

Sveučilište u Zagrebu
Fakultet elektrotehnike i računarstva

**Druga domaća zadaća iz predmeta
"Uvod u teoriju računarstva"**

Zadatak broj 2010

Zagreb, lipanj 2009.

Druga domaća zadaća iz predmeta “Uvod u teoriju računarstva”

Student:

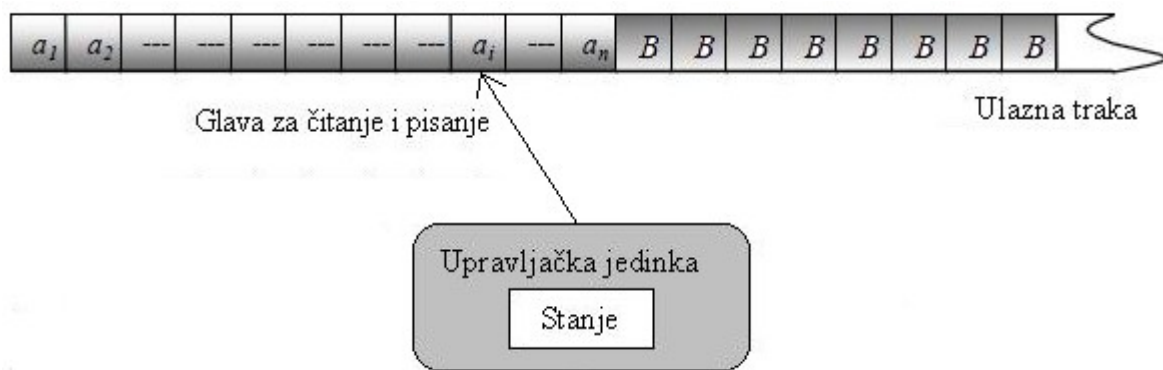
Matični broj studenta:

Zadatak broj 2010: Izgraditi TS koji će imati prostornu složenost barem za faktor 3 manju od zadanog TS $M = \{\{q_0, q_1, q_p\}, \{0, 1\}, \{0, 1, *, b\}, \delta, q_0, B, \{q_p\}\}$ s obostrano beskonačnom trakom. Na početku rada glava je smještena na krajnje lijevi znak ulaznog niza. TS M prepoznaje nizove oblika $0^n 1^n$.

	0	1	*	B
q_0 -neprihvatljivo	$q_0, 0, R$	$q_1, *, L$	$q_0, *, R$	q_p, B, R
q_1 -neprihvatljivo	$q_0, *, R$		$q_1, *, L$	
q_p -prihvatljivo				

Uvod

Turingov stroj (u daljnjem tekstu: TS) osnovni je apstraktni model izračunavanja. osnovni model sastoji se od upravljačke jedinice, ulazne trake i glave za čitanje i pisanje. Upravljačka jedinka se nalazi u jednom od konačnog broja stanja, a taj se skup stanja dijeli na prihvatljiva i neprihvatljiva. Ulazni znakovi niza i znakovi i znakovi koje TS zapisuje na ulaznu traku čine skup znakova trake. Ulazna traka sastoji se od ćelija na sa kojih glava za čitanje može čitati znakove te nakon toga nešto u ćelije i zapisati. Traka ima krajnje lijevu ćeliju, dok je beskonačna na lijevu stranu. Na početku rada n krajnje lijevih ćelija na traci sadrže niz w , gdje je $|w|=n$ i $n \geq 0$. Ostatak trake popunjen je ćelijama sa znakom B . Tokom rada upravljačka jedinka donosi odluku na temelju stanja u kojem se trenutno nalazi te znaka pročitano sa trake. Na temelju ta dva podatka, upravljačka jedinka donosi odluku o tome: u koje novo stanje prelazi, koji znak će zapisati na traku umjesto pročitano te u koju stranu će se glava za čitanje i pisanje pomaknuti. Na slici 1 prikazan je osnovni model TS gdje su znakovi niza w prikazani slovom a i pripadajućim indeksom.



Slika 1: Osnovni model Turingovog stroja

Turingov stroj se formalno zadaje uređenom sedmorkom:

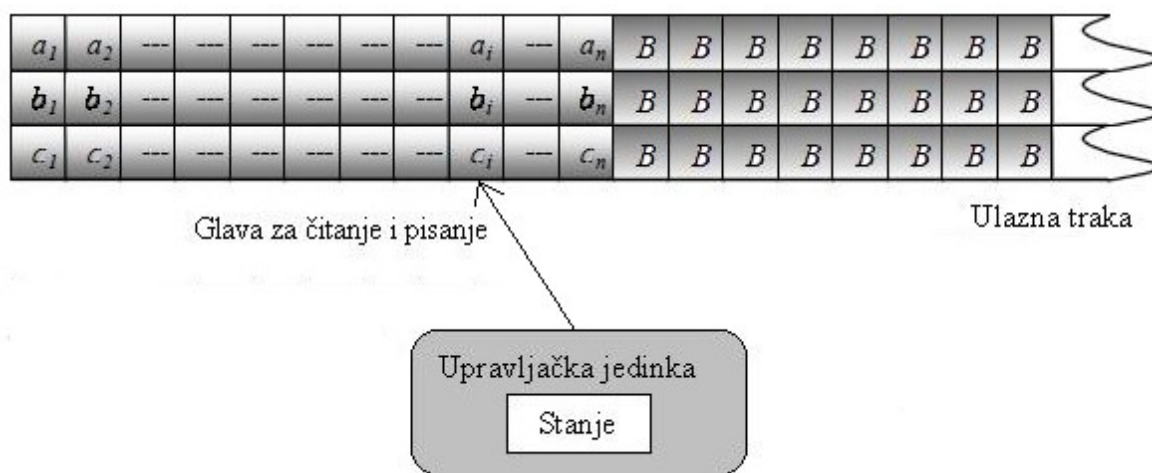
$$TS = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$$

gdje je:

- Q - konačan skup stanja;
- $\Sigma \subseteq (\Gamma - \{B\})$ - konačan skup ulaznih znakova;
- Γ - konačan skup znakova trake;
- δ - funkcija prijelaza, $\delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R\}$, gdje L i R označavaju pomak glave u lijevo i u desno, respektivno;
- $q_0 \in Q$ - početno stanje;
- $B \in \Gamma$ - znak kojim se označava prazna ćelija;
- $F \subseteq Q$ - skup prihvatljivih stanja.

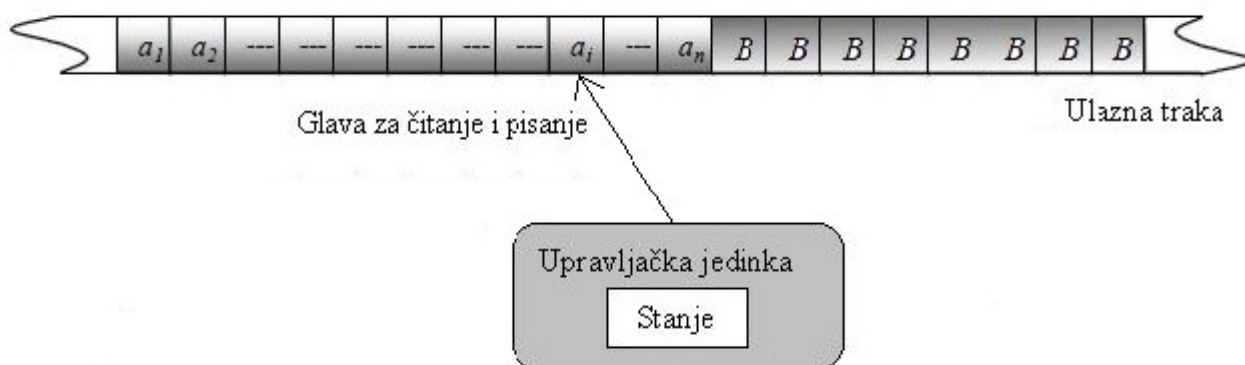
Funkcija prijelaza $\delta(q, V)=(p, Z, W)$ određuje da TS iz stanja q , za pročitani znak V prelazi u stanje p , na traku zapisuje znak Z te se glava pomiče u smjeru W .

Znakovi ulazne trake se osim u svom osnovnom obliku mogu zapisivati i pomoću više komponenata: $A_j=[a_1, a_2, \dots, a_n]$ gdje A_j predstavlja složeni znak s komponentama a_i , $1 \leq i \leq n$. Ukoliko pojedine komponente složenih znakova trake zapišemo u posebne tragove ulazne trake, lakše je pratiti rad TS. Broj tragova na ulaznoj traci jednak je broju komponenata složenih znakova trake. TS s n tragova istovjetan je osnovnom modelu TS te se iz njega može izgraditi TS sa jednim tragom. Na slici 2 prikazan je model TS sa 3 traga gdje se složena komponenta znaka sastoji od 3 pojedinačne komponente: $K_i=[a_i, b_i, c_i]$.



Slika 2: Model TS sa 3 traga

Jedan od načina proširenja osnovnog modela TS je i model TS sa dvostranom beskonačnom trakom. On se od osnovnog modela razlikuje u tome što i sa lijeve, i sa desne strane ima beskonačno mnogo znakova te se glava za čitanje može micati beskonačno u lijevu i beskonačno u desnu stranu. Na slici 3 prikazan je jedan takav model.



Slika 3: Model TS sa dvostranom beskonačnom trakom

Ostvarenje

Turingov stroj zadan u tekstu zadatka je: TS $M = \{\{q_0, q_1, q_p\}, \{0, 1\}, \{0, 1, *, B\}, \delta, q_0, B, \{q_0\}\}$, a mora prepoznati nizove oblika $0^n 1^n$ gdje n predstavlja broj ponavljanja znakova 0 i 1. Model tog TS se sastoji od 3 stanja (q_0, q_1, q_p) gdje q_0 predstavlja početno stanje, pri čemu su stanja q_0 i q_1 neprihvatljiva, a q_p je prihvatljivo. Ulazni znakovi su 0 i 1. Skup znakova trake je $\{0, 1, *, B\}$, a oznaka prazne ćelije je B.

Funkcije prijelaza TS su zadane tablicom prijelaza, a glase:

$$\delta(q_0, 0) = (q_0, 0, R)$$

$$\delta(q_0, 1) = (q_1, *, L)$$

$$\delta(q_0, *) = (q_0, *, R)$$

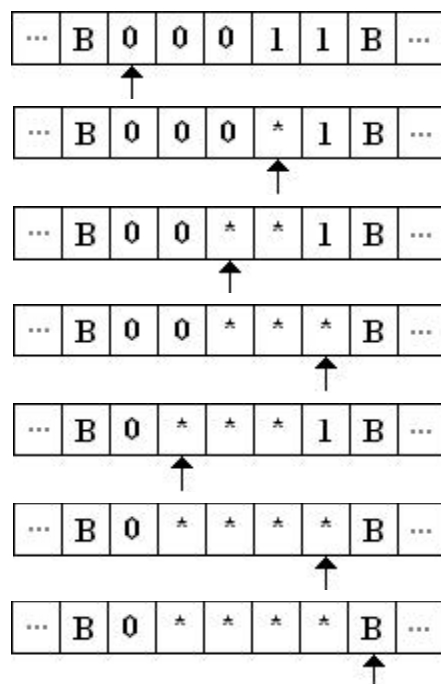
$$\delta(q_0, B) = (q_p, B, R)$$

$$\delta(q_1, 0) = (q_0, *, R)$$

$$\delta(q_1, *) = (q_1, *, L)$$

Turingov stroj zadan zadatkom radi na sljedeći način. Glava za čitanje i pisanje u početku je postavljena na početak niza, a TS je u stanju q_0 . Ukoliko niz započinje nekim nizom 0, glava se pomiče u desno dok ne naiđe na 1. Tada glava na to mjesto na traci zapiše *, pomakne glavu u lijevo te TS prelazi u stanje q_1 . Ako u tom stanju glava naiđe na 0, na to mjesto zapiše *, pomakne se u desno te TS prijeđe u stanje q_0 te tako redom dok na sva mjesta ulaznog niza ne zapiše *. Kada je ulazni niz cijeli prepisao sa * i našao praznu ćeliju (B), TS prelazi u stanje q_p te se taj niz prihvaća.

Kod izrade automata koji ima prostornu složenost za faktor 3 manju, primjetio sam da će zadani TS prihvaćati i nizove koji budu imali veći broj 0 nego 1. Naime, ako niz izgleda "...BB00011BB..." TS će nakon što označi drugu 0 u nizu prijeći u stanje q_0 te će se glava početi micati u desno i tražiti 1. Kako će naići na praznu ćeliju, TS će obaviti prijelaz zadan funkcijom $\delta(q_0, B) = (q_p, B, R)$ i prijeći u prihvatljivo stanje q_p , a sa lijeve strane nam se još uvijek nalazi jedna 0. Na slici 4 može se vidjeti redom kako glava za čitanje prolazi kroz niz te upisuje znakove (strelica prikazuje položaj glave za čitanje i pisanje). Na prvoj slici prikazana je početna pozicija glave dok je na zadnjoj krajnja pozicija. Sa slike se također može vidjeti da je glava došla na praznu ćeliju te je TS prihvatio niz, a na lijevoj strani se još nalazi jedna 0.



Slika 4: Grafički prikaz micanja glave za čitanje kroz zadani niz

Izgradnja turingovog stroja

Novi turingov stroj definiran je na sljedeći način:

$$TS M = (\{q_0, q_1, q_a, q_{a1}, q_b, q_{b1}, q_t, q_p\}, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, \{q_p\})$$

gdje je Σ konačan skup ulaznih znakova trake, a sastoji se od:

$$\Sigma = \{[0,0,0], [1,1,1], [* , * , *], [0,1,1], [1,1,B], [0,0,1], [1,B,B], [0,1,B]\},$$

a Γ je konačan skup znakova trake koji se sastoji od:

$$\Gamma = \{[0,0,0], [1,1,1], [* , * , *], [0,1,1], [1,1,B], [0,0,1], [1,B,B], [0,1,B], [B,B,B], [* , * , B], [* , B, B]\}.$$

Prostorna složenost uzima u obzir broj ćelija radne trake, odnosno broj ćelija kojima je glava za čitanje i pisanje pristupila. Za izgradnju TS koji ima prostornu složenost koja je barem za faktor 3 manja od zadanog TS, koristio sam model sa ulaznom trakom koja ima 3 traga i s obje strane je beskonačna. Traka koju sada koristimo u ta 3 traga ima samo redom prepisane vrijednosti iz početne trake odozgo prema dolje. Ukoliko je početna traka sadržavala ćelije ...B,0,0,1,B,... nova traka sadrži ćelije sa zapisima ...[B,B,B],[0,0,1],[B,B,B],... Izgrađeni model, kao i zadani, mora prepoznati i prihvatiti nizove oblika $0^n 1^n$ gdje n predstavlja broj ponavljanja znakova 0 i 1. Na početku rada glava je smještena na krajnje lijevi znak ulaznog niza.

Funkcije prijelaza novo izgrađenog TS su prikazane tablicom 1.

	[0,0,0]	[1,1,1]	[*,*,*]	[B,B,B]	[0,1,1]	[1,1,B]	[0,0,1]	[1,B,B]	[0,1,B]
q_0	$q_0, [0,0,0], R$	$q_1, [*,*,*], L$	$q_0, [*,*,*], R$	$q_t, [B,B,B], L$	$q_a, [*,*,*], L$		$q_b, [*,*,*], R$		$q_p, [*,*,*], L$
q_1	$q_0, [*,*,*], R$		$q_1, [*,*,*], L$						
q_a	$q_a, [*,*,*], R$	$q_{a_1}, [*,*,*], L$	$q_a, [*,*,*], R$			$q_t, [*,*,*], L$			
q_{a_1}	$q_a, [*,*,*], R$		$q_{a_1}, [*,*,*], L$						
q_b		$q_{b_1}, [*,*,*], L$	$q_b, [*,*,*], R$					$q_t, [*,*,*], L$	
q_{b_1}	$q_b, [*,*,*], R$		$q_{b_1}, [*,*,*], L$						
q_t			$q_t, [*,*,*], L$	$q_p, [B,B,B], R$					
q_p									

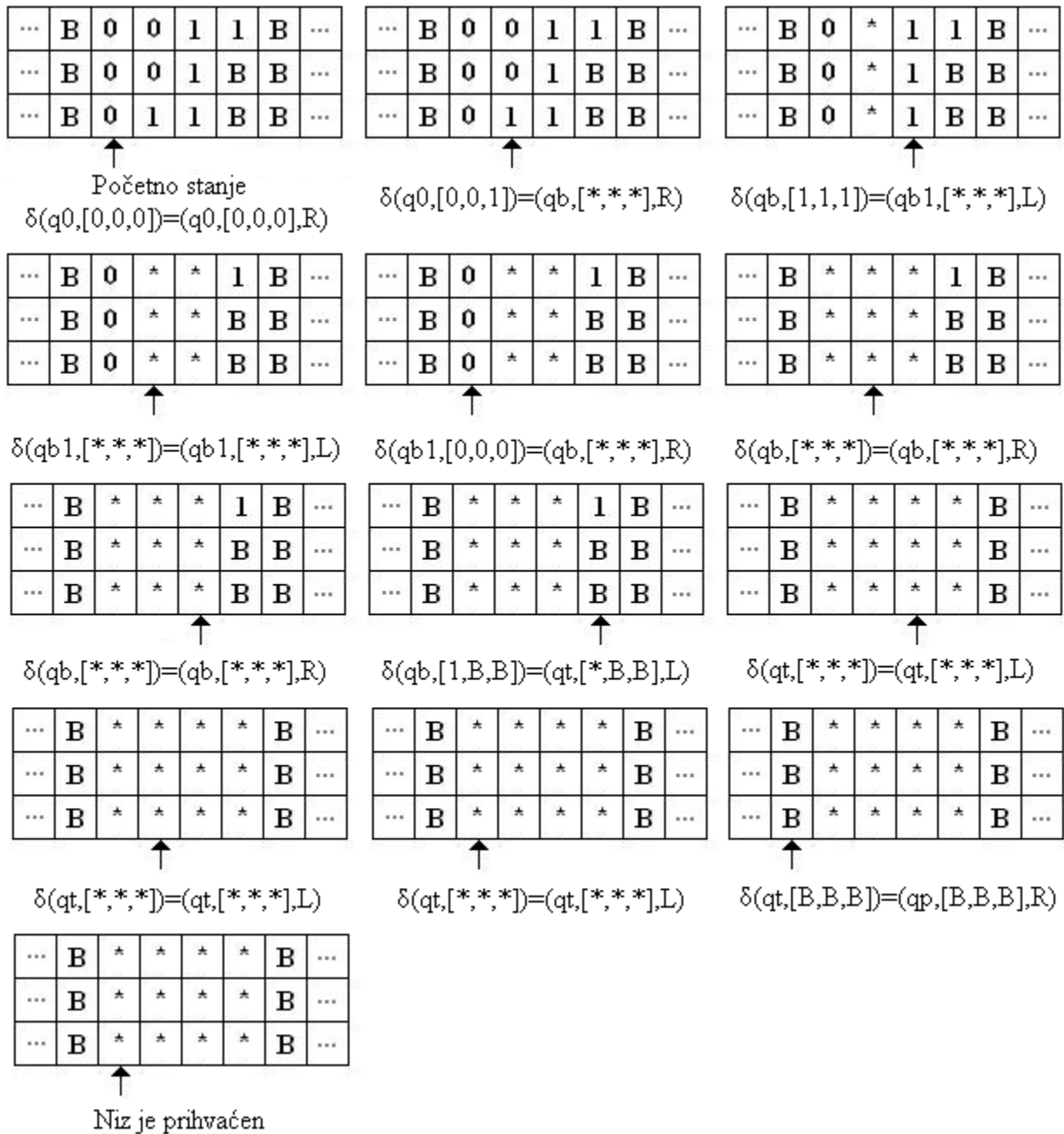
Tablica 1: Tablica prijelaza za TS

Funkcije prijelaza glase:

$$\begin{aligned}
\delta(q_0, [0,0,0]) &= (q_0, [0,0,0], R) & \delta(q_0, [1,1,1]) &= (q_1, [*,*,*], L) \\
\delta(q_0, [*,*,*]) &= (q_0, [*,*,*], R) & \delta(q_0, [B,B,B]) &= (q_t, [B,B,B], L) \\
\delta(q_0, [0,1,1]) &= (q_a, [*,*,*], L) & \delta(q_0, [0,0,1]) &= (q_b, [*,*,*], R) \\
\delta(q_0, [0,1,B]) &= (q_p, [*,*,*], L) & \delta(q_1, [0,0,0]) &= (q_0, [*,*,*], R) \\
\delta(q_1, [*,*,*]) &= (q_1, [*,*,*], L) & \delta(q_a, [0,0,0]) &= (q_a, [*,*,*], R) \\
\delta(q_a, [1,1,1]) &= (q_{a_1}, [*,*,*], L) & \delta(q_a, [*,*,*]) &= (q_a, [*,*,*], R) \\
\delta(q_a, [1,1,B]) &= (q_t, [*,*,*], L) & \delta(q_{a_1}, [0,0,0]) &= (q_a, [*,*,*], R) \\
\delta(q_{a_1}, [*,*,*]) &= (q_{a_1}, [*,*,*], L) & \delta(q_b, [1,1,1]) &= (q_{b_1}, [*,*,*], L) \\
\delta(q_b, [*,*,*]) &= (q_b, [*,*,*], R) & \delta(q_b, [1,B,B]) &= (q_t, [*,*,*], L) \\
\delta(q_{b_1}, [0,0,0]) &= (q_b, [*,*,*], R) & \delta(q_{b_1}, [*,*,*]) &= (q_{b_1}, [*,*,*], L) \\
\delta(q_t, [*,*,*]) &= (q_t, [*,*,*], L) & \delta(q_t, [B,B,B]) &= (q_p, [B,B,B], R)
\end{aligned}$$

Ovaj TS radi na sličnom principu kao i zadani, samo što ima uvedena neka nova stanja zbog 3 traga trake. Početno stanje je q_0 iz koje TS počinje tražiti ćeliju koja se sastoji od barem jedne jedinice ([0,0,1], [0,1,1] ili [1,1,1]. Kada nađe tu ćeliju, preko nje zapiše [*,*,*] te ovisno o kojoj se ćeliji radilo prelazi u novo stanje. Tada traži ćeliju koja sadrži sve 0 ([0,0,0]) te nju prepíše sa [*,*,*] i tako redom. Problem na koji sam naišao u zadanom TS riješio sam uvođenjem novog stanja q_t (q-testno). Ukoliko TS ima manji broj 1 nego 0 i glava za čitanje označi sve 1 i pripadajuće 0, on prelazi u stanje q_t , gdje se miče kroz cijeli niz prema lijevo i provjerava dali postoji još kakav zapis koji nije označio sa *. Ukoliko ga nema, niz se prihvća.

Na sljedećoj slici prikazano je micanje glave za čitanje i pisanje i funkcije prijelaza u svakom koraku prilikom prihvatanja niza 0000011111.



Slika 5: Primjer micanja glave za čitanje i pisanje za niz 0000011111

Zaključak

U ovom seminarskom radu izgrađen je turingov stroj koji prepoznaje nizove oblika 0^n1^n s time da ima prostornu složenost barem za faktor 3 manju od zadanog TS. Ukoliko se nakon završetka rada TS nađe u stanju q_p možemo zaključiti da je niz ispravno zapisan. Izgradnja takvog TS zahtijevala je više prijelaza, te traku sa više tragova, ali je zato zauzeto manje ćelija. Problemi na koje sam naišao kod zadanog turingovog stroja riješio sam tokom izgradnje novog. Za daljnje smanjenje prostorne složenosti, morali bi uvesti još tragova na traku, imali bi još komponenata u znakovima trake te bi to dovelo do povećanje broja prijelaza.

Literatura

1. Srbljić, S.: Uvod u teoriju računarstva, 1. izdanje, Element, Zagreb 2007.