Бизнис статистика

Аудиториски вежби 11

Тестирање хипотези – едно обележје

Задача 1

Шишињата Кока-Кола треба да содржат по 300ml. Но, машината за полнење не е комплетно прецизна, па постои разлика од едно до друго шише. Се претпоставува дека количината на течноста во шишињата има нормална распределба со стандардна девијација 3ml. Контролата зема примерок од 6 шишиња и ги добива следните тежини:

299.5 298.2 301.1 299.9 300.05 298.6

Дали со ниво на значајност $\alpha = 0.01$ може да се заклучи дека количината на Кока-Кола во едно шише е помала од пропишаните стандарди?

Задача 1: решение

H_0: $\mu = 300$
H_a: $\mu < 300$

Стандардната девијација $\sigma = 3$ е позната, па за тестирање се користи статистиката

$$Z_0 = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1),$$

и критичниот домен е $C = (-\infty, -z_\alpha)$, каде $P\{Z < -z_\alpha \mid H_0\} = \alpha$.
Во нашиот случај, $\bar{x} = 299.63$,

$$z_0 = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} = \frac{299.63 - 300}{3}\sqrt{6} = -0.302.$$

$\Phi(z_\alpha) = 1 - \alpha = 0.99$, па $z_\alpha = 2.33$. Значи критичниот домен е $C = (-\infty, -2.33)$.
$z_0 \notin C$, па не ја отфрламе нултата хипотеза, т.е количината на Кока-Кола во едно шише е според пропишаните стандарди.

Задача 2

Една фабрика произведува метални шипки. Според стандардите очекуваната должина на шипките треба да е 80 см. Да се утврди дали производството на фабриката е според стандардите, ако е земен примерок од 10 шипки и измерени се следните должини:

81 85 76 79 84 83 77 89 79 80

Нивото на значајност на тестот е $\alpha = 0.05$. Се претпоставува дека должината на шипките е обележје со нормална распределба.

Задача 2: решение

H_0: $\mu = 80$
H_a: $\mu \neq 80$
Во овој случај, стандардната девијација не е позната, па за тестирање се користи статистиката

$$T_0 = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{S}\sqrt{n} \sim t_{n-1},$$

и критичниот домен е $C = (-\infty, -t_{\alpha/2,n-1}) \cup (t_{\alpha/2,n-1}, +\infty)$, каде
$P\{|T| > t_{\alpha/2,n-1} | H_0\} = \alpha$.
Во нашиот случај, $\bar{x} = 81.3$, $s^2 = 15.7889$

$$t_0 = \frac{81.3 - 80}{s}\sqrt{n} = \frac{81.3 - 80}{\sqrt{15.7889}}\sqrt{10} = 1.0346$$

$t_{\alpha/2,n-1} = t_{0.025,\,9} = 2.262$, па критичниот домен е $C = (-\infty, -2.262) \cup (2.262, +\infty)$.
$t_0 \notin C$, па не ја отфрламе нултата хипотеза, т.е производството е според стандардите.

Задача 3

Помеѓу учениците на едно училиште спроведена е анкета со прашањето дали имаат компјутер или не. Случајно биле избрани 300 ученици, а 245 од нив одговориле дека имаат компјутер. Со ниво на значајност 5% да се тестира хипотезата дека веројатноста случајно избран ученик да има компјутер е 0.85 наспроти алтернативната дека е помала од 0.85.

Решение:

A: ученикот има компјутер
Тестираме

H_0: $P(A) = 0.85$
H_a: $P(A) < 0.85$

Задача 3: решение

H_0: $P(A) = 0.85$
H_a: $P(A) < 0.85$

За тестирање се користи статистиката $Z_0 = \dfrac{\hat{P} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}}$

која за голем примерок има асимптотски $N(0,1)$ распределба, па критичниот домен е $C = (-\infty, -z_\alpha)$.

Во нашиот случај,

$$\hat{p} = \frac{245}{300} = 0.817$$

$$z_0 = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{0.817 - 0.85}{\dfrac{\sqrt{0.85 \cdot 0.15}}{\sqrt{300}}} = -1.6$$

$\Phi(z_\alpha) = 1 - \alpha = 0.95$, од каде $z_\alpha = 1.65$ и критичниот домен е $C = (-\infty, -1.65)$.
$z_0 \notin C$, затоа не ја отфрламе нултата хипотеза, т.е. веројатноста случајно избран ученик да има компјутер е 0.85.

Задача 4

Познато е дека стандардната девијација на тежината на пакетите од 40 грама полнети од една машина е 0.25. Од случаен примерок од 20 пакети добиена е стандардна девијација од 0.32 грама. Дали со ниво на значајност α = 0.01 може да се тврди дека дошло до зголемување на стандардната девијација?

***Решение*:**

H_0: $\sigma = 0.25$
H_a: $\sigma > 0.25$

Задача 4: решение

H_0: $\sigma = 0.25$
H_a: $\sigma > 0.25$
За тестирање се користи статистиката $\chi_0^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi_{n-1}^2$

Критичниот домен е $C = (\chi_{\alpha,\, n-1}, +\infty)$, каде $P\{\chi^2 > \chi_{\alpha,\, n-1} | H_0\} = \alpha$.
Во нашиот случај,

$$\chi_0^2 = \frac{(20-1)0.32^2}{0.25^2} = 32.768$$

Критичниот домен е $C=(36.191, +\infty)$.
$\chi_0^2 \notin$ C, затоа не ја отфрламе нултата хипотеза, т.е. заклучуваме не дошло до зголемување на стандардната девијација.