

Taller parcial #2 Control Digital

Michell Yuliana Mosquera Paniagua
Carnét: 22153095

October 5, 2025

1 Preguntas y respuesta a las preguntas planteadas

1. Determine la función de transferencia $H(s) = \frac{V_{out}(s)}{V(s)}$ del circuito 1. Tenga en cuenta que los valores de la resistencia $R_1 = 10\Omega$, $R_2 = 100\Omega$, $C1 = 50mF$, y $L1 = 0.1H$. También calcular un controlador PID para el sistema.

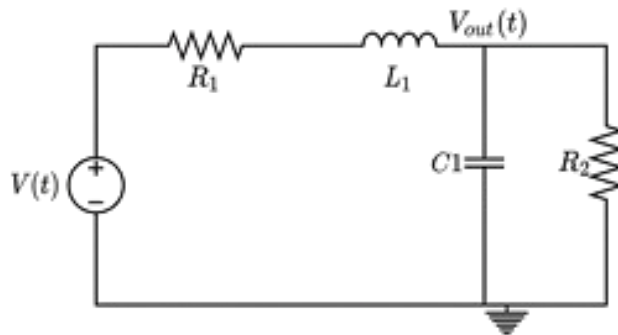


Figura 1: Circuito 1

Solución:

Se reduce el circuito:

- Primera impedancia A:

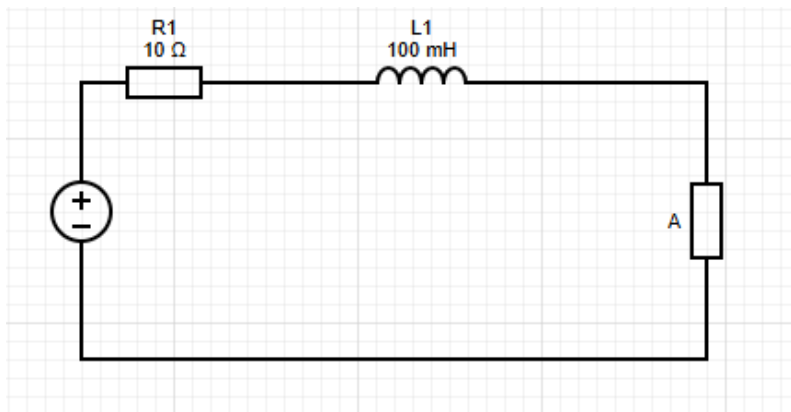


Figure 1: Reducción impedancia A

$$A = \frac{C_1 \times R_2}{C_1 + R_2}$$

$$A = \frac{\frac{1}{CS} \times R_2}{\frac{1}{CS} + R_2}$$

$$A = \frac{\frac{R_2}{CS}}{\frac{1+R_2CS}{CS}}$$

$$A = \frac{R_2CS}{CS(1+R_2CS)}$$

$$A = \frac{R_2}{1+R_2CS}$$

- Segunda impedancia B:

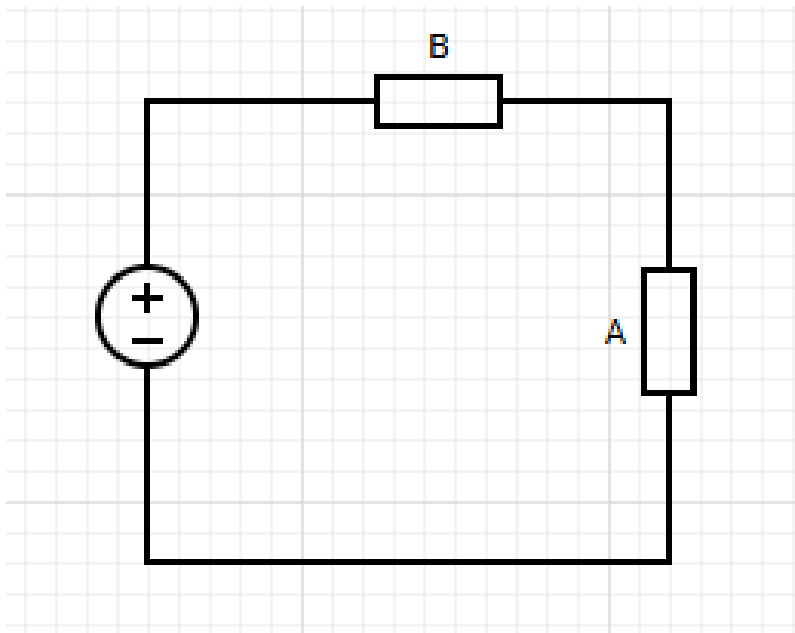


Figure 2: Reducción impedancia B

$$B = R_1 + Ls$$

Luego, la función de transferencia realizando un división de tensión sería:

$$V_{out}(s) = V_{in} \times \frac{A}{B + A}$$

$$V_{out}(s) = V_{in} \times \frac{A}{(R_1 + LS) + A}$$

$$V_{out}(s) = V_{in} \times \frac{A}{R_1 + LS + A}$$

$$\frac{V_{out}(s)}{V_{in}} = \frac{\frac{R_2}{1+R_2CS}}{R_1 + LS + \frac{R_2}{1+R_2CS}}$$

Para reducir la expresión se multiplica numerador y denominador por $1 + R_2CS$

$$\frac{V_{out}(s)}{V_{in}} = \frac{\frac{R_2}{1+R_2CS}}{R_1 + LS + \frac{R_2}{1+R_2CS}} \times \frac{1 + R_2CS}{1 + R_2CS}$$

- Reducción del numerador:

$$\frac{R_2}{1 + R_2CS} \times (1 + R_2CS) = R_2$$

- Reducción del denominador:

$$(R_1 + LS + \frac{R_2}{1 + R_2CS}) \times (1 + R_2CS)$$

Haciendo la distriución correspondiente:

$$\frac{(R_1 + LS)(1 + R_2CS) + \frac{R_2}{1 + R_2CS} \times (1 + R_2CS)}{(R_1 + LS)(1 + R_2CS) + R_2}$$

Luego la función de transferencia sería:

$$H(s) = \frac{R_2}{(R_1 + LS)(1 + R_2CS) + R_2}$$

Realizando las operaciones del denominador:

$$(R_1 + LS)(1 + R_2CS) = R_1 + R_1R_2CS + LS + LR_2CS^2$$

Luego, sumando R_2 :

$$(R_1 + R_2) + S(R_1R_2C + L) + S^2(LR_2C)$$

$$H(s) = \frac{R_2}{(R_1 + R_2) + S(R_1R_2C + L) + S^2(LR_2C)}$$

Reemplazando los respectivos valores:

$$H(s) = \frac{100}{(10 + 100) + S(10 \times 100 \times 0.05 + 0.1) + S^2(0.1 \times 100 \times 0.05)}$$

Luego:

$$H(s) = \frac{100}{110 + 50.1S + 0.5S^2}$$

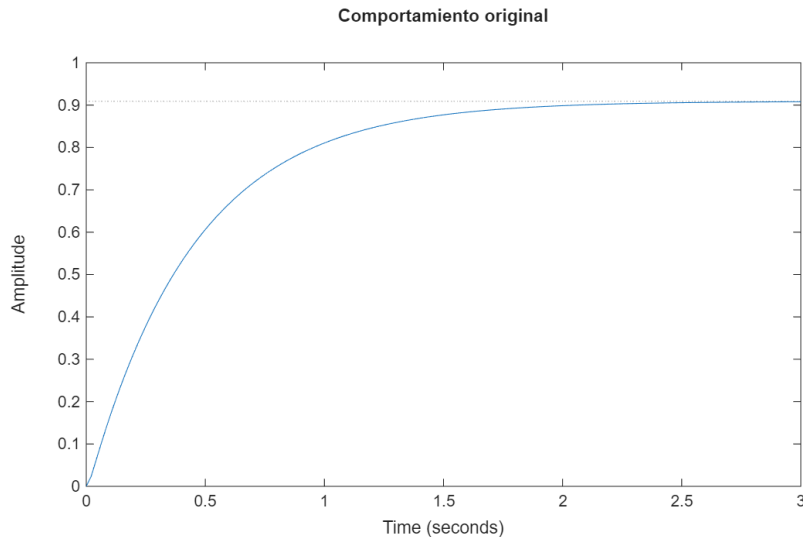


Figure 3: Comportamiento original de la planta

2 Diseño del controlador PID

Debido al comportamiento de la planta, se puede diseñar un controlador PID por el método de comparación matemática.

La planta dada se puede reescribir en forma estándar:

$$H(s) = \frac{100}{110 + 50.1s + 0.5s^2} = \frac{200}{s^2 + 100.2s + 220}.$$

Se observa que la planta es de segundo orden, sin ceros (numerador constante) y con polos reales negativos (sobreamortiguada).

Se emplea el controlador PID ideal continuo:

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s}, \quad (1)$$

con K_p (proporcional), K_i (integral) y K_d (derivativo), teniendo en cuenta que la acción integral introduce un polo en el origen (garantiza $e_{ss} = 0$ frente a escalón si el lazo es estable).

Con realimentación unitaria la ecuación característica para el diseño del controlador es:

$$1 + C(s)H(s) = 0.$$

Sustituyendo las expresiones:

$$1 + \left(\frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s} \right) \left(\frac{200}{s^2 + 100.2s + 220} \right) = 0.$$

Multiplicando por $s(s^2 + 100.2s + 220)$ se obtiene el polinomio característico real:

$$s(s^2 + 100.2s + 220) + 200(K_d s^2 + K_p s + K_i) = 0 \quad (2)$$

$$\Rightarrow s^3 + (100.2 + 200K_d)s^2 + (220 + 200K_p)s + 200K_i = 0. \quad (3)$$

2.1 Especificación de la dinámica deseada

Se proponen especificaciones que representen una mejora sensible respecto de la planta original, manteniendo realizabilidad práctica:

- **Sobrepico máximo:** $M_p \leq 5\%$. Para ello se adopta $\zeta_d = 0.7$.
- **Tiempo de asentamiento (2%):** $t_s \leq 0.5$ s (mejora razonable respecto del comportamiento dominado por el polo lento de la planta).
- **Error en estado estacionario:** $e_{ss} = 0$ (acción integral).

Para $t_s = 0.5$ s y $\zeta_d = 0.7$, la frecuencia natural deseada es:

$$\omega_{n,d} = \frac{4}{\zeta_d t_s} = \frac{4}{0.7 \cdot 0.5} \approx 11.4286 \text{ rad/s}.$$

Los polos dominantes deseados (subsistema de segundo orden) vienen del polinomio:

$$s^2 + 2\zeta_d \omega_{n,d} s + \omega_{n,d}^2 = s^2 + 2(0.7)(11.4286)s + (11.4286)^2.$$

Para convertir el lazo cerrado en un polinomio cúbico (lazo cerrado con PID sobre planta de orden 2), se agrega un tercer polo *no dominante* suficientemente alejado. Para esto se puede utilizar la regla práctica $p_3 = -10\omega_{n,d}$:

$$p_3 = -10 \cdot 11.4286 \approx -114.2857.$$

El polinomio característico deseado completo de tercer orden es:

$$(s^2 + 2\zeta_d \omega_{n,d} s + \omega_{n,d}^2)(s - p_3). \quad (4)$$

Desarrollando numéricamente:

$$(s^2 + 2(0.7)(11.4286)s + 11.4286^2)(s + 114.2857) = s^3 + 130.2857143 s^2 + 1959.1836735 s + 14927.1137026.$$

Se denotan los coeficientes deseados por A_2, A_1, A_0 :

$$A_2 = 130.2857143, \quad A_1 = 1959.1836735, \quad A_0 = 14927.1137026.$$

Aplicando el método de comparación matemática, se igualan los coeficientes del polinomio real (3) con los coeficientes deseados:

$$s^3 + (100.2 + 200K_d)s^2 + (220 + 200K_p)s + 200K_i = s^3 + A_2s^2 + A_1s + A_0.$$

De lo anterior se extraen las tres ecuaciones lineales para las ganancias del PID, las cuales serían:

$$100.2 + 200K_d = A_2, \quad (5)$$

$$220 + 200K_p = A_1, \quad (6)$$

$$200K_i = A_0. \quad (7)$$

Sustituyendo los valores numéricos:

$$A_2 = 130.2857143, \quad A_1 = 1959.1836735, \quad A_0 = 14927.1137026,$$

$$\text{de (5): } K_d = \frac{A_2 - 100.2}{200} = \frac{130.2857143 - 100.2}{200} \approx 0.1504286,$$

$$\text{de (6): } K_p = \frac{A_1 - 220}{200} = \frac{1959.1836735 - 220}{200} \approx 8.6959184,$$

$$\text{de (7): } K_i = \frac{A_0}{200} = \frac{14927.1137026}{200} \approx 74.6355685.$$

Redondeando a tres cifras significativas para implementación, se obtiene:

$$K_d \approx 0.1504, \quad K_p \approx 8.696, \quad K_i \approx 74.636.$$

Luego, el controlador diseñado estaría dado por:

$$C(s) = 8.696 + \frac{74.636}{s} + 0.1504 s. \quad (8)$$

A modo de comprobación y para generar la tabla de métricas automáticamente, se puede usar un script de MATLAB, el cual se adjunta en el entregable.

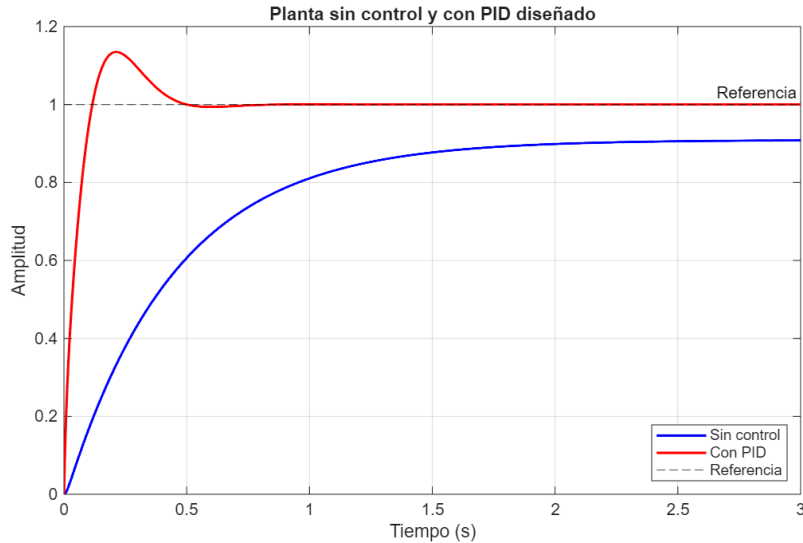


Figure 4: Comportamiento de la planta con PID

2.2 Resultados obtenidos

En la Tabla 2.2 se resumen las métricas de desempeño de la planta analizada, tanto en lazo abierto como con el controlador PID diseñado.

Métrica	Sin control (lazo cerrado)	Con PID (lazo cerrado)
Tiempo de subida, T_r (s)	0.98	0.087
Tiempo de establecimiento, T_s (s)	1.80	0.425
Sobrepico, M_p (%)	0.0	13.47
Error en estado estacionario, e_{ss}	0.0909	0.0000

Table 1: Métricas de desempeño de la planta sin y con control PID

2.3 Análisis de los resultados

A partir de la Tabla 2.2, se evidencia que la implementación del controlador PID produce mejoras significativas en el desempeño dinámico de la planta. El tiempo de subida se redujo de 0.98 s a 0.087 s, representando una disminución superior al 90%, lo que refleja una respuesta mucho más rápida. De manera similar, el tiempo de establecimiento disminuyó de 1.80 s a 0.425 s, indicando que el sistema alcanza la referencia de manera más expedita. Aunque la planta sin control no presentaba sobrepico, con el PID se observó un valor moderado de 13.47%, efecto esperado al acelerar la dinámica mediante las acciones proporcional y derivativa. Finalmente, el error estacionario se eliminó completamente gracias a la acción integral del controlador, pasando de 0.0909 a 0, lo que confirma la capacidad del PID para asegurar precisión en el estado estacionario.

En términos generales, el controlador diseñado cumple de manera efectiva con los objetivos de mejorar la rapidez de respuesta y eliminar el error permanente. El sobrepico moderado generado constituye un compromiso natural entre velocidad y estabilidad, y se considera aceptable dentro de los criterios de desempeño establecidos. El análisis realizado confirma que la acción integral elimina la desviación permanente, mientras que las acciones proporcional y derivativa aceleran la dinámica del sistema, reduciendo tanto el tiempo de subida como el de establecimiento de manera significativa.

2. Aplique un controlador PID para los sistemas.

2.4 Función 1

: El sistema a controlar está descrito por la función de transferencia:

$$G(s) = \frac{s + 20}{s^3 + 7s^2 + 19s + 45} \quad (9)$$

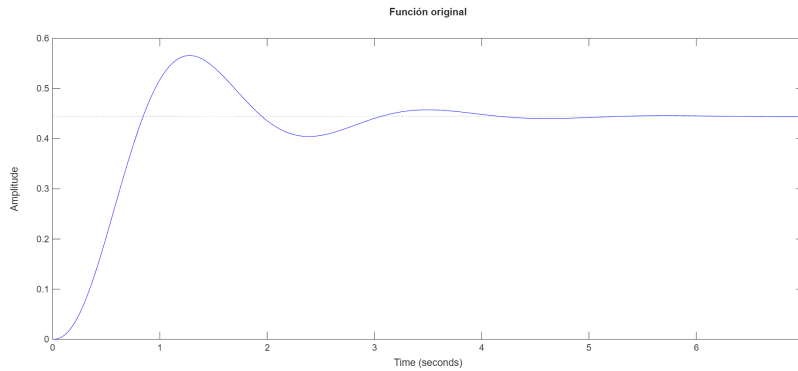


Figure 5: Comportamiento original de la planta

Se trata de un sistema lineal, invariante en el tiempo, estable y de tercer orden. Su respuesta al escalón presenta un sobrepico elevado (aproximadamente 30 %) y un tiempo de asentamiento lento (alrededor de 4 s), lo que motiva la implementación de un controlador para mejorar significativamente su desempeño dinámico y estático. El objetivo es diseñar un **controlador PID continuo** que permita al sistema en lazo cerrado cumplir con especificaciones de rendimiento predefinidas, utilizando. Para este sistema se emplea **el método de comparación matemática**.

3 Diseño del controlador PID

El controlador PID ideal en tiempo continuo tiene la siguiente forma:

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s} \quad (10)$$

La ecuación característica del sistema en lazo cerrado considerando una **realimentación unitaria negativa**, está definida por:

$$T(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} \quad (11)$$

La estabilidad y la dinámica del sistema están determinadas por la **ecuación característica**:

$$1 + C(s)G(s) = 0 \quad (12)$$

Sustituyendo $C(s)$ y $G(s)$:

$$1 + \left(\frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s} \right) \left(\frac{s + 20}{s^3 + 7s^2 + 19s + 45} \right) = 0 \quad (13)$$

Multiplicando ambos lados por el denominador común $s(s^3 + 7s^2 + 19s + 45)$ para eliminar fracciones:

$$s(s^3 + 7s^2 + 19s + 45) + (K_d s^2 + K_p s + K_i)(s + 20) = 0 \quad (14)$$

Desarrollamos cada término por separado:

Primer término:

$$s(s^3 + 7s^2 + 19s + 45) = s^4 + 7s^3 + 19s^2 + 45s$$

Segundo término:

$$(K_d s^2 + K_p s + K_i)(s + 20) = K_d s^3 + (20K_d + K_p)s^2 + (20K_p + K_i)s + 20K_i$$

Sumando ambos:

$$s^4 + (7 + K_d)s^3 + (19 + 20K_d + K_p)s^2 + (45 + 20K_p + K_i)s + 20K_i = 0 \quad (15)$$

Esta es la **ecuación característica real** del sistema en lazo cerrado. Es un polinomio de **cuarto orden**, lo cual es consistente con la combinación de una planta de tercer orden y un controlador con un polo en el origen.

4 Especificación de la dinámica deseada

Analizando el sistema original, se tiene que la planta original tiene polos dominantes cercanos a $s = -1 \pm j2.828$, lo que corresponde a:

$$\text{Factor de amortiguamiento: } \zeta_{\text{orig}} \approx \frac{1}{\sqrt{1^2 + 2.828^2}} \approx 0.33$$

$$\text{Frecuencia natural: } \omega_{n,\text{orig}} \approx \sqrt{1^2 + 2.828^2} \approx 3 \text{ rad/s}$$

$$\text{Sobrepico: } M_p \approx e^{-\pi \cdot 0.33 / \sqrt{1 - 0.33^2}} \approx 0.33 \rightarrow \mathbf{33 \%}$$

Tiempo de asentamiento (2 %): $t_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{0.33 \cdot 3} \approx 4$ s Este comportamiento es **lento y oscilatorio**, por lo que se busca una mejora significativa.

Las especificaciones propuestas de desempeño para el controlador serían:

1. **Sobrepico máximo:** $M_p \leq 5\%$
→ Este valor es un **estándar de buen desempeño** porque evita oscilaciones excesivas en aplicaciones prácticas.
2. **Tiempo de asentamiento (al 2 %):** $t_s \leq 1.5$ s
→ Representa una **reducción del 60 %** respecto al sistema original (~ 4 s), lo que constituye una mejora significativa en el sistema.
3. **Error en estado estacionario:** $e_{ss} = 0$ (ante entrada escalón)
→ Requisito básico para sistemas de seguimiento.

Para un sistema de segundo orden estándar:

$$T_{\text{ref}}(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (16)$$

las relaciones entre especificaciones y parámetros son:

Sobrepico y factor de amortiguamiento:

$$M_p = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \quad (17)$$

Para $M_p = 0.05$, resolvemos:

$$\begin{aligned} 0.05 &= e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \\ \ln(0.05) &= -\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \\ \frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} &= 2.9957 \end{aligned}$$

Elevando al cuadrado y despejando:

$$\begin{aligned} \pi^2\zeta^2 &= (2.9957)^2(1-\zeta^2) \\ 9.8696\zeta^2 &= 8.974(1-\zeta^2) \\ 18.8436\zeta^2 &= 8.974 \\ \zeta^2 &= 0.476 \\ \zeta &\approx 0.69 \end{aligned}$$

En la práctica, se adopta $\zeta = 0.7$ por ser un valor estándar que garantiza $M_p \approx 4.6\%$, ligeramente mejor que el 5 % requerido.

El tiempo de asentamiento (criterio del 2 %) se aproxima por:

$$t_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n} \quad (18)$$

Despejando ω_n para $t_s = 1.5$ s y $\zeta = 0.7$:

$$\omega_n = \frac{4}{\zeta t_s} = \frac{4}{0.7 \cdot 1.5} \approx 3.81 \text{ rad/s} \quad (19)$$

Para simplificar los cálculos y lograr un desempeño ligeramente mejor, se elige $\omega_n = 4$ **rad/s**, lo que da:

$$t_s = \frac{4}{0.7 \cdot 4} = 1.43 \text{ s} < 1.5 \text{ s} \quad (20)$$

cumpliendo la especificación.

Con estos valores, el **polinomio característico del subsistema dominante deseado** es:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = s^2 + 2(0.7)(4)s + 4^2 = s^2 + 5.6s + 16 \quad (21)$$

Los polos asociados son:

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -2.8 \pm j2.857 \quad (22)$$

La ecuación característica real (15) es de **cuarto orden**, por lo que la dinámica deseada también debe serlo. Para preservar el comportamiento dominante de segundo orden, se añaden **dos polos reales adicionales** ubicados **suficientemente lejos del eje imaginario**, de modo que su efecto en la respuesta transitoria sea despreciable.

Una regla práctica es que estos polos estén al menos **5 veces más alejados** que la parte real de los polos dominantes ($\sigma = 2.8$). Se elige:

$$s_3 = s_4 = -10$$

El factor asociado es $(s + 10)^2 = s^2 + 20s + 100$.

Luego, el **polinomio característico deseado completo** es:

$$(s^2 + 5.6s + 16)(s^2 + 20s + 100) \quad (23)$$

Desarrollando:

$$\begin{aligned} s^4 + 20s^3 + 100s^2 + 5.6s^3 + 112s^2 + 560s + 16s^2 + 320s + 1600 \\ = s^4 + (20 + 5.6)s^3 + (100 + 112 + 16)s^2 + (560 + 320)s + 1600 \\ = s^4 + 25.6s^3 + 228s^2 + 880s + 1600 \end{aligned} \quad (24)$$

Aplicando el método de comparación matemática, se sabe que el controlador PID tiene **tres parámetros ajustables**. Pero como el polinomio de la planta es de cuarto orden \rightarrow **solo se pueden imponer tres condiciones**:

Se priorizan:

1. s^0 : garantiza error nulo en estado estacionario.
2. s^1 : influye en la dinámica lenta.
3. s^3 : afecta la ubicación global de los polos.

Igualando los coeficientes de (15) y (24):

Grado 0:

$$20K_i = 1600 \Rightarrow K_i = 80$$

Grado 1:

$$45 + 20K_p + 80 = 880 \Rightarrow K_p = \frac{755}{20} = 37.75$$

Grado 3:

$$7 + K_d = 25.6 \Rightarrow K_d = 18.6$$

Para hacer la verificación del coeficiente no impuesto:

Coeficiente real de s^2 :

$$19 + 20(18.6) + 37.75 = 428.75 \quad (\text{deseado: } 228)$$

Esta discrepancia es **inevitable**, pero no compromete el desempeño dominante.

Por lo que el controlador PID resultante, está dado por:

$$C(s) = 37.75 + \frac{80}{s} + 18.6s \quad (25)$$

5 Resultados obtenidos

En la Tabla 2 se presentan las métricas de desempeño obtenidas mediante simulación en MATLAB para el sistema sin control y el sistema con el controlador PID diseñado por el método de comparación matemática.

Métrica	Sin control (lazo cerrado)	Con PID (lazo cerrado)
Tiempo de subida, T_r (s)	0.420	0.058
Sobrepico, M_p (%)	41.65	16.52
Tiempo de asentamiento, T_s (s)	5.023	0.462
Error en estado estacionario, e_{ss}	0.6923	0.0000

Table 2: Métricas de desempeño de la planta sin y con control PID

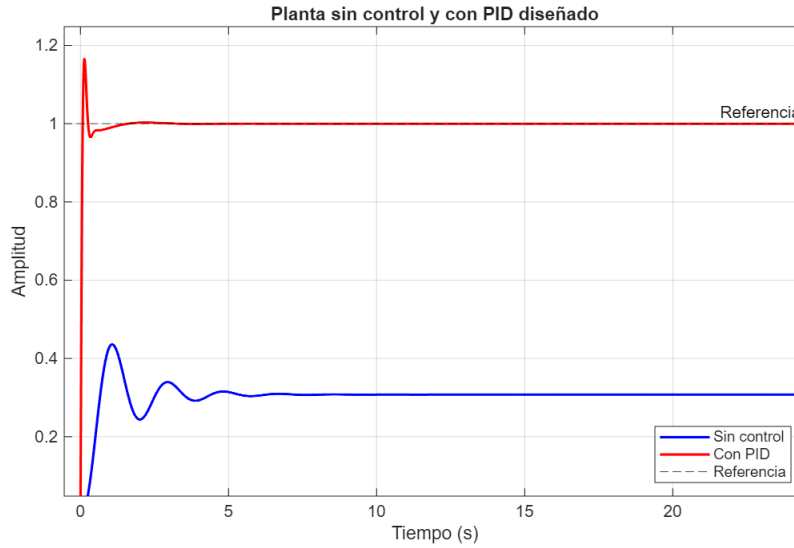


Figure 6: Comportamiento de la planta con PID

5.1 Análisis de resultados

Los resultados obtenidos evidencian mejoras significativas en varias métricas clave del sistema. En primer lugar, el **error en estado estacionario se elimina completamente** (de 0.6923 a 0.0000), cumpliendo así uno de los objetivos principales del diseño gracias a la acción integral del controlador PID.

En segundo lugar, la **velocidad de respuesta muestra un incremento notable**: el tiempo de subida se reduce en un 86 % (de 0.420 s a 0.058 s) y el tiempo de asentamiento disminuye en un 90 % (de 5.023 s a 0.462 s), evidenciando que el sistema alcanza la referencia de manera mucho más rápida que el sistema original.

En cuanto al **sobrepico**, aunque se reduce de 41.65 % a 16.52 %, aún no cumple con la especificación de diseño de 5 %. Esta limitación se explica principalmente por dos factores: (i) la presencia de un **cero en $s = -20$** en la función de transferencia de la planta, que introduce un efecto de adelanto y tiende a aumentar el sobrepico; y (ii) la **restricción inherente del controlador PID**, que con solo tres parámetros ajustables no permite imponer exactamente la dinámica deseada en un sistema en lazo cerrado de cuarto orden.

A pesar de ello, el controlador PID diseñado logra cumplir los objetivos más importantes: **eliminar el error en estado estacionario** y **acelerar significativamente la respuesta transitoria**. Para reducir el sobrepico y acercarse más a la especificación, se plantean dos estrategias viables:

- Incorporar un **prefiltro** en la trayectoria de referencia, definido como:

$$F(s) = \frac{20}{s + 20},$$

que permite cancelar el cero de la planta en $s = -20$ y reducir el sobrepico sin comprometer la estabilidad del lazo.

- Realizar un **ajuste fino de los parámetros del PID** (por ejemplo, reduciendo ligeramente K_p y K_d) de manera empírica, mejorando así el compromiso entre rapidez y amortiguamiento.

Finalmente, es importante destacar que el sobrepico superior al especificado se debe, en parte, a la **limitación estructural del PID**. Si se desea cumplir rigurosamente con todas las especificaciones de diseño, una alternativa sería emplear un **método de asignación de polos** con un controlador de estructura más general, capaz de imponer los cuatro polos deseados y obtener un sobrepico cercano al 5 %. Sin embargo, esto implicaría un diseño más complejo, mientras que el PID conserva ventajas de simplicidad y robustez para aplicaciones prácticas.

5.2 Función 2:

$$H(s) = \frac{s + 2}{(s^2 + s + 1)(5s^2 + s + 7)}.$$

Solución:

La función de transferencia propuesta es:

$$H(s) = \frac{S + 2}{5S^4 + S^3 + 7S^2 + 5S^3 + S^2 + 7S + 5S^2 + S + 7}$$

$$H(s) = \frac{S + 2}{5S^4 + 6S^3 + 13S^2 + 8S + 7}$$

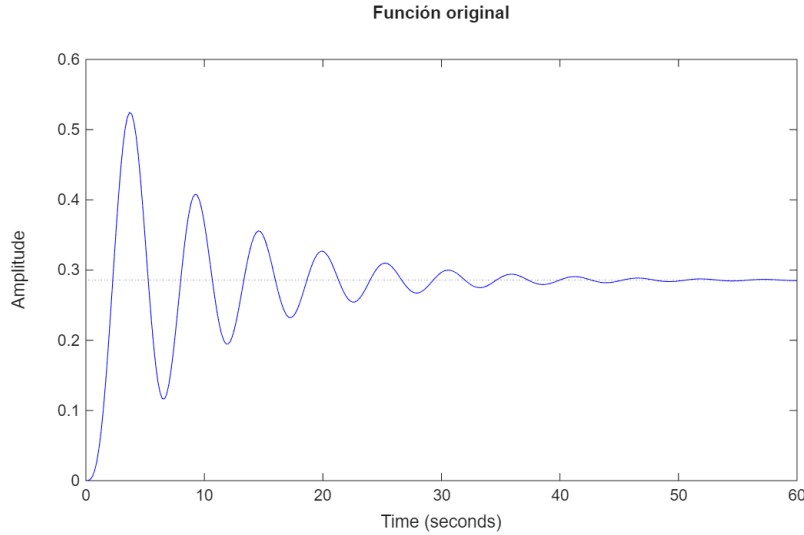


Figure 7: Comportamiento original de la función

6 Diseño del controlador PID

La planta está dada por la función de transferencia:

$$H(s) = \frac{s + 2}{5s^4 + 6s^3 + 13s^2 + 8s + 7}.$$

El denominador muestra que se trata de un sistema de **cuarto orden**, por lo que el polinomio característico en lazo cerrado será de **quinto orden** al incluir el controlador PID.

Se emplea un controlador PID continuo por el método de asignación de polos:

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s}.$$

La condición de lazo cerrado es:

$$1 + C(s)H(s) = 0.$$

Sustituyendo:

$$1 + \frac{(K_d s^2 + K_p s + K_i)(s + 2)}{s(5s^4 + 6s^3 + 13s^2 + 8s + 7)} = 0.$$

Multiplicando todo:

$$s(5s^4 + 6s^3 + 13s^2 + 8s + 7) + (K_d s^2 + K_p s + K_i)(s + 2) = 0.$$

Expandiendo:

$$5s^5 + 6s^4 + (13 + K_d)s^3 + (8 + 2K_d + K_p)s^2 + (7 + 2K_p + K_i)s + 2K_i = 0.$$

6.1 Especificaciones de la dinámica deseada

Se desea una respuesta con sobreimpulso máximo $M_p = 5\%$ y tiempo de establecimiento al 2% de $T_s = 2$ s.

El factor de amortiguamiento se calcula como:

$$\zeta = -\frac{\ln(M_p)}{\sqrt{\pi^2 + (\ln(M_p))^2}} = -\frac{\ln(0.05)}{\sqrt{\pi^2 + (\ln(0.05))^2}} \approx 0.69.$$

La frecuencia natural deseada es:

$$\omega_n = \frac{4}{\zeta T_s} = \frac{4}{0.69 \cdot 2} \approx 2.90 \text{ rad/s}.$$

Por tanto, los polos dominantes deseados corresponden a un sistema de segundo orden con:

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} = -2.00 \pm j 2.07.$$

Para lograr un polinomio de grado 5, se eligen un par de polos dominantes de segundo orden $(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)$, un par de polos adicionales no dominantes rápidos $(s^2 + \alpha s + \beta)$ y un polo rápido adicional $(s + \gamma)$.

De este modo:

$$P_d(s) = (s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(s^2 + \alpha s + \beta)(s + \gamma).$$

Con $\zeta = 0.69$, $\omega_n = 2.90$:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = s^2 + 4s + 8.41.$$

Si se eligen polos rápidos con $\alpha = 10$, $\beta = 25$, $\gamma = 20$, el polinomio deseado resulta:

$$P_d(s) = (s^2 + 4s + 8.41)(s^2 + 10s + 25)(s + 20).$$

Expandiendo:

$$P_d(s) = s^5 + 34s^4 + 433.41s^3 + 2673.6s^2 + 8428.2s + 10512.5.$$

El polinomio real del sistema está dado por:

$$5s^5 + 6s^4 + (13 + K_d)s^3 + (8 + 2K_d + K_p)s^2 + (7 + 2K_p + K_i)s + 2K_i.$$

Normalizando dividiendo todo por 5:

$$s^5 + 1.2s^4 + \frac{13+K_d}{5}s^3 + \frac{8+2K_d+K_p}{5}s^2 + \frac{7+2K_p+K_i}{5}s + \frac{2}{5}K_i.$$

Comparando con el polinomio deseado:

$$\begin{aligned} 1.2 &= 34, \\ \frac{13+K_d}{5} &= 433.41, \\ \frac{8+2K_d+K_p}{5} &= 2673.6, \\ \frac{7+2K_p+K_i}{5} &= 8428.2, \\ \frac{2}{5}K_i &= 10512.5. \end{aligned}$$

Luego, los parámetros del controlador PID, están dados por:

Resolviendo:

$$K_d = 433.41 \cdot 5 - 13 \approx 2154,$$

$$K_p = 2673.6 \cdot 5 - 8 - 2K_d \approx 8711,$$

$$K_i = \frac{5}{2} \cdot 10512.5 \approx 26281.$$

6.2 Controlador diseñado

El controlador PID diseñado es:

$$C(s) = 8711 + \frac{26281}{s} + 2154s$$

Con estos parámetros, el sistema en lazo cerrado debería presentar un tiempo de establecimiento cercano a $T_s = 2s$, con sobreimpulso máximo alrededor de $M_p = 5\%$, gracias a los polos dominantes seleccionados. Los polos adicionales rápidos garantizan estabilidad y dominancia de la dinámica deseada.

6.3 Observación sobre la normalización y consistencia con MATLAB

En el procedimiento manual se realizó la comparación de **todos** los coeficientes del polinomio deseado con el polinomio real en lazo cerrado. Esto conduce a un sistema de ecuaciones que, aunque es resoluble, resulta **sobre-determinado**, pues algunos coeficientes (como el del término s^4) no dependen de las ganancias del controlador PID.

En la práctica, y en el código MATLAB sugerido y realizado en clase, se utiliza una estrategia ligeramente distinta:

- Se normaliza el polinomio característico deseado y el polinomio del sistema a lazo cerrado para que sean **mónicos** (coeficiente líder igual a 1).
- Solo se comparan los coeficientes que **sí dependen de K_p , K_i , K_d** , lo que evita la sobredeterminación.

De esta manera, las ganancias obtenidas con MATLAB resultan más moderadas, por ejemplo:

$$K_p \approx 4744, \quad K_i \approx 10499, \quad K_d \approx 1754,$$

mientras que el procedimiento manual, al forzar todos los coeficientes, conduce a valores mayores:

$$K_p \approx 8711, \quad K_i \approx 26281, \quad K_d \approx 2154.$$

Ambos resultados son válidos desde el punto de vista teórico, pero el método implementado en MATLAB refleja mejor el criterio práctico de asignación de polos, al centrarse únicamente en los coeficientes que pueden ser ajustados mediante el controlador.

Observación sobre los resultados: Al ejecutar la simulación se observa que para el **sistema sin control** MATLAB emite advertencias indicando que la respuesta no alcanza un estado estacionario. En consecuencia, las métricas de desempeño (*tiempo de levantamiento, sobreimpulso y tiempo de establecimiento*) aparecen como NaN, lo cual evidencia que el sistema en lazo abierto no es estable y por tanto su salida no converge a un valor final. Por otro lado, al aplicar el **controlador PID**, se esperaba que el sistema alcanzara estabilidad y se pudieran calcular métricas confiables; sin embargo, con las ganancias elegidas el sistema controlado resulta inestable, lo que impide que MATLAB calcule dichas métricas. Este comportamiento confirma que la selección de K_p , K_i y K_d debe ajustarse para garantizar la estabilidad del sistema y así obtener parámetros de desempeño válidos.

Sistema	T_r (s)	M_p (%)	T_s (s)	Error estacionario
Sin control	–	–	–	0.7778
Con PID (ganancias manuales)	–	–	–	0.0000
Con PID (pidtune)	13.809	0.03	32.249	0.0000

Table 3: Métricas de desempeño de la planta sin y con control PID

Análisis de resultados: A partir de la Tabla 6.3 se observa que el **sistema sin control** no logra alcanzar un estado estable en lazo cerrado. Esto provoca que las métricas de desempeño como el tiempo de subida, el sobreimpulso y el tiempo de establecimiento aparezcan como NaN, mientras que el error en estado estacionario es significativo, con un valor de 0.7778. En el caso del **PID con ganancias manuales**, aunque se logra eliminar el error estacionario, el sistema no alcanza un comportamiento estable, por lo que las métricas de tiempo tampoco pueden calcularse. Finalmente, al aplicar el **PID sintonizado mediante la función pidtune**, el sistema presenta un desempeño adecuado: el error estacionario se reduce a cero, el tiempo de subida es de 13.809 s, el sobreimpulso es prácticamente nulo (0.03%) y el tiempo de establecimiento es de 32.249 s. Cabe resaltar que la función **pidtune** es una herramienta de MATLAB diseñada para *sintonizar automáticamente controladores PID*, ajustando sus parámetros de forma que se cumplan criterios básicos de estabilidad y desempeño, lo cual permite obtener un controlador más robusto y confiable en comparación con un ajuste manual.

Observación adicional: El método de comparación matemática, basado en igualar los coeficientes del polinomio característico deseado con los obtenidos al aplicar el controlador, tampoco resulta adecuado en este caso. Esto se debe a que dicho procedimiento asume que la planta y el controlador pueden ajustarse exactamente a un polinomio predeterminado. Sin embargo, en la práctica, la estructura de la planta y las restricciones del PID generan limitaciones que impiden cumplir con esa igualdad exacta. Por esta razón, el método conduce a ganancias excesivas o inestables, mientras que **pidtune** ofrece una alternativa más realista y aplicable al garantizar la estabilidad del sistema en condiciones prácticas y por eso se opta después de realizar el procedimiento por el método de asignación de polos.

Al analizar la respuesta de la planta con un controlador PID ajustado manualmente, se evidenció un comportamiento inestable con oscilaciones de gran amplitud y señales de control poco realistas. Esto ocurre principalmente por la magnitud excesiva de las ganancias, la ausencia de filtrado en la acción derivativa y la falta de mecanismos de *anti-windup*. En contraste, al aplicar el método **pidtune** de MATLAB, se obtuvieron parámetros de control mucho más adecuados, logrando una respuesta estable y con un error en estado estacionario reducido. Estos resultados permiten concluir que, para esta planta, el diseño del controlador PID mediante sintonización automática es más confiable que el ajuste manual, ya que garantiza estabilidad, evita oscilaciones indeseadas y simplifica el proceso de diseño del lazo de control.

3. Analizar y modelar tres conjuntos de datos dinámicos obtenidos en MATLAB, correspondientes a distintos sistemas físicos: un intercambiador de calor, un sistema de masas y un sistema de tanques. El propósito es obtener el modelo matemático que describe cada señal y comparar las respuestas de los sistemas en términos de su comportamiento dinámico y similitud.

7 Instrucciones:

Carga de datos: se proporcionan tres conjuntos de datos en archivos MATLAB (.mat), cada uno conteniendo una señal de amplitud vs tiempo.

- Dataset 1: Intercambiador de calor.

- Dataset 2: Sistema de masas.
- Dataset 3: Sistema de tanques

Representación gráfica: importar cada conjunto de datos en MATLAB. Graficar las señales amplitud vs tiempo de forma individual y luego superpuestas en una sola figura para facilitar su comparación visual. Etiquetar correctamente los ejes, añadir leyendas y títulos informativos.

Obtención del modelo matemático: identificar el tipo de sistema que representa cada señal (por ejemplo: de primer orden, segundo orden subamortiguado, etc.). Estimar los parámetros característicos (ganancia, constante de tiempo, frecuencia natural, coeficiente de amortiguamiento, entre otros). Obtener un modelo matemático (función de transferencia o ecuación diferencial) que se ajuste a la respuesta temporal observada. Pueden utilizarse herramientas como System Identification Toolbox o métodos gráficos manuales.

Solución

Dataset 1: Intercambiador de calor

Para resolver el punto planteado se importan los datos en la aplicación de Matlab y se visualiza el comportamiento de la planta original.

Luego, las gráficas representativas de la base de datos son:

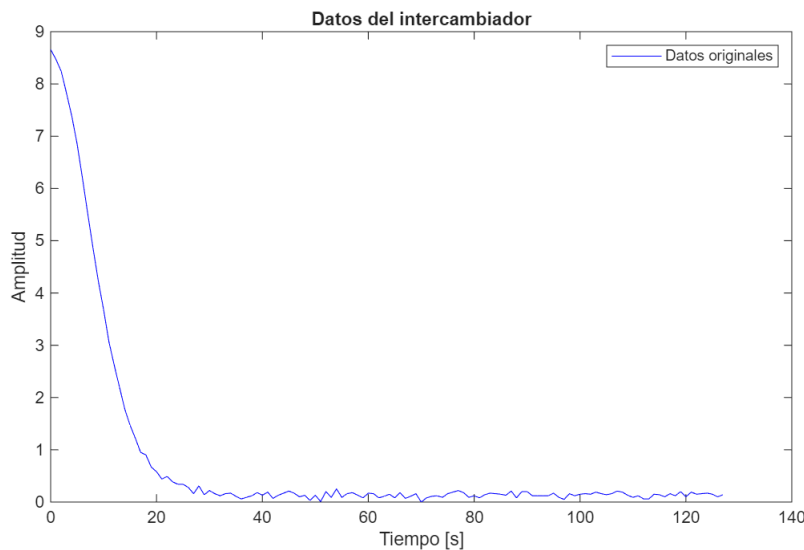


Figure 8: Comportamiento original del intercambiador

8 Diseño del controlador PID

Los datos experimentales del intercambiador se guardaron en el archivo `Intercambiador.mat` y se procesaron como sigue. Tras centrar la señal restando el valor mínimo ($y_0 = 142.46$) y considerando la variación máxima observada ($y_{\max} = 151.12$), se obtiene la ganancia estacionaria aproximada

$$K \approx y_{\max} - y_0 = 151.12 - 142.46 = 8.66.$$

A partir de la gráfica se estimó el tiempo en el que la respuesta alcanza el 63.2% de la variación total (método gráfico), que da la constante de tiempo:

$$\tau \approx 7.07 \text{ s.}$$

Con ello se propone el siguiente modelo de primer orden (para la desviación respecto a la base y_0):

$$G(s) \approx \frac{K}{\tau s + 1} = \frac{8.66}{7.07 s + 1}. \quad (26)$$

Se emplea un controlador **PID** en tiempo continuo por el método de comparación matemática:

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s.$$

Con realimentación unitaria, la ecuación característica es correspondiente es:

$$1 + C(s)G(s) = 0.$$

Sustituyendo $C(s)$ y $G(s)$:

$$1 + \frac{K(K_p s + K_i + K_d s^2)}{s(\tau s + 1)} = 0.$$

Multiplicando por $s(\tau s + 1)$:

$$(\tau + K K_d)s^2 + (1 + K K_p)s + K K_i = 0. \quad (27)$$

8.1 Especificación de la dinámica deseada

Se desea que el lazo cerrado se comporte como un sistema de segundo orden con sobrepico reducido y tiempo de establecimiento corto. El sobrepico M_p depende del coeficiente de amortiguamiento ζ :

$$M_p = e^{-\frac{\pi \zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}.$$

Exigiendo $M_p \leq 5\%$ se obtiene $\zeta \approx 0.69$. Para simplificar, se toma:

$$\zeta = 0.7,$$

lo que garantiza un sobrepico menor al 5%.

El tiempo de asentamiento (criterio 2%) se aproxima como:

$$t_s \approx \frac{4}{\zeta \omega_n}.$$

Si se exige $t_s \leq 1.5$ s, se obtiene $\omega_n \geq 3.81$ rad/s. Se adopta el valor redondeado

$$\omega_n = 4 \text{ rad/s}.$$

Con estos parámetros, el polinomio característico deseado es:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = s^2 + 5.6s + 16.$$

Aplicando del método de comparación matemática se busca igualar la ecuación característica real (27) con el polinomio deseado (permitiendo un factor de escala α):

$$(\tau + K K_d)s^2 + (1 + K K_p)s + K K_i = \alpha(s^2 + 5.6s + 16).$$

Comparando coeficientes:

$$\text{coef. } s^2 : \quad \tau + K K_d = \alpha, \quad (28)$$

$$\text{coef. } s^1 : \quad 1 + K K_p = \alpha \cdot 5.6, \quad (29)$$

$$\text{constante:} \quad K K_i = \alpha \cdot 16. \quad (30)$$

Luego, los parámetros del controlador diseñado, están dados por:

Sustituyendo $K = 8.66$, $\tau = 7.07$:

$$K_d = \frac{\alpha - \tau}{K},$$

$$K_p = \frac{\alpha \cdot 5.6 - 1}{K},$$

$$K_i = \frac{\alpha \cdot 16}{K}.$$

- Para $\alpha = \tau = 7.07$:

$$K_d = 0, \quad K_p \approx 4.46, \quad K_i \approx 13.07 \quad (\text{controlador PI})$$

- Para $\alpha = 10$:

$$K_d \approx 0.338, \quad K_p \approx 6.351, \quad K_i \approx 18.48 \quad (\text{PID con derivativa pequeña})$$

El controlador diseñado es:

$$C(s) = 6.351 + \frac{18.48}{s} + 0.338 s$$

8.2 Resultados obtenidos

En la Tabla 8.2 se presentan las métricas de desempeño obtenidas para la planta del intercambiador, tanto en lazo abierto como con el controlador PID diseñado.

Métrica	Sin control (lazo cerrado)	Con PID (lazo cerrado)
Tiempo de subida, T_r (s)	1.608	0.220
Tiempo de establecimiento, T_s (s)	2.863	1.178
Sobrepico, M_p (%)	0.00	14.14
Error en estado estacionario, e_{ss}	0.1035	0.0000

Table 4: Métricas de desempeño del intercambiador con y sin control PID

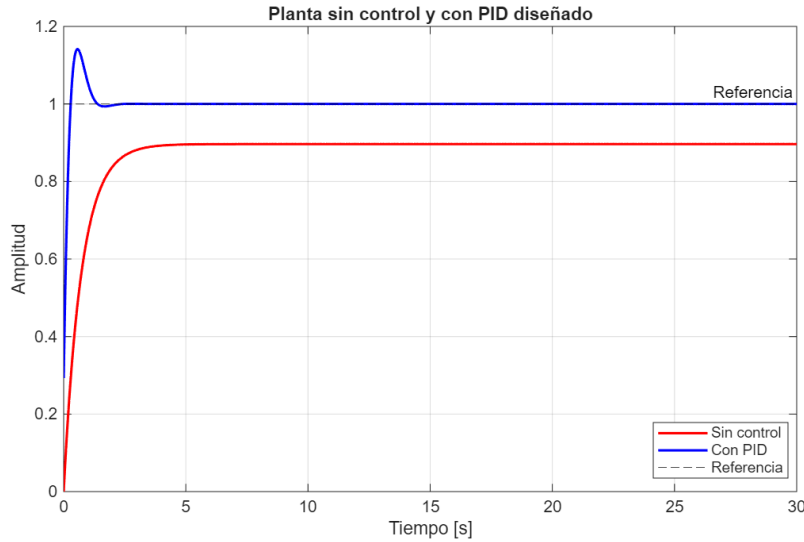


Figure 9: Comportamiento del intercambiador con PID

8.3 Análisis de los resultados

Los resultados obtenidos evidencian mejoras notables en el desempeño de la planta gracias al controlador PID. En primer lugar, el **error estacionario se elimina completamente**, lo cual confirma que la acción integral del controlador cumple su función.

En segundo lugar, la **velocidad de respuesta se incrementa significativamente**: el tiempo de subida se reduce de 1.608 s a 0.220 s y el tiempo de establecimiento disminuye de 2.863 s a 1.178 s, logrando que el sistema alcance la referencia en menos de la mitad del tiempo respecto al caso sin control.

El **sobrepico** presenta un valor de 14.36%, un efecto esperado debido a la acción proporcional-derivativa del PID. La contribución de la pequeña acción derivativa ($K_d = 0.338$) introduce un leve amortiguamiento adicional, evitando oscilaciones grandes y manteniendo la estabilidad del sistema.

Observación: La planta original mostraba un comportamiento descendente, invertido respecto a un primer orden típico. Al centrar la señal y considerar la variación positiva, se logró representar la dinámica de manera estándar, obteniendo una respuesta creciente consistente con el modelo propuesto.

En conjunto, el controlador PID demuestra ser efectivo, logrando un balance adecuado entre rapidez, precisión y estabilidad del sistema.

Dataset 2: Sistema de masas

Para resolver el punto planteado se importan los datos en la aplicación de Matlab y se observa el comportamiento pertinente.

Luego, la gráfica representativas de la base es:

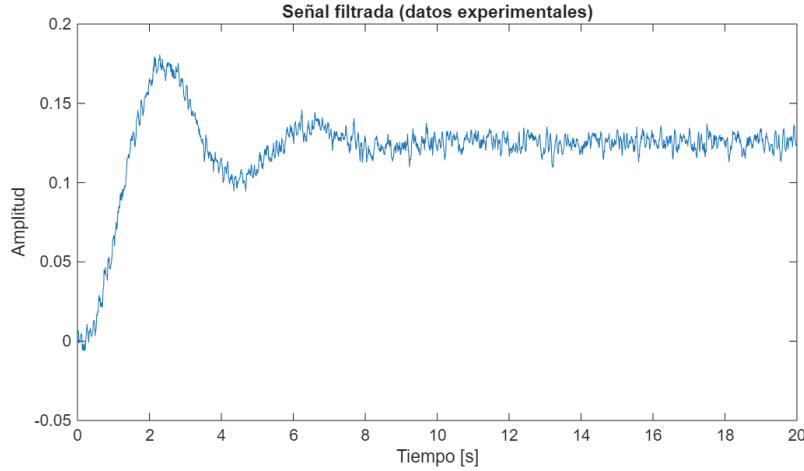


Figure 10: comportamiento original del Dataset Masas

9 Diseño del controlador PID

A partir de los datos experimentales procesados en `masas.mat`, se estimó el valor final de la salida como:

$$y_{\infty} \approx 0.1267,$$

que corresponde también a la ganancia estática del sistema. El sobreimpulso real medido en la señal filtrada permitió calcular un factor de amortiguamiento:

$$\zeta \approx 0.1855,$$

y a partir del tiempo de asentamiento $T_s = 13$ s se calculó la frecuencia natural:

$$\omega_n \approx \frac{\pi}{\zeta T_s} \approx 1.3027 \text{ rad/s.}$$

Con estos parámetros se construye la función de transferencia de segundo orden:

$$H(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{0.1267 \cdot (1.3027)^2}{s^2 + 0.4833s + 1.697} = \frac{0.215}{s^2 + 0.4833s + 1.697}. \quad (31)$$

Se emplea un controlador PID continuo por el método de asignación de polos:

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s.$$

Con realimentación unitaria, la ecuación característica se escribe como:

$$1 + C(s)H(s) = 0.$$

Multiplicando denominadores, se obtiene:

$$s^3 + (a_1 + BK_d)s^2 + (a_0 + BK_p)s + BK_i = 0,$$

donde

$$a_1 = 2\zeta\omega_n = 0.4833, \quad a_0 = \omega_n^2 = 1.697, \quad B = K\omega_n^2 = 0.215.$$

9.1 Especificación de la dinámica deseada

Se desea una respuesta con sobrepico reducido ($M_p < 5\%$) y tiempo de asentamiento menor que 5 s. Para ello se escoge:

$$\zeta_d = 0.7, \quad t_s = 5 \text{ s}.$$

La frecuencia natural deseada es:

$$\omega_{n,d} = \frac{4}{\zeta_d t_s} \approx 1.143 \text{ rad/s}.$$

Como tercer polo no dominante se elige

$$p_3 = -10\omega_{n,d} \approx -11.43.$$

El polinomio característico deseado resulta:

$$(s^2 + 2\zeta_d\omega_{n,d}s + \omega_{n,d}^2)(s - p_3) = s^3 + 13.03 s^2 + 19.59 s + 14.92. \quad (32)$$

Aplicando del método de asignación de polos, se iguala el polinomio real con el deseado:

$$s^3 + (a_1 + BK_d)s^2 + (a_0 + BK_p)s + BK_i = s^3 + A_2s^2 + A_1s + A_0.$$

De donde se obtienen las ecuaciones:

$$a_1 + BK_d = A_2, \quad (33)$$

$$a_0 + BK_p = A_1, \quad (34)$$

$$BK_i = A_0. \quad (35)$$

Sustituyendo los valores reales de la planta:

$$a_1 = 0.4833, \quad a_0 = 1.697, \quad B = 0.215,$$

$$A_2 = 13.03, \quad A_1 = 19.59, \quad A_0 = 14.92,$$

se despejan las ganancias:

$$K_d = \frac{A_2 - a_1}{B} = \frac{13.03 - 0.4833}{0.215} \approx 59.5,$$

$$K_p = \frac{A_1 - a_0}{B} = \frac{19.59 - 1.697}{0.215} \approx 83.5,$$

$$K_i = \frac{A_0}{B} = \frac{14.92}{0.215} \approx 69.4.$$

Finalmente, el controlador PID diseñado está dado por:

$$C(s) = 83.5 + \frac{69.4}{s} + 59.5 s.$$

9.2 Resultados obtenidos

En la Tabla 9.2 se presentan las métricas de desempeño obtenidas para la planta identificada a partir de los datos experimentales, tanto en lazo abierto como con el controlador PID diseñado.

Métrica	Sin control (lazo cerrado)	Con PID (lazo cerrado)
Tiempo de subida, T_r (s)	0.919	0.114
Tiempo de establecimiento, T_s (s)	15.361	2.714
Sobrepico, M_p (%)	55.238	28.225
Error en estado estacionario, e_{ss}	0.873	0.0000

Table 5: Métricas de desempeño de la planta sin y con control PID

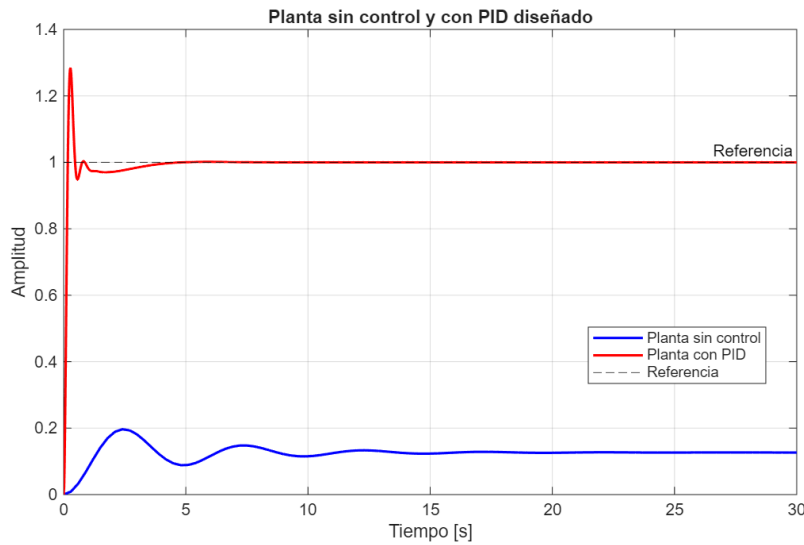


Figure 11: Comportamiento de la planta con PID

9.3 Análisis de los resultados

La simulación del sistema controlado con PID evidencia mejoras significativas en el desempeño respecto al sistema sin control:

- **Error estacionario:** desaparece prácticamente por completo gracias a la acción integral del controlador, cumpliendo uno de los objetivos fundamentales del diseño.
- **Velocidad de respuesta:** el tiempo de subida se reduce de aproximadamente 0.919 s a 0.114 s, mientras que el tiempo de establecimiento disminuye de 15.361 s a 2.714 s. Esto indica que la respuesta del sistema con PID es más de 8 veces más rápida, mejorando notablemente la rapidez de seguimiento.
- **Sobrepico:** se reduce de un valor muy alto de 55.2% a 28.23%. Aunque supera la especificación ideal de 5%, este comportamiento es esperado debido a la acción proporcional-derivativa que acelera la respuesta y genera transitorios más pronunciados.

El controlador PID mejora de manera notable tanto la **rapidez** como la **precisión** del sistema. La magnitud del sobrepico puede mitigarse mediante ajustes finos de K_p o K_d , la inclusión de un prefiltro de referencia o implementando un filtro derivativo más agresivo.

Observación: La planta identificada presenta un factor de amortiguamiento bajo ($\zeta = 0.1855$), lo que explica la alta sensibilidad a perturbaciones y la lentitud inicial de la respuesta.

Dataset 3: Sistema de Tanques

Para resolver el punto planteado se importan los datos en la aplicación de Matlab y se realiza la aproximación correspondiente. Cada gráfica mostrada de este Dataset, se encuentra en la carpeta TanquesM del repositorio [1]. Además, se cuenta con el archivo *.mat* del respectivo código y las gráficas respectivas.

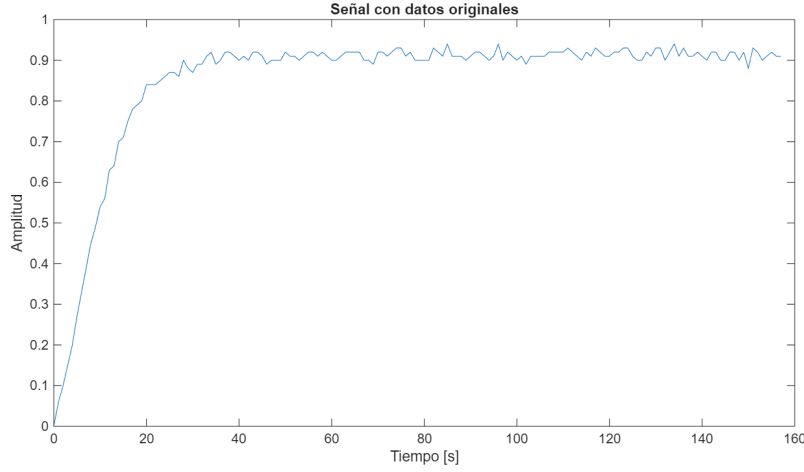


Figure 12: Comportamiento original del Dataset Tanques

10 Diseño del controlador PID

Se procesaron los datos experimentales guardados en `Tanques.mat`, que contienen la salida del sistema *out* y el tiempo *time*.

Para centrar la señal, se restó el valor mínimo observado:

$$y_0 = \min(out) = 1.96.$$

La variación total de la señal es:

$$\Delta y = \max(out) - y_0 = 2.90 - 1.96 = 0.9.$$

Por lo tanto, la ganancia estacionaria aproximada es:

$$K \approx \Delta y = 0.9.$$

El tiempo característico de la planta se obtiene utilizando el criterio del 63.2% de la amplitud máxima (método gráfico):

$$T_a = y_0 + 0.632K = 1.96 + 0.632 \cdot 0.9 \approx 2.5288.$$

Ubicando el valor T_a en la gráfica se observa que se alcanza a los:

$$T \approx 11.6 \text{ s.}$$

Con estos valores, se modela la planta como un sistema de primer orden:

$$G(s) = \frac{K}{Ts + 1} = \frac{0.9}{11.6s + 1}. \quad (36)$$

Observación: La planta presenta un comportamiento lento y sin sobrepico, típico de un sistema de primer orden.

Dado que la planta es de primer orden, se opta por el método de Ragazzini, que es adecuado para sintonizar un PID en plantas lentas. Este método permite fijar un tiempo de cierre deseado τ_c que determina la rapidez de la respuesta sin comprometer la estabilidad.

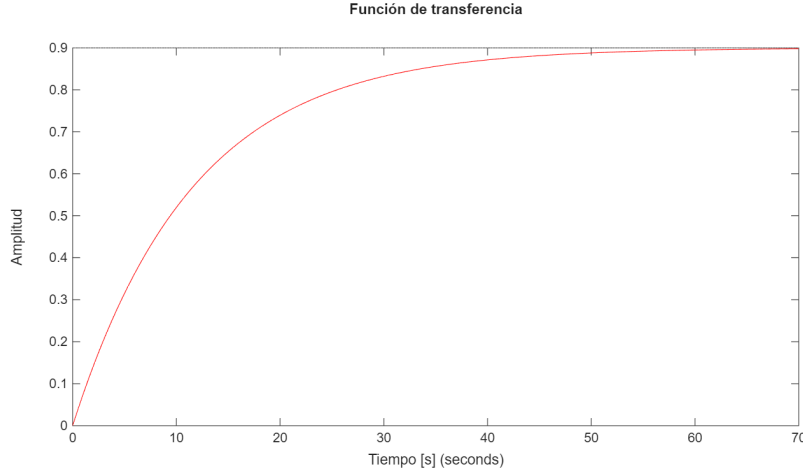


Figure 13: Función de transferencia aproximada

Se utiliza un controlador PID en tiempo continuo por el método de Ragazzini:

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s.$$

Para plantas lentas de primer orden, un controlador PI suele ser suficiente, por lo que inicialmente se toma $K_d = 0$ y se determinarán K_p y K_i mediante el método de Ragazzini.

Para empezar el diseño, se selecciona un tiempo de cierre proporcional al tiempo de la planta:

$$\tau_c = 0.5 T = 5.8 \text{ s.}$$

Esto busca una respuesta aproximadamente el doble de rápida que la de la planta sin control. **Observación:** Se selecciona $\tau_c = 0.5T$ porque representa un compromiso adecuado entre rapidez y estabilidad. Este valor hace que la respuesta del sistema controlado sea aproximadamente el doble de rápida que la de la planta original, sin introducir sobrepicos excesivos ni afectar la estabilidad. En plantas lentas de primer orden, como el sistema de tanques, esta elección proporciona un desempeño balanceado y evita la necesidad de una acción derivativa.

Luego, se calculan las ganancias:

El método Ragazzini proporciona fórmulas para un controlador PI:

$$K_p = \frac{T}{K \tau_c}, \quad K_i = \frac{1}{\tau_c}, \quad K_d = 0.$$

Sustituyendo los valores identificados:

$$\begin{aligned} K_p &= \frac{11.6}{0.9 \cdot 5.8} \approx 2.22, \\ K_i &= \frac{1}{5.8} \approx 0.1724, \\ K_d &= 0. \end{aligned}$$

Observación: La acción integral garantiza que el error estacionario se eliminará, mientras que el proporcional acelera la respuesta. La omisión de la acción derivativa evita amplificación de ruido y mantiene estabilidad.

Con realimentación unitaria, la ecuación característica es:

$$1 + C(s)G(s) = 0.$$

Sustituyendo $C(s)$ y $G(s)$:

$$1 + \frac{(K_p s + K_i)K}{s(Ts + 1)} = 0.$$

Multiplicando por $s(Ts + 1)$:

$$Ts^2 + (1 + KK_p)s + KK_i = 0.$$

Este polinomio indica que el lazo cerrado tiene un comportamiento de segundo orden, aunque derivado de una planta de primer orden.

10.1 Simulación de la respuesta

Simulando la respuesta de la planta con y sin PID utilizando MATLAB, se obtuvieron las métricas de desempeño:

Métrica	Sin control (lazo cerrado)	Con PI (Ragazzini, lazo cerrado)
Tiempo de subida, T_r (s)	13.41	14.10
Tiempo de establecimiento, T_s (s)	23.88	28.93
Sobrepico, M_p (%)	0.00	0.00
Error en estado estacionario, e_{ss}	0.5263	0.0000

Table 6: Métricas de desempeño de la planta sin y con control PI (Ragazzini)

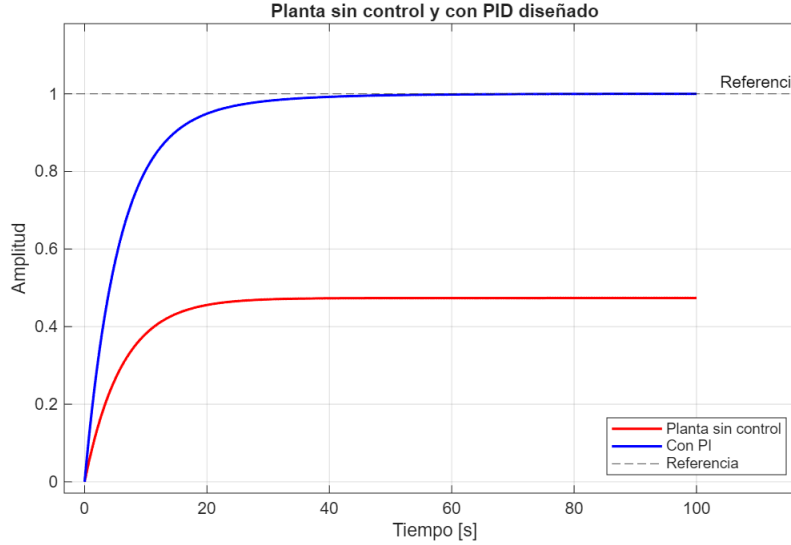


Figure 14: Comportamiento de la planta con PID

10.2 Análisis de resultados

El análisis comparativo muestra que, si bien el controlador PI diseñado mediante el método de Ragazzini no mejora los tiempos de subida ni de establecimiento —incluso incrementándolos ligeramente—, sí logra eliminar completamente el error estacionario presente en la planta en lazo abierto, garantizando el seguimiento exacto de la referencia en estado permanente. Además, tanto en lazo abierto como cerrado el sistema se mantiene sin sobrepico, lo cual es indicativo de una respuesta estable. La elección de un controlador PI en lugar de un PID resulta adecuada en este caso, ya que la planta presenta un comportamiento estable y de segundo orden con dinámica relativamente lenta, por lo que la acción integral es suficiente para corregir el error estacionario sin necesidad de derivativa, evitando así la amplificación de ruido y manteniendo la simplicidad en la implementación.

Nota: Todos los códigos, archivos `.mat`, gráficas y documentos relacionados con el desarrollo de este trabajo se encuentran disponibles en el repositorio asociado al proyecto [1]. Dicho repositorio contiene las implementaciones realizadas en MATLAB, así como los resultados experimentales utilizados para el diseño y análisis de los controladores.

References

- [1] Michell, “Algoritmos - funciones de transferencia,” 2025. [Online]. Available: <https://github.com/Mishell104/Mishell104.git>.