

Sveučilište u Zagrebu  
Fakultet elektrotehnike i računarstva

Bronze God ;D

**Seminarski rad iz predmeta  
Uvod u teoriju računarstva**

Zadatak broj 2003.

Zagreb, lipanj 2008.

## Seminarski rad iz predmeta Uvod u teoriju računarstva

**Student:** \*\*\*\*\*

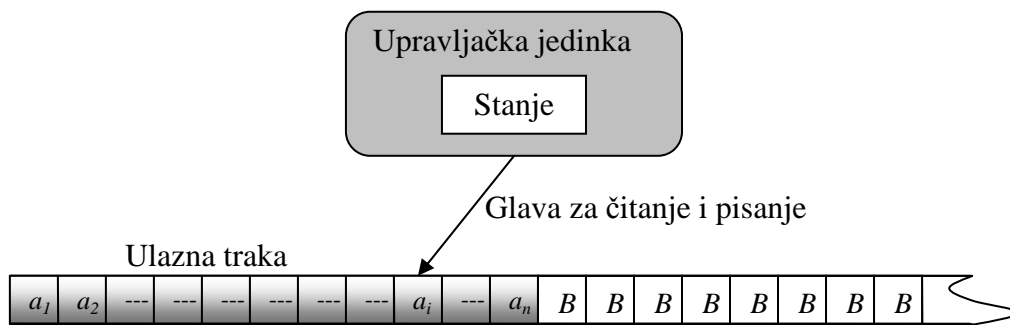
**Matični broj studenta:** \*\*\*\*\*

**Zadatak broj 2003:** Izgraditi TS (bilo kojeg oblika) koji će za zadani logički izraz stati i odgovoriti ISTINA ili LAŽ ovisno o vrijednosti logičkog izraza. Pretpostavlja se da su ulazni nizovi ispravno zadani logički izrazi bez zagrada. Ulazna abeceda je  $\Sigma = \{ 0, 1, \neg, \wedge, \vee \}$ .

## Uvod

Turingov stroj (TS) je najopćenitiji poznati matematički model računanja. Bez obzira na njegovu jednostavnost TS ima iste mogućnosti računanja kao bilo koje digitalno računalo. Postoji više modela Turingova stroja a svi se izvedu proširivanjem osnovnog modela TS. Osnovni model TS se sastoji od upravljačke jedinice (jedinke), ulazne trake i glave za čitanje i pisanje. Upravljačka se jedinica nalazi u jednom od konačnog broja stanja. Skup stanja TS se sastoji od dva podskupa; skupa prihvatljivih stanja i skupa neprihvatljivih stanja. Ulazna traka TS je podijeljena na ćelije, tj. sastoji se od ćelija koje sadrže znakove trake. Traka ima krajnju lijevu ćeliju, dok je na desnu stranu beskonačna, tj. ima beskonačno mnogo ćelija. Glava za čitanje i pisanje, u skladu sa nazivom, služi za čitanje znakova sa trake i pisanje znakova na traku. TS nakon čitanja znaka s trake mora i zapisati znak na traku. To može biti znak koji je (prethodno) bio pročitani ili neki drugi znak. Glava TS se može pomicati u lijevo ili u desno. Jedina iznimka je slučaj kada glava pokazuje na prvu tj. krajnje lijevu ćeliju trake. Ona se tada ne može pomaknuti u lijevo, već samo u desno. Na početku rada TS  $n$  krajnje lijevih ćelija ulazne trake sadrži znakove niza  $w$  ( $|w| = n, n \geq 0$ ). Ostatak ćelija trake je prazan. Prazne ćelije se označavaju znakom  $B$ .

Osnovni model TS je prikazan na slici 1. Znakovi niza  $w$  su označeni slovom  $a$  i indeksom.



Slika 1: Osnovni model TS

Tijekom rada TS njegova upravljačka jedinica, na temelju stanja u kojem se nalazi i znaka koji je pročitani s trake, donosi odluku o tome u koje će novo stanje prijeći, koji će znak biti zapisan na traku na mjesto pročitaniog znaka i u koju će se stranu pomaknuti glava za čitanje i pisanje. Donošenje odluke od strane upravljačke jedinice se formalno zapisuje funkcijama prijelaza.

TS se formalno zadaje uređenom sedmorkom:

$$TS = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$$

gdje je:

- $Q$  - konačan skup stanja;
- $\Sigma \subseteq (\Gamma - \{B\})$  - konačan skup ulaznih znakova;
- $\Gamma$  - konačan skup znakova trake;
- $\delta$  - funkcija prijelaza,  $\delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R\}$ , gdje  $L$  i  $R$  označavaju pomak glave u lijevo i u desno, respektivno;
- $q_0 \in Q$  - početno stanje;
- $B \in \Gamma$  - znak kojim se označava prazna ćelija;
- $F \subseteq Q$  - skup prihvatljivih stanja.

$\Gamma$  tj. konačan skup znakova trake se sastoji od znakova ulaznog niza i znakova koje TS zapisuje na traku, ali koji nisu dio ulaznog niza (npr.  $B$ ). Zato se skup ulaznih znakova definira:  $\Sigma \subseteq (\Gamma - \{B\})$ , pošto sigurno ne sadrži znak  $B$ .

Što se tiče funkcija prijelaza dozvoljeno je da  $\delta$  bude nedefinirana za pojedine argumente. Ako za neko stanje nije definiran odgovarajući prijelaz, rad TS se zaustavlja. Ako je stanje u kojem se TS zaustavio prihvatljivo (tj. ako se nalazi u skupu prihvatljivih stanja) ulazni niz se prihvaća. U suprotnom slučaju (ako stanje nije prihvatljivo) ulazni niz se ne prihvaća.

Budući da zadatak ne određuje koji se oblik TS treba izgraditi, odabran je osnovni model sa višekomponentnim oznakama stanja. Razlog tome je činjenica da se TS može lakše konstruirati ako se oznake stanja (i/ili oznake znakova trake) razlože na više komponenata. Višekomponentne oznake stanja, umjesto jedinstvene oznake stanja koriste složenu oznaku, čije se komponente pišu u uglatim zagradama  $[q_1, q_2, \dots, q_n]$ , gdje je  $q_i$  komponenta složene oznake stanja,  $1 \leq i \leq n$ .

Za izgradnju TS opisanog u tekstu zadatka koristiti će se dvokomponentna oznaka stanja. Prva komponenta će biti upravljačka te će se pomoću nje definirati faza rada TS, dok će druga komponenta biti radna a koristit će se za spremanje podataka, tj. znakova ulazne trake.

Konfiguracija TS se zadaje sadržajem ćelija lijevo od glave za čitanje i pisanje, stanjem upravljačke jedinice i sadržajem ćelija koje su desno od glave za čitanje i pisanje. Formalno:

$\alpha_1 q \alpha_2$ , gdje je  $q \in Q$ ,  $\alpha_1$  je zapis na traci koji je lijevo od glave za čitanje i pisanje, a  $\alpha_2$  je zapis na traci koji je desno od glave za čitanje i pisanje ( $\alpha_1, \alpha_2 \in \Gamma^*$ ). TS čita krajnje lijevi znak niza  $\alpha_2$ .

Jednoznačnost označavanja konfiguracije se postiže definiranjem zasebnih oznaka za stanja u skupu  $Q$  koja su različita od oznaka znakova trake u skupu  $\Gamma$ .

## Ostvarenje

Formalno zadavanje Turingovog stroja čija se izgradnja traži u tekstu zadatka:

$$TS\ M = (Q, \{ 0, 1, \neg, \wedge, \vee \}, \Gamma, \delta, [q_0, B], B, [q_4, B])$$

Dakle, kao što je i zadano u zadatku, konačan skup ulaznih znakova se sastoji od znakova 0, 1,  $\neg$ ,  $\wedge$  i  $\vee$ .

Početno stanje je  $[q_0, B]$ , a skup prihvatljivih stanja se sastoji od samo jednog člana, stanja  $[q_4, B]$ .

$$\Gamma = \{ 0, 1, \neg, \wedge, \vee, B, X, Y \}$$

Konačan skup znakova trake se sastoji od znakova 0, 1,  $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $B$ ,  $X$  i  $Y$ .

Znakovi 0, 1,  $\neg$ ,  $\wedge$  i  $\vee$  su ulazni znakovi. Znak  $B$ , kao što je već spomenuto, označava praznu ćeliju. Znak  $X$  je graničnik tj. služi kao oznaka početka ulaznog niza, tj. njegovog lijevog kraja, a znak  $Y$  se koristi za brisanje ulaznih znakova koje je TS obradio.

$$Q = \{ [q_0, B], [q_0, 0], [q_0, 1], [q_0, \neg], [q_0, \wedge], [q_0, \vee], [q_1, B], [q_1, \neg], [q_2, B], [q_2, 0], [q_2, 1], [q_2, \wedge], [q_3, B], [q_3, 0], [q_3, 1], [q_4, B] \}$$

Funkcije prijelaza TS:

- |   |   |
|---|---|
| (1) $\delta([q_0, B], 0) = ([q_0, 0], X, R)$                  | (30) $\delta([q_2, B], 0) = ([q_2, B], 0, R)$           |
| (2) $\delta([q_0, B], 1) = ([q_0, 1], X, R)$                  | (31) $\delta([q_2, B], 1) = ([q_2, B], 1, R)$           |
| (3) $\delta([q_0, B], \neg) = ([q_0, \neg], X, R)$            | (32) $\delta([q_2, B], \wedge) = ([q_2, \wedge], Y, L)$ |
| (4) $\delta([q_0, 0], \wedge) = ([q_0, \wedge], 0, R)$        | (33) $\delta([q_2, B], \vee) = ([q_2, B], \vee, R)$     |
| (5) $\delta([q_0, 0], \vee) = ([q_0, \vee], 0, R)$            | (34) $\delta([q_2, B], Y) = ([q_2, B], Y, R)$           |
| (6) $\delta([q_0, 0], B) = ([q_1, B], 0, R)$                  | (35) $\delta([q_2, B], B) = ([q_3, B], B, L)$           |
| (7) $\delta([q_0, 1], \wedge) = ([q_0, \wedge], 1, R)$        | (36) $\delta([q_2, \wedge], 0) = ([q_2, 0], Y, R)$      |
| (8) $\delta([q_0, 1], \vee) = ([q_0, \vee], 1, R)$            | (37) $\delta([q_2, \wedge], 1) = ([q_2, 1], Y, R)$      |
| (9) $\delta([q_0, 1], B) = ([q_1, B], 1, R)$                  | (38) $\delta([q_2, 0], Y) = ([q_2, 0], Y, R)$           |
| (10) $\delta([q_0, \neg], 0) = ([q_0, 0], \neg, R)$           | (39) $\delta([q_2, 0], 1) = ([q_2, B], 0, R)$           |
| (11) $\delta([q_0, \neg], 1) = ([q_0, 1], \neg, R)$           | (40) $\delta([q_2, 0], 0) = ([q_2, B], 0, R)$           |
| (12) $\delta([q_0, \neg], \neg) = ([q_0, \neg], \neg, R)$     | (41) $\delta([q_2, 1], Y) = ([q_2, 1], Y, R)$           |
| (13) $\delta([q_0, \wedge], 0) = ([q_0, 0], \wedge, R)$       | (42) $\delta([q_2, 1], 1) = ([q_2, B], 1, R)$           |
| (14) $\delta([q_0, \wedge], 1) = ([q_0, 1], \wedge, R)$       | (43) $\delta([q_2, 1], 0) = ([q_2, B], 0, R)$           |
| (15) $\delta([q_0, \wedge], \neg) = ([q_0, \neg], \wedge, R)$ | (44) $\delta([q_3, B], 0) = ([q_3, 0], Y, L)$           |
| (16) $\delta([q_0, \vee], 0) = ([q_0, 0], \vee, R)$           | (45) $\delta([q_3, B], 1) = ([q_3, 1], Y, L)$           |
| (17) $\delta([q_0, \vee], 1) = ([q_0, 1], \vee, R)$           | (46) $\delta([q_3, 0], Y) = ([q_3, 0], Y, L)$           |
| (18) $\delta([q_0, \vee], \neg) = ([q_0, \neg], \vee, R)$     | (47) $\delta([q_3, 0], \vee) = ([q_3, 0], Y, L)$        |
| (19) $\delta([q_1, B], B) = ([q_1, B], B, L)$                 | (48) $\delta([q_3, 0], 1) = ([q_3, 1], Y, L)$           |
| (20) $\delta([q_1, B], 0) = ([q_1, B], 0, L)$                 | (49) $\delta([q_3, 0], 0) = ([q_3, 0], Y, L)$           |
| (21) $\delta([q_1, B], 1) = ([q_1, B], 1, L)$                 | (50) $\delta([q_3, 0], X) = ([q_4, B], 0, R)$           |
| (22) $\delta([q_1, B], \wedge) = ([q_1, B], \wedge, L)$       | (51) $\delta([q_3, 1], Y) = ([q_3, 1], Y, L)$           |
| (23) $\delta([q_1, B], \vee) = ([q_1, B], \vee, L)$           | (52) $\delta([q_3, 1], \vee) = ([q_3, 1], Y, L)$        |
| (24) $\delta([q_1, B], Y) = ([q_1, B], Y, L)$                 | (53) $\delta([q_3, 1], 1) = ([q_3, 1], Y, L)$           |
| (25) $\delta([q_1, B], X) = ([q_2, B], X, R)$                 | (54) $\delta([q_3, 1], 0) = ([q_3, 1], Y, L)$           |
| (26) $\delta([q_1, B], \neg) = ([q_1, \neg], Y, R)$           | (55) $\delta([q_3, 1], X) = ([q_4, B], 1, R)$           |
| (27) $\delta([q_1, \neg], 0) = ([q_1, B], 1, L)$              | (56) $\delta([q_4, B], Y) = ([q_4, B], B, R)$           |
| (28) $\delta([q_1, \neg], 1) = ([q_1, B], 0, L)$              |   |
| (29) $\delta([q_1, \neg], Y) = ([q_1, \neg], Y, R)$           |   |

Konačan skup stanja se sastoji od 16 (višekomponentnih) stanja, a rad TS određuje 56 funkcija prijelaza.

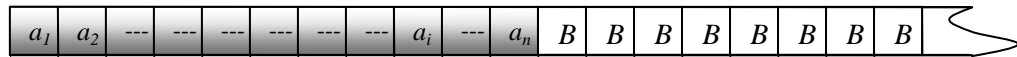
Budući da su ulazni nizovi ispravno zadani logički izrazi, Turingov stroj ne treba provjeravati ispravnost izraza tj. ulaznog niza koji sadrži izraz, već samo treba odrediti rezultat logičkog izraza i u ovisnosti o njemu odgovoriti ISTINA ili LAŽ.

Izgradnju TS olakšava i ulazna abeceda. Ona ne sadrži zgrade, što znači da ni ulazni nizovi ne sadrže zgrade iz razloga što su svi korektno zadani. Zato se vrijednost izraza lakše računa jer je kroz niz dovoljno proći tri puta, po jedan put za svaku od tri logičke operacije zadane ulaznom abecedom. Te tri operacije su negacija ili komplementiranje ( $\neg$ ) tj. logičko *NE*, konjunkcija ( $\wedge$ ) tj. logičko *I* te disjunkcija ( $\vee$ ) tj. logičko *ILI*. Od ove tri operacije najveći prioritet ima komplementiranje, niži prioritet ima konjunkcija a najniži disjunkcija. Za svaku od navedenih operacija se mora definirati određeni broj stanja i funkcija prijelaza. Izostanak zgrada u ulaznoj abecedi smanjuje broj stanja i funkcija prijelaza TS te tako pojednostavljuje njegovu izgradnju.

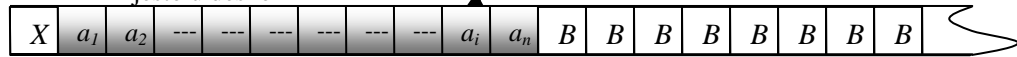
Pri svakom prolazu kroz niz obavljaju se operacije nad znakovima niza koje se tiču jedne od tri navedene logičke operacije. Operacije nad znakovima niza se obavljaju s obzirom na prioritet logičkih operacija. U prvom se prolazu obavlja komplementiranje, jer ta operacija ima najveći prioritet, u drugom se prolazu izvode operacije konjunkcije, a u trećem operacije disjunkcije. Štoviše, TS će ponekad prilikom prolazanja kroz niz morati obavljati i određene radnje koje ne uključuju logičke operacije, ali su naravno vezane uz njih (npr. brisanje pojedinih znakova ulaznog niza, točnije njihovo prepisivanje znakom *Y*, nakon što se dotični znakovi obrade).

Prvi prolazak ide od početka niza (tj. od prvog znaka niza) prema njegovom kraju (tj. do krajnje lijevog znaka *B*), jer se inicijalno glava TS nalazi na prvom znaku ulaznog niza. Nakon toga slijedi drugi prolazak nizom i to od krajnje lijevog znaka *B* prema prvom znaku niza. Međutim tu nailazimo na problem. Naime, TS čitajući niz od njegovog kraja prema početku ne može znati kada će doći do početka niza. Zato je ulazni niz najprije potrebno pomaknuti za jedno mjesto tj. ćeliju u desno, kako bi se na početak niza mogao nadopisati znak graničnik. Za ovaj TS to je znak *X*. Također, nakon što se nizom prođe i po četvrti put (zato što je dodan jedan početni prolazak zbog premještanja znakova niza), biti će potrebno još jednom proći kroz niz kako bi se na traci formulirao odgovor Turingovog stroja na rezultat logičkog izraza. Dakle, kroz niz se sveukupno prolazi 5 puta. Može se reći da TS ima 5 faza rada. Slika 2 prikazuje prolaze TS kroz zadani niz i smjerove pomicanja glave pri svakom prolasku.

Početno stanje trake



1. prolaz: pomicanje znakova niza za jedno mjesto u desno



2. prolaz: izvođenje komplementiranja logičkog izraza



3. prolaz: izvođenje konjunkcija logičkog izraza



4. prolaz: izvođenje disjunkcija logičkog izraza

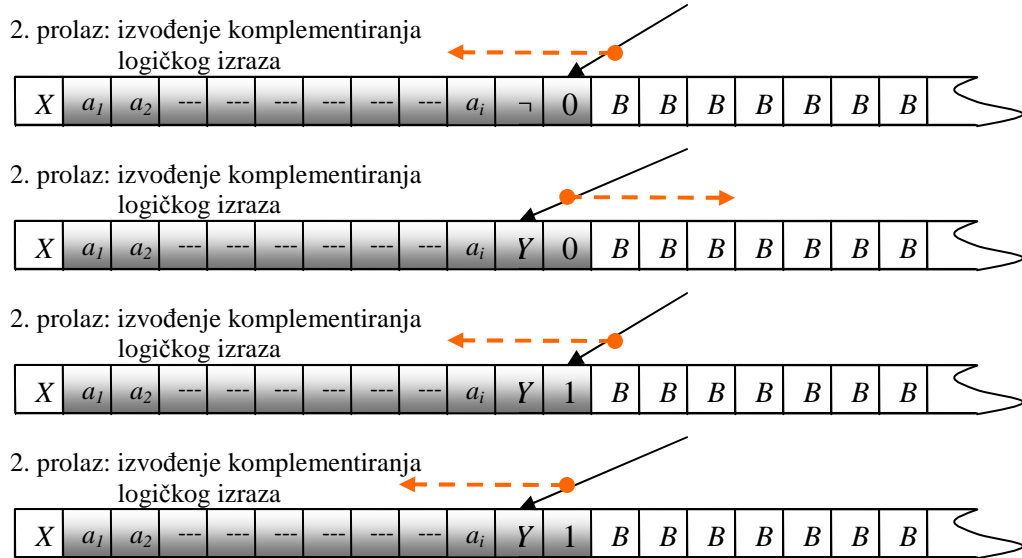


5. prolaz: zapisivanje odgovora na vrijednost izraza (npr. ISTINA)



**Slika 2:** Prolasci TS kroz niz (faze rada TS) i smjerovi pomicanja glave TS

Iako je na slici 2 prikazano da se glava TS u svakom prolazu miče isključivo u jednom smjeru, u stvarnosti je situacija malo drugačija. Glava će pri svakom prolazu kroz niz, u svakom slučaju, s obzirom na kraj na kojem je počela, završiti na suprotnom kraju niza, ali je moguće da se u određenom trenutku tj. u određenom stanju TS i za određeni znak ulaznog niza glava pomakne u suprotnom smjeru od onog koji je prikazan na slici 2, za određeni prolazak kroz niz. Tu situaciju, na primjeru drugog prolaska glave kroz niz ilustrira slika 3.



**Slika 3:** Primjer prolaska TS kroz ulazni niz u fazi komplementiranja.  
Glava se nužno ne kreće uvijek u istom smjeru

Kao što je već zaključeno prva faza rada TS uključuje pomicanje znakova ulaznog niza za jedno mjesto tj. ćeliju u desno, kako bi se na početak niza mogao nadopisati znak graničnik. TS M je za to potrebno 6 stanja;  $[q_0, B]$ ,  $[q_0, 0]$ ,  $[q_0, 1]$ ,  $[q_0, \neg]$ ,  $[q_0, \wedge]$  i  $[q_0, \vee]$ . Početno stanje Turingovog stroja je  $[q_0, B]$  pa se na početku prve faze TS nalazi u dotičnom stanju. Upravljačka komponenta početnog stanja, u skladu sa standardnim načinom označavanja stanja, sadrži oznaku  $q$  s indeksom 0 koji označava da je TS u prvoj fazi rada. Radna komponenta sadrži znak  $B$  jer u nju još nije spremljen niti jedan znak ulaznog niza. Na početku niza mogu biti samo znakovi 0 ili 1 ili  $\neg$ , jer je niz korektno zadan. Zato za početno stanje postoje funkcije prijelaza samo za ta tri znaka.

- (1)  $\delta([q_0, B], 0) = ([q_0, 0], X, R)$
- (2)  $\delta([q_0, B], 1) = ([q_0, 1], X, R)$
- (3)  $\delta([q_0, B], \neg) = ([q_0, \neg], X, R)$

Ako je na početku niza neki drugi znak, TS će se zaustaviti, ostatak će u početnom stanju  $[q_0, B]$  koje je neprihvatljivo, a na traci neće biti zapisano ISTINA ili LAŽ. Tako se može detektirati neispravan ulazni niz, iako to zadatak ne zahtijeva. U suprotnom slučaju, ako je na početku niza doista jedan od znakova 0, 1,  $\neg$ , tada TS prelazi u odgovarajuće stanje, piše graničnik u ćeliju koja je sadržavala prvi znak niza te pomiče glavu u desno. Prvi znak niza ostaje pohranjen u radnoj komponenti novog stanja, dok se upravljačka komponenta ne mijenja iz razloga što još nije pomaknut čitav niz.

Stanja  $[q_0, 0]$ ,  $[q_0, 1]$ ,  $[q_0, \neg]$ ,  $[q_0, \wedge]$  i  $[q_0, \vee]$  su stanja prve faze rada TS čije radne komponente sadrže prethodno pročitani znak. Za stanja koja u radnoj komponenti imaju spremljene oznake logičkih operacija postoje tri funkcije prijelaza jer iza svakog od tih znakova u ispravnom nizu mogu doći tri od pet znakova ulazne abecede. Radi se o znakovima 0, 1 i  $\neg$  iz razloga što iza svih logičkih operatora osim argumenata 0 i 1 može doći i  $\neg$ . U slučaju znaka  $\neg$  koji prethodi znaku  $\neg$  radi se o negiranju negacije. U ispravnom logičkom izrazu znaku  $\neg$  može prethoditi beskonačno mnogo znakova  $\neg$  (tada TS nikada ne bi stao).

- (10)  $\delta([q_0, \neg], 0) = ([q_0, 0], \neg, R)$
- (11)  $\delta([q_0, \neg], 1) = ([q_0, 1], \neg, R)$
- (12)  $\delta([q_0, \neg], \neg) = ([q_0, \neg], \neg, R)$
- (13)  $\delta([q_0, \wedge], 0) = ([q_0, 0], \wedge, R)$
- (14)  $\delta([q_0, \wedge], 1) = ([q_0, 1], \wedge, R)$
- (15)  $\delta([q_0, \wedge], \neg) = ([q_0, \neg], \wedge, R)$
- (16)  $\delta([q_0, \vee], 0) = ([q_0, 0], \vee, R)$
- (17)  $\delta([q_0, \vee], 1) = ([q_0, 1], \vee, R)$
- (18)  $\delta([q_0, \vee], \neg) = ([q_0, \neg], \vee, R)$



Za svako od stanja koja u radnoj komponenti imaju spremljene znakove 0 i 1 su definirane tri funkcije prijelaza. Po jedna za znakove  $\wedge$  i  $\vee$  te jedna za znak  $B$ . Znak  $\neg$  u ispravnom nizu se ne može nalaziti neposredno iza 0 ili 1, kao što niti iza 0 ili 1 ne može slijediti druga 0 ili 1. Ako se najprije pročita 0 ili 1, a nakon toga znak  $B$ , tada je TS došao do kraja niza pošto na kraju niza mogu biti samo 0 ili 1, a nakon njih slijedi  $B$ .

$$(4) \delta([q_0, 0], \wedge) = ([q_0, \wedge], 0, R)$$

$$(5) \delta([q_0, 0], \vee) = ([q_0, \vee], 0, R)$$

$$(6) \delta([q_0, 0], B) = ([q_1, B], 0, R)$$

$$(7) \delta([q_0, 1], \wedge) = ([q_0, \wedge], 1, R)$$

$$(8) \delta([q_0, 1], \vee) = ([q_0, \vee], 1, R)$$

$$(9) \delta([q_0, 1], B) = ([q_1, B], 1, R)$$

U tom slučaju TS prelazi iz stanja  $[q_0, 0]$  ili  $[q_0, 1]$  u stanje  $[q_1, B]$  koje je jedno od stanja druge faze rada TS.

Za drugu fazu rada se koriste dva stanja;  $[q_1, B]$  i  $[q_1, \neg]$ . Inicijalno stanje faze je  $[q_1, B]$ . Čitanje znaka  $B$  u inicijalnom stanju znači da je glava pozicionirana na prvu praznu ćeliju desno od zadnjeg znaka ulaznog niza. Zato TS u ćeliju upisuje  $B$  i pomiče glavu u lijevo. TS ne mijenja stanje, jer ulazni niz još nije obrađen, niti se obrađuju pojedini znakovi niza.

$$(19) \delta([q_1, B], B) = ([q_1, B], B, L)$$

Na kraju niza, kao što je već rečeno, mogu biti samo znakovi 0 ili jedan. U stanju  $[q_1, B]$  ti se znakovi preskaču tj. opet se zapisuju na traku.

$$(20) \delta([q_1, B], 0) = ([q_1, B], 0, L)$$

$$(21) \delta([q_1, B], 1) = ([q_1, B], 1, L)$$

Isto vrijedi i za znakove  $\wedge$  i  $\vee$ , zato što se u drugoj fazi rada traži znak  $\neg$ .

$$(22) \delta([q_1, B], \wedge) = ([q_1, B], \wedge, L)$$

$$(23) \delta([q_1, B], \vee) = ([q_1, B], \vee, L)$$

Kada je znak  $\neg$  nađen TS ga briše, a prije toga prelazi u stanje  $[q_1, \neg]$ . Glava se miče u desno kako bi se mogla učitati 0 ili 1 koja se nalazi neposredno desno ili određen broj ćelija u desno od znaka  $\neg$ .

$$(26) \delta([q_1, B], \neg) = ([q_1, \neg], Y, R)$$

Funkcije prijelaza (27) i (28) služe za komplementiranje znakova 0 i 1. TS prelazi u početno stanje (druge faze svoga rada)  $[q_1, B]$ , a glava se opet miče u lijevo, kako bi se obradio ostatak niza.

$$(27) \delta([q_1, \neg], 0) = ([q_1, B], 1, L)$$

$$(28) \delta([q_1, \neg], 1) = ([q_1, B], 0, L)$$

Nakon komplementiranja TS će sigurno učitati jedan znak  $Y$  (zbog brisanja  $\neg$  u jednom od prethodnih koraka, što je zadaća funkcije prijelaza (26)). Također je moguće da TS pročita niz znakova  $Y$ . To će se dogoditi u slučaju da je originalni niz sadržavao podniz znakova  $\neg$  (minimalne duljine 2) te da je TS već obradio jedan ili više znakova s lijevog kraja niza. U svakom slučaju znak  $Y$  se preskače.

$$(24) \delta([q_1, B], Y) = ([q_1, B], Y, L)$$

Iz istog je razloga (slučaj podniza znakova  $\neg$  minimalne duljine 2) potrebna i funkcija (29). Ako je TS već komplementirao (točnije ako je već brisao znak/ove  $\neg$ ), a nalazi se u stanju  $[q_1, B]$  i učita znak  $\neg$  onda prelazi u stanje  $[q_1, \neg]$  te se zahvaljujući (29) glava može pozicionirati na 0 ili 1 na koju se  $\neg$  odnosi.

$$(29) \delta([q_1, \neg], Y) = ([q_1, \neg], Y, R)$$

Treba primijetiti da će se, zbog upravo opisanog načina rada, znakovi 0 i 1 uvijek nalaziti na samom kraju niza te neposredno prije znakova  $\wedge$  i  $\vee$ . Ovisno o tome da li u originalnom nizu

nakon znakova  $\wedge$  i  $\vee$  slijedi nijedan, jedan ili više znakova  $\neg$ , u "obrađenom" nizu iza  $\wedge$  i  $\vee$  može doći nijedan, jedan ili više znakova  $Y$ .

Čitanje graničnika u stanju  $[q_1, B]$  (a to je moguće samo u dotičnom stanju) označava kraj druge faze rada, pošto su obavljene sve operacije komplementiranja podnizova odgovarajućih znakova ulaznog niza. Tada TS prepisuje znak  $X$ , prelazi u stanje  $[q_2, B]$ , početno stanje treće faze rada, a glava se opet pomiče u desno.

$$(25) \delta([q_1, B], X) = ([q_2, B], X, R)$$

Ako ulazni niz ne sadrži barem jedan znak  $\neg$ , nad njim se ne obavljaju nikakve radnje koje rezultiraju njegovom promjenom. Nakon završetka druge faze niz više ne sadrži niti jedan znak  $\neg$ , ako ga je uopće sadržavao.

U trećoj se fazi obavlja konjunkcija nad odgovarajućim znakovima tj. podnizovima znakova. Kako se na početku niza mogu nalaziti 0, 1 i  $Y$ , TS ih u stanju  $[q_2, B]$  nakon čitanja ponovno zapisuje na traku. Isti se prijelazi (tj. funkcije prijelaza (30), (31) i (34)) koriste za prelaženje (čitanje i ponovno zapisivanje) znakova 0, 1 i  $Y$  u preostalom dijelu niza. Znak  $\vee$  se ne može nalaziti na početku niza, ali može u ostatku pa se zato "preskače" funkcijom prijelaza (33).

$$(30) \delta([q_2, B], 0) = ([q_2, B], 0, R)$$

$$(31) \delta([q_2, B], 1) = ([q_2, B], 1, R)$$

$$(34) \delta([q_2, B], Y) = ([q_2, B], Y, R)$$

$$(33) \delta([q_2, B], \vee) = ([q_2, B], \vee, R)$$

Ako nađe na znak  $\wedge$  TS prelazi u stanje  $[q_2, \wedge]$ , koje označava obrađivanje konjunkcije. Znak  $\wedge$  se briše (tj. prepisuje s  $Y$ ), a glava se pomiče u lijevo kako bi se mogao učitati prethodno prijeđen znak 0 ili 1.

$$(32) \delta([q_2, B], \wedge) = ([q_2, \wedge], Y, L)$$

Nakon što se pročita 0 ili 1 TS opet mijenja stanje i to ovisno o pročitanoj znaku (ako je pročitana 0 prelazi u  $[q_2, 0]$ , u protivnom prelazi u  $[q_2, 1]$ ).

$$(36) \delta([q_2, \wedge], 0) = ([q_2, 0], Y, R)$$

$$(37) \delta([q_2, \wedge], 1) = ([q_2, 1], Y, R)$$

Logičko  $I$  je binarna operacija, zato se pročitani znak sprema u radnu komponentu stanja te se briše s trake. Zatim se glava treba pomicati u desno sve dok se ne pozicionira iznad prve 0 ili 1. Budući da se u trećoj fazi rada, ako se u nizu nalazi znak  $\wedge$ , isti zamjenjuje znakom  $Y$ , potrebne su funkcije prijelaza (38) i (41). Iste funkcije služe za prelaženje znaka tj. znakova  $Y$ , koji su potencijalno bili generirani u drugoj fazi rada.

$$(38) \delta([q_2, 0], Y) = ([q_2, 0], Y, R)$$

$$(41) \delta([q_2, 1], Y) = ([q_2, 1], Y, R)$$

Sama konjunkcija se provodi pomoću funkcija prijelaza (39), (40), (42) i (43). Na osnovi znaka spremljenog u radnoj komponenti stanja i znaka učitanoj sa trake, donosi se odluka o tome koji će znak biti zapisan umjesto znaka koji je bio pročitao s trake. TS potom prelazi u stanje  $[q_2, B]$  te se cijeli postupak provođenja konjunkcije može ponoviti ako niz sadrži dodatne znakove  $\wedge$ . Rezultat logičke operacije će biti pohranjen na mjestu drugog operanda, tj. na mjestu desnog od dva korištena znaka, gledano s obzirom na znak  $\wedge$ .

$$(39) \delta([q_2, 0], 1) = ([q_2, B], 0, R)$$

$$(40) \delta([q_2, 0], 0) = ([q_2, B], 0, R)$$

$$(42) \delta([q_2, 1], 1) = ([q_2, B], 1, R)$$

$$(43) \delta([q_2, 1], 0) = ([q_2, B], 0, R)$$

Čitanjem  $X$  u stanju  $[q_2, B]$  završava druga faza rada. Obavljene su sve operacije konjunkcija podnizova odgovarajućih znakova ulaznog niza i tada je TS sigurno u stanju  $[q_2, B]$ . Znak  $X$  se

prepisuje, TS prelazi u stanje  $[q_3, B]$ , početno stanje treće faze rada. Glava za čitanje i pisanje se pomiče u lijevo.

$$(35) \delta([q_2, B], B) = ([q_3, B], B, L)$$

I u trećoj fazi mogu nastati podnizovi znakova  $Y$  (duljine veće ili jednake 2), ako niz sadrži znakove konjunkcije koji su međusobno odijeljeni znakovima 0 ili 1, ili podnizom znakova  $\neg$  iza kojeg slijedi 0 ili 1 (npr.  $\neg\neg 1 \wedge 1 \wedge \neg 0 \wedge 1$ ).

Zbog pravila asocijativnosti (koje glasi  $p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r$ ) u drugoj je fazi svejedno kojim se redoslijedom takvi nizovi obrađuju pa ih ovaj TS obrađuje slijedno s lijeva na desno (kao što je prikazano na slici 2). Tada se znakovi  $Y$  "preskaču" funkcijama (38) i (41) (iako se istim funkcijama mogu prijeći i znakovi  $Y$  koji su upisani u prethodnoj, drugoj fazi). Funkcijom (34) se prelaze samo oni  $Y$  koji su generirani u drugoj fazi.

Četvrtu fazu TS započinje u stanju  $[q_3, B]$ . To je predzadnja faza u kojoj se obavljaju operacije disjunkcije, logičke operacije najmanjeg prioriteta. Za logičko *ILI* također vrijedi pravilo asocijativnosti (dakle  $p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r$ ). Opisani TS operacije disjunkcije izvodi s desna na lijevo. U prethodnim bi se fazama (točnije u 2. i 3. fazi), ako se pripadna operacija nije mogla izvesti, tj. ako niz nije sadržavao odgovarajuće znakove logičkih operacija, nizom samo prolazilo zapisujući učitane znakove u ćelije iz kojih su bili i pročitani. Radna komponenta stanja bi stalno sadržavala znak  $B$ , tj. vrijednost logičkog izraza bi bila nepoznata. U ovoj fazi rada to nije moguće, jer se može dogoditi da ulazni niz ne sadrži znak  $\vee$  pa se tada ne bi utvrdila vrijednost logičkog izraza, što je neprihvatljivo, jer sljedeća i zadnja, peta faza, ne računa logičku vrijednost, već samo formira odgovor TS. Zato TS u stanju  $[q_3, B]$ , čitanjem 0 ili 1 prelazi u stanje  $[q_3, 0]$ , ako je pročitao 0 ili u stanje  $[q_3, 1]$ , ako je pročitao 1 (funkcije prijelaza (44) i (45)). Dakle, TS ne traži znak  $\vee$ , već odmah donosi odluku o vrijednosti logičkog izraza. Ta se odluka, naravno, može promijeniti, ako se učitava odgovarajući znak, no o tome više u nastavku teksta.

$$(44) \delta([q_3, B], 0) = ([q_3, 0], Y, L)$$

$$(45) \delta([q_3, B], 1) = ([q_3, 1], Y, L)$$

Na kraju niza, kao što je već rečeno više puta, mogu se naći samo znakovi 0 ili 1 pa stoga nije potrebna funkcija prijelaza za stanje  $[q_3, B]$  i učitani znak  $Y$ . Međutim, kad je TS u stanjima  $[q_3, 0]$  i  $[q_3, 1]$  (znači da već pročitao zadnji znak niza), moguće je učitati znak  $Y$ , zato su potrebne funkcije prijelaza (46) i (51).

$$(46) \delta([q_3, 0], Y) = ([q_3, 0], Y, L)$$

$$(51) \delta([q_3, 1], Y) = ([q_3, 1], Y, L)$$

Od tri znaka logičkih operacija do sada je "preživio" samo znak  $\vee$ . Ostali su prebrisani u prijašnjim fazama. Zato znak  $\vee$  nije potrebno pamtit u radnu komponentu stanja, već ga se nakon učitavanja samo prebriše.

$$(47) \delta([q_3, 0], \vee) = ([q_3, 0], Y, L)$$

$$(52) \delta([q_3, 1], \vee) = ([q_3, 1], Y, L)$$

Operacije disjunkcije, tj. promjena početne odluke o vrijednosti logičkog izraza, se događa svaki put kada se pročita znak 0 ili 1, a TS je u stanjima  $[q_3, 0]$  ili  $[q_3, 1]$ . Zapravo, zbog same definicije operacije logičkog *ILI*, odluka o promjeni stanja će se donijeti samo u slučaju kada je na kraju niza bila 0 (tj. TS je prešao u stanje  $[q_3, 0]$ ), a zatim se učitava 1. U svim ostalim situacijama, TS ostaje u stanju koje reprezentira primarnu odluku o vrijednosti logičkog izraza zadanog ulaznim nizom. Pročitani znak se također briše, jer je upravo bio obrađen.

$$(48) \delta([q_3, 0], 1) = ([q_3, 1], Y, L)$$

$$(49) \delta([q_3, 0], 0) = ([q_3, 0], Y, L)$$

$$(53) \delta([q_3, 1], 1) = ([q_3, 1], Y, L)$$

$$(54) \delta([q_3, 1], 0) = ([q_3, 1], Y, L)$$

Nakon što se pročita znak graničnik, četvrta faza rada TS je završena. TS je donio odluku o vrijednosti logičkog izraza te se ista zapisuje na traku, u ćeliju u kojoj je bio upisan znak  $X$  (krajnja lijeva ćelija trake). TS prelazi u jedino stanje pete i zadnje faze rada, stanje  $[q_4, B]$ . Glava se po treći put počinje kretati u desno.

$$(50) \delta([q_3, 0], X) = ([q_4, B], 0, R)$$

$$(55) \delta([q_3, 1], X) = ([q_4, B], 1, R)$$

Peta faza formira odgovor TS uređujući znakove na ulaznoj traci. TS se cijelo vrijeme nalazi u stanju  $[q_4, B]$ , glava se stalno kreće u desno, čitaju se znakovi  $Y$ , koji se potom prepisuju znakovima  $B$ .

$$(56) \delta([q_4, B], Y) = ([q_4, B], B, R)$$

Kad se u stanju  $[q_4, B]$  učita znak  $B$  tada TS staje s radom jer za znak  $B$  i stanje  $[q_4, B]$  nije definirana funkcija prijelaza. Odgovor Turingovog stroja je zapisan na ulaznoj traci u njezinoj krajnjoj lijevoj ćeliji.

### Primjer evaluacije vrijednosti logičkog izraza zadanog ulaznim nizom.

Neka je zadan niz;  $\neg 1 \wedge \neg 0 \vee 0 \wedge \neg \neg 1$ . Rad TS se prati preko njegovih konfiguracija.

$[q_0, B] \neg 1 \wedge \neg 0 \vee 0 \wedge \neg \neg 1 \succ X[q_0, \neg] 1 \wedge \neg 0 \vee 0 \wedge \neg \neg 1 \succ X\neg[q_0, \neg] 1 \wedge \neg 0 \vee 0 \wedge \neg \neg 1 \succ$   
 $\succ X\neg[q_0, 1] \wedge \neg 0 \vee 0 \wedge \neg \neg 1 \succ X\neg 1[q_0, \wedge] \neg 0 \vee 0 \wedge \neg \neg 1 \succ X\neg 1 \wedge [q_0, \neg] 0 \vee 0 \wedge \neg \neg 1 \succ$   
 $\succ X\neg 1 \wedge \neg[q_0, 0] \vee 0 \wedge \neg \neg 1 \succ X\neg 1 \wedge \neg 0[q_0, \vee] 0 \wedge \neg \neg 1 \succ X\neg 1 \wedge \neg 0 \vee [q_0, 0] \wedge \neg \neg 1 \succ$   
 $\succ X\neg 1 \wedge \neg 0 \vee 0[q_0, \wedge] \neg \neg 1 \succ X\neg 1 \wedge \neg 0 \vee 0 \wedge [q_0, \neg] \neg 1 \succ X\neg 1 \wedge \neg 0 \vee 0 \wedge \neg[q_0, \neg] \neg 1 \succ$   
 $\succ X\neg 1 \wedge \neg 0 \vee 0 \wedge \neg[q_0, \neg] 1 \succ X\neg 1 \wedge \neg 0 \vee 0 \wedge \neg \neg[q_0, 1] \succ$   
 $\succ X\neg 1 \wedge \neg 0 \vee 0 \wedge \neg \neg 1[q_1, B] \succ X\neg 1 \wedge \neg 0 \vee 0 \wedge \neg \neg[q_1, B] 1 \succ X\neg 1 \wedge \neg 0 \vee 0 \wedge \neg[q_1, B] \neg 1 \succ$   
 $\succ X\neg 1 \wedge \neg 0 \vee 0 \wedge \neg Y[q_1, \neg] 1 \succ X\neg 1 \wedge \neg 0 \vee 0 \wedge \neg[q_1, B] Y 0 \succ X\neg 1 \wedge \neg 0 \vee 0 \wedge \neg[q_1, B] \neg Y 0 \succ$   
 $\succ X\neg 1 \wedge \neg 0 \vee 0 \wedge \neg Y[q_1, \neg] Y 0 \succ X\neg 1 \wedge \neg 0 \vee 0 \wedge \neg YY[q_1, \neg] 0 \succ X\neg 1 \wedge \neg 0 \vee 0 \wedge \neg Y[q_1, B] Y 1 \succ$   
 $\succ X\neg 1 \wedge \neg 0 \vee 0 \wedge \neg[q_1, B] YY 1 \succ X\neg 1 \wedge \neg 0 \vee 0 \wedge [q_1, B] \neg YY 1 \succ X\neg 1 \wedge \neg 0 \vee 0 \wedge Y[q_1, \neg] YY 1 \succ$   
 $\succ X\neg 1 \wedge \neg 0 \vee 0 \wedge Y Y[q_1, \neg] Y 1 \succ X\neg 1 \wedge \neg 0 \vee 0 \wedge Y YY[q_1, \neg] 1 \succ X\neg 1 \wedge \neg 0 \vee 0 \wedge Y Y[q_1, B] Y 0 \succ$   
 $\succ X\neg 1 \wedge \neg 0 \vee 0 \wedge Y[q_1, B] YY 0 \succ X\neg 1 \wedge \neg 0 \vee 0 \wedge [q_1, B] YYYY 0 \succ X\neg 1 \wedge \neg 0 \vee 0[q_1, B] \wedge YYYY 0 \succ$   
 $\succ X\neg 1 \wedge \neg 0 \vee [q_1, B] 0 \wedge YYYY 0 \succ X\neg 1 \wedge \neg 0[q_1, B] \vee 0 \wedge YYYY 0 \succ X\neg 1 \wedge \neg[q_1, B] 0 \vee 0 \wedge YYYY 0 \succ$   
 $\succ X\neg 1 \wedge [q_1, B] \neg 0 \vee 0 \wedge YYYY 0 \succ X\neg 1 \wedge Y[q_1, \neg] 0 \vee 0 \wedge YYYY 0 \succ X\neg 1 \wedge [q_1, B] Y 1 \vee 0 \wedge YYYY 0 \succ$   
 $\succ X\neg 1[q_1, B] \wedge Y 1 \vee 0 \wedge YYYY 0 \succ X\neg[q_1, B] 1 \wedge Y 1 \vee 0 \wedge YYYY 0 \succ X\neg[q_1, B] \neg 1 \wedge Y 1 \vee 0 \wedge YYYY 0 \succ$   
 $\succ X\neg Y[q_1, \neg] 1 \wedge Y 1 \vee 0 \wedge YYYY 0 \succ X\neg[q_1, B] Y 0 \wedge Y 1 \vee 0 \wedge YYYY 0 \succ X[q_1, B] \neg Y 0 \wedge Y 1 \vee 0 \wedge YYYY 0 \succ$   
 $\succ XY[q_1, \neg] Y 0 \wedge Y 1 \vee 0 \wedge YYYY 0 \succ XYY[q_1, \neg] 0 \wedge Y 1 \vee 0 \wedge YYYY 0 \succ XY[q_1, B] Y 1 \wedge Y 1 \vee 0 \wedge YYYY 0 \succ$   
 $\succ X[q_1, B] YY 1 \wedge Y 1 \vee 0 \wedge YYYY 0 \succ [q_1, B] XYY 1 \wedge Y 1 \vee 0 \wedge YYYY 0 \succ$   
 $\succ X[q_2, B] YY 1 \wedge Y 1 \vee 0 \wedge YYYY 0 \succ XY[q_2, B] Y 1 \wedge Y 1 \vee 0 \wedge YYYY 0 \succ XYY[q_2, B] 1 \wedge Y 1 \vee 0 \wedge YYYY 0 \succ$   
 $\succ XYY 1[q_2, B] \wedge Y 1 \vee 0 \wedge YYYY 0 \succ XYY[q_2, \wedge] 1 Y Y 1 \vee 0 \wedge YYYY 0 \succ XYYY[q_2, 1] YY 1 \vee 0 \wedge YYYY 0 \succ$

$\succ$   $XXXXY[q_2, 1]Y1 \vee 0 \wedge YYY0 \succ XXXYYY[q_2, 1]1 \vee 0 \wedge YYY0 \succ XXXYYY1[q_2, B] \vee 0 \wedge YYY0 \succ$   
 $\succ XXXYYY1 \vee [q_2, B]0 \wedge YYY0 \succ XXXYYY1 \vee 0[q_2, B] \wedge YYY0 \succ XXXYYY1 \vee [q_2, \wedge]0YYY0 \succ$   
 $\succ XXXYYY1 \vee Y[q_2, 0]YYYY0 \succ XXXYYY1 \vee Y[q_2, 0]YYY0 \succ XXXYYY1 \vee YY[q_2, 0]YY0 \succ$   
 $\succ XXXYYY1 \vee YYY[q_2, 0]Y0 \succ XXXYYY1 \vee YYY[q_2, 0]0 \succ XXXYYY1 \vee YYY0[q_2, B] \succ$   
 $\succ XXXYYY1 \vee YYY[q_3, B]0 \succ XXXYYY1 \vee YYY[q_3, 0]YY \succ XXXYYY1 \vee YY[q_3, 0]YYY \succ$   
 $\succ XXXYYY1 \vee YY[q_3, 0]YYYY \succ XXXYYY1 \vee Y[q_3, 0]YYYY \succ XXXYYY1 \vee [q_3, 0]YYYYY \succ$   
 $\succ XXXYYY[q_3, 0]1YYYYY \succ XXXY[q_3, 1]YYYYYYY \succ XXXY[q_3, 1]YYYYYYYY \succ$   
 $\succ XYY[q_3, 1]YYYYYYYYY \succ XY[q_3, 1]YYYYYYYYY \succ X[q_3, 1]YYYYYYYYY \succ$   
 $\succ [q_3, 1]XXXXXXXXY \succ$   
 $\succ 1[q_4, B]YYYYYYYYY \succ 1B[q_4, B]YYYYYYYYY \succ 1BB[q_4, B]YYYYYYYYY \succ 1BBB[q_4, B$   
 $]YYYYYYYYY \succ 1BBBB[q_4, B]YYYYYYY \succ 1BBBBB[q_4, B]YYYYYYY \succ 1BBBBBB[q_4, B]YYYYY \succ$   
 $1BBBBBBB[q_4, B]YYYYY \succ 1BBBBBBB[q_4, B]YYYYY \succ 1BBBBBBB[q_4, B]YYY \succ 1BBBBBBB[q_4, B$   
 $]YY \succ 1BBBBBBB[q_4, B]Y \succ 1BBBBBBB[q_4, B]$

## Zaključak

Izgrađeni Turingov stroj za zadani logički izraz staje i odgovara ISTINA ili LAŽ u ovisnosti o vrijednosti logičkog izraza. Odgovor ISTINA je ostvaren zapisivanjem znaka 1 u prvu lijevu ćeliju ulazne trake, a odgovor LAŽ zapisivanjem znaka 0 u istu ćeliju. Nakon odgovaranja TS prestaje s radom i to u jedinom prihvatljivom stanju.

Pri izgradnji TS su korištena stanja s višekomponentnim oznakama, radi lakše izgradnje i lakšeg praćenja rada TS.

Skup stanja TS sadrži 16 stanja, a rad TS određuje 56 funkcija prijelaza. Rad TS se može logički podijeliti u 5 faza.

U prvoj se fazi originalni ulazni niz prepisuje za jedno mjesto u desno kako bi se na početak niza dodao znak graničnik. Za provedbu prve faze je potrebno 6 stanja i 18 funkcija prijelaza. U drugoj se fazi provode komplementiranja odgovarajućih podnizova ulaznog niza, tj. izvodi se operacija logičko *NE*. Za provedbu druge faze su potrebna 2 stanja i 11 funkcija prijelaza. U trećoj se fazi provode operacije konjunkcije odgovarajućih podnizova ulaznog niza, tj. izvodi se operacija logičko *I*. Za provedbu treće faze su potrebna 4 stanja i 14 funkcija prijelaza.

U četvrtoj se fazi provode operacije disjunkcije odgovarajućih podnizova ulaznog niza, tj. izvodi se operacija logičko *ILI*. Za provedbu četvrte faze su potrebna 3 stanja i 12 funkcija prijelaza.

U petoj se fazi formira odgovor TS o vrijednosti logičkog izraza. Za provedbu pete faze je potrebno 1 stanje i 1 funkcija prijelaza.

Iz navedenih podataka je jasno vidljivo da je prva faza rada TS najzahtjevnija, no ona je također i u potpunosti neophodna jer se u protivnom ne bi mogle provesti faze tri, četiri i pet. Iako zadatak ne zahtijeva provjeru ispravnosti ulaznog niza, TS u prvoj fazi rada, ako niz nije korektno zadan, staje s radom dok se nalazi u neprihvatljivom stanju.

## **Literatura**

Prof. dr. sc. Srbljić, S.: Uvod u teoriju računarstva, 1. izdanje, Element, Zagreb 2007.