Théorie des Graphes
Contrôle Terminal

Telecom Physique Strasbourg – 1A

theoleyre@unistra.fr

Modalités : La durée de l'épreuve est de 2 heures. Une feuille A4 recto-verso de notes de cours est autorisée. **Justifiez toutes vos réponses**, avec des illustrations si nécessaire. **Démontrez** également vos assertions de **façon formelle** et non ambigüe.

Cet examen écrit est noté sur 23 points. Les exercices peuvent être traités dans le désordre, et ne sont pas classés par ordre de difficulté.

Exercice 1: Plus courts chemins (5 points)

Soit un graphe dirigé acyclique contenant l'ensemble de sommets S, et arêtes, E, et la fonction p(e) assignant une valeur réelle positive ou nulle à chaque arête.

Question 1 : Vous rappellerez ce qu'est une partition en niveaux cycles, et donnerez un pseudo-code, permettant de la construire. Vous prouverez formellement qu'il s'agit bien d'une partition du graphe.

Question 2 : Comment calculer les plus courtes routes (et non pas seulement les distances) avec une telle partition ? Vous en donnerez le pseudo-code pour la recherche d'une route partant de x (sommet quelconque).

Question 3 : Quelle est la complexité en mémoire et temps de cet algorithme (niveaux-cycles, suivi du calcul) ?

Question 4 : Prouvez la terminaison et l'exactitude de cet algorithme

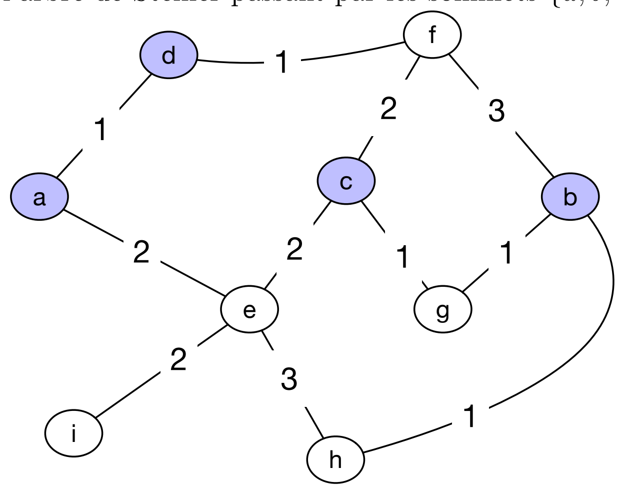
Exercice 2: Arbre Couvrant (6 points)

Question 5 : Rappelez la définition d'un arbre couvrant.

Question 6 : Soit un graphe G(S,A). Prouvez que si les poids de ses arêtes sont deux à deux distincts, il n'existe qu'un seul et unique arbre couvrant de poids minimum.

Le problème de Steiner correspond à trouver l'ensemble d'arêtes de poids minimum tel que le sous-graphe induit soit connexe, et les sommets comprennent un ensemble donné.

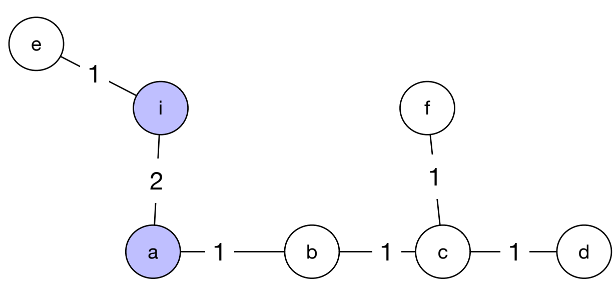
Question 7 : Construisez l'arbre de Steiner passant par les sommets $\{a, b, c, d\}$ dans le graphe suivant.



Question 8 : Vous discuterez de la différence avec le problème de l'arbre recouvrant de poids minimum. Un arbre de Steiner est-il unique ?

On propose d'utiliser un Kruskal additif : on construit d'abord l'arbre couvrant de poids minimum, puis on étaye les branches "inutiles".

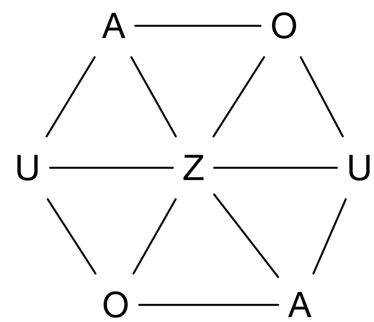
Question 9 : Pouvez-vous donner le pseudo-code permettant d'étayer les branches ? (exemple ci-dessous : sommets d,e,f,c,b)



Question 10 : Pouvez vous prouver que cette approche est optimale (ou ne l'est pas) ?

Exercice 3: Jeu (5 points)

Soit le graphe suivant, dont les sommets correspondent à des lettres, et des arêtes relient des arêtes qui se suivent. Nous avons par exemple le graphe ci-dessous à 6 sommets.



Le but du jeu est de compter le nombre de possibilités pour créer par exemple le mot ZAZOU.

Question 11 : Pouvez vous donner un algorithme calculant le nombre de manières de former un certain mot (défini sous la forme d'un tableau de caractères de taille N) en ne passant qu'une fois par chaque sommet ? Vous prouverez qu'il a un comportement correct. Vous en donnerez sa complexité en temps et mémoire.

Question 12 : Pouvez vous modifier le précédent algorithme pour autoriser à passer plusieurs fois par le même sommet ? Vous en donnerez sa complexité en temps et mémoire.

Exercice 4: Euler (4 points)

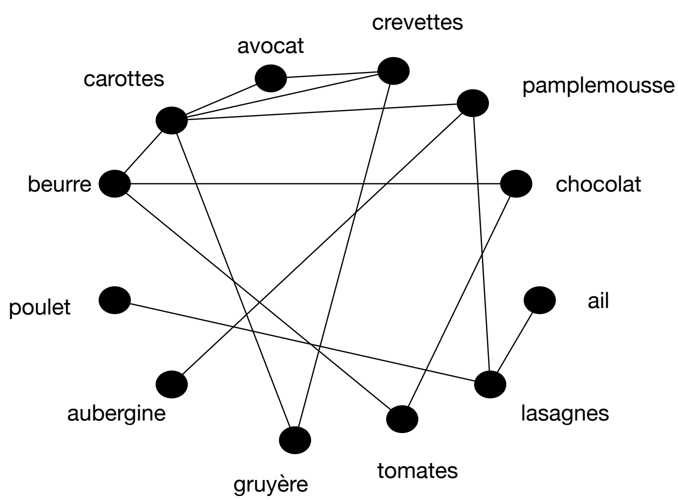
Euler s'était intéressé aux ponts de la ville Koenigsberg. En effet, cette ville possédait de nombreux ponts, et le mathématicien se demandait s'il était possible de revenir à ce point de départ en traversant une et une seule fois chaque pont de la ville.

Question 13 : Vous rappellerez le problème correspondant en théorie des graphes, et la condition nécessaire et suffisante dans ce problème de décision.

Question 14 : Vous redémontrerez ce théorème.

Exercice 5: Les graphes culinaires (3 points)

Soit le contenu de mon frigo représenté sur le graphe ci-dessous.



Question 15 : Supposons que les arêtes relient des ingrédients que nous pouvons mélanger dans un même plat. Je souhaite créer un plat composé du plus grand nombre d'ingrédients. Comment puis je formuler ce problème en théorie des graphes ?

Question 16 : Supposons que les arêtes correspondent à des ingrédients que nous ne pouvons **pas** réunir. Je souhaite créer un plat composé du plus grand nombre d'ingrédients. Comment puis je formuler ce problème en théorie des graphes ?
Pouvez vous proposer une heuristique ? Quelle est sa complexité ?