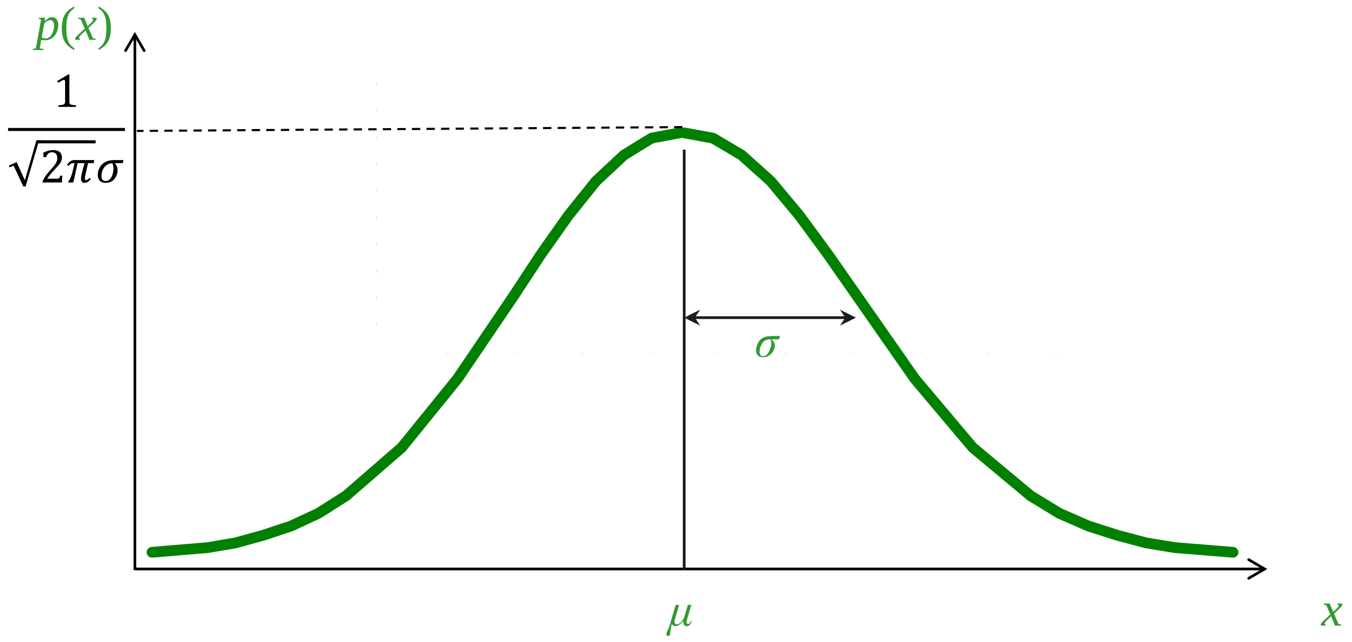
- Случајна променлива X има нормалната распределба со параметри μ и σ^2, означуваме $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, ако нејзината густина на распределба е зададена со:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

- $\mu = EX$ е математичко очекување
- $\sigma > 0$ е стандардна девијација, а $\sigma^2 = DX$
- e е математичка константа ≈ 2.71828
- π е математичка константа ≈ 3.14159
- Множеството вредности на X е интервалот $(-\infty, +\infty)$

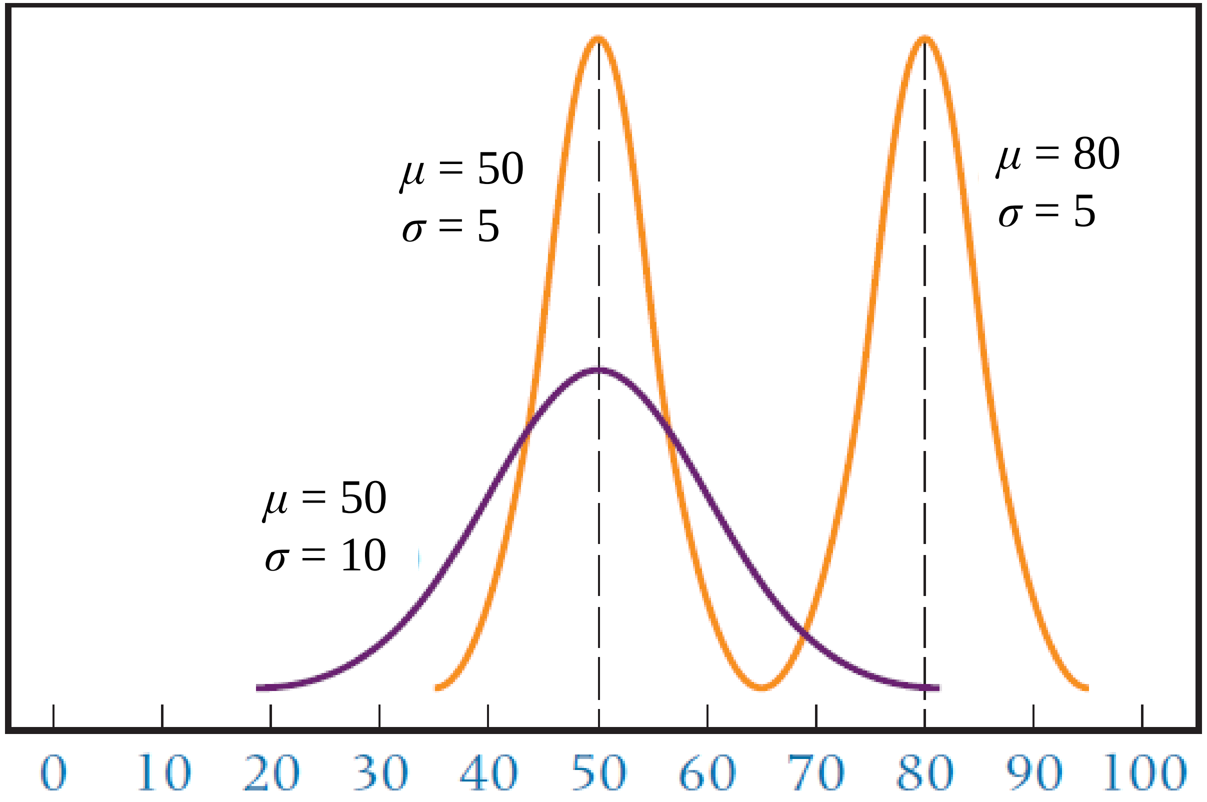
Нормална распределба

- Функцијата $p(x)$ има максимум за $x = \mu$ и тој максимум изнесува $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$.
- Оттука е јасно дека со зголемување на σ максималната вредност на $p(x)$ се намалува и обратно, за помали вредности на σ максималната вредност на $p(x)$ е поголема.
- Исто така, се покажува дека графикот на на $p(x)$ е симетричен во однос на правата $x = \mu$.



- Оттука, промена на μ доведува до поместување на оската на симетрија на кривата, а промена на σ доведува до промена на максимумот на функцијата, што пак ја менува ширината на графикот.

Нормална распределба

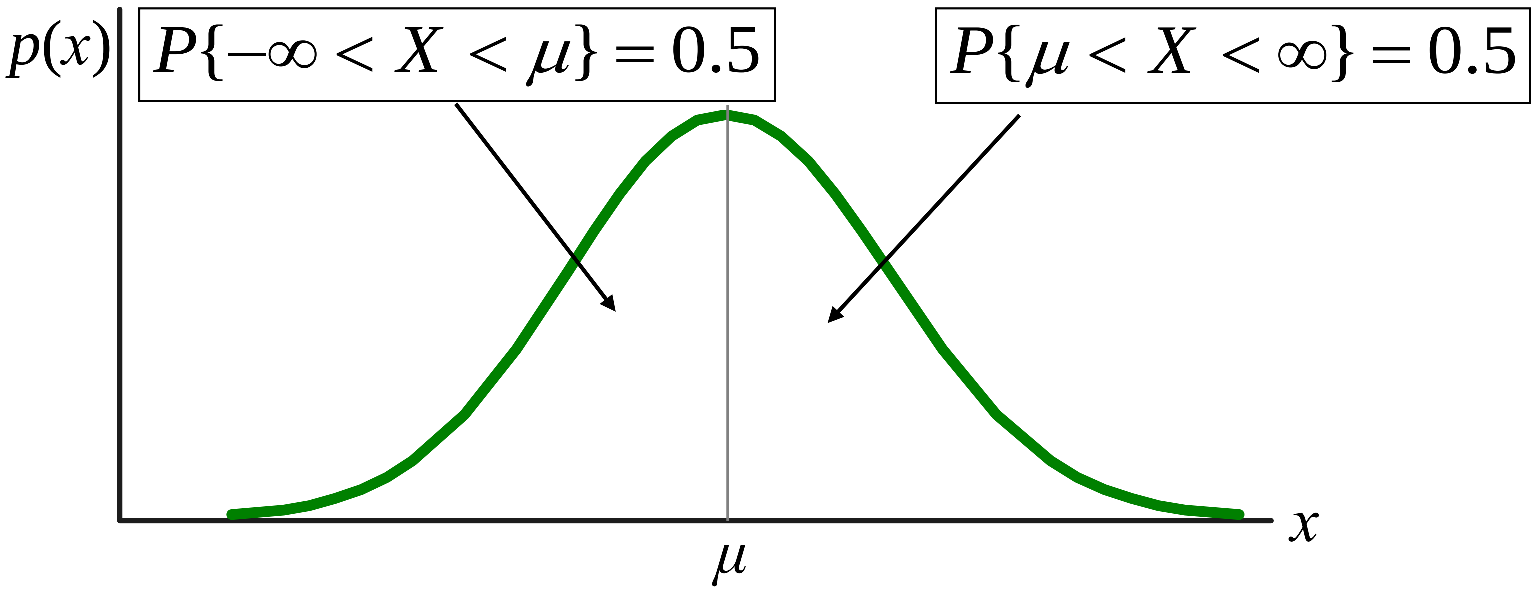


Промената на μ го поместува графикот на густината на распределбата налево или надесно.

Промената на σ ја намалува или зголемува ширината на графикот и висината на максималната вредност.

Нормална распределба

Како и за секоја густина на распределба, вкупната плоштина на површината помеѓу графикот на густината $p(x)$ и x-оската на $(-\infty, +\infty)$ е 1. Графикот на густината на нормална распределба $N(\mu, \sigma^2)$ е симетричен во однос на $x = \mu$, па плоштината лево од очекувањето μ е 1/2, и плоштината десно од очекувањето μ е 1/2.



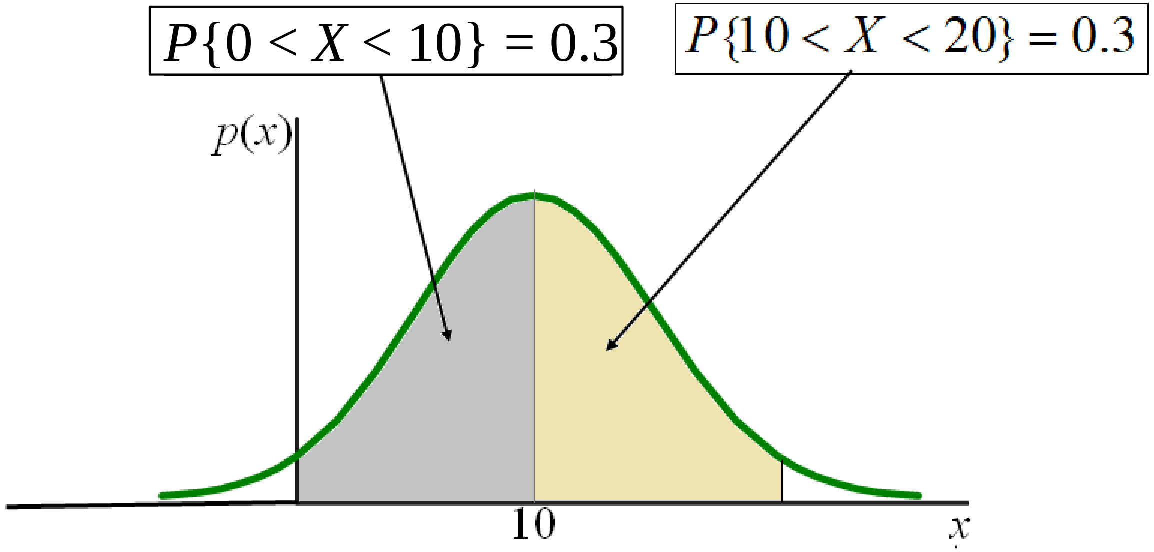
$$\boxed{P\{-\infty < X < \infty\} = 1}$$

Пример 4

Случајната променлива $X \sim N(10,\ \sigma^2)$. Ако $P\{10 < X < 20\} = 0.3$, колкава е веројатноста дека $X \in (0,10)$?

Решение: Густината на нормална $N(10,\ \sigma^2)$ распределба е симетрична во однос на правата $x = 10$, па затоа

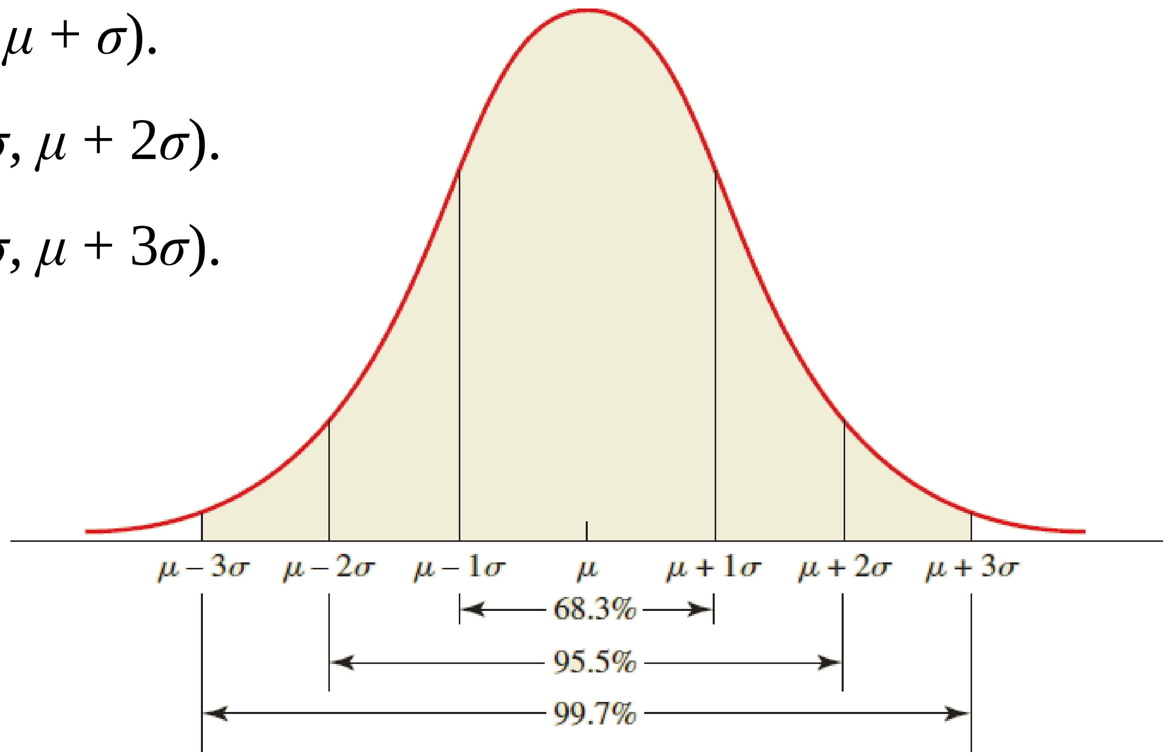
$$P\{0 < X < 10\} = P\{10 < X < 20\} = 0.3.$$



Нормална распределба

За графикот на густина на произволна нормална распределба, може да се покаже дека за плоштините под кривата важи следното:

- Околу 68,3% од областа е во интервалот $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$.
- Околу 95,5% од областа е во интервалот $(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$.
- Околу 99,7% од областа е во интервалот $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$.

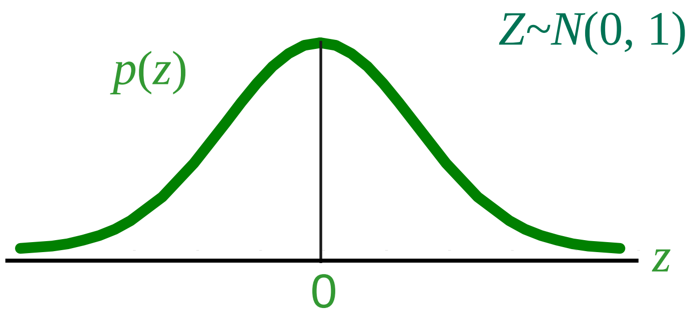


- Практично, плоштината под кривата надвор од интервалот $(\mu - 4\sigma, \mu + 4\sigma)$ е 0. Тоа значи дека иако графикот се протега до бесконечност, надвор од интервалот $(\mu - 4\sigma, \mu + 4\sigma)$ тој е толку залепен до x-оската што плоштината помеѓу графикот на $p(x)$ и x-оската е 0.

Нормална нормирана распределба

- Нормалната распределба со математичко очекување 0 и дисперзија 1, $N(0, 1)$ се нарекува ***нормална нормирана распределба*** или ***стандардна нормална распределба***.
- Секоја случајна променлива со нормална распределба (за било која комбинација на вредности за очекувањето и стандардната девијација) може да се трансформира во случајна променлива Z која има нормална нормирана распределба.
- За да се трансформира $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ во Z треба да се одземе математичкото очекување на X и да се подели со стандардната девијација на X:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$



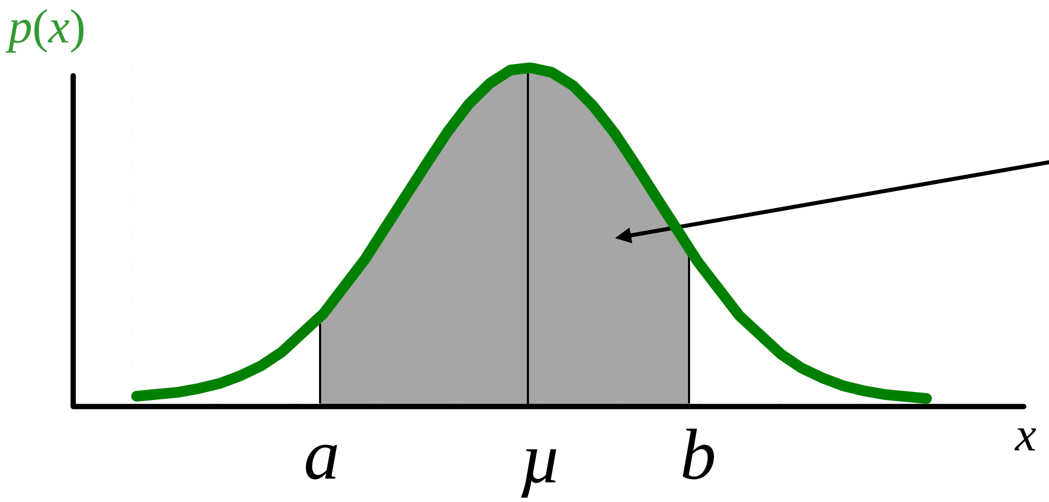
- За дадена вредност x_0, вредноста $z_0 = \frac{x_0 - \mu}{\sigma}$ дава колку стандардни девијации x_0 отстапува од очекувањето μ.
- На пример, ако X има нормална распределба со математичко очекување 100 и стандардна девијација 50, z вредноста за $x = 200$ е

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{200 - 100}{50} = 2.0$$

Ова значи дека $x = 200$ е две стандардни девијации над очекувањето $\mu = 100$.

Нормална нормирана распределба

- Со користење на оваа трансформација, веројатноста X да прими вредност од интервалот (a, b) може да се определи преку функцијата на распределба на нормирана случајна променлива $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ која има $N(0, 1)$ распределба.
- Функцијата на распределба на нормална нормирана распределба се означува со $\Phi(x)$ и нејзините вредности се читаат од таблица за нормална распределба.



$$
\begin{aligned}
P\{a < X < b\} &= P\left\{\frac{a-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{b-\mu}{\sigma}\right\} \\
&= P\left\{\frac{a-\mu}{\sigma} < Z < \frac{b-\mu}{\sigma}\right\} \\
&= F_Z\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - F_Z\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)
\end{aligned}
$$

Таблица на веројатности за нормална нормирана распределба

- Во таблици за нормална нормирана распределба, табелирани се вредностите на функцијата на распределба и за дадена вредност z може да се прочита вредноста на $\Phi(z) = P\{Z < z\}$, т.е. плоштина на областа под графикот на густината на распределба над интервалот од $-\infty$ до z.

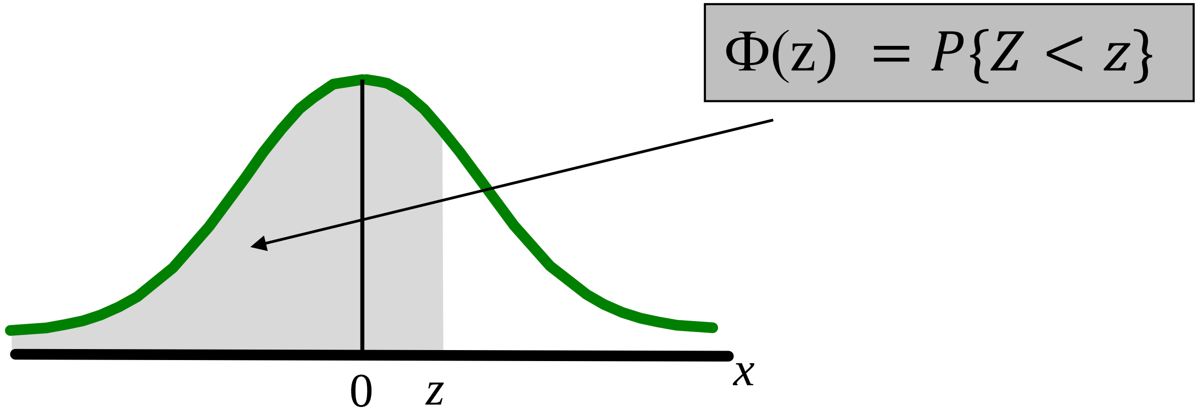


Таблица за нормална распределба (негативни вредности на z)

	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
-3.9	0.00005	0.00005	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00003	0.00003
-3.8	0.00007	0.00007	0.00007	0.00006	0.00006	0.00006	0.00006	0.00005	0.00005	0.00005
-3.7	0.00011	0.00010	0.00010	0.00010	0.00009	0.00009	0.00008	0.00008	0.00008	0.00008
-3.6	0.00016	0.00015	0.00015	0.00014	0.00014	0.00013	0.00013	0.00012	0.00012	0.00011
-3.5	0.00023	0.00022	0.00022	0.00021	0.00020	0.00019	0.00019	0.00018	0.00017	0.00017
-3.4	0.00034	0.00032	0.00031	0.00030	0.00029	0.00028	0.00027	0.00026	0.00025	0.00024
-3.3	0.00048	0.00047	0.00045	0.00043	0.00042	0.00040	0.00039	0.00038	0.00036	0.00035
-3.2	0.00069	0.00066	0.00064	0.00062	0.00060	0.00058	0.00056	0.00054	0.00052	0.00050
-3.1	0.00097	0.00094	0.00090	0.00087	0.00084	0.00082	0.00079	0.00076	0.00074	0.00071
-3.0	0.00135	0.00131	0.00126	0.00122	0.00118	0.00114	0.00111	0.00107	0.00104	0.00100
-2.9	0.00187	0.00181	0.00175	0.00169	0.00164	0.00159	0.00154	0.00149	0.00144	0.00139
-2.8	0.00256	0.00248	0.00240	0.00233	0.00226	0.00219	0.00212	0.00205	0.00199	0.00193
-2.7	0.00347	0.00336	0.00326	0.00317	0.00307	0.00298	0.00289	0.00280	0.00272	0.00264
-2.6	0.00466	0.00453	0.00440	0.00427	0.00415	0.00402	0.00391	0.00379	0.00368	0.00357
-2.5	0.00621	0.00604	0.00587	0.00570	0.00554	0.00539	0.00523	0.00508	0.00494	0.00480
-2.4	0.00820	0.00798	0.00776	0.00755	0.00734	0.00714	0.00695	0.00676	0.00657	0.00639
-2.3	0.01072	0.01044	0.01017	0.00990	0.00964	0.00939	0.00914	0.00889	0.00866	0.00842
-2.2	0.01390	0.01355	0.01321	0.01287	0.01255	0.01222	0.01191	0.01160	0.01130	0.01101
-2.1	0.01786	0.01743	0.01700	0.01659	0.01618	0.01578	0.01539	0.01500	0.01463	0.01426
-2.0	0.02275	0.02222	0.02169	0.02118	0.02068	0.02018	0.01970	0.01923	0.01876	0.01831
-1.9	0.02872	0.02807	0.02743	0.02680	0.02619	0.02559	0.02500	0.02442	0.02385	0.02330
-1.8	0.03593	0.03515	0.03438	0.03362	0.03288	0.03216	0.03144	0.03074	0.03005	0.02938
-1.7	0.04457	0.04363	0.04272	0.04182	0.04093	0.04006	0.03920	0.03836	0.03754	0.03673
-1.6	0.05480	0.05370	0.05262	0.05155	0.05050	0.04947	0.04846	0.04746	0.04648	0.04551
-1.5	0.06681	0.06552	0.06426	0.06301	0.06178	0.06057	0.05938	0.05821	0.05705	0.05592
-1.4	0.08076	0.07927	0.07780	0.07636	0.07493	0.07353	0.07215	0.07078	0.06944	0.06811
-1.3	0.09680	0.09510	0.09342	0.09176	0.09012	0.08851	0.08691	0.08534	0.08379	0.08226
-1.2	0.11507	0.11314	0.11123	0.10935	0.10749	0.10565	0.10383	0.10204	0.10027	0.09853
-1.1	0.13567	0.13350	0.13136	0.12924	0.12714	0.12507	0.12302	0.12100	0.11900	0.11702
-1.0	0.15866	0.15625	0.15386	0.15151	0.14917	0.14686	0.14457	0.14231	0.14007	0.13786
-0.9	0.18406	0.18141	0.17879	0.17619	0.17361	0.17106	0.16853	0.16602	0.16354	0.16109
-0.8	0.21186	0.20897	0.20611	0.20327	0.20045	0.19766	0.19489	0.19215	0.18943	0.18673
-0.7	0.24196	0.23885	0.23576	0.23270	0.22965	0.22663	0.22363	0.22065	0.21770	0.21476
-0.6	0.27425	0.27093	0.26763	0.26435	0.26109	0.25785	0.25463	0.25143	0.24825	0.24510
-0.5	0.30854	0.30503	0.30153	0.29806	0.29460	0.29116	0.28774	0.28434	0.28096	0.27760
-0.4	0.34458	0.34090	0.33724	0.33360	0.32997	0.32636	0.32276	0.31918	0.31561	0.31207
-0.3	0.38209	0.37828	0.37448	0.37070	0.36693	0.36317	0.35942	0.35569	0.35197	0.34827
-0.2	0.42074	0.41683	0.41294	0.40905	0.40517	0.40129	0.39743	0.39358	0.38974	0.38591
-0.1	0.46017	0.45620	0.45224	0.44828	0.44433	0.44038	0.43644	0.43251	0.42858	0.42465
-0.0	0.50000	0.49601	0.49202	0.48803	0.48405	0.48006	0.47608	0.47210	0.46812	0.46414

$P\{Z < -2.65\} = 0.00402$

Таблица за нормална распределба (позитивни вредности на z)

	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
3.6	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
3.7	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992
3.8	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995
3.9	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997

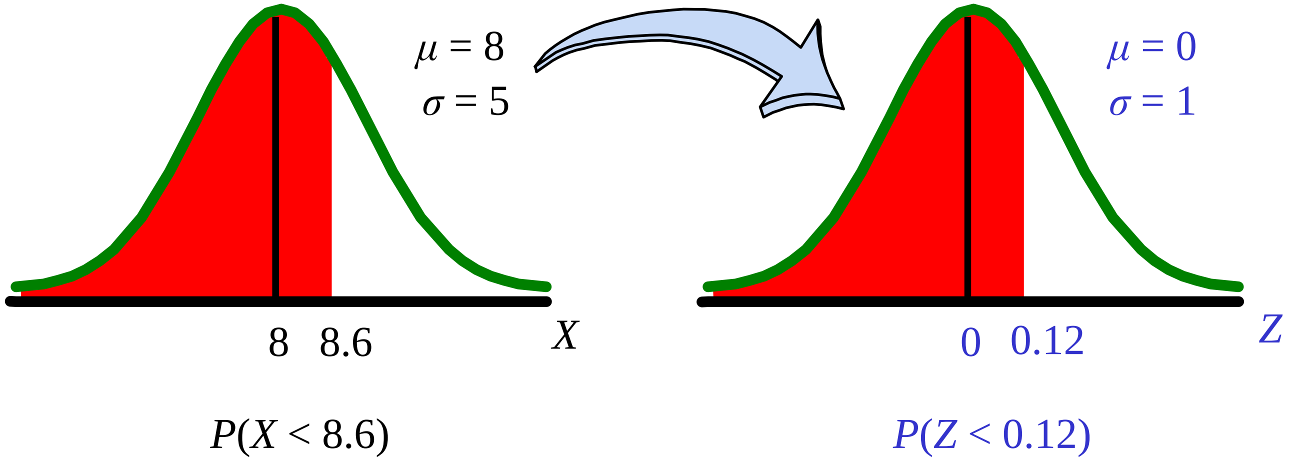
$\boxed{P\{Z < 1.48\} = 0.93056}$

Постапка за определување на веројатностите кај нормална распределба

- Нека $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. За да ја пресметаме $P\{a < X < b\}$, прво ги определуваме z вредностите за a и b, потоа од таблица ги читаме вредностите на $\Phi(z)$ за добиените z вредности.
- На пример, нека X е нормално распределена случајна променлива со математичко очекување 8 и дисперзија 25 ($X \sim N(8, 25)$) и треба да се определи $P\{X < 8.6\}$.
- Со користење на трансформацијата на произволна нормална во нормална нормирана распределба, се добива:

$$P\{X < 8.6\} = P\left\{\frac{X-8}{5} < \frac{8.6-8}{5}\right\}$$

$$= P\{Z < 0.12\} = \Phi(0.12) = 0.54776.$$



	.00	.01	.02	.03
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824

Постапка за определување на веројатностите кај нормална распределба

- Предходниот пример, може да се реши и на следниот начин:
- Прво се пресметува

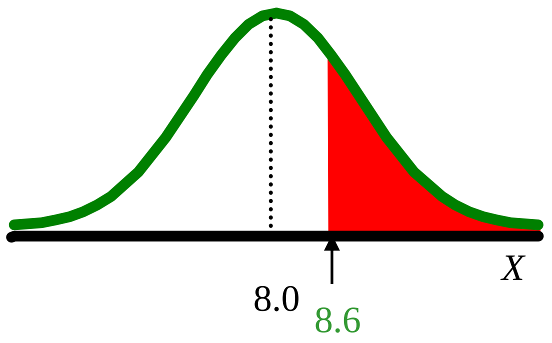
$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{8.6-8.0}{5.0} = 0.12$$

- Сега,

$$P\{X < 8.6\} = P\{Z < 0.12\} = \Phi(0.12) = 0.54776$$

Постапка за определување на веројатностите кај нормална распределба

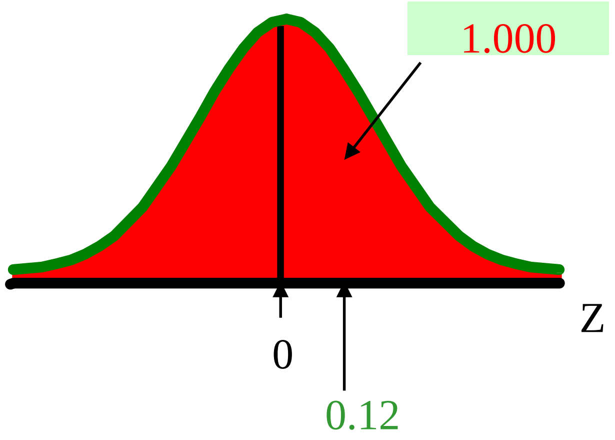
- Нека X е нормално распределена случајна променлива со математичко очекување 8 и дисперзија 25 ($X \sim N(8, 25)$) и треба да се определи $P\{X > 8.6\}$.
- Слично како и претходно, добиваме:

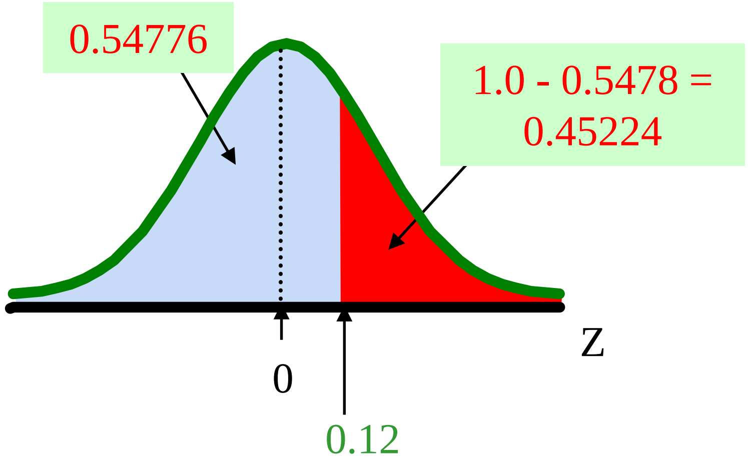


$$P\{X > 8.6\} = 1 - P\{X \le 8.6\} = 1 - P\{X < 8.6\}$$

$$= 1 - P\left\{\frac{X - 8}{5} < \frac{8.6 - 8}{5}\right\} = 1 - P\{Z < 0.12\}$$

$$= 1 - \Phi(0.12) = 1 - 0.54776 = 0.45224.$$





	.00	.01	.02	.03
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640

Определување на z вредност

- Како да определиме за која вредност на z, $\Phi(z) = 0.2$?
- Во таблицата со вредности на Φ ја бараме вредноста 0.2 (или некоја најблиска до неа) и потоа читаме за која вредност на z, $\Phi(z) = 0.2$
- Од таблица читаме $z = -0.84$.

20% од површина е пред z вредноста -0.84.

	.00	.01	.02	.03	.04	.05
-1.0	0.15866	0.15625	0.15386	0.15151	0.14917	0.14686
-0.9	0.18406	0.18141	0.17879	0.17619	0.17361	0.17106
-0.8	0.21186	0.20897	0.20611	0.20327	0.20045	0.19766
-0.7	0.24196	0.23885	0.23576	0.23270	0.22965	0.22663
-0.6	0.27425	0.27093	0.26763	0.26435	0.26109	0.25785