

Sveučilište u Zagrebu
Fakultet elektrotehnike i računarstva

Xxxxxxx Yyyyyyy

Druga domaća zadaća iz predmeta “Uvod u teoriju računarstva”

Zadatak broj 3016

Zagreb, lipanj 2009.

Druga domaća zadaća iz predmeta “Uvod u teoriju računarstva”

Student: XXXXXXX YYYYYY

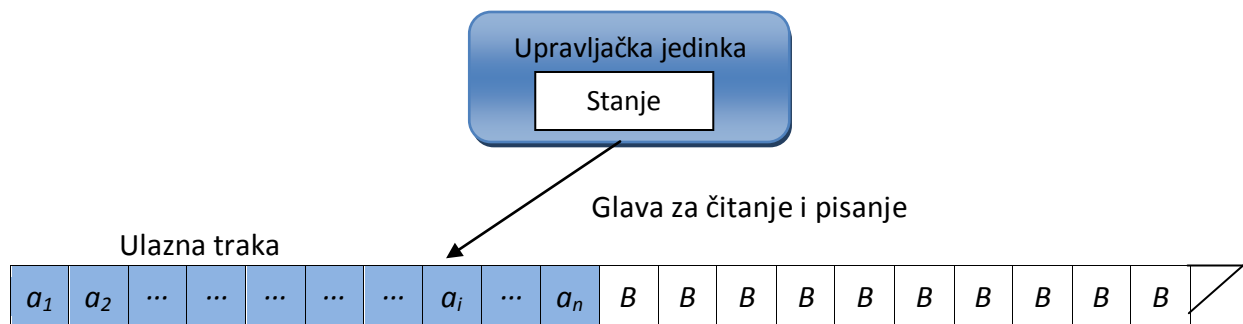
Matični broj studenta: 0036XXXXXX

Zadatak broj 3016: Konstruirati Turingov stroj koji izračunava cjelobrojni polinom po izboru korisnika. Kao ulazni niz zadaju se dana vrijednost varijable, stupanj polinoma n te $n+1$ koeficijenata polinoma (nizovi 0 kojima duljina predstavlja vrijednost) odvojenih nekim separatorom po izboru. Rezultat je vrijednost zadanog polinoma za zadanu vrijednost varijable. Implementirati stroj na računalu.

Uvod

Turingov stroj (TS) je najopćenitiji poznati matematički model računanja. Bez obzira na njegovu jednostavnost TS ima iste mogućnosti računanja kao bilo koje digitalno računalo. Postoji više modela Turingova stroja, a svi se izводе proširivanjem osnovnog modela TS. Osnovni model TS se sastoji od upravljačke jedinice (jedinke), ulazne trake i glave za čitanje i pisanje. Upravljačka se jedinica nalazi u jednom od konačnog broja stanja. Skup stanja TS se sastoji od dva podskupa; skupa prihvatljivih stanja i skupa neprihvatljivih stanja. Ulazna traka TS je podijeljena na ćelije, tj. sastoji se od ćelija koje sadrže znakove trake. Traka ima krajnju lijevu ćeliju, dok je na desnu stranu beskonačna, tj. ima beskonačno mnogo ćelija. Glava za čitanje i pisanje, u skladu sa nazivom, služi za čitanje znakova sa trake i pisanje znakova na traku. TS nakon čitanja znaka s trake mora i zapisati znak na traku. To može biti znak koji je (prethodno) bio pročitani ili neki drugi znak. Glava TS se može pomicati u lijevo ili u desno. Jedina iznimka je slučaj kada glava pokazuje na prvu tj. krajnje lijevu ćeliju trake. Ona se tada ne može pomaknuti u lijevo, već samo u desno. Na početku rada TS n krajnje lijevih ćelija ulazne trake sadrži znakove niza w ($|w| = n, n \geq 0$). Ostatak ćelija trake je prazan. Prazne ćelije se označavaju znakom B .

Osnovni model TS je prikazan na slici 1. Znakovi niza w su označeni slovom a i indeksom i .



Slika 1: Osnovni model TS

Tijekom rada TS njegova upravljačka jedinica, na temelju stanja u kojem se nalazi i znaka koji je pročitani s trake, donosi odluku o tome u koje će novo stanje prijeći, koji će znak biti zapisan na traku na mjesto pročitaniog znaka i u koju će se stranu pomaknuti glava za čitanje i pisanje. Donošenje odluke od strane upravljačke jedinice se formalno zapisuje funkcijama prijelaza.

TS se formalno zadaje uređenom sedmorkom:

$$TS = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$$

gdje je:

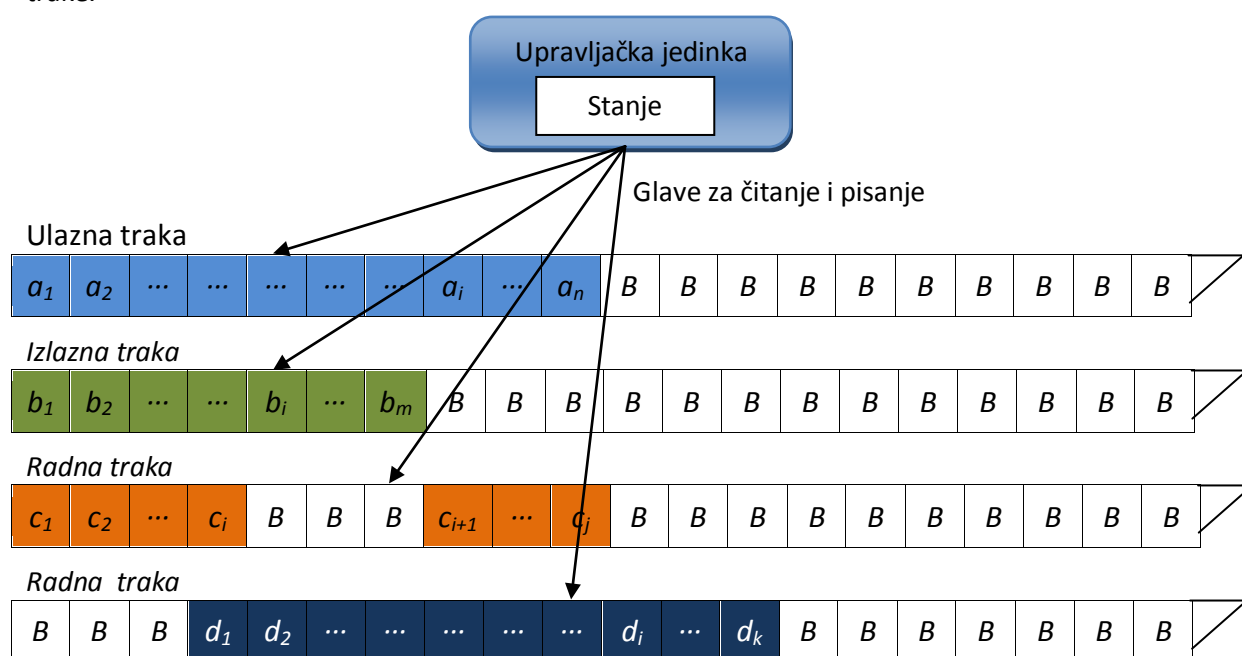
- Q - konačan skup stanja;
- $\Sigma \subseteq (\Gamma - \{B\})$ - konačan skup ulaznih znakova;
- Γ - konačan skup znakova trake;
- δ - funkcija prijelaza, $\delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R\}$, gdje L i R označavaju pomak glave u lijevo i u desno, respektivno;
- $q_0 \in Q$ - početno stanje;
- $B \in \Gamma$ - znak kojim se označava prazna ćelija;
- $F \subseteq Q$ - skup prihvatljivih stanja.

Γ tj. konačan skup znakova trake se sastoji od znakova ulaznog niza i znakova koje TS zapisuje na traku, ali koji nisu dio ulaznog niza (npr. B). Zato se skup ulaznih znakova definira: $\Sigma \subseteq (\Gamma - \{B\})$, pošto sigurno ne sadrži znak B .

Što se tiče funkcija prijelaza dozvoljeno je da δ bude nedefinirana za pojedine argumente. Ako za neko stanje nije definiran odgovarajući prijelaz, rad TS se zaustavlja. Ako je stanje u kojem se TS zaustavio prihvatljivo (tj. ako se nalazi u skupu prihvatljivih stanja) ulazni niz se prihvaća. U suprotnom slučaju (ako stanje nije prihvatljivo) ulazni niz se ne prihvaća.

Za dotični zadatak odabran je prošireni model TS s višestrukim polubeskonačnim (desna strana je beskonačna) trakama radi jednostavnijeg, a time i bržeg izračunavanja cjelobrojnog polinoma. Koristiti će se 4 trake od kojih je jedna ulazna, dvije radne i jedna izlazna traka. Svaka glava za čitanje i pisanje može se micati lijevo, desno ili ostati na istom mjestu u svakom prijelazu.

Model TS s višestrukim trakama prikazan je na slici 2. TS ima 4 glave za čitanje i pisanje i 4 trake.



Slika 2: Model TS s višestrukim trakama

Upravljačka jedinica TS donosi odluku na temelju dviju grupa parametara ($k=4$):

- a) stanje upravljačke jedinice
- b) k pročitanih znakova sa k traka

Jednim prijelazom TS:

- 1) promijeni stanje
- 2) zapiše k znakova na k traka
- 3) pomakne bilo koju od k glava nezavisno za $(-1, 0, 1)$ mjesto

Ostvarenje

Formalno zadavanje Turingovog stroja čija se izgradnja traži u tekstu zadatka:

$$TSM = (Q, \{0, 1\}, \Gamma, \delta, q_0, B, q_{27})$$

Konačan skup ulaznih znakova sastoji se od znakova 0 i 1, početno stanje je q_0 , a prihvatljivo stanje je q_{27} .

$$\Gamma = \{0, 1, B, X, Y\}$$

Konačan skup znakova trake sastoji se od znakova 0, 1, B, X, Y. Znakovi 0 i 1 su ulazni znakovi. Znak B označava praznu ćeliju. Znak X je graničnik tj. služi kao oznaka početka izlane trake kao i radnih traka. Znak Y je pomoćni znak koji ima svoju ulogu u postupku izračunavanja svih potencija polinoma te množenje istih s koeficijentima (objašnjeno detaljnije u opisu prijelaza).

$$Q = \{q_i\}, i \in [0, 27]$$

Funkcija prijelaza dana je s

$$\delta(q_n, a_1, a_2, a_3, a_4) = (q_m, b_1, \Delta p_1, b_2, \Delta p_2, b_3, \Delta p_3, b_4, \Delta p_4)$$

$$q_n, q_m \in Q, a_i, b_i \in A, \Delta p_i \in \{-1, 0, +1\}$$

Funkcije prijelaza TS:

- | | |
|---|--|
| 1) $\delta(q_0, 1, B, B, B) = (q_3, 1, 0, X, 1, X, 1, X, 1)$ | 27) $\delta(q_{12}, 0, 0, B, 0) = (q_{12}, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, -1)$ |
| 2) $\delta(q_0, 0, B, B, B) = (q_1, 0, 0, X, 1, X, 1, X, 1)$ | 28) $\delta(q_{12}, 0, 0, B, 1) = (q_{13}, 0, 0, 0, 0, B, -1, 1, 1)$ |
| 3) $\delta(q_1, 0, B, B, B) = (q_1, 0, 1, 0, 1, B, 0, B, 0)$ | 29) $\delta(q_{13}, 0, 0, 0, 0) = (q_{13}, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0)$ |
| 4) $\delta(q_1, 1, B, B, B) = (q_2, 1, 1, B, -1, 0, 0, B, 0)$ | 30) $\delta(q_{13}, 0, 0, X, 0) = (q_{14}, 0, 1, 0, 0, X, 1, 0, 0)$ |
| 5) $\delta(q_2, 1, 0, 0, B) = (q_4, 1, 0, 0, 0, 0, 0, B, 0)$ | 31) $\delta(q_{14}, 0, 0, 0, 0) = (q_{15}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ |
| 6) $\delta(q_3, 1, B, B, B) = (q_3, 1, 1, B, 0, B, 0, B, 0)$ | 32) $\delta(q_{15}, 0, 0, 0, 0) = (q_{15}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, B, 1)$ |
| 7) $\delta(q_3, 0, B, B, B) = (q_3, 0, 1, B, 0, B, 0, B, 0)$ | 33) $\delta(q_{15}, 0, 0, 0, B) = (q_{15}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, B, -1)$ |
| 8) $\delta(q_3, B, B, B, B) = (q_6, B, -1, B, 0, B, 0, B, 0)$ | 34) $\delta(q_{15}, 0, 0, 0, 1) = (q_8, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1)$ |
| 9) $\delta(q_4, 1, 0, 0, B) = (q_4, 1, 1, 0, 0, 0, 0, B, 0)$ | 35) $\delta(q_{14}, 1, 0, 0, 0) = (q_{14}, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$ |
| 10) $\delta(q_4, 0, 0, 0, B) = (q_4, 0, 1, 0, 0, 0, 0, B, 0)$ | 36) $\delta(q_{14}, 1, 0, 0, B) = (q_{16}, 1, -1, 0, 0, 0, 0, 1, 1)$ |
| 11) $\delta(q_4, B, 0, 0, B) = (q_5, B, 0, 0, 0, 0, 0, B, 0)$ | 37) $\delta(q_{16}, 0, 0, 0, B) = (q_{17}, Y, -1, 0, 0, 0, 0, B, 0)$ |
| 12) $\delta(q_5, B, 0, 0, B) = (q_5, B, 0, B, -1, 0, 0, B, 0)$ | 38) $\delta(q_{17}, 0, 0, 0, B) = (q_{18}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, B, 0)$ |
| 13) $\delta(q_5, B, X, 0, B) = (q_6, B, -1, X, 1, B, 0, B, 0)$ | 39) $\delta(q_{18}, 0, 0, 0, B) = (q_{18}, 0, -1, 0, 0, 0, 0, B, 0)$ |
| 14) $\delta(q_6, 0, B, B, B) = (q_6, 0, -1, 0, 1, B, 0, B, 0)$ | 40) $\delta(q_{18}, 1, 0, 0, B) = (q_{20}, 1, 1, 0, 0, 0, 0, B, 0)$ |
| 15) $\delta(q_6, 1, B, B, B) = (q_{27}, 1, 0, B, 0, B, 0, B, 0)$ | 41) $\delta(q_{17}, 1, 0, 0, B) = (q_{19}, 1, 1, 0, 0, 0, 0, B, 0)$ |
| 16) $\delta(q_2, 0, 0, 0, B) = (q_7, 0, 0, 0, 0, 0, 0, B, 0)$ | 42) $\delta(q_{14}, Y, 0, 0, 0) = (q_{14}, Y, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$ |
| 17) $\delta(q_7, 0, 0, 0, B) = (q_8, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1)$ | 43) $\delta(q_{14}, Y, 0, 0, B) = (q_{16}, Y, -1, 0, 0, 0, 0, 1, 1)$ |
| 18) $\delta(q_8, 0, 0, 0, B) = (q_8, 0, 0, 0, -1, 0, 0, B, 0)$ | 44) $\delta(q_{20}, 0, 0, 0, B) = (q_{20}, 0, 0, 0, 0, B, 1, B, 0)$ |
| 19) $\delta(q_8, 0, X, 0, B) = (q_9, 0, 0, X, 1, 0, 0, B, 0)$ | 45) $\delta(q_{20}, 0, 0, B, B) = (q_{20}, 0, 0, 0, 0, B, -1, B, 0)$ |
| 20) $\delta(q_9, 0, 0, 0, B) = (q_9, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1)$ | 46) $\delta(q_{20}, 0, 0, X, B) = (q_{21}, 0, 0, 0, 0, X, 1, B, 0)$ |
| 21) $\delta(q_9, 0, 0, B, B) = (q_{10}, 0, 0, 0, 1, B, -1, B, 0)$ | 47) $\delta(q_{21}, 0, 0, B, B) = (q_8, 0, 0, 0, 0, 0, 0, B, 0)$ |
| 22) $\delta(q_{10}, 0, B, 0, B) = (q_{11}, 0, 0, B, -1, 0, 0, B, -1)$ | 48) $\delta(q_{19}, Y, 0, 0, B) = (q_{19}, Y, 1, 0, 0, 0, 0, B, 0)$ |
| 23) $\delta(q_{10}, 0, 0, 0, B) = (q_{10}, 0, 0, 0, 0, 0, -1, B, 0)$ | 49) $\delta(q_{19}, 0, 0, 0, B) = (q_{19}, 0, 1, 0, 0, 0, 0, B, 0)$ |
| 24) $\delta(q_{10}, 0, 0, X, B) = (q_9, 0, 0, 0, 0, X, 1, B, 0)$ | 50) $\delta(q_{19}, 1, 0, 0, B) = (q_{19}, 1, 1, 0, 0, 0, 0, B, 0)$ |
| 25) $\delta(q_{11}, 0, 0, 0, 0) = (q_{11}, 0, 0, 0, 0, B, -1, 0, 0)$ | 51) $\delta(q_{19}, B, 0, 0, B) = (q_{22}, B, 0, 0, 0, 0, 0, B, -1)$ |
| 26) $\delta(q_{11}, 0, 0, X, 0) = (q_{12}, 0, 0, 0, 0, X, 1, 0, 0)$ | 52) $\delta(q_{22}, B, 0, 0, 1) = (q_{22}, B, 0, B, 1, 0, 0, 1, 0)$ |

- 53) $\delta(q_{22}, B, B, 0, 1) = (q_{22}, B, 0, B, -1, 0, 0, 1, 0)$
 54) $\delta(q_{22}, B, X, 0, 1) = (q_{23}, B, -1, X, 1, 0, 0, 1, 0)$
 55) $\delta(q_{23}, 0, B, 0, 1) = (q_{23}, 0, -1, 0, 1, 0, 0, 1, 0)$
 56) $\delta(q_{23}, 1, B, 0, 1) = (q_{24}, 1, -1, B, 0, 0, 0, 1, -1)$
 57) $\delta(q_{24}, 0, B, 0, 0) = (q_{24}, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, -1)$
 58) $\delta(q_{24}, 0, B, 0, 1) = (q_{25}, 0, -1, B, 0, 0, 0, 1, 0)$
 59) $\delta(q_{25}, 0, B, 0, 1) = (q_{26}, 0, 0, B, 0, 0, 0, 1, 1)$
 60) $\delta(q_{26}, 0, B, 0, 0) = (q_{26}, 0, 0, B, 0, 0, 0, 0, 1)$
 61) $\delta(q_{26}, 0, B, 0, 1) = (q_{24}, 0, 0, B, 0, 0, 0, 1, -1)$
 62) $\delta(q_{25}, 1, B, 0, 1) = (q_{24}, 1, -1, B, 0, 0, 0, 1, -1)$
 63) $\delta(q_{24}, Y, B, 0, X) = (q_{27}, Y, 0, B, 0, 0, 0, X, 0)$
 64) $\delta(q_{24}, 1, B, 0, 0) = (q_{24}, 1, 0, B, 0, 0, 0, 0, -1)$
 65) $\delta(q_{24}, 1, B, 0, 1) = (q_{24}, 1, -1, B, 0, 0, 0, 1, -1)$

TS izračunava cjelobrojni polinom po izboru korisnika. Za ulazni niz zadaju se vrijednost varijable recimo x kao prvi parametar, zatim stupanj polinoma n kao drugi te zatim još $n+1$ koeficijenata tog polinoma. To je ukupno $n+3$ parametara. Vrijednost parametra reprezentira se kao broj nula '0'. Svaki parametar odvojen je znakom jedinice '1'. Evo nekoliko primjera ulaznih nizova i polinoma koje oni reprezentiraju:

ULAZNI NIZ

POLINOM

$x \ 1 \ n \ 1 \ a_n \ 1 \ a_{n-1} \ 1 \ \dots \ 1 \ a_1 \ 1 \ a_0$

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

00100100010010

$f(2) = 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^1 + 1, n=2$

00010001010000100100000

$f(3) = 1 \cdot 3^3 + 4 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 5, n=3$

0101001

$f(1) = 2 \cdot 1^1 + 0, n=1$

Osnovna ideja izračunavanja vrijednosti polinoma je da se prvo izračunaju sve potencije varijable x , spremaju se na radnu traku (4) i zatim se redom množe s odgovarajućim koeficijentima i spremaju na izlaznu traku (2). Potencije varijable x izračunavaju se od najveće prema najmanjoj i redom spremaju na 4. traku te se odvajaju jedinicom '1' koristeći se pomoćnim trakama 2 i 3 za potenciranje tj. uzastopnim množenjem varijable x sa njom samom odgovarajući broj puta ($n \dots 1$). Nakon toga množenjem potencija od najmanje s zadnjim koeficijentom do najveće s prvim koeficijentom dobivamo vrijednost polinoma tj. broj nula '0' koje se nalaze na izlaznoj (2) traci nakon simulacije.

Simulirajmo izračunavanje polinoma $f(2) = 2 \cdot 2^2 + 1$ za $n=2$

	x			n			a			c		
1.	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	...
2.	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	...
3.	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	...
4.	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	...

$$2) \delta(q_0, 0, B, B, B) = (q_1, 0, 0, X, 1, X, 1, X, 1)$$

$$3) \delta(q_1, 0, B, B, B) = (q_1, 0, 1, 0, 1, B, 0, B, 0)$$

$$4) \delta(q_1, 1, B, B, B) = (q_2, 1, 1, B, -1, 0, 0, B, 0)$$

Neka ova tablica predstavlja TS sa 4 trake. Prva traka je ulazna, druga je izlazna, a ostale dvije su radne trake. TS je u početnom stanju q_0 i glave su pozicionirane na prvoj ćeliji u svakoj traci (označeno plavom bojom). Primjenjujemo prijelaz (2) da označimo početak svih traka osim ulazne te se pripremimo na prepisivanje varijable na drugu traku. Zatim primjenom prijelaza (3) prepisujemo varijablu tj. nule dok ne naiđemo na jedinicu. Prijelazom (4) pripremamo se na potenciranje varijable x brojem n tj. računanje prve potencije.

- 1) $\delta(q_0, 1, B, B, B) = (q_3, 1, 0, X, 1, X, 1, X, 1)$
- 6) $\delta(q_3, 1, B, B, B) = (q_3, 1, 1, B, 0, B, 0, B, 0)$
- 7) $\delta(q_3, 0, B, B, B) = (q_3, 0, 1, B, 0, B, 0, B, 0)$
- 8) $\delta(q_3, B, B, B, B) = (q_6, B, -1, B, 0, B, 0, B, 0)$
- 14) $\delta(q_6, 0, B, B, B) = (q_6, 0, -1, 0, 1, B, 0, B, 0)$
- 15) $\delta(q_6, 1, B, B, B) = (q_{27}, 1, 0, B, 0, B, 0, B, 0)$

U slučaju da je $x=0$ vrijednost polinoma je jednaka zadnjem koeficijentu. Prijelazom (1) stavljamo oznake za početke svih traka osim ulazne. Prijelazima (6) i (7) dolazimo do kraja ulaznog niza, a s prijelazom (8) se zaustavljamo. Zatim prepisujemo zadnji koeficijent prijelazom (14) te se zaustavljamo kad dođemo do jedinice. Time je simulacija završila i TS odlazi u prihvatljivo stanje prijelazom (15).

- 5) $\delta(q_2, 1, 0, 0, B) = (q_4, 1, 0, 0, 0, 0, 0, B, 0)$
- 9) $\delta(q_4, 1, 0, 0, B) = (q_4, 1, 1, 0, 0, 0, 0, B, 0)$
- 10) $\delta(q_4, 0, 0, 0, B) = (q_4, 0, 1, 0, 0, 0, 0, B, 0)$
- 11) $\delta(q_4, B, 0, 0, B) = (q_5, B, 0, 0, 0, 0, 0, B, 0)$
- 12) $\delta(q_5, B, 0, 0, B) = (q_5, B, 0, B, -1, 0, 0, B, 0)$
- 13) $\delta(q_5, B, X, 0, B) = (q_6, B, -1, X, 1, B, 0, B, 0)$
- 14) $\delta(q_6, 0, B, B, B) = (q_6, 0, -1, 0, 1, B, 0, B, 0)$
- 15) $\delta(q_6, 1, B, B, B) = (q_{27}, 1, 0, B, 0, B, 0, B, 0)$

U slučaju da je stupanj polinoma nula vrijednost polinoma je jednaka zadnjem koeficijentu. Jedina razlika u odnosu na prošli slučaj je u tome što smo prepisali vrijednost varijable na izlaznu traku te ju moramo "očistiti" prije nego što na nju spremimo zadnji koeficijent tj. vrijednost polinoma. Prijelazima (5), (9), (10), (11) dolazimo do kraja ulaznog niza, a prijelazima (12) i (13) čistimo izlaznu traku i pozicioniramo se na početak trake tj. iza znaka X. Nakon toga prijelazima (14) i (15) prepisujemo zadnji koeficijent. Time je simulacija završila i TS odlazi u prihvatljivo stanje.

	x			n			a			c		
1.	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	...
2.	X	0	0	B	B	B	B	B	B	B	B	...
3.	X	0	B	B	B	B	B	B	B	B	B	...
4.	X	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	...

- 17) $\delta(q_7, 0, 0, 0, B) = (q_8, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1)$
- 18) $\delta(q_8, 0, 0, 0, B) = (q_8, 0, 0, 0, -1, 0, 0, B, 0)$
- 19) $\delta(q_8, 0, X, 0, B) = (q_9, 0, 0, X, 1, 0, 0, B, 0)$
- 20) $\delta(q_9, 0, 0, 0, B) = (q_9, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1)$
- 21) $\delta(q_9, 0, 0, B, B) = (q_{10}, 0, 0, 0, 1, B, -1, B, 0)$
- 22) $\delta(q_{10}, 0, B, 0, B) = (q_{11}, 0, 0, B, -1, 0, 0, B, -1)$
- 23) $\delta(q_{10}, 0, 0, 0, B) = (q_{10}, 0, 0, 0, 0, 0, -1, B, 0)$
- 24) $\delta(q_{10}, 0, 0, X, B) = (q_9, 0, 0, 0, 0, X, 1, B, 0)$

Budući da u su u ovom primjeru i varijabla i stupanj polinoma različiti od nule moramo potencirati. Ovako izgleda TS nakon što smo prepisali varijablu x. Prvo izračunavamo najveću potenciju što bi značilo da varijablu x moramo pomnožiti s njom samom n puta. Pozicioniramo glavu na drugoj traci na prvu nulu (17,18,19). Za svaku nulu na drugoj traci prepisemo nule na trećoj traci u četvrtu traku (20,21). U početku je vrijednost na trećoj traci jedan jer kad prepisemo za svaku nulu u

drugoj traci nulu u trećoj traci na četvrtu traku u četvrtoj traci će se nalaziti vrijednost varijable. Kad prepíšemo sve nule iz treće trake moramo se pomaknuti za jedno mjesto u desno na drugoj traci te ponovno pozicionirati glavu na prvu nulu u trećoj traci (21,23,24). Ako na drugoj traci više nema nula onda je gotov postupak za podizanje potencije varijable za jedan(22).

	x			n			a			c		
1.	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	...
2.	X	0	0	B	B	B	B	B	B	B	B	...
3.	X	0	B	B	B	B	B	B	B	B	B	...
4.	X	1	0	0	B	B	B	B	B	B	B	...

$$25) \delta(q_{11}, 0, 0, 0, 0) = (q_{11}, 0, 0, 0, 0, B, -1, 0, 0)$$

$$26) \delta(q_{11}, 0, 0, X, 0) = (q_{12}, 0, 0, 0, 0, X, 1, 0, 0)$$

$$27) \delta(q_{12}, 0, 0, B, 0) = (q_{12}, 0, 0, 0, 0, 1, 0, -1)$$

$$28) \delta(q_{12}, 0, 0, B, 1) = (q_{13}, 0, 0, 0, 0, B, -1, 1, 1)$$

$$29) \delta(q_{13}, 0, 0, 0, 0) = (q_{13}, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0)$$

$$30) \delta(q_{13}, 0, 0, X, 0) = (q_{14}, 0, 1, 0, 0, X, 1, 0, 0)$$

Nakon toga vratimo glavu na prvu nulu u trećoj traci (25,26) i prepisujemo produkt s četvrte trake na treću i pozicioniramo glavu na prvu nulu u trećoj traci. Time omogućavamo povećanje potencije varijable za jedan u idućem ciklusu množenja, ako je idući znak na ulaznoj traci nula tj. ako varijabla nema odgovarajuću potenciju(27,28,29,30).

	x			n			a			c		
1.	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	...
2.	X	0	0	B	B	B	B	B	B	B	B	...
3.	X	0	0	B	B	B	B	B	B	B	B	...
4.	X	1	0	0	B	B	B	B	B	B	B	...

$$31) \delta(q_{14}, 0, 0, 0, 0) = (q_{15}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$32) \delta(q_{15}, 0, 0, 0, 0) = (q_{15}, 0, 0, 0, 0, 0, B, 1)$$

$$33) \delta(q_{15}, 0, 0, 0, B) = (q_{15}, 0, 0, 0, 0, 0, B, -1)$$

$$34) \delta(q_{15}, 0, 0, 0, 1) = (q_8, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1)$$

Ako je potrebno još potencirati onda obrišemo broj na zadnjoj traci prijelazima (31,32,33,34).

	x			n			a			c		
1.	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	...
2.	X	0	0	B	B	B	B	B	B	B	B	...
3.	X	0	0	B	B	B	B	B	B	B	B	...
4.	X	1	B	B	B	B	B	B	B	B	B	...

Nakon toga ponovi se cijeli postupak od (18) prijelaza i dobivamo sljedeće stanje TS:

	x			n			a			c		
1.	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	...
2.	X	0	0	B	B	B	B	B	B	B	B	...
3.	X	0	0	0	0	B	B	B	B	B	B	...
4.	X	1	0	0	0	0	B	B	B	B	B	...

$$\begin{aligned}
35) \delta(q_{14}, 1, 0, 0, 0) &= (q_{14}, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1) \\
36) \delta(q_{14}, 1, 0, 0, B) &= (q_{16}, 1, -1, 0, 0, 0, 0, 1, 1) \\
37) \delta(q_{16}, 0, 0, 0, B) &= (q_{17}, Y, -1, 0, 0, 0, 0, B, 0) \\
38) \delta(q_{17}, 0, 0, 0, B) &= (q_{18}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, B, 0) \\
39) \delta(q_{18}, 0, 0, 0, B) &= (q_{18}, 0, -1, 0, 0, 0, 0, B, 0) \\
40) \delta(q_{18}, 1, 0, 0, B) &= (q_{20}, 1, 1, 0, 0, 0, 0, B, 0) \\
41) \delta(q_{17}, 1, 0, 0, B) &= (q_{19}, 1, 1, 0, 0, 0, 0, B, 0) \\
42) \delta(q_{14}, Y, 0, 0, 0) &= (q_{14}, Y, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1) \\
43) \delta(q_{14}, Y, 0, 0, B) &= (q_{16}, Y, -1, 0, 0, 0, 0, B, 0)
\end{aligned}$$

Time smo izračunali najveću potenciju varijable x i spremili je na četvrtu traku. Sada smanjujemo n za jedan tj. umjesto zadnje nule upisujemo znak 'Y' tako da znamo do kuda moramo ići kad ćemo izračunavati idući potenciju koja je za jedan stupanj manja. Dakle zapisujemo znak 'Y' umjesto zadnje nule, pozicioniramo se na prvu nulu i opet ponavljamo postupak. Sad na dalje ne tražimo jedinicu da prekinemo potenciranje nego znak 'Y' (35,36,37,38,39,40,41,42,43).

$$\begin{aligned}
44) \delta(q_{20}, 0, 0, 0, B) &= (q_{20}, 0, 0, 0, 0, B, 1, B, 0) \\
45) \delta(q_{20}, 0, 0, B, B) &= (q_{20}, 0, 0, 0, 0, B, -1, B, 0) \\
46) \delta(q_{20}, 0, 0, X, B) &= (q_{21}, 0, 0, 0, 0, X, 1, B, 0) \\
47) \delta(q_{21}, 0, 0, B, B) &= (q_8, 0, 0, 0, 0, 0, 0, B, 0)
\end{aligned}$$

Nakon što izračunamo prvu potenciju broj na trećoj traci moramo postaviti na vrijednost 1 tj. jednu nulu kao i na početku izračunavanja prve potencije (44,45,46,47).

	x			n			a			c		
1.	0	0	1	Y	Y	1	0	0	1	1	0	...
2.	X	0	0	B	B	B	B	B	B	B	B	...
3.	X	0	0	B	B	B	B	B	B	B	B	...
4.	X	1	0	0	0	0	1	0	0	B	B	...

$$\begin{aligned}
48) \delta(q_{19}, Y, 0, 0, B) &= (q_{19}, Y, 1, 0, 0, 0, 0, B, 0) \\
49) \delta(q_{19}, 0, 0, 0, B) &= (q_{19}, 0, 1, 0, 0, 0, 0, B, 0) \\
50) \delta(q_{19}, 1, 0, 0, B) &= (q_{19}, 1, 1, 0, 0, 0, 0, B, 0) \\
51) \delta(q_{19}, B, 0, 0, B) &= (q_{22}, B, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0)
\end{aligned}$$

Na četvrtoj traci nalaze se sve potencije osim zadnje čija je vrijednost jedan i nema smisla množiti koeficijent s jedan zato se zadnji koeficijent samo prepíše na izlaznu traku. Međutim prije toga, nakon što imamo sve potencije pozicioniramo glavu na kraj ulaznog niza (48,49,50,51).

	x			n			a			c		
1.	0	0	1	Y	Y	1	0	0	1	1	0	B
2.	X	0	0	B	B	B	B	B	B	B	B	...
3.	X	0	0	B	B	B	B	B	B	B	B	...
4.	X	1	0	0	0	0	1	0	0	1	B	...

$$\begin{aligned}
52) \delta(q_{22}, B, 0, 0, 1) &= (q_{22}, B, 0, B, 1, 0, 0, 1, 0) \\
53) \delta(q_{22}, B, B, 0, 1) &= (q_{22}, B, 0, B, -1, 0, 0, 1, 0) \\
54) \delta(q_{22}, B, X, 0, 1) &= (q_{23}, B, -1, X, 1, 0, 0, 1, 0)
\end{aligned}$$

Idući korak je brisanje tj. čišćenje trake izlaza (druga traka) kako bismo mogli spremati na nju izlaz odnosno vrijednost polinoma (52, 53, 54).

	x			n			a				c		
1.	0	0	1	Y	Y	1	0	0	1	1	0	B	...
2.	X	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	...
3.	X	0	0	B	B	B	B	B	B	B	B	B	...
4.	X	1	0	0	0	0	1	0	0	1	B	B	...

$$55) \delta(q_{23}, 0, B, 0, 1) = (q_{23}, 0, -1, 0, 1, 0, 0, 1, 0)$$

$$56) \delta(q_{23}, 1, B, 0, 1) = (q_{24}, 1, -1, B, 0, 0, 0, 1, -1)$$

Nakon toga prepisujemo zadnji koeficijent na izlaznu traku(55,56).

	x			n			a				c		
1.	0	0	1	Y	Y	1	0	0	1	1	0	B	...
2.	X	0	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	...
3.	X	0	0	B	B	B	B	B	B	B	B	B	...
4.	X	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	B	...

$$57) \delta(q_{24}, 0, B, 0, 0) = (q_{24}, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, -1)$$

$$58) \delta(q_{24}, 0, B, 0, 1) = (q_{25}, 0, -1, B, 0, 0, 0, 1, 0)$$

$$59) \delta(q_{25}, 0, B, 0, 1) = (q_{26}, 0, 0, B, 0, 0, 0, 1, 1)$$

$$60) \delta(q_{26}, 0, B, 0, 0) = (q_{26}, 0, 0, B, 0, 0, 0, 0, 1)$$

$$61) \delta(q_{26}, 0, B, 0, 1) = (q_{24}, 0, 0, B, 0, 0, 0, 1, -1)$$

$$62) \delta(q_{25}, 1, B, 0, 1) = (q_{24}, 1, -1, B, 0, 0, 0, 1, -1)$$

$$63) \delta(q_{24}, Y, B, 0, X) = (q_{27}, Y, 0, B, 0, 0, 0, X, 0)$$

$$64) \delta(q_{24}, 1, B, 0, 0) = (q_{24}, 1, 0, B, 0, 0, 0, 0, -1)$$

$$65) \delta(q_{24}, 1, B, 0, 1) = (q_{24}, 1, -1, B, 0, 0, 0, 1, -1)$$

Na kraju množimo svaki koeficijent (osim zadnjeg) od kraja ulazne trake s odgovarajućom potencijom na četvrtoj traci također od kraja. Za svaku nulu koeficijenta prepisujemo nule potencije. Postupak ponavljamo dok ne dođemo do znaka Y na ulaznoj traci odnosno do znaka X na četvrtoj traci.

	x			n			a				c		
1.	0	0	1	Y	Y	1	0	0	1	1	0	B	...
2.	X	0	0	0	0	0	0	0	0	0	B	B	...
3.	X	0	0	B	B	B	B	B	B	B	B	B	...
4.	X	1	0	0	0	0	1	0	0	1	B	B	...

Zaključak

Izgrađeni Turingov stroj za zadanu varijablu, stupanj polinoma i koeficijente vraća vrijednost polinoma na drugoj, izlaznoj traci kao broj nula. Nakon izračunavanja vrijednosti polinoma TS prestaje s radom i to u jedinom prihvatljivom stanju. Pri izgradnji TS korišten je model s višestrukim trakama radi lakše izgradnje, lakšeg praćenja rada i brzine izračunavanja. Isti TS mogao bi se izgraditi s jednom trakom međutim složenost takvog stroja bila bi daleko veća (kvadratna složenost složenosti TS s višestrukim trakama). Bitna stvar pri izgradnji ovog stroja koja daleko ubrzava rad TS je korištenje više glava. Dodatna poboljšanja mogla bi se naravno naći u smislu brzine rada, jer nekoliko puta tijekom izračunavanja glava se kreće s početka na kraj niza bez ikakvog korisnog rada što bi se moglo riješiti uvođenjem dodatnih stanja ili eventualno složenih stanja. Dodatne glave odnosno više traka korisne su pri operacijama množenja i potenciranja i s lakoćom rješavaju taj problem. Općenito TS s višestrukim trakama čini mi se kao vrlo moćno oruđe u odnosu na ostale automate, a i ostale modificirane TS.