UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO

FACULTAD DE INGENIERÍA ESTADÍSTICA E INFORMÁTICA

ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA ESTADÍSTICA E INFORMÁTICA

OPTIMIZACION NO LINEAL

CURSO: METODOS DE OPTIMIZACION

DOCENTE: TORRES CRUZ FRED

INTEGRANTES:

ERIKA MISHELLE ARAPA CONDORI

LINK GITHUB
https://github.com/Mishell03/optimizacion-no-lineal.git
LINK STREAMLIT
https://optimizacion-no-lineal.streamlit.app/

PUNO – PERÚ

2024

EJERCICIO 1

Verifica si los siguientes puntos son minimizadores globales o locales para $f(x) = x^2 - 4x + 5$:

- $x = 2$
- $x = 0$

RESOLUCION

Paso 1:
La función es:

$$f(x) = x^2 - 4x + 5$$

Esta es una función cuadrática:

- De la forma general: $f(x) = ax^2 + bx + c$,
- Con coeficientes: $a = 1$, $b = -4$, $c = 5$.

Características importantes

1. Como $a = 1 > 0$, la parábola **abre hacia arriba**, lo que significa que tiene un **mínimo global único**.
2. La parábola no tiene **máximos locales**, ya que siempre "sube" hacia los lados de su vértice.

Paso 2: calcular el vértice
El vértice de una parábola es el punto donde la función alcanza su valor mínimo (en este caso, ya que $a > 0$).
Usamos la fórmula del vértice:

$$x^* = -\frac{b}{2a}$$

Sustituyendo los valores:

$$x^* = -\frac{-4}{2(1)} = \frac{4}{2} = 2$$

Por lo tanto:

- El mínimo global ocurre en $x = 2$.

Calcular el valor mínimo
Sustituyendo $x = 2$ en la función:

$$f(2) = (2)^2 - 4(2) + 5 = 4 - 8 + 5 = 1$$

El valor mínimo de la función es:

$$f(2) = 1$$

Ahora evaluamos $f(x)$ en $x = 0$:

$$f(0) = (0)^2 - 4(0) + 5 = 0 + 0 + 5 = 5$$

El valor de la función en $x = 0$ es:

$$f(0) = 5$$

Conclusion

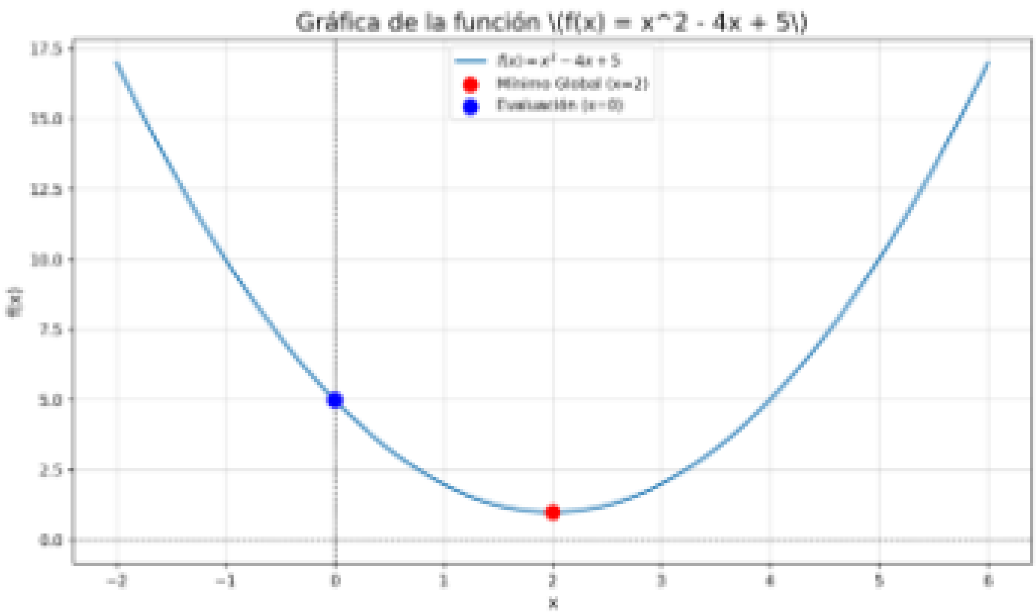
En $x = 2$:

1. $x = 2$ es el **mínimo global**, porque es el punto donde la función alcanza su valor más bajo ($f(2) = 1$).
2. Esto también lo convierte en un **mínimo local**, ya que cualquier mínimo global también es un mínimo local.

En $x = 0$:

1. $x = 0$ no es un **mínimo global**, ya que $f(0) = 5 > f(2) = 1$.
2. $x = 0$ tampoco es un **mínimo local**, porque no cumple con la condición de ser el valor más bajo en un vecindario cercano.

Gráfica de la función



Conclusión

1. El punto (x = 2) es un **mínimo local** porque cumple las condiciones en un vecindario, y también es un **mínimo global** porque es el punto de menor valor en todo el dominio.
2. El punto (x = 0) **no es un mínimo local ni global**, ya que no cumple con ninguna de las definiciones.

EJERCICIO 2

Dibuja la función $f(x) = |x|$ y determina si tiene un mínimo global o local en $x = 0$.

RESOLUCION

Análisis de la función $f(x) = |x|$

La función $f(x) = |x|$ representa el valor absoluto de x. Esto significa que para cualquier valor de x, $f(x)$ es siempre no negativo ($f(x) \geq 0$). Específicamente:

- Si $x \geq 0$, $f(x) = x$.
- Si $x < 0$, $f(x) = -x$.

El gráfico de esta función tiene una forma de "V", con el vértice en $x = 0$. Esto ocurre porque el valor absoluto de x cambia de signo en este punto.

Características clave de $f(x) = |x|$:

1. **Continuidad:** La función es continua en todo su dominio (R), lo que significa que no hay saltos ni interrupciones en la curva.
2. **Simetría:** La función es simétrica respecto al eje y. Esto refleja que $f(x)$ depende solo de la magnitud de x, no de su signo.

Mínimos Globales y Locales

Un mínimo global ocurre cuando el valor de la función en un punto es el más bajo en todo el dominio. Un mínimo local, por otro lado, ocurre cuando el valor es el más bajo en un vecindario cercano al punto.

En $f(x) = |x|$:

- El valor más bajo ocurre en $x = 0$, donde $f(0) = 0$.
- Para cualquier otro valor $x \neq 0$, $f(x) > 0$.

Esto implica que:

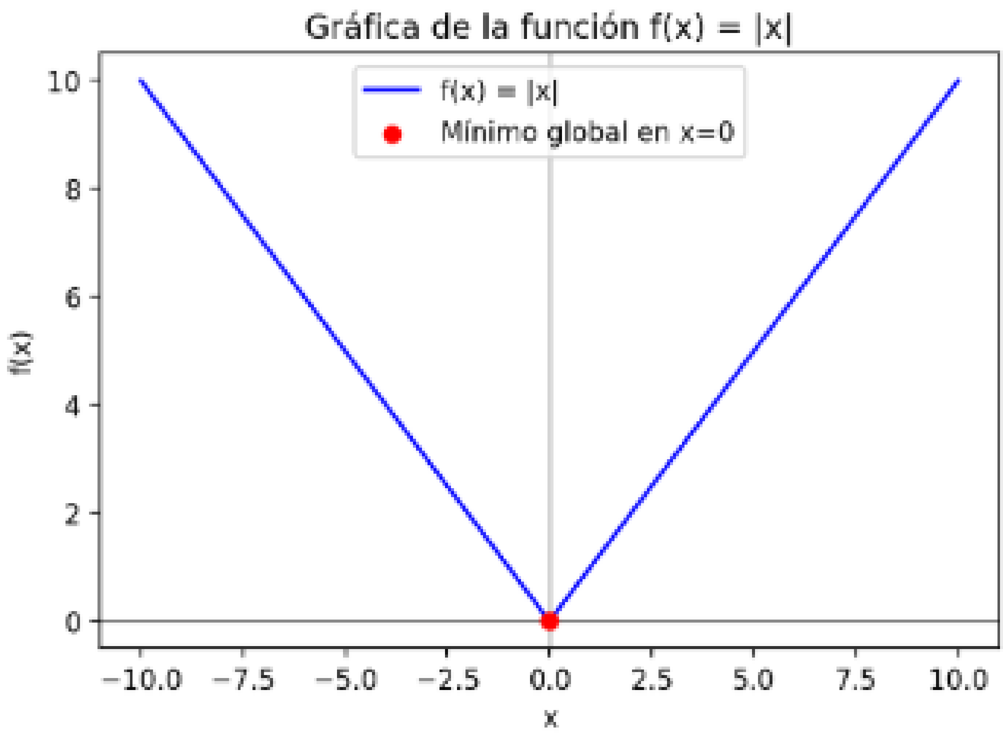
1. $x = 0$ es un **mínimo global**, ya que $f(x)$ nunca toma un valor menor que $f(0) = 0$ en todo el dominio.
2. $x = 0$ también es un **mínimo local**, ya que en cualquier vecindario alrededor de $x = 0$, $f(0) = 0$ sigue siendo el valor más bajo.

Conclusión

La función $f(x) = |x|$:

- Tiene un mínimo global en $x = 0$, donde $f(0) = 0$.
- Este punto también es un mínimo local, ya que $f(x)$ no puede ser menor que 0 en ningún vecindario alrededor de $x = 0$.

El gráfico de $f(x)$ ayuda a visualizar este comportamiento, mostrando claramente la forma de "V" y el vértice en $x = 0$, el punto más bajo de la curva.



Conclusión:

- En (x = 0), la función (f(x) = |x|) alcanza su valor más bajo, que es (f(0) = 0), y para cualquier (x eq 0), (f(x) > 0).
- Esto implica que (x = 0) es un **mínimo global**, ya que es el valor mínimo en todo el dominio de la función.

EJERCICIO 3

Dibuja la función $f(x) = |x|$ y determina si tiene un mínimo global o local en $x = 0$.

RESOLUCION

Vamos a analizar la función $f(x) = \sin(x)$ en el intervalo cerrado $[0, \pi]$, y cómo el Teorema de Weierstrass se aplica para asegurar que esta función tiene un mínimo global en este intervalo.

Teorema de Weierstrass:

Si una función es continua en un intervalo cerrado, entonces alcanza su valor máximo y su valor mínimo en ese intervalo.

La función $f(x) = \sin(x)$ es continua en todo su dominio, por lo que se cumple el teorema en el intervalo $[0, \pi]$.

Evaluación en los extremos:

- En $x = 0$, tenemos: $f(0) = \sin(0) = 0$
- En $x = \pi$, tenemos: $f(\pi) = \sin(\pi) = 0$

Evaluación en el punto crítico:

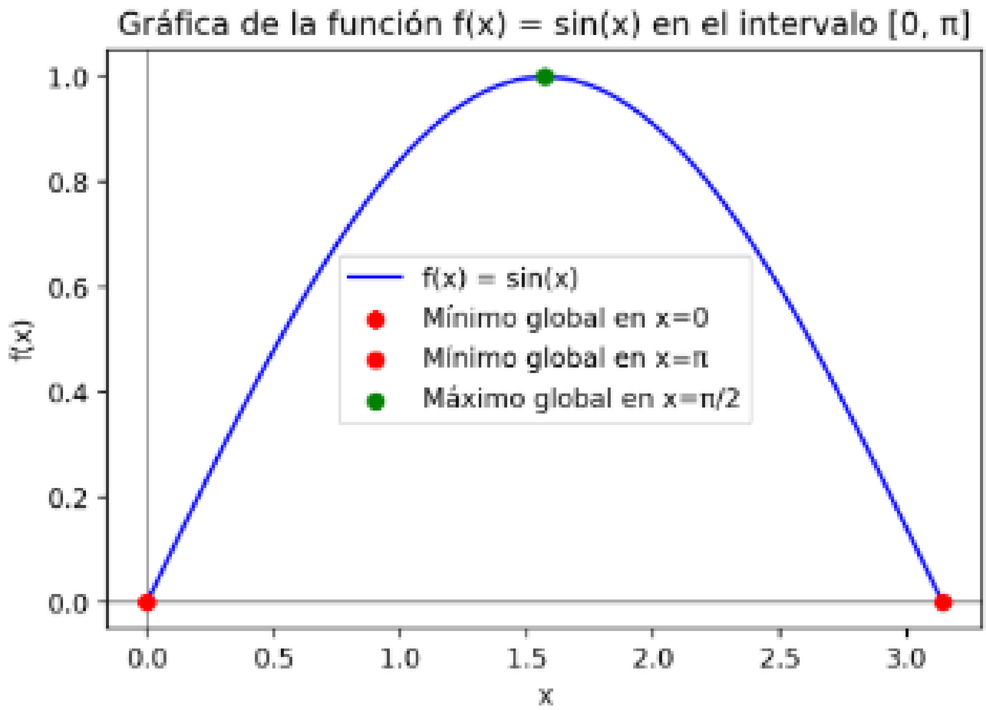
La función $f(x) = \sin(x)$ es creciente en $[0, \frac{\pi}{2}]$ y decreciente en $[\frac{\pi}{2}, \pi]$. El valor máximo ocurre en $x = \frac{\pi}{2}$, donde:

- En $x = \frac{\pi}{2}$, tenemos: $f(\frac{\pi}{2}) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$

Conclusión:

- El **mínimo global** de $f(x) = \sin(x)$ en $[0, \pi]$ es 0, alcanzado en $x = 0$ y $x = \pi$.
- El **máximo global** es 1, alcanzado en $x = \frac{\pi}{2}$.

Este resultado está garantizado por el Teorema de Weierstrass.



Conclusión:

- El **mínimo global** de (f(x) = \sin(x)) en ([0, \pi]) es 0, alcanzado en (x = 0) y (x = \pi).
- El **máximo global** es 1, alcanzado en (x = \pi/2).

EJERCICIO 4

Considera $f(x, y) = x^2 + y^2$ con $x^2 + y^2 \leq 1$. ¿Dónde se encuentra el mínimo global?

RESOLUCION

La función dada es $f(x, y) = x^2 + y^2$, y está sujeta a la restricción $x^2 + y^2 \leq 1$. Esta restricción describe un círculo de radio 1 centrado en el origen en el plano xy.

La función $f(x, y) = x^2 + y^2$ representa la distancia al cuadrado desde el origen, por lo que es más pequeña cuanto más cerca del origen esté el punto (x, y).

Evaluación en el origen

Evaluamos la función en $(0, 0)$:

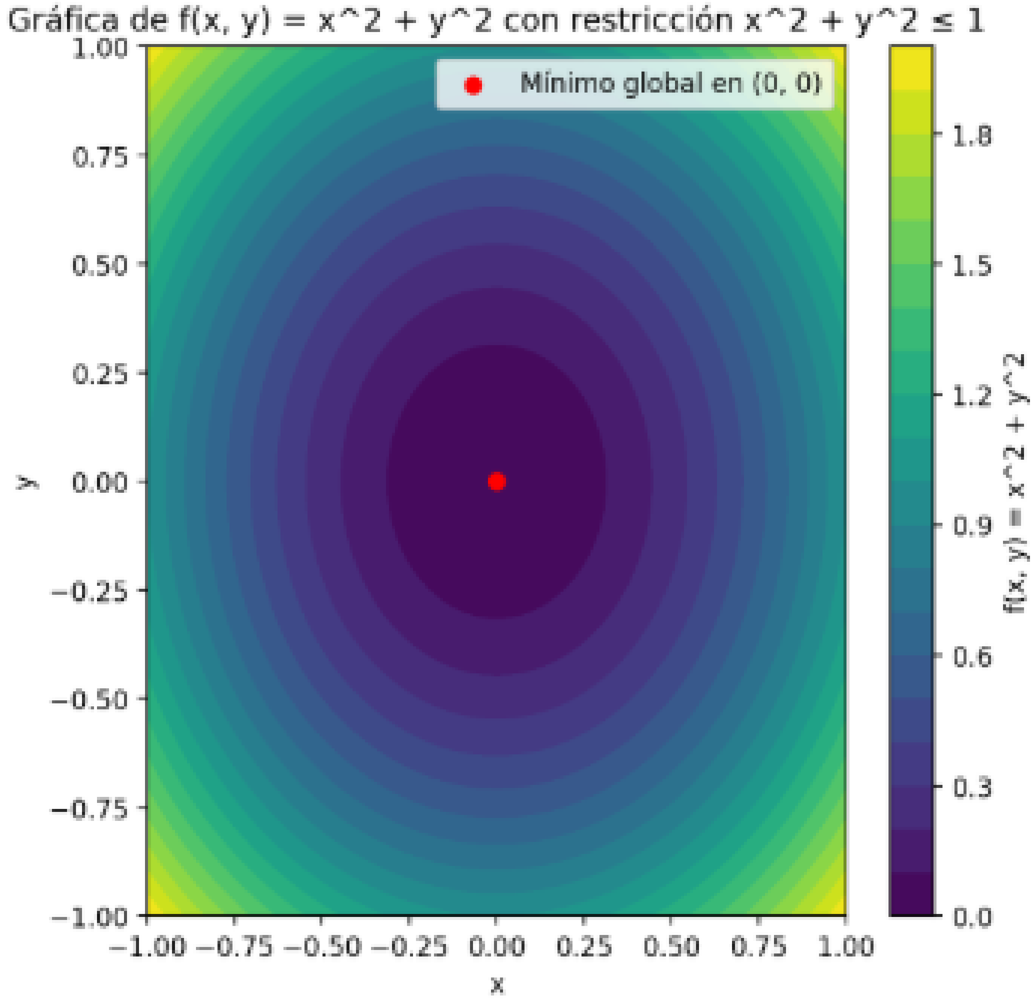
$$f(0, 0) = 0^2 + 0^2 = 0$$

Verificación de la restricción

El origen $(0,0)$, cumple con la restricción $x^2 + y^2 \leq 1$, por lo que se encuentra dentro del dominio permitido.

Conclusión

El **mínimo global** de la función $f(x,y) = x^2 + y^2$ en el dominio $x^2 + y^2 \leq 1$ se encuentra en $(0,0)$, donde $f(0,0) = 0$.



Conclusión:

El **mínimo global** de la función (f(x, y) = x^2 + y^2) en el dominio (x^2 + y^2 \leq 1) se encuentra en ((0, 0)), donde (f(0, 0) = 0).

EJERCICIO 5

Diseña un ejemplo donde un minimo global no sea unico

RESOLUCION

Consideremos la función $f(x) = x^4 - 4x^2 + 4$.
Esta función tiene dos puntos donde alcanza su valor mínimo global, lo que demuestra que el mínimo global no es único.

Derivadas:

Primero, calculamos la derivada de la función para encontrar los puntos críticos:

$$f'(x) = 4x^3 - 8x$$

Los puntos críticos se encuentran al resolver $f'(x) = 0$, lo que nos da:

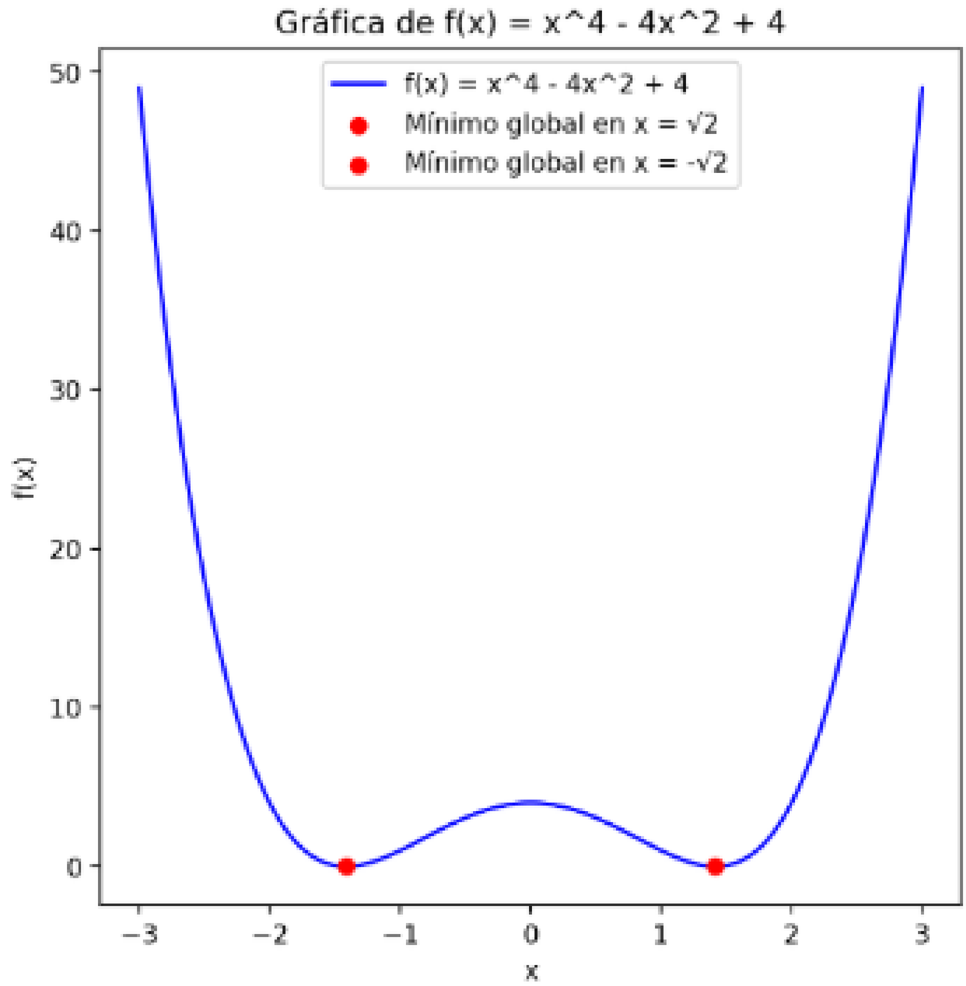
$$x = 0, \quad x = \pm\sqrt{2}$$

Puntos críticos

- En $x = 0$, la función alcanza un máximo local.
- En $x = \pm\sqrt{2}$, la función alcanza un mínimo local, y de hecho, mínimo global, ya que el valor mínimo es $f(x) = 0$.

Conclusión:

El mínimo global de la función $f(x) = x^4 - 4x^2 + 4$ no es único, ya que se alcanza en dos puntos: $x = \sqrt{2}$ y $x = -\sqrt{2}$.



Conclusión:

La función tiene dos puntos donde alcanza su valor mínimo global, en (x = \sqrt{2}) y (x = -\sqrt{2}), lo que demuestra que el mínimo global no es único.

LINK GITHUB

https://github.com/Mishell03/optimizacion-no-lineal.git

LINK STREAMLIT

https://optimizacion-no-lineal.streamlit.app/