



Sveučilište u Zagrebu  
Fakultet elektrotehnike i računarstva  
Zavod za elektroniku, mikroelektroniku, računalne i inteligentne sustave

Andro Milanović, Dejan Škvorc

# **Uvod u teoriju računarstva**

## **Zadaci za vježbu**

Zagreb, lipanj 2008.

27. Konstruirati Turingov stroj u osnovnom obliku koji oduzima dva binarna broja zapisana na traci. Najznačajnija znamenka je lijevo, a brojevi su odvojeni znakom -. Drugi broj se oduzima od prvog pri čemu prvi broj sigurno nije manji od drugog. Glava se nalazi na početku ulaznog niza, a s obje strane ulaznog niza nalaze se praznine.

TS  $M=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,B,q_9)$

$Q=\{q_0,q_1,q_2,q_3,q_4,q_5,q_6,q_7,q_8,q_9\}$ ,  $\Sigma=\{0,1,-\}$ ,  $\Gamma=\{0,1,-,N,J,B\}$

	0	1	-	N	J	B
$q_0$	$q_0,0,R$	$q_0,1,R$	$q_0,-,R$	$q_0,N,R$	$q_0,J,R$	$q_1,B,L$
$q_1$	$q_2,B,L$	$q_3,B,L$	$q_7,B,L$	-	-	-
$q_2$	$q_2,0,L$	$q_2,1,L$	$q_4,-,L$	-	-	-
$q_3$	$q_3,0,L$	$q_3,1,L$	$q_5,-,L$	-	-	-
$q_4$	$q_0,N,R$	$q_0,J,R$	-	$q_4,N,L$	$q_4,J,L$	-
$q_5$	$q_6,J,L$	$q_0,N,R$	-	$q_5,N,L$	$q_5,J,L$	-
$q_6$	$q_6,1,L$	$q_0,0,R$	-	-	-	-
$q_7$	$q_7,0,L$	$q_7,1,L$	-	$q_7,0,L$	$q_7,1,L$	$q_8,B,R$
$q_8$	$q_8,B,R$	$q_9,1,L$	-	-	-	$q_9,0,L$

	1	0	0	1	1	0	-	1	0	1	0	
→	$q_0$	$q_0$	$q_0$	$q_0$	$q_0$	$q_0$	$q_0$	$q_0$	$q_0$	$q_0$	$q_0$	$q_0$
						$q_4$	$q_2$	$q_2$	$q_2$	$q_2$	$q_1$	←
	1	0	0	1	1	N	-	1	0	1	0	
						→	$q_0$	$q_0$	$q_0$	$q_0$	$q_0$	
					$q_5$	$q_5$	$q_3$	$q_3$	$q_3$	$q_1$	←	
	1	0	0	1	N	N	-	1	0	1	0	
					→	$q_0$	$q_0$	$q_0$	$q_0$	$q_0$		
				$q_4$	$q_4$	$q_4$	$q_2$	$q_2$	$q_1$	←		
	1	0	0	J	N	N	-	1	0	1	0	
				→	$q_0$	$q_0$	$q_0$	$q_0$	$q_0$			
			$q_5$	$q_5$	$q_5$	$q_5$	$q_3$	$q_1$	←			
	1	0	J	J	N	N	-					
		$q_6$	←									
	1	1	J	J	N	N	-					
	$q_6$											
	0	1	J	J	N	N	-					
	→	$q_0$	$q_0$	$q_0$	$q_0$	$q_0$	$q_0$	$q_0$				
							$q_1$	←				
	0	1	J	J	N	N						
						$q_7$	←					
	0	1	1	1	0	0						
$q_7$	$q_7$	$q_7$	$q_7$	$q_7$	$q_7$	←						
→	$q_8$	$q_8$										
	$q_9$	←										

- 28. Konstruirati Turingov stroj koji redom generira sve potencije broja 2. Vrijednost jednog broja na traci je zapisana odgovarajućim brojem jedinica. Na ulaznoj traci Turingovog stroja na početku je zapisan niz \$1. Brojevi su međusobno odvojeni graničnikom \$. S obje strane ulaznog niza nalaze se praznine.**

TS  $M=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,B,F)$  – Turingov stroj s dva traga

$Q=\{q_0,q_1,q_2,q_3,q_4\}$ ,  $\Sigma=\{\$,1\}$ ,  $\Gamma=\{[\$,B],[1,B],[1,*],[B,B]\}$ ,  $B=[B,B]$ ,  $F=\emptyset$

	[1,B]	[B,B]	[\$,B]	[1,*]
$q_0$	$q_1,[1,*],R$	-	$q_0,[\$,B],R$	-
$q_1$	$q_1,[1,B],R$	$q_2,[\$,B],R$	$q_2,[\$,B],R$	-
$q_2$	$q_2,[1,B],R$	$q_3,[1,B],R$	-	-
$q_3$	-	$q_4,[1,B],L$	-	-
$q_4$	$q_4,[1,B],L$	-	$q_4,[\$,B],L$	$q_0,[1,*],R$

primjer rada automata:

	\$	1	\$	1	1	\$	1	1	1	1	\$	1	1	1	1	1	1	1
		*		*	*		*	*	*	*								
→	$q_0$	$q_0$	$q_1$	$q_2$	$q_3$													
		$q_4$	$q_4$	$q_4$	←													
		→	$q_5$	$q_0$	$q_1$	$q_1$	$q_2$	$q_3$										
				$q_4$	$q_4$	$q_4$	$q_4$	←										
				→	$q_5$	$q_5$	$q_2$	$q_2$	$q_2$	$q_3$								
					$q_4$	$q_4$	$q_4$	$q_4$	$q_4$	←								
					→	$q_5$	$q_0$	$q_1$	$q_1$	$q_1$	$q_1$	$q_2$	$q_3$					
						$q_4$	$q_4$	$q_4$	$q_4$	$q_4$	$q_4$	$q_4$	$q_4$	←				
						→	$q_5$	$q_6$	$q_6$	$q_6$	$q_6$	$q_2$	$q_2$	$q_2$	$q_3$			
							$q_4$	$q_4$	$q_4$	$q_4$	$q_4$	$q_4$	$q_4$	$q_4$	$q_4$	←		
							→	$q_5$	$q_6$	$q_6$	$q_6$	$q_2$	$q_2$	$q_2$	$q_2$	$q_2$	$q_3$	
								$q_4$	$q_4$	$q_4$	$q_4$	$q_4$	$q_4$	$q_4$	$q_4$	$q_4$	$q_4$	$q_3$
								→	$q_5$	$q_6$	$q_6$	$q_2$	$q_2$	$q_2$	$q_2$	$q_2$	$q_4$	←
									$q_4$	$q_4$	$q_4$	$q_4$	$q_4$	$q_4$	$q_4$	$q_4$	$q_4$	
									→	$q_5$	$q_0$	itd.						

- 29. Konstruirati Turingov stroj koji prihvaća nizove iz jezika  $L=\{w \in (a+b+c)^* \mid n_a=n_b=n_c\}$ . Nakon što Turingov stroj završi s radom stanje na traci mora biti isto kao početno. S obje strane ulaznog niza nalaze se praznine.**

TS  $M=(\{q_0,q_a,q_b,q_c,q_{bc},q_{ac},q_{ab},q_v,q_{pc},q_{oc},q_p\},\{a,b,c\},\{a,b,c,A,B,C,P\},\delta,q_0,P,q_p)$

	a	b	c	A	B	C	P
$q_0$	$q_a,A,R$	$q_b,B,R$	$q_c,C,R$	$q_0,A,R$	$q_0,B,R$	$q_0,C,R$	$q_{pc},P,L$
$q_a$	$q_a,a,R$	$q_{ab},B,R$	$q_{ac},C,R$	$q_a,A,R$	$q_a,B,R$	$q_a,C,R$	$q_{oc},P,L$
$q_b$	$q_{ab},A,R$	$q_b,b,R$	$q_{bc},C,R$	$q_b,A,R$	$q_b,B,R$	$q_b,C,R$	$q_{oc},P,L$
$q_c$	$q_{ac},A,R$	$q_{bc},B,R$	$q_c,c,R$	$q_c,A,R$	$q_c,A,R$	$q_c,A,R$	$q_{oc},P,L$
$q_{bc}$	$q_v,A,L$	$q_{bc},b,R$	$q_{bc},c,R$	$q_{bc},A,R$	$q_{bc},B,R$	$q_{bc},C,R$	$q_{oc},P,L$
$q_{ac}$	$q_{ac},a,R$	$q_v,B,L$	$q_{ac},c,R$	$q_{ac},A,R$	$q_{ac},B,R$	$q_{ac},C,R$	$q_{oc},P,L$
$q_{ab}$	$q_{ac},a,R$	$q_{ac},b,R$	$q_v,C,L$	$q_{ab},A,R$	$q_{ab},B,R$	$q_{ab},C,R$	$q_{oc},P,L$
$q_v$	$q_v,a,L$	$q_v,b,L$	$q_v,c,L$	$q_v,A,L$	$q_v,B,L$	$q_v,C,L$	$q_0,P,R$
$q_{oc}$	$q_{oc},a,L$	$q_{oc},b,L$	$q_{oc},c,L$	$q_{oc},a,L$	$q_{oc},b,L$	$q_{oc},c,L$	-
$q_{pc}$	-	-	-	$q_{pc},a,L$	$q_{pc},b,L$	$q_{pc},c,L$	$q_p,P,R$

**30. Konstruirati gramatiku koja generira nizove iz jezika  $L = \{w \in (a+b+c)^* \mid n_a \neq n_b, n_a \neq n_c, n_b \neq n_c\}$ .**

$S \rightarrow ABCS$	$T \rightarrow ABT$	$X \rightarrow AX$	$AB \rightarrow BA$	$A \rightarrow a$
$S \rightarrow ABT$	$T \rightarrow AX$	$X \rightarrow \varepsilon$	$AC \rightarrow CA$	$B \rightarrow b$
$S \rightarrow ACU$	$T \rightarrow BY$	$Y \rightarrow BY$	$BC \rightarrow CB$	$C \rightarrow c$
$S \rightarrow BCV$	$U \rightarrow ACU$	$Y \rightarrow \varepsilon$	$BA \rightarrow AB$	
	$U \rightarrow AX$	$Z \rightarrow CZ$	$CA \rightarrow AC$	
	$U \rightarrow CZ$	$Z \rightarrow \varepsilon$	$CB \rightarrow BC$	
	$V \rightarrow BCV$			
	$V \rightarrow BY$			
	$V \rightarrow CZ$			

**31. Konstruirati gramatiku koja generira nizove oblika  $a^i b^j c^k d^i e^j$  pri čemu su  $i, j, k \geq 1$ .**

gramatika sa neograničenim produkcijama

$S \rightarrow aAbBcCde$	$B \rightarrow bBE$	$Db \rightarrow bD$	$Ec \rightarrow cE$
$A \rightarrow aAD$	$B \rightarrow \varepsilon$	$Dc \rightarrow cD$	$Ed \rightarrow dE$
$A \rightarrow \varepsilon$	$C \rightarrow cC$	$Dd \rightarrow dd$	$Ee \rightarrow ee$
	$C \rightarrow \varepsilon$		

primjer generiranja niza aabbccdde

$S \rightarrow aAbBcCde \rightarrow aaADbBcCde \rightarrow aaDbBcCde \rightarrow aaDbbBEcCde \rightarrow aaDbbEcCde \rightarrow aaDbbEccCde \rightarrow$   
 $\rightarrow aaDbbEccde \rightarrow aaDbbcEcde \rightarrow aaDbbccEde \rightarrow aaDbbccdEe \rightarrow aaDbbccdee \rightarrow aabDbbccdee \rightarrow$   
 $\rightarrow aabbDccdee \rightarrow aabbccDcdee \rightarrow aabbccDdee \rightarrow aabbccdde$

**32. Pretvoriti zadanu gramatiku s neograničenim produkcijama u kontekstno ovisnu gramatiku.**

$S \rightarrow aAbBcCde$	$B \rightarrow bBE$	$C \rightarrow cC$	$Db \rightarrow bD$	$Ec \rightarrow cE$
$A \rightarrow aAD$	$B \rightarrow \varepsilon$	$C \rightarrow \varepsilon$	$Dc \rightarrow cD$	$Ed \rightarrow dE$
$A \rightarrow \varepsilon$			$Dd \rightarrow dd$	$Ee \rightarrow ee$

rješenje koje se temelji na općenitijem postupku pretvorbe (svi nezavršni znakovi moraju biti grupirani s nekim završnim znakom)

$S \rightarrow [aA][bB][cC]de$	$[bB] \rightarrow b[bBE]$	$[Db] \rightarrow [bD]$	$[Ec] \rightarrow [cE]$
$[aA] \rightarrow a[aAD]$	$[bB] \rightarrow b$	$[bD]b \rightarrow b[Db]$	$[cE]c \rightarrow c[Ec]$
$[aA] \rightarrow a$	$[bBE]c \rightarrow [bB][Ec]$	$[bD]c \rightarrow b[Dc]$	$[cE]d \rightarrow c[Ed]$
$[aAD]b \rightarrow [aA][Db]$	$[cC] \rightarrow c[cC]$	$[Dc] \rightarrow [cD]$	$[Ed] \rightarrow [dE]$
	$[cC] \rightarrow c$	$[cD]c \rightarrow c[Dc]$	$[dE]d \rightarrow d[Ed]$
		$[cD]d \rightarrow cdd$	$[dE]e \rightarrow dee$

ako se gornji postupak provede samo za prazne nezavršne znakove, dobije se nešto kraće rješenje (isto rješenje dobije se i uklanjanjem  $\varepsilon$  produkcija!)

$S \rightarrow [aA][bB][cC]de$	$[bB] \rightarrow b[bB]E$	$[cC] \rightarrow c[cC]$	$Db \rightarrow bD$	$Ec \rightarrow cE$
$[aA] \rightarrow a[aA]D$	$[bB] \rightarrow b$	$[cC] \rightarrow c$	$Dc \rightarrow cD$	$Ed \rightarrow dE$
$[aA] \rightarrow a$			$Dd \rightarrow dd$	$Ee \rightarrow ee$

**33. Konstruirati gramatiku koja generira nizove oblika  $0^n 1^n 2^n$  pri čemu je  $n \geq 0$ .**

$S \rightarrow 0A12$	$A \rightarrow 0AB$	$B1 \rightarrow 11C$
$S \rightarrow \varepsilon$	$A \rightarrow \varepsilon$	$C1 \rightarrow 1C$
		$C2 \rightarrow 22$

**34. Konstruirati kontekstno ovisnu gramatiku koja generira nizove iz jezika  $L=\{0^n 1^n 2^n \mid n \geq 1\}$ .**

$$\begin{array}{ll} S \rightarrow AX & BX \rightarrow 12 \\ A \rightarrow 0AB & B1 \rightarrow 1B \\ A \rightarrow 0B & B2 \rightarrow 122 \end{array}$$

**35. Konstruirati gramatiku koja generira nizove iz jezika koji prihvaća TS  $M=(\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_P\}, \{0, 1\}, \{0, 1, B\}, \delta, q_0, B, q_P)$ .**

	0	1	B
$q_0$	$q_1, B, R$	$q_2, B, R$	$q_P, B, R$
$q_1$	$q_1, 0, R$	$q_1, 1, R$	$q_3, B, L$
$q_2$	$q_2, 0, R$	$q_2, 1, R$	$q_4, B, L$
$q_3$	$q_5, B, L$	-	-
$q_4$	-	$q_5, B, L$	-
$q_5$	$q_5, 0, L$	$q_5, 1, L$	$q_0, B, R$

$$G=(V, \{0, 1\}, P, A_1)$$

početne produkcije:

$$\begin{array}{lll} A_1 \rightarrow q_0 A_2 & A_2 \rightarrow [0, 0] A_2 & A_3 \rightarrow [\varepsilon, B] A_3 \\ & A_2 \rightarrow [1, 1] A_2 & A_3 \rightarrow \varepsilon \\ & A_2 \rightarrow A_3 & \end{array}$$

za prijelaz  $\delta(q_0, 0)=(q_1, B, R)$ :

$$q_0[0, 0] \rightarrow [0, B] q_1$$

za prijelaz  $\delta(q_0, 1)=(q_2, B, R)$ :

$$q_0[1, 1] \rightarrow [1, B] q_2$$

za prijelaz  $\delta(q_0, B)=(q_P, B, R)$ :

$$q_0[0, B] \rightarrow [0, B] q_P \quad q_0[1, B] \rightarrow [1, B] q_P \quad q_0[\varepsilon, B] \rightarrow [\varepsilon, B] q_P$$

za prijelaz  $\delta(q_1, 0)=(q_1, 0, R)$ :

$$q_1[0, 0] \rightarrow [0, 0] q_1$$

za prijelaz  $\delta(q_1, 1)=(q_1, 1, R)$ :

$$q_1[1, 1] \rightarrow [1, 1] q_1$$

za prijelaz  $\delta(q_1, B)=(q_3, B, L)$ :

$$\begin{array}{ll} [0, 0] q_1 [0, B] \rightarrow q_3 [0, 0] [0, B] & [0, B] q_1 [0, B] \rightarrow q_3 [0, B] [0, B] \\ [0, 0] q_1 [1, B] \rightarrow q_3 [0, 0] [1, B] & [0, B] q_1 [1, B] \rightarrow q_3 [0, B] [1, B] \\ [0, 0] q_1 [\varepsilon, B] \rightarrow q_3 [0, 0] [\varepsilon, B] & [0, B] q_1 [\varepsilon, B] \rightarrow q_3 [0, B] [\varepsilon, B] \\ [1, 1] q_1 [0, B] \rightarrow q_3 [1, 1] [0, B] & [1, B] q_1 [0, B] \rightarrow q_3 [1, B] [0, B] \\ [1, 1] q_1 [1, B] \rightarrow q_3 [1, 1] [1, B] & [1, B] q_1 [1, B] \rightarrow q_3 [1, B] [1, B] \\ [1, 1] q_1 [\varepsilon, B] \rightarrow q_3 [1, 1] [\varepsilon, B] & [1, B] q_1 [\varepsilon, B] \rightarrow q_3 [1, B] [\varepsilon, B] \end{array}$$

za prijelaz  $\delta(q_2, 0)=(q_2, 0, R)$ :

$$q_2[0, 0] \rightarrow [0, 0] q_2$$

za prijelaz  $\delta(q_2, 1)=(q_2, 1, R)$ :

$$q_2[1, 1] \rightarrow [1, 1] q_2$$

za prijelaz  $\delta(q_2, B) = (q_4, B, L)$ :

$[0, 0]q_2[0, B] \rightarrow q_4[0, 0][0, B]$	$[0, B]q_2[0, B] \rightarrow q_4[0, B][0, B]$
$[0, 0]q_2[1, B] \rightarrow q_4[0, 0][1, B]$	$[0, B]q_2[1, B] \rightarrow q_4[0, B][1, B]$
$[0, 0]q_2[\varepsilon, B] \rightarrow q_4[0, 0][\varepsilon, B]$	$[0, B]q_2[\varepsilon, B] \rightarrow q_4[0, B][\varepsilon, B]$
$[1, 1]q_2[0, B] \rightarrow q_4[1, 1][0, B]$	$[1, B]q_2[0, B] \rightarrow q_4[1, B][0, B]$
$[1, 1]q_2[1, B] \rightarrow q_4[1, 1][1, B]$	$[1, B]q_2[1, B] \rightarrow q_4[1, B][1, B]$
$[1, 1]q_2[\varepsilon, B] \rightarrow q_4[1, 1][\varepsilon, B]$	$[1, B]q_2[\varepsilon, B] \rightarrow q_4[1, B][\varepsilon, B]$

za prijelaz  $\delta(q_3, 0) = (q_5, B, L)$ :

$[0, 0]q_3[0, 0] \rightarrow q_5[0, 0][0, B]$	$[0, B]q_3[0, 0] \rightarrow q_5[0, B][0, B]$
$[1, 1]q_3[0, 0] \rightarrow q_5[1, 1][0, B]$	$[1, B]q_3[0, 0] \rightarrow q_5[1, B][0, B]$

za prijelaz  $\delta(q_4, 1) = (q_5, B, L)$ :

$[0, 0]q_4[1, 1] \rightarrow q_5[0, 0][1, B]$	$[0, B]q_4[1, 1] \rightarrow q_5[0, B][1, B]$
$[1, 1]q_4[1, 1] \rightarrow q_5[1, 1][1, B]$	$[1, B]q_4[1, 1] \rightarrow q_5[1, B][1, B]$

za prijelaz  $\delta(q_5, 0) = (q_5, 0, L)$ :

$[0, 0]q_5[0, 0] \rightarrow q_5[0, 0][0, 0]$	$[0, B]q_5[0, 0] \rightarrow q_5[0, B][0, 0]$
$[1, 1]q_5[0, 0] \rightarrow q_5[1, 1][0, 0]$	$[1, B]q_5[0, 0] \rightarrow q_5[1, B][0, 0]$

za prijelaz  $\delta(q_5, 1) = (q_5, 1, L)$ :

$[0, 0]q_5[1, 1] \rightarrow q_5[0, 0][1, 1]$	$[0, B]q_5[1, 1] \rightarrow q_5[0, B][1, 1]$
$[1, 1]q_5[1, 1] \rightarrow q_5[1, 1][1, 1]$	$[1, B]q_5[1, 1] \rightarrow q_5[1, B][1, 1]$

za prijelaz  $\delta(q_5, B) = (q_0, B, R)$ :

$$q_5[0, B] \rightarrow [0, B]q_0 \quad q_5[1, B] \rightarrow [1, B]q_0$$

završni prijelazi za prihvatanje niza:

$[0, B]q_P \rightarrow q_P 0 q_P$	$q_P[0, B] \rightarrow q_P 0 q_P$	$q_P \rightarrow \varepsilon$
$[1, B]q_P \rightarrow q_P 1 q_P$	$q_P[1, B] \rightarrow q_P 1 q_P$	
$[\varepsilon, B]q_P \rightarrow q_P$	$q_P[\varepsilon, B] \rightarrow q_P$	