

Sveučilište u Zagrebu
Fakultet elektrotehnike i računarstva

James Bond

Druga domaća zadaća iz predmeta „Uvod u teoriju računarstva“

Zadatak broj 1034

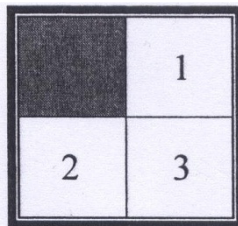
Zagreb, lipanj 2009.

Druga domaća zadaća iz predmeta „Uvod u teoriju računarstva“

Student: James Bond

Matični broj studenta: 007

Zadatak broj 1034: Na slici je prikazana slagalica koja se sastoji od četiri polja. Tri polja sadrže brojeve od 1 do 3, a četvrto polje je prazno. Polja slagalice mogu se pomicati lijevo, desno, gore i dolje u okvirima slagalice. Prikažite slagalicu konačnim automatom. Automat ulazi u prihvatljivo stanje ako su polja raspoređena kao na slici.



Uvod

Konačni automati su automati s konačnim brojem stanja. Osnovni i najjednostavniji model konačnog automata je deterministički konačni automat. Deterministički konačni automat (DKA) čini skup stanja i funkcije prijelaza. Funkciju prijelaza jednoznačno određuje znak na ulazu i stanje u kojem se nalazi automat. Za pojedini znak i stanje zadaje se samo jedan prijelaz. Jedno od stanja je početno stanje u kojem automat počinje s radom. Prijeđe li DKA nakon pročitanih svih znakova niza iz početnog stanja u jedno od prihvatljivih stanja, niz se prihvaća. DKA se prikazuje dijagramom stanja ili tablicom prijelaza.

DKA se formalno zadaje uređenom petorkom:

$$dka = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

pri čemu je:

- Q – konačan skup stanja;
- Σ – konačan skup ulaznih znakova;
- δ – funkcija prijelaza $Q \times \Sigma \rightarrow Q$;
- $q_0 \in Q$ – početno stanje;
- $F \subseteq Q$ – skup prihvatljivih stanja.

Funkcija prijelaza jednoznačno određuje prijelaz u iduće stanje:

$$NovoStanje = \delta(StaroStanje, UlazniZnak).$$

Za bilo koji par starog stanja i ulaznog znaka jednoznačno je određeno u koje stanje prelazi deterministički konačni automat.

DKA, dakle, čita znak po znak ulaznog niza te prelazi po stanjima definiranim tablicom prijelaza. Ukoliko automat završi u jednom od prihvatljivih stanja, ulazni niz se prihvaća. U suprotnom, ulazni niz se ne prihvaća. DKA ne daje nikakav izlaz, već samo informaciju od prihvatljivosti ulaznog niza.

Ostvarenje

Zadatak je opisati dotičnu slagalicu konačnim automatom. Za rješenje ovog zadatka dovoljan je DKA. Zadatak se možda čini jednostavnim, no dosta je problematično opisati i tako jednostavnu slagalicu konačnim automatom.

Automat slagalice formalno je zadan sljedećom uređenom petorkom:

$$dka = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

gdje je:

$Q = \{q_0, q_B, q_1, q_2, q_3, q_{B1}, q_{B2}, q_{B3}, q_{1B}, q_{12}, q_{13}, q_{2B}, q_{21}, q_{23}, q_{3B}, q_{31}, q_{32}, q_{B12}, q_{B13}, q_{B21}, q_{B23}, q_{B31}, q_{B32}, q_{1B2}, q_{1B3}, q_{12B}, q_{123}, q_{13B}, q_{132}, q_{2B1}, q_{2B3}, q_{21B}, q_{213}, q_{23B}, q_{231}, q_{3B1}, q_{3B2}, q_{31B}, q_{312}, q_{32B}, q_{321}, q_{B123}, q_{B132}, q_{B213}, q_{B231}, q_{B312}, q_{B321}, q_{1B23}, q_{1B32}, q_{12B3}, q_{123B}, q_{13B2}, q_{132B}, q_{2B13}, q_{2B31}, q_{21B3}, q_{213B}, q_{23B1}, q_{231B}, q_{3B12}, q_{3B21}, q_{31B2}, q_{312B}, q_{32B1}, q_{321B}\}$ – skup svih nja;

$\Sigma = \{B, 1, 2, 3, G, H, I, J, K, L, M, N\}$ – skup svih ulaznih znakova;

δ (pogledati tablicu prijelaza navedenu kasnije);

$q_0 = q_0$ – početno stanje;

$F = \{q_{B132}\}$ – prihvatljivo stanje.

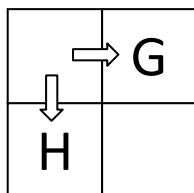
Indeksi stanja opisuju trenutnu konfiguraciju slagalice. Stanja se mogu podijeliti u tri skupine¹: stanja u kojima se čitaju znakovi početne konfiguracije slagalice, stanja u kojima se čitaju znakovi kojima se pomiču polja slagalice kako bi se ona riješila te stanje greške kao zasebna vrsta. Automat prvo čita početnu konfiguraciju slagalice znak po znak. Mogući znakovi su *B* za prazninu te *1*, *2* i *3* za pomična polja. Na početku se DKA nalazi u stanju q_0 . Čitajući znakove konfiguracije prelazi u stanja s indeksom od jednog pa dva znaka, zatim tri te konačno sva četiri znaka. Naravno pokrivene su sve moguće kombinacije početne konfiguracije slagalice. Važno je napomenuti da se kod ovih stanja čitaju samo navedena četiri znaka. Ostali znakovi nisu dozvoljeni te za njih automat prelazi u stanje greške, q_e . Na slici je pokazano što zapravo znači indeks stanja. Primjerice, ako se automat nalazi u stanju q_{31B2} , slagalica izgleda ovako:

| | |
|---|---|
| 3 | 1 |
| 2 | |

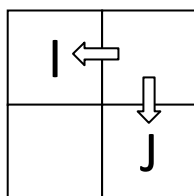
¹ U tablici prijelaza su te skupine označene različitim bojama.

Jednom kada su pročitana sva četiri znaka početne konfiguracije, automat se nalazi u stanju koje simulira početni izgled slagalice. Znakovima *G*, *H*, *I*, *J*, *K*, *L*, *M* i *N* se zatim može upravljati pojedinim poljima slagalice, tj. pomicati ih lijevo, desno, gore i dolje u okvirima slagalice.

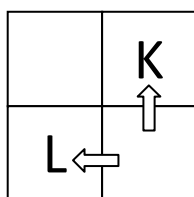
Znakom *G* pomiče se polje u gornjem lijevom kutu desno, a znakom *H* dolje.



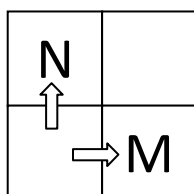
Znakom *I* pomiče se polje u gornjem desnom kutu lijevo, a znakom *J* dolje.



Znakom *K* pomiče se polje u donjem desnom kutu gore, a znakom *L* lijevo.



Znakom *M* pomiče se polje u donjem lijevom kutu desno, a znakom *N* gore.



Prijelazi su mogući ukoliko polje koje se miče nije prazno, tj. na njemu nije *B*, te ukoliko je polje na koje se miče prazno, dakle na njemu je *B*. U suprotnom, automat završava u stanju pogreške.

Cijela tablica prijelaza:

| δ | B | 1 | 2 | 3 | G | H | I | J | K | L | M | N | |
|----------|------|------|------|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | B | 1 | 2 | 3 | e | e | e | e | e | e | e | e | 0 |
| B | e | B1 | B2 | B3 | e | e | e | e | e | e | e | e | 0 |
| 1 | 1B | e | 12 | 13 | e | e | e | e | e | e | e | e | 0 |
| 2 | 2B | 21 | e | 23 | e | e | e | e | e | e | e | e | 0 |
| 3 | 3B | 31 | 32 | e | e | e | e | e | e | e | e | e | 0 |
| B1 | e | e | B12 | B13 | e | e | e | e | e | e | e | e | 0 |
| B2 | e | B21 | e | B23 | e | e | e | e | e | e | e | e | 0 |
| B3 | e | B31 | B32 | e | e | e | e | e | e | e | e | e | 0 |
| 1B | e | e | 1B2 | 1B3 | e | e | e | e | e | e | e | e | 0 |
| 12 | 12B | e | e | 123 | e | e | e | e | e | e | e | e | 0 |
| 13 | 13B | e | 132 | e | e | e | e | e | e | e | e | e | 0 |
| 2B | e | 2B1 | e | 2B3 | e | e | e | e | e | e | e | e | 0 |
| 21 | 21B | e | e | 213 | e | e | e | e | e | e | e | e | 0 |
| 23 | 23B | 231 | e | e | e | e | e | e | e | e | e | e | 0 |
| 3B | e | 3B1 | 3B2 | e | e | e | e | e | e | e | e | e | 0 |
| 31 | 31B | e | 312 | e | e | e | e | e | e | e | e | e | 0 |
| 32 | 32B | 321 | e | e | e | e | e | e | e | e | e | e | 0 |
| B12 | e | e | e | B123 | e | e | e | e | e | e | e | e | 0 |
| B13 | e | e | B132 | e | e | e | e | e | e | e | e | e | 0 |
| B21 | e | e | e | B213 | e | e | e | e | e | e | e | e | 0 |
| B23 | e | B231 | e | e | e | e | e | e | e | e | e | e | 0 |
| B31 | e | e | B312 | e | e | e | e | e | e | e | e | e | 0 |
| B32 | e | B321 | e | e | e | e | e | e | e | e | e | e | 0 |
| 1B2 | e | e | e | 1B23 | e | e | e | e | e | e | e | e | 0 |
| 1B3 | e | e | 1B32 | e | e | e | e | e | e | e | e | e | 0 |
| 12B | e | e | e | 12B3 | e | e | e | e | e | e | e | e | 0 |
| 123 | 123B | e | e | e | e | e | e | e | e | e | e | e | 0 |
| 13B | e | e | 13B2 | e | e | e | e | e | e | e | e | e | 0 |
| 132 | 132B | e | e | e | e | e | e | e | e | e | e | e | 0 |
| 2B1 | e | e | e | 2B13 | e | e | e | e | e | e | e | e | 0 |
| 2B3 | e | 2B31 | e | e | e | e | e | e | e | e | e | e | 0 |
| 21B | e | e | e | 21B3 | e | e | e | e | e | e | e | e | 0 |
| 213 | 213B | e | e | e | e | e | e | e | e | e | e | e | 0 |
| 23B | e | 23B1 | e | e | e | e | e | e | e | e | e | e | 0 |

| | | | | | | | | | | | | | |
|------|------|------|------|---|------|------|------|------|------|------|------|------|---|
| 231 | 231B | e | e | e | e | e | e | e | e | e | e | e | 0 |
| 3B1 | e | e | 3B12 | e | e | e | e | e | e | e | e | e | 0 |
| 3B2 | e | 3B21 | e | e | e | e | e | e | e | e | e | e | 0 |
| 31B | e | e | 31B2 | e | e | e | e | e | e | e | e | e | 0 |
| 312 | 312B | e | e | e | e | e | e | e | e | e | e | e | 0 |
| 32B | e | 32B1 | e | e | e | e | e | e | e | e | e | e | 0 |
| 321 | 321B | e | e | e | e | e | e | e | e | e | e | e | 0 |
| B123 | e | e | e | e | e | e | 1B23 | e | e | e | e | 312B | 0 |
| B132 | e | e | e | e | e | e | 1B32 | e | e | e | e | 213B | 1 |
| B213 | e | e | e | e | e | e | 2B13 | e | e | e | e | 321B | 0 |
| B231 | e | e | e | e | e | e | 2B31 | e | e | e | e | 123B | 0 |
| B312 | e | e | e | e | e | e | 3B12 | e | e | e | e | 231B | 0 |
| B321 | e | e | e | e | e | e | 3B21 | e | e | e | e | 132B | 0 |
| 1B23 | e | e | e | e | B123 | e | e | e | 12B3 | e | e | e | 0 |
| 1B32 | e | e | e | e | B132 | e | e | e | 13B2 | e | e | e | 0 |
| 12B3 | e | e | e | e | e | e | e | 1B23 | e | e | 123B | e | 0 |
| 123B | e | e | e | e | e | B231 | e | e | e | 12B3 | e | e | 0 |
| 13B2 | e | e | e | e | e | e | e | 1B32 | e | e | 132B | e | 0 |
| 132B | e | e | e | e | e | B321 | e | e | e | 13B2 | e | e | 0 |
| 2B13 | e | e | e | e | B213 | e | e | e | 21B3 | e | e | e | 0 |
| 2B31 | e | e | e | e | B231 | e | e | e | 23B1 | e | e | e | 0 |
| 21B3 | e | e | e | e | e | e | e | 2B13 | e | e | 213B | e | 0 |
| 213B | e | e | e | e | e | B132 | e | e | e | 21B3 | e | e | 0 |
| 23B1 | e | e | e | e | e | e | e | 2B31 | e | e | 231B | e | 0 |
| 231B | e | e | e | e | e | B312 | e | e | e | 23B1 | e | e | 0 |
| 3B12 | e | e | e | e | B312 | e | e | e | 31B2 | e | e | e | 0 |
| 3B21 | e | e | e | e | B321 | e | e | e | 32B1 | e | e | e | 0 |
| 31B2 | e | e | e | e | e | e | e | 3B12 | e | e | 312B | e | 0 |
| 312B | e | e | e | e | e | B123 | e | e | e | 31B2 | e | e | 0 |
| 32B1 | e | e | e | e | e | e | e | 3B21 | e | e | 321B | e | 0 |
| 321B | e | e | e | e | e | B213 | e | e | e | 32B1 | e | e | 0 |
| e | e | e | e | e | e | e | e | e | e | e | e | e | 0 |

Napomena: radi jednostavnosti prikaza stanja su označena bez q, primjerice q_{31B2} je samo 31B2.

Na konkretnom primjeru može se bolje pokazati kako slagalica, odnosno automat, funkcionira. Neka se slagalica na početku nalazi u konfiguraciji 21B3.

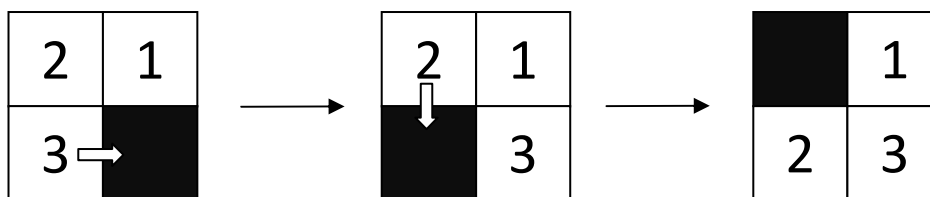
| | |
|---|---|
| 2 | 1 |
| 3 | |

Za početak ulazni su znakovi redom 2, 1, B i 3. Automat se kreće po sljedećim stanjima:

2 1 B 3

$q_0 \rightarrow q_2 \rightarrow q_{21} \rightarrow q_{21B} \rightarrow q_{21B3}$

Sada se automat nalazi u početnoj konfiguraciji, tj. u stanju q_{21B3} . Uz određene ulazne znakove G, H, I, J, K, L, M te N automat će prelaziti po stanjima simulirajući pomake pojedinih polja slagalice. U tekstu zadatka definirano je da je automat u prihvatljivom stanju ako se nalazi u konfiguraciji sa slike, odnosno u B132 konfiguraciji. Želimo primjerice da automat završi u prihvatljivom stanju, dakle želimo „riješiti“ slagalicu. Na stvarnoj bi se slagalici radili sljedeći pomaci:



Automat će raditi sljedeće prijelaze:

M H

$q_{21B3} \rightarrow q_{213B} \rightarrow q_{B132}$

Automat završava u prihvatljivom stanju, slagalica je riješena. Ovaj je primjer podijeljen na dva dijela. Sveukupno bi za ovaj primjer ulazni niz trebao biti 21B3MH, a automat bi radio sljedeće prijelaze:

2 1 B 3 M H

$q_0 \rightarrow q_2 \rightarrow q_{21} \rightarrow q_{21B} \rightarrow q_{21B3} \rightarrow q_{213B} \rightarrow q_{B132}$

Pošto je slagalica vrlo mala, određenim početnim konfiguracijama se nikako ne može doći u prihvatljivo stanje (primjerice uz konfiguraciju B123 ili 312B). U takvim slučajevima će se automat vrtiti u krug uz određene ulazne znakove i uvijek biti u neprihvatljivim stanjima. Slagalica neće biti riješena.

Zaključak

Zadatak je bio opisati jednostavnu slagalicu konačnim automatom. Za rješenje odabran je najjednostavniji oblik konačnog automata, deterministički konačni automat, DKA. Slagalice je jednostavna, veličine tek 2x2 polja, no pokazala se vrlo teškom za opisati konačnim automatom zbog njegovih ograničenja. Broj stanja i prijelaza ispao je velik, ali se tako najbolje vidi ideja i realizacija.

Automat prvo čita početnu konfiguraciju slagalice, a zatim određenim ulaznim znakovima simulira pomicanje polja slagalice, odnosno njezino rješavanje. DKA ima ograničenje da se za svako stanje mora definirati prijelaz u neko novo ili isto stanje. Zbog toga je bilo nužno uvesti stanje greške, iz kojeg automat ne izlazi. Konačno, automat ne riješava slagalicu sam, već se njime upravlja ulaznim znakovima.