Université de Strasbourg
Logique et programmation logique — Feuille de TD 3 (Correction)

Systèmes Formels

On rappelle qu'en cas d'ambiguïté, l'implication "$\Rightarrow$" est associative à droite ; par exemple, $p \Rightarrow q \Rightarrow r$ signifie $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$.

1. Axiome K : $A \Rightarrow B \Rightarrow A$
2. Axiome S : $(A \Rightarrow B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow B) \Rightarrow A \Rightarrow C$
3. Règle :

$$\frac{A \Rightarrow B \qquad A}{B}\ \text{MP}$$

FIGURE 1 – Système de Hilbert minimal H

Exercice 1

Montrer que les formules suivantes sont des théorèmes de la logique minimale de Hilbert :

1) Montrez que $p \Rightarrow p$.
2) Montrez que $p \Rightarrow q \Rightarrow q$
3) Montrez que $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow r) \Rightarrow p \Rightarrow r$
4) Montrez aussi que $p \Rightarrow (p \Rightarrow p \Rightarrow q) \Rightarrow p \Rightarrow q$

Exercice 2

Soit H^+ le système H de Hilbert augmenté de la règle suivante :

$$\frac{A \Rightarrow B \Rightarrow C}{B \Rightarrow A \Rightarrow C}$$

1) Montrez que $\Delta \vdash_H P$ si et seulement si $\Delta \vdash_{H^+} P$
2) Déduisez-en que $\vdash_H (p \Rightarrow q) \Rightarrow (r \Rightarrow p) \Rightarrow r \Rightarrow q$

Exercice 3 Système `fg`

Le système `fg` est défini par $\mathtt{fg} = (\Sigma_{\mathtt{fg}}, F_{\mathtt{fg}}, A_{\mathtt{fg}}, R_{\mathtt{fg}})$ avec :

- $\Sigma_{\mathtt{fg}} = \{\mathtt{f}, \mathtt{g}, \mathtt{-}\}$;
- $F_{\mathtt{fg}} = \Sigma^*_{\mathtt{fg}}$;
- $A_{\mathtt{fg}} = \{X\mathtt{f\text{-}g} \mid X \in \mathtt{-}^*\}$;
- $R_{\mathtt{fg}}$ contient une seule règle d'inférence définie par :

$$\frac{X\mathtt{f}Y\mathtt{g}Z}{X\mathtt{f}Y\mathtt{g}ZX}$$

1 - Énumérer quelques axiomes de `fg`. Donner un théorème de `fg` issu d'une déduction de longueur 0, puis un autre issu d'une déduction de longueur 1.

2 - Les formules suivantes sont-elles des théorèmes de `fg` ?

F_1 `--f-g------`

F_2 `--f---g------`

F_3 `--f--g---`

3 - Quelle est la forme générale des théorèmes de `fg` ?

Correction :

1.
2. Oui Non Non ce ne sont pas des théorèmes car il y a un seul - entre f et g.
3. Les théorèmes sont de la forme : $-^n f - g-^{np}$

Exercice 4 Jeu des allumettes

On dispose d'un nombre n d'allumettes ($n > 0$) sur une table. Les joueurs A et B jouent chacun leur tour et peuvent retirer de 1 à 3 allumettes de la table. Le joueur qui retire la dernière allumette a gagné.

Exemple de partie :

On dispose 12 allumettes. C'est au joueur A de commencer.

1. Le joueur A retire 2 allumettes, il en reste 10
2. Le joueur B retire 1 allumettes, il en reste 9
3. Le joueur A retire 3 allumettes, il en reste 6
4. Le joueur B retire 2 allumettes, il en reste 4
5. Le joueur A retire 2 allumettes, il en reste 2
6. Le joueur B retire 2 allumettes, il n'en reste plus, le joueur B a gagné.

Nous allons étudier des systèmes formels qui tente de modéliser ce jeu. Soit E l'ensemble des joueurs qui contient seulement deux éléments : A et B. Le language est l'ensemble des triplets $E \times E \times \mathbb{N}^*$.

La formule (X, Y, n) est valide $\models (X, Y, n)$ signifie que le joueur X peut gagner de façon sûre si c'est au joueur Y de jouer et qu'il reste n allumettes sur la table. Par exemple la formule $(A, A, 2)$ signifie que le joueur A peut gagner de façon sûre si c'est au joueur A de jouer et qu'il reste 2 allumettes sur la table.

1) Etant données nos conventions est-ce que la formule $(A, B, 4)$ est valide ? pourquoi ?
2) Etant données nos conventions est-ce que la formule $(A, B, 5)$ est valide ? pourquoi ?
3) Proposer un ensemble de formules qui expriment le fait que si c'est à A de jouer et qu'il reste moins de 3 allumettes alors il a gagné. Même question pour B.
4) Est-ce que $\models (X, Y, n)$ implique que $\models (X, X, n)$?
5) Considérons le système formel suivant :

   Axiomes :

$$\frac{}{(A, B, 4)}$$

$$\frac{}{(B, A, 4)}$$

   Règles :

$$\frac{(X, Y, n), \quad \text{avec } X \neq Y}{(X, X, n+1)}$$

$$\frac{(X, Y, n), \quad \text{avec } X \neq Y}{(X, X, n+2)}$$

$$\frac{(X, Y, n), \quad \text{avec } X \neq Y}{(X, X, n+3)}$$

   (a) Montrer que $(A, A, 5)$ est un théorème de ce système.
   (b) La formule $(A, B, 8)$ est-elle un théorème de ce système ? justifier.
   (c) Est-ce que ce système est correct ? c'est à dire est-ce que tous les théorèmes de ce système sont des formules valides ? justifier.

(d) Est-ce que ce système est complet ? c'est à dire est-ce que toutes les formules valides sont des théorèmes de ce système ? justifier.

(e) On ajoute la règle suivante au système

$$\frac{(X,Y,n), \quad \text{avec } X \neq Y}{(X,Y,n+4)}$$

Le système est-il correct ?

(f) Montrer que $\vdash (X,Y,n)$ si et seulement si $\not\vdash (X,X,n)$

(g) Le système est-il complet ? Si non que peut-on ajouter au système pour qu'il le soit ?

Correction :

1. La formule $(A,B,4)$ est valide. En effet, si c'est au joueur B de jouer et qu'il reste 4 allumettes, quoi que fasse B, il restera au plus 3 allumettes au prochain tour et donc A pourra gagner.
2. Cette formule $(A,B,5)$ n'est pas valide. En effet, si c'est au joueur B de jouer et qu'il reste 5 allumettes et que B prend *une* allumette, alors c'est à A de jouer et il reste 4 allumettes donc d'après le même raisonnement que dans la question 1, B est gagnant. Donc A ne gagne pas à coup sûr.
3. $$\begin{array}{ll} (A,A,1) & (B,B,1) \\ (A,A,2) & (B,B,2) \\ (A,A,3) & (B,B,3) \end{array}$$
4. Non cette implication n'est pas correcte. En effet, $\models (A,B,n)$ signifie que si c'est à B de jouer et qu'il reste n allumettes alors A gagne à coup sûr. Donc si (A,B,n) est valide alors (B,B,n) est n'est pas valide car si A gagne à coup sûr alors B ne gagne pas à coup sûr !
5. (a) On applique la première règle (avec $n=4$) au premier axiome.

   (b) $(A,B,8)$ n'est pas un théorème. Ce n'est pas un axiome et ce n'est la conclusion d'aucune règle.

   (c) Ce système est correct. Soit on liste l'ensemble des théorèmes de ce système et on montre qu'il sont tous valides, soit on procède par induction (les axiomes sont valides, et les règles préservent la validité).

   (d) Ce système n'est pas complet, $(A,A,1)$ n'est pas un théorème.

   (e) On peut montrer par récurrence que si (X,Y,n) est un théorème, alors $n=4k$. On peut montrer la réciproque par construction. De même on peut montrer que (X,X,n) est un théorème si et seulement si $n=4k+i$, $i=1$, 2 ou 3. Donc $\vdash (X,Y,n)$ implique $n=4k$ implique $\not\vdash (X,X,n)$ et $\vdash (X,X,n)$ implique $n \neq 4k$ implique $\not\vdash (X,Y,n)$.

Exercice 5 Système $\mathtt{pe}$

Le système $\mathtt{pe}$ est défini par $\mathtt{pe} = (\Sigma_{\mathtt{pe}}, F_{\mathtt{pe}}, A_{\mathtt{pe}}, R_{\mathtt{pe}})$ avec :

- $\Sigma_{\mathtt{pe}} = \{p, e, -\}$;
- $F_{\mathtt{pe}} = \Sigma^*_{\mathtt{pe}}$;
- $A_{\mathtt{pe}} = \{ \, pe \, \}$;
- $R_{\mathtt{pe}}$ contient deux règles d'inférence définies par (avec X, Y et $Z \in -^*$) :

$$\frac{XpYeZ}{X{-}pYeZ{-}} R_1 \qquad\qquad \frac{XpYeZ}{XpY{-}eZ{-}} R_2$$

1) Énumérer quelques axiomes de $\mathtt{pe}$. Donner un théorème de $\mathtt{pe}$ issu d'une déduction de longueur 0, puis un autre issu d'une déduction de longueur 1.
2) Les formules suivantes sont-elles des théorèmes de $\mathtt{pe}$?

   F_1 $--p--e---$

   F_2 $--p---e-----$
3) Donner une interprétation de $\mathtt{pe}$ afin qu'il soit correct et complet ?
4) L'affirmation suivante est-elle vrai ? $XpYeZ \vdash YpXeZ$

5) Les affirmations suivantes sont-elles vraies dans votre modèle.
   - Si $A \models B$ alors $A \vdash B$
   - Si $A \vdash B$ alors $A \models B$

Correction :

1. Les théorèmes sont de la forme : $-^a p -^b e -^{a+b}$

Exercice 6 Système MU de D. Hofstadter
On considère le système formel MU défini par :

- Σ_{MU} = {M, I, U} ;
- $F_{MU} = \Sigma^*_{MU}$;
- A_{MU} = {MI} ;
- $R_{MU} = \{r_1, r_2, r_3, r_4\}$ avec :

$$\frac{fI}{fIU}\, r_1 \qquad \frac{Mf}{Mff}\, r_2 \qquad \frac{fIIIg}{fUg}\, r_3 \qquad \frac{fUUg}{fg}\, r_4$$

1) Montrer que MUI, et $MUIU$ sont des théorèmes de MU.
2) Montrer que tout théorème de MU commence par M.
3) Est-ce que MU est un théorème de MU ? (indication : montrer que le nombre de I des théorèmes de MU suit une certaine règle arithmétique).
4) Montrer que pour $t \in \mathbb{N}$, MI^{2^t} et $MI^{2^t}U$ sont des théorèmes de MU.
5) Caractériser les théorèmes de MU.

Annale (contrôle terminal 2017)

Dans cette partie on ne considère que les formules contenant l'opérateur $\Rightarrow$ et on définie un nouvelle interprétation pour les formules de la logique propositionnelle. On définie l'interprétation J comme une fonction de l'ensemble des variables propositionnelles dans l'ensemble $\{-1, 0, 1\}$. Une interprétation J s'étend à toutes les formules (n'utilisant que le connecteur $\Rightarrow$) de la façon suivante, $J(A \Rightarrow B)$

- est égale à -1 si $J(A) = 1$ et $J(B) = -1$
- est égale à 0 si $J(B) = 0$ et $J(A) \neq 0$
- est égale à 1 dans tous les autres cas

A	B	$A{\Rightarrow}B$
0	0	1
0	1	1
0	-1	1
1	0	0
1	1	1
1	-1	-1
-1	0	0
-1	1	1
-1	-1	1

TABLE 1 – interprétation J

Le tableau 1 résume la valeur de $J(A \Rightarrow B)$ en fonction de $J(A)$ et de $J(B)$. En utilisant cette interprétation, on dit qu'une interprétation J satisfait une formule F si $J(F) = 1$ et **on dit qu'une formule F est valide, si toute interprétation satisfait** F. Dans la suite, on admettra que la formule axiome S : $(A{\Rightarrow}B{\Rightarrow}C){\Rightarrow}(A{\Rightarrow}B){\Rightarrow}A{\Rightarrow}C$ est valide.

1) Dresser le tableau de vérité des formules suivantes (en utilisant l'interprétation J).
   (a) Axiome K : $B{\Rightarrow}A{\Rightarrow}B$
   (b) Schéma de Peirce $\mathcal{P}$: $((A{\Rightarrow}B){\Rightarrow}A){\Rightarrow}A$
2) Pour notre interprétation, le système de Hilbert minimal H est-il correct ?
3) La formule de Peirce est-elle un théorème dans le système H ?
4) Que peut-on en déduire pour le système H avec l'interprétation standard I des formules (la définition de I est rappelée en annexe).
5) Soit H_+ le système H de Hilbert augmenté du schéma d'axiomes $\mathcal{P}$.

(a) Sous l'interprétation J, le système H_+ est-il correct ?

(b) Sous l'interprétation I, le système H_+ est-il correct ?

Correction :

1)

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A \Rightarrow B$	$(A \Rightarrow B) \Rightarrow A$	$((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$
0	0	1	1	0	1
0	1	1	1	0	1
0	-1	1	1	0	1
1	0	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1
1	-1	-1	1	1	1
-1	0	0	1	1	-1
-1	1	1	1	-1	1
-1	-1	1	1	-1	1

2) Il est admis que l'axiome S est valide (voir énoncé) et d'après la question précédente l'axiome K est aussi valide. De plus on remarque que si A et B sont deux formules telles que A et $A \Rightarrow B$ sont valides, alors B est aussi valide (voir Table 1, sur seule ligne ou A et $A \Rightarrow B$ valent 1, B vaut aussi 1). Donc la règle du Modus Ponens conserve la validité des formules. On en déduit donc, par induction structurelle que tous les théorèmes de H sont valides.

3) d'après la première question, la formule de Peirce n'est pas valide, donc, comme le système est correcte, la formule de Peirce ne peut pas être un théorème.

4) D'après la question précédente, la formule de Peirce n'est pas un théorème. Cela est vrai quelque soit l'interprétation des formules, donc on en déduit que le système H avec l'interprétation standard I n'est pas complet (la formule de Peirce est valide avec l'interprétation I, mais ce n'est pas un théorème).

5) (a) H_+ n'est pas correct sous l'interprétation J car on a vu que la formule de Peirce n'est pas valide

(b) H reste correcte sous l'interprétation I car le modus ponens conserve la validité des formules et les nouveaux axiomes sont valides.