



Sveučilište u Zagrebu  
Fakultet elektrotehnike i računarstva  
Zavod za elektroniku, mikroelektroniku, računalne i inteligentne sustave

Andro Milanović, Dejan Škvorc

# **Uvod u teoriju računarstva**

## **Zadaci za vježbu**

Zagreb, travanj 2008.

**16. Izbaciti sve beskorisne znakove iz zadane gramatike.**

$S \rightarrow bAbE$	$B \rightarrow DC$	$D \rightarrow cDAaB$
$S \rightarrow aABc$	$B \rightarrow ad$	$D \rightarrow bDaE$
$A \rightarrow beA$	$C \rightarrow eA$	$E \rightarrow ed$
$A \rightarrow \epsilon$	$C \rightarrow \epsilon$	$E \rightarrow ac$

Beskorisni znakovi  $\Rightarrow$  mrtvi znakovi ili nedohvatljivi znakovi

*1. korak: traženje mrtvih znakova*

Lista živih znakova:  $\{E, C, B, A, S\}$

Znakovi koji se ne pojavljuju u listi živih znakova su mrtvi znakovi.

Znak D je mrtav pa se izbacuju sve produkcije u kojima se on javlja.

$S \rightarrow bAbE$	$A \rightarrow beA$	$B \rightarrow ad$	$C \rightarrow eA$	$E \rightarrow ed$
$S \rightarrow aABc$	$A \rightarrow \epsilon$		$C \rightarrow \epsilon$	$E \rightarrow ac$

*2. korak: traženje nedohvatljivih znakova*

Lista dohvatljivih znakova:  $\{S, b, A, E, a, B, c, e, d\}$

Znakovi koji se ne pojavljuju u listi dohvatljivih znakova su nedohvatljivi znakovi.

Znak C je nedohvatljiv pa se izbacuju sve produkcije u kojima se on javlja.

$S \rightarrow bAbE$	$A \rightarrow beA$	$B \rightarrow ad$	$E \rightarrow ed$
$S \rightarrow aABc$	$A \rightarrow \epsilon$		$E \rightarrow ac$

Da su se prvo tražili dohvatljivi znakovi, dobio bi se sljedeći rezultat:

Lista dohvatljivih znakova:  $\{S, b, A, E, a, B, c, e, D, C, d\}$

Lista živih znakova:  $\{E, C, B, A, S\}$

Mrtav znak je D, a dobivena gramatika je:

$S \rightarrow bAbE$	$A \rightarrow beA$	$B \rightarrow ad$	$C \rightarrow eA$	$E \rightarrow ed$
$S \rightarrow aABc$	$A \rightarrow \epsilon$		$C \rightarrow \epsilon$	$E \rightarrow ac$

Ovaj rezultat NIJE TOČAN jer je znak C nedohvatljiv.

**17. Iz zadane gramatike izbaciti jedinične i  $\epsilon$  produkcije.**

$S \rightarrow xABz$	$A \rightarrow zyA$	$B \rightarrow wC$	$C \rightarrow zx C$	$D \rightarrow yB$
	$A \rightarrow BC$	$B \rightarrow \epsilon$	$C \rightarrow D$	$D \rightarrow \epsilon$

Izbacuje se jedinična produkcija  $C \rightarrow D$  što se ostvaruje supstitucijom nezavršnog znaka D desnim stranama svih produkcija u kojima je znak D na lijevoj strani.

$S \rightarrow xABz$	$A \rightarrow zyA$	$B \rightarrow wC$	$C \rightarrow zx C$	$D \rightarrow yB$
	$A \rightarrow BC$	$B \rightarrow \epsilon$	$C \rightarrow yB$	$D \rightarrow \epsilon$
			$C \rightarrow \epsilon$	

Nezavršni znak D je postao nedohvatljiv pa ga je moguće ukloniti iz gramatike radi jednostavnosti.

$S \rightarrow xABz$	$A \rightarrow zyA$	$B \rightarrow wC$	$C \rightarrow zxC$
	$A \rightarrow BC$	$B \rightarrow \varepsilon$	$C \rightarrow yB$
			$C \rightarrow \varepsilon$

Uklanjaju se  $\varepsilon$  produkcije - u tu vrstu spadaju dvije  $\varepsilon$  produkcije,  $B \rightarrow \varepsilon$  i  $C \rightarrow \varepsilon$ , te produkcija  $A \rightarrow BC$  koja može generirati  $A \Rightarrow \varepsilon$

$S \rightarrow xABz$	$A \rightarrow zyA$	$B \rightarrow wC$	$C \rightarrow zxC$
$S \rightarrow xAz$	$A \rightarrow zy$	$B \rightarrow w$	$C \rightarrow zx$
$S \rightarrow xBz$	$A \rightarrow BC$		$C \rightarrow yB$
$S \rightarrow xz$	$A \rightarrow B$		$C \rightarrow y$
	$A \rightarrow C$		

Budući da su se pojavile dvije nove jedinične produkcije  $A \rightarrow B$  i  $A \rightarrow C$ , ponovno treba primijeniti postupak izbacivanja jediničnih produkcija.

$S \rightarrow xABz$	$A \rightarrow zyA$	$A \rightarrow zxC$	$B \rightarrow wC$	$C \rightarrow zxC$
$S \rightarrow xAz$	$A \rightarrow zy$	$A \rightarrow zx$	$B \rightarrow w$	$C \rightarrow zx$
$S \rightarrow xBz$	$A \rightarrow BC$	$A \rightarrow yB$		$C \rightarrow yB$
$S \rightarrow xz$	$A \rightarrow wC$	$A \rightarrow y$		$C \rightarrow y$
	$A \rightarrow w$			

### 18. Zadanu gramatiku pretvoriti u Chomskyev oblik.

$S \rightarrow 0S1$	$A \rightarrow 1B0$	$B \rightarrow 1BA$	$C \rightarrow B0$
$S \rightarrow 0SBS$	$A \rightarrow SB$	$B \rightarrow SA$	$C \rightarrow A$
$S \rightarrow 1C0$	$A \rightarrow 0$	$B \rightarrow 1$	$C \rightarrow \varepsilon$

Chomskyev oblik produkcija je  $A \rightarrow BC$  i  $A \rightarrow d$

Postupak pretvorbe započinje izbacivanjem jediničnih i  $\varepsilon$  produkcija

$S \rightarrow 0S1$	$A \rightarrow 1B0$	$B \rightarrow 1BA$	$C \rightarrow B0$
$S \rightarrow 0SBS$	$A \rightarrow SB$	$B \rightarrow SA$	$C \rightarrow 1B0$
$S \rightarrow 1C0$	$A \rightarrow 0$	$B \rightarrow 1$	$C \rightarrow SB$
$S \rightarrow 10$			

Završni znakovi koji se nalaze u produkcijama koje imaju više od jednog znaka na desnoj strani zamijene se nezavršnim znakovima koji su zamjene za te završne znakove.

$S \rightarrow NSJ$	$A \rightarrow JBN$	$B \rightarrow JBA$	$C \rightarrow BN$	$J \rightarrow 1$
$S \rightarrow NSBS$	$A \rightarrow SB$	$B \rightarrow SA$	$C \rightarrow JBN$	$N \rightarrow 0$
$S \rightarrow JCN$	$A \rightarrow 0$	$B \rightarrow 1$	$C \rightarrow SB$	
$S \rightarrow JN$				

Produkcije koje s desne strane imaju više od dva znaka razbijaju se u podprodukcije.

$S \rightarrow ND_1$	$A \rightarrow JD_4$	$B \rightarrow JD_5$	$C \rightarrow BN$	$D_1 \rightarrow SJ$
$S \rightarrow ND_2$	$A \rightarrow SB$	$B \rightarrow SA$	$C \rightarrow JD_4$	$D_2 \rightarrow SD_6$
$S \rightarrow JD_3$	$A \rightarrow 0$	$B \rightarrow 1$	$C \rightarrow SB$	$D_3 \rightarrow CN$
$S \rightarrow JN$			$J \rightarrow 1$	$D_4 \rightarrow BN$
			$N \rightarrow 0$	$D_5 \rightarrow BA$
				$D_6 \rightarrow BS$

**19. Pokazati nejednoznačnost zadane gramatike.** $S \rightarrow aSbS$  $S \rightarrow bSaS$  $S \rightarrow \epsilon$ 

Nejednoznačnost se pokazuje generiranjem niza **abab** na dva ili više načina zamjenom krajnje lijevog ili krajnje desnog nezavršnog znaka.

Prvi način generiranja niza zamjenom krajnje lijevog nezavršnog znaka:

$$\underline{S} \xrightarrow{1} a\underline{S}bS \xrightarrow{3} ab\underline{S} \xrightarrow{1} aba\underline{S}bS \xrightarrow{3} abab\underline{S} \xrightarrow{3} abab$$

Drugi način generiranja niza zamjenom krajnje lijevog nezavršnog znaka:

$$\underline{S} \xrightarrow{1} a\underline{S}bS \xrightarrow{2} ab\underline{S}aSbS \xrightarrow{3} aba\underline{S}bS \xrightarrow{3} abab\underline{S} \xrightarrow{3} abab$$

Budući da postoji **više različitih** načina generiranja **istog niza** zamjenom krajnje lijevog nezavršnog znaka, gramatika je nejednoznačna za niz **abab**.

**20. Za zadanu gramatiku napisan je LR parser. Pomoću LR parsera parsirati ulazni niz aabb.**

$A \rightarrow BA$ (1)		a	b	$\perp$	A	B
$A \rightarrow \epsilon$ (2)	0	s4	s5	r2	1	2
$B \rightarrow aB$ (3)	1			prihvati		
$B \rightarrow b$ (4)	2	s4	s5	r2	3	2
	3			r1		
	4	s4	s5			6
	5	r4	r4	r4		
	6	r3	r3	r3		

Konfiguracija LR parsera prikazuje se stanjem na stogu i nepročitanim dijelom ulaznog niza

stog	ulaz
$\nabla 0$	aabb
$\nabla 0a4$	abb
$\nabla 0a4a4$	bb
$\nabla 0a4a4b5$	b
$\nabla 0a4a4B6$	b
$\nabla 0a4B6$	b
$\nabla 0B2$	b
$\nabla 0B2b5$	$\perp$
$\nabla 0B2B2$	$\perp$
$\nabla 0B2B2A3$	$\perp$
$\nabla 0B2A3$	$\perp$
$\nabla 0A1$	$\perp$
prihvati	

Parser je LR jer se niz čita s lijeva na desno, a generiranje niza se vrši zamjenom krajnje desnog nezavršnog znaka:

$$\underline{A} \rightarrow \underline{B}\underline{A} \rightarrow \underline{B}\underline{B}\underline{A} \rightarrow \underline{B}\underline{B} \rightarrow \underline{B}b \rightarrow a\underline{B}b \rightarrow aa\underline{B}b \rightarrow aabb$$

**21. Konstruirati gramatiku koja generira nizove oblika  $a^i b^j c^k d^j e^i$  pri čemu su  $i, j, k \geq 1$ .**

Konteksno-neovisna gramatika

$$\begin{array}{llll} S \rightarrow aAe & A \rightarrow aAe & B \rightarrow bBd & C \rightarrow cC \\ & A \rightarrow bBd & B \rightarrow cC & C \rightarrow \varepsilon \end{array}$$

**22. Konstruirati potisni automat koji prihvaća jezik  $L = \{ww^R \mid w \in (0+1)^*\}$ .**

$$M = (\{q_0, q_1\}, \{0, 1\}, \{P, N, J\}, \delta, q_0, P, \emptyset)$$

$$\begin{array}{lll} \delta(q_0, 0, P) = (q_0, NP) & \delta(q_0, 0, N) = \{(q_0, NN), (q_1, \varepsilon)\} & \delta(q_1, 0, N) = (q_1, \varepsilon) \\ \delta(q_0, 1, P) = (q_0, JP) & \delta(q_0, 1, N) = (q_0, JN) & \delta(q_1, 1, J) = (q_1, \varepsilon) \\ \delta(q_0, \varepsilon, P) = (q_0, \varepsilon) & \delta(q_0, 0, J) = (q_0, NJ) & \delta(q_1, \varepsilon, P) = (q_1, \varepsilon) \\ & \delta(q_0, 1, J) = \{(q_0, JJ), (q_1, \varepsilon)\} & \end{array}$$

Dobiveni potisni automat prihvaća praznim stogom i **nije deterministički**.

Primjer nedeterminističke provjere niza 001100:

$$\begin{array}{l} (q_0, 001100, P) \rightarrow (q_1, 001100, \varepsilon) \\ \downarrow \\ (q_0, 01100, NP) \rightarrow (q_1, 1100, P) \rightarrow (q_1, 1100, \varepsilon) \\ \downarrow \\ (q_0, 1100, NNP) \\ \downarrow \\ (q_0, 100, JJNNP) \rightarrow (q_1, 00, NNP) \rightarrow (q_1, 0, NP) \rightarrow (q_1, \varepsilon, P) \rightarrow (q_1, \varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \text{prihvaća se} \\ \downarrow \\ (q_0, 00, JJNNP) \\ \downarrow \\ (q_0, 0, NJJNNP) \rightarrow (q_1, \varepsilon, JJNNP) \\ \downarrow \\ (q_0, \varepsilon, NNJNNP) \end{array}$$

**23. Iz potisnog automata  $M_1$  koji nizove prihvaća prihvatljivim stanjem konstruirati potisni automat  $M_2$  koji nizove prihvaća praznim stogom.**

$$M_1 = (\{q_0, q_1\}, \{0, 1, 2\}, \{N, J, K\}, q_0, \delta, K, \{q_1\})$$

$$\begin{array}{lll} \delta(q_0, 0, K) = (q_0, NK) & \delta(q_0, 0, N) = (q_0, NN) & \delta(q_0, 0, J) = (q_0, \varepsilon) \\ \delta(q_0, 1, K) = (q_0, JK) & \delta(q_0, 1, N) = (q_0, \varepsilon) & \delta(q_0, 1, J) = (q_0, JJ) \\ \delta(q_0, 2, K) = (q_0, K) & \delta(q_0, 2, N) = (q_0, N) & \delta(q_0, 2, J) = (q_0, J) \\ \delta(q_0, \varepsilon, K) = (q_1, K) & & \end{array}$$

Dodaju se stanja  $q_P$  i  $q_E$ , znak stoga  $Z$ , a funkcija prijelaza  $\delta'$  preuzima sve prijelaze funkcije  $\delta$  i dodaje devet novih prijelaza.

$$M_2 = (\{q_P, q_0, q_1, q_E\}, \{0, 1, 2\}, \{N, J, K, Z\}, q_P, \delta', Z, \emptyset)$$

$\delta'(q_P, \varepsilon, Z) = (q_0, KZ)$	$\delta'(q_E, \varepsilon, N) = (q_E, \varepsilon)$	$\delta'(q_0, 0, K) = (q_0, NK)$	$\delta'(q_0, 0, N) = (q_0, NN)$
$\delta'(q_1, \varepsilon, N) = (q_E, \varepsilon)$	$\delta'(q_E, \varepsilon, J) = (q_E, \varepsilon)$	$\delta'(q_0, 1, K) = (q_0, JK)$	$\delta'(q_0, 1, N) = (q_0, \varepsilon)$
$\delta'(q_1, \varepsilon, J) = (q_E, \varepsilon)$	$\delta'(q_E, \varepsilon, K) = (q_E, \varepsilon)$	$\delta'(q_0, 2, K) = (q_0, K)$	$\delta'(q_0, 2, N) = (q_0, N)$
$\delta'(q_1, \varepsilon, K) = (q_E, \varepsilon)$	$\delta'(q_E, \varepsilon, Z) = (q_E, \varepsilon)$	$\delta'(q_0, \varepsilon, K) = (q_1, K)$	$\delta'(q_0, 0, J) = (q_0, \varepsilon)$
$\delta'(q_1, \varepsilon, Z) = (q_E, \varepsilon)$			$\delta'(q_0, 1, J) = (q_0, JJ)$
			$\delta'(q_0, 2, J) = (q_0, J)$

Prvi dodani prijelaz  $\delta'(q_P, \varepsilon, Z) = (q_0, KZ)$  na vrh stoga ubacuje znak K i prelazi u stanje  $q_0$  čime potisni automat  $M_2$  prelazi u početnu konfiguraciju potisnog automata  $M_2$  i započinje simulaciju njegova rada.

Ostalih osam dodanih prijelaza prazni stog nakon što simulirani potisni automat  $M_1$  uđe u prihvatljivo stanje.

Dodatni znak stoga Z potreban je jer simulirani potisni automat  $M_1$  može tijekom rada isprazniti stog, a da ne prihvati ulazni niz.

Stanje  $q_P$  služi prebacivanju potisnog automata  $M_2$  u početnu konfiguraciju simuliranog potisnog automata  $M_1$ , a stanje  $q_E$  omogućuje pražnjenje stoga nakon što simulirani potisni automat  $M_1$  uđe u prihvatljivo stanje  $q_1$ .

Posljednjih deset prijelaza su prijelazi preuzeti iz funkcije prijelaza simuliranog potisnog automata  $M_1$  koji omogućuju simulaciju rada potisnog automata  $M_1$  potisnim automatom  $M_2$ .

Primjer rada potisnog automata  $M_2$  za niz 0211202:

$$\begin{aligned}
 &(q_0', 0211202, Z) \\
 &\quad \downarrow \\
 &(q_0, 0211202, KZ) \rightarrow (q_1, 0211202, KZ) \rightarrow (q_E, 0211202, Z) \rightarrow (q_E, 0211202, \varepsilon) \\
 &\quad \downarrow \\
 &(q_0, 211202, NKZ) \\
 &\quad \downarrow \\
 &(q_0, 11202, NKZ) \\
 &\quad \downarrow \\
 &(q_0, 1202, KZ) \rightarrow (q_1, 1202, KZ) \rightarrow (q_E, 1202, Z) \rightarrow (q_E, 1202, \varepsilon) \\
 &\quad \downarrow \\
 &(q_0, 202, JKZ) \\
 &\quad \downarrow \\
 &(q_0, 02, JKZ) \\
 &\quad \downarrow \\
 &(q_0, 2, KZ) \rightarrow (q_1, 2, KZ) \rightarrow (q_E, 2, Z) \rightarrow (q_E, 2, \varepsilon) \\
 &\quad \downarrow \\
 &(q_0, \varepsilon, KZ) \rightarrow (q_1, \varepsilon, KZ) \rightarrow (q_E, \varepsilon, Z) \rightarrow (q_E, \varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \text{prihvaća se}
 \end{aligned}$$

**24. Iz potisnog automata  $M_1$  koji nizove prihvaća praznim stogom konstruirati potisni automat  $M_2$  koji nizove prihvaća prihvatljivim stanjem.**

$$M_1 = (\{q_0, q_1\}, \{0, 1, 2\}, \{N, J, K\}, q_0, \delta, K, \emptyset)$$

$\delta(q_0, 0, K) = (q_0, NK)$	$\delta(q_0, 0, J) = (q_0, NJ)$	$\delta(q_0, 0, N) = (q_0, NN)$	$\delta(q_1, 0, N) = (q_1, \varepsilon)$
$\delta(q_0, 1, K) = (q_0, JK)$	$\delta(q_0, 1, J) = (q_0, JJ)$	$\delta(q_0, 1, N) = (q_0, JN)$	$\delta(q_1, 1, J) = (q_1, \varepsilon)$
$\delta(q_0, 2, K) = (q_1, \varepsilon)$	$\delta(q_0, 2, J) = (q_1, J)$	$\delta(q_0, 2, N) = (q_1, N)$	$\delta(q_1, \varepsilon, K) = (q_1, \varepsilon)$

Dodaju se stanja  $q_P$  i  $q_F$ , znak stoga  $Z$ , a funkcija prijelaza  $\delta'$  preuzima sve prijelaze funkcije  $\delta$  i dodaje tri nova prijelaza.

$$M_2 = (\{q_P, q_0, q_1, q_F\}, \{0, 1, 2\}, \{N, J, K, Z\}, q_P, \delta', Z, \{q_F\})$$

$\delta'(q_P, \varepsilon, Z) = (q_0, KZ)$	$\delta'(q_0, 0, K) = (q_0, NK)$	$\delta'(q_0, 0, N) = (q_0, NN)$
$\delta'(q_0, \varepsilon, Z) = (q_F, Z)$ ili $(q_F, \varepsilon)$	$\delta'(q_0, 1, K) = (q_0, JK)$	$\delta'(q_0, 1, N) = (q_0, JN)$
$\delta'(q_1, \varepsilon, Z) = (q_F, \varepsilon)$ ili $(q_F, Z)$	$\delta'(q_0, 2, K) = (q_1, \varepsilon)$	$\delta'(q_0, 2, N) = (q_1, N)$
	$\delta'(q_0, 0, J) = (q_0, NJ)$	$\delta'(q_1, 0, N) = (q_1, \varepsilon)$
	$\delta'(q_0, 1, J) = (q_0, JJ)$	$\delta'(q_1, 1, J) = (q_1, \varepsilon)$
	$\delta'(q_0, 2, J) = (q_1, J)$	$\delta'(q_1, \varepsilon, K) = (q_1, \varepsilon)$

Prvi dodani prijelaz  $\delta'(q_P, \varepsilon, Z) = (q_0, KZ)$  na vrh stoga ubacuje znak  $K$  i prelazi u stanje  $q_0$  čime potisni automat  $M_2$  prelazi u početnu konfiguraciju potisnog automata  $M_1$  i započinje simulaciju njegovog rada.

Druga dva dodana prijelaza prebacuju potisni automat  $M_2$  u prihvatljivo stanje nakon što simulirani potisni automat  $M_1$  isprazni stog – pri tome se znak  $Z$  može skinuti sa stoga ili ostaviti na stogu.

Dodatni znak stoga  $Z$  potreban je da bi potisni automat  $M_2$  mogao utvrditi da je simulirani potisni automat  $M_1$  ispraznio stog.

Stanje  $q_P$  služi prebacivanju potisnog automata  $M_2$  u početnu konfiguraciju simuliranog potisnog automata  $M_1$ , a stanje  $q_F$  je prihvatljivo stanje.

Primjer rada potisnog automata  $M_2$  za niz 0211202:

$$\begin{aligned} (q_0', 0112110, Z) &\rightarrow (q_0, 0112110, KZ) \rightarrow (q_0, 112110, NKZ) \rightarrow (q_0, 12110, JNKZ) \rightarrow \\ &\rightarrow (q_0, 2110, JJNKZ) \rightarrow (q_1, 110, JJNKZ) \rightarrow (q_1, 10, JNKZ) \rightarrow (q_1, 0, NKZ) \rightarrow (q_1, \varepsilon, KZ) \rightarrow (q_1, \varepsilon, Z) \rightarrow \\ &\rightarrow (q_F, \varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \text{prihvaća se} \end{aligned}$$

## 25. Konstruirati potisni automat koji prihvaća nizove koje generira zadana gramatika.

$$G = (V, T, P, S)$$

$S \rightarrow xAB_y$	$B \rightarrow wC$	$C \rightarrow vB$
$A \rightarrow zwA$	$B \rightarrow v$	$C \rightarrow xA$
$A \rightarrow \varepsilon$	$B \rightarrow \varepsilon$	$C \rightarrow \varepsilon$

Prije konstrukcije potisnog automata gramatiku treba prebaciti u Greibachov oblik, odnosno sve produkcije moraju biti oblika  $A \rightarrow b\gamma$ ,  $b \in T$ ,  $\gamma \in V^*$

Prvo se izbacuje  $\varepsilon$  produkcije:

$S \rightarrow xAB_y$	$A \rightarrow zwA$	$B \rightarrow wC$	$C \rightarrow vB$
$S \rightarrow xAy$	$A \rightarrow zw$	$B \rightarrow w$	$C \rightarrow v$
$S \rightarrow xBy$		$B \rightarrow v$	$C \rightarrow xA$
$S \rightarrow xy$			$C \rightarrow x$

Potom se završni znakovi koji nisu na prvom mjestu s lijeve strane nadomjesto zamjenskim nezavršnim znakovima:

$S \rightarrow xABD$	$A \rightarrow zEA$	$B \rightarrow wC$	$C \rightarrow vB$	$D \rightarrow y$
$S \rightarrow xAD$	$A \rightarrow zE$	$B \rightarrow w$	$C \rightarrow v$	$E \rightarrow w$
$S \rightarrow xBD$		$B \rightarrow v$	$C \rightarrow xA$	
$S \rightarrow xD$			$C \rightarrow x$	

Gramatika je pretvorena u Greibachov oblik koji omogućuje jednostavnu konstrukciju potisnog automata:

$$M = (\{q\}, \Sigma, \Gamma, \delta, q, S, \emptyset) \text{ pri tome vrijedi } \Sigma = T, \Gamma = V \text{ te za } A \rightarrow b\gamma \Rightarrow \delta(q, b, A) = (q, \gamma)$$

$$\begin{aligned} \delta(q, x, S) &= \{(q, ABD), (q, AD), (q, BD), (q, D)\} & \delta(q, v, C) &= \{(q, B), (q, \varepsilon)\} \\ \delta(q, z, A) &= \{(q, EA), (q, E)\} & \delta(q, x, C) &= \{(q, A), (q, \varepsilon)\} \\ \delta(q, w, B) &= \{(q, C), (q, \varepsilon)\} & \delta(q, y, D) &= (q, \varepsilon) \\ \delta(q, v, B) &= (q, \varepsilon) & \delta(q, w, E) &= (q, \varepsilon) \end{aligned}$$

## 26. Konstruirati kontekstno neovisnu gramatiku koja generira nizove koje prihvaća zadani potisni automat M.

$$M = (\{q_0, q_1\}, \{a, b, c\}, \{A, K\}, \delta, q_0, K, \emptyset)$$

$$\begin{aligned} \delta(q_0, b, K) &= (q_0, AK) & \delta(q_0, a, A) &= (q_1, A) \\ \delta(q_1, \varepsilon, K) &= (q_1, \varepsilon) & \delta(q_0, b, A) &= (q_0, AA) \\ & & \delta(q_1, c, A) &= (q_1, \varepsilon) \end{aligned}$$

Da bi se gramatika mogla konstruirati, potisni automat mora prihvaćati praznim stogom

$$G = (V, T, P, S) \text{ pri tome je } T = \Sigma, \text{ a } V = \{S\} \cup \{[q_i A q_j] \mid q_i, q_j \in Q, A \in \Gamma\}$$

Gramatika simulira rad potisnog automata.

Skup nezavršnih znakova  $V$  i skup produkcija  $P$  grade se istovremeno, u ovisnosti o prijelazima potisnog automata.

Nezavršni znak  $[q_i A q_j]$  ima sljedeće značenje – potisni automat nalazi se u stanju  $q_i$ , a na vrhu stoga nalazi se znak  $A$ . Tijekom daljnjeg rada, potisni automat sa stoga skida znak  $A$  i nadomješta ga nizom znakova stoga  $\gamma$ . Nakon konačnog niza obavljenih prijelaza, potisni automat sa stoga skida sve znakove niza  $\gamma$  i završava u stanju  $q_j$ .

Navedeni zapis koristi se jer potisni automat niz prihvaća praznim stogom tako da gramatika koja simulira rad potisnog automata mora tijekom generiranja niza odsimulirati pražnjenje stoga.

Budući da je gramatika hijerarhijski organizirana (stablo) jedan nezavršni znak može predstavljati niz prijelaza i stanja tijekom kojih je sigurno samo da je automat krenuo iz stanja  $q_i$ , završio u stanju  $q_j$  i sa stoga skinuo znak  $A$  (uključujući i sve znakove stoga koji su se pojavili na stogu iznad znaka  $A$ ).

Na početku se uvode početne produkcije iz početnog nezavršnog znaka  $S$ , oblika  $[q_0 K q_i]$ ,  $\forall q_i \in Q$ :

$$\begin{aligned} S &\rightarrow [q_0 K q_0] \\ S &\rightarrow [q_0 K q_1] \end{aligned}$$

Potrebna je po jedna produkcija za svako stanje iz skupa  $Q$  jer potisni automat nizove prihvaća praznim stogom (zato se na početku zahtijeva skidanje znaka  $K$  sa stoga) pa PA nakon prihvaćanja niza može biti u bilo kojem stanju.



Daljnji nezavršni znakovi i produkcije gramatike grade se na osnovu prijelaza potisnog automata i sljedećeg pravila:

za prijelaz  $\delta(q_j, a, X) = (q_k, ABC...Z)$  uvode se sljedeći nezavršni znakovi i produkcije:

$$[q_j X q_e] \rightarrow a [q_k A q_f] [q_f B q_g] [q_g C q_h] \dots [q_i Z q_e]. \quad \forall q_e, q_f, q_g, q_h, q_i \in Q$$

ako je  $|Q|=n$  i  $|ABC...Z|=m$  onda iz jednog prijelaza nastaje  $n^m$  produkcija

posebni slučaj ako je  $m=0$  (formula vrijedi, ali produkcija je nešto drugačija):

$$\delta(q_j, a, X) = (q_k, \epsilon) \Rightarrow [q_j X q_k] \rightarrow a, \quad a \in T \cup \{\epsilon\}$$

Za prijelaz  $\delta(q_0, b, K) = (q_0, AK)$  uvode se sljedeće produkcije:

$$\begin{array}{ll} [q_0 K q_0] \rightarrow b [q_0 A q_0] [q_0 K q_0] & [q_0 K q_1] \rightarrow b [q_0 A q_0] [q_0 K q_1] \\ [q_0 K q_0] \rightarrow b [q_0 A q_1] [q_1 K q_0] & [q_0 K q_1] \rightarrow b [q_0 A q_1] [q_1 K q_1] \end{array}$$

Za prijelaz  $\delta(q_0, a, A) = (q_1, A)$  uvode se sljedeće produkcije:

$$\begin{array}{l} [q_0 A q_0] \rightarrow a [q_1 A q_0] \\ [q_0 A q_1] \rightarrow a [q_1 A q_1] \end{array}$$

Za prijelaz  $\delta(q_0, b, A) = (q_0, AA)$  uvode se sljedeće produkcije:

$$\begin{array}{ll} [q_0 A q_0] \rightarrow b [q_0 A q_0] [q_0 A q_0] & [q_0 A q_1] \rightarrow b [q_0 A q_0] [q_0 A q_1] \\ [q_0 A q_0] \rightarrow b [q_0 A q_1] [q_1 A q_0] & [q_0 A q_1] \rightarrow b [q_0 A q_1] [q_1 A q_1] \end{array}$$

Za prijelaz  $\delta(q_1, c, A) = (q_1, \epsilon)$  uvodi se sljedeća produkcija:

$$[q_1 A q_1] \rightarrow c$$

Za prijelaz  $\delta(q_1, \epsilon, K) = (q_1, \epsilon)$  uvodi se sljedeća produkcija:

$$[q_1 K q_1] \rightarrow \epsilon$$

Zadnje dvije produkcije imaju takav oblik jer se odgovarajućim prijelazima sa stoga samo skida trenutni znak, odnosno na stog se ne dodaje ništa.

Dobivena gramatika može imati mrtvih i nedohvatljivih nezavršnih znakova – pri tome se nezavršni znakovi koji nemaju nijednu produkciju smatraju mrtvima.

Ako se iz dobivene gramatike izbace mrtvi i nedohvatljivi znakovi dobije se sljedeći skup produkcija:

$$\begin{array}{l} S \rightarrow [q_0 K q_1] \\ [q_0 K q_1] \rightarrow b [q_0 A q_1] [q_1 K q_1] \\ [q_0 A q_1] \rightarrow b [q_0 A q_1] [q_1 A q_1] \\ [q_0 A q_1] \rightarrow a [q_1 A q_1] \\ [q_1 A q_1] \rightarrow c \\ [q_1 K q_1] \rightarrow \epsilon \end{array}$$

Dobivena gramatika je čitljivija ako se izvrši preimenovanje nezavršnih znakova  $[q_0 K q_1] \rightarrow A$ ,  $[q_0 A q_1] \rightarrow B$ ,  $[q_1 A q_1] \rightarrow C$  i  $[q_1 K q_1] \rightarrow D$

$$\begin{array}{lll} S \rightarrow A & B \rightarrow bBC & C \rightarrow c \\ A \rightarrow bBD & B \rightarrow aC & D \rightarrow \epsilon \end{array}$$