Théorie des Graphes
Codage matriciel et Relations

TPS 1A INOC

theoleyre@unistra.fr

Objectif : maitriser les représentations matricielles de graphes, et les propriétés classiques dans les relations

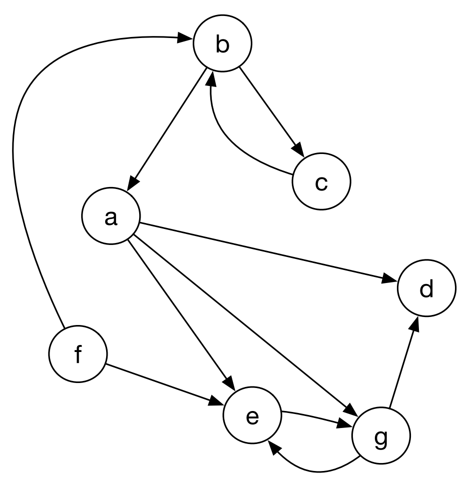
Durée : 3 heures

Partie 1

Codage Matriciel

Exercice 1: Matrice d'incidence

1. Quelles sont les dimensions de la matrice d'incidence d'un graphe G(S,A)
2. Donnez la matrice d'incidence des graphes ci-dessous.



3. Donnez également un algorithme permettant de calculer le degré entrant et sortant de chaque sommet, tel que :

— Entrée : $MatI[]$
— Sorties : $degE[]$ et $degS[]$

```
#include <stdio.h>
#define         N       100     //sommets
#define M       200  //aretes
short MatI[N][M];       // matrice d'incidence
short degE[N];          //degre entrant
short degS[N];          //degre sortant
}
```

Exercice 2: Matrice d'adjacence

1. Donnez la matrice d'adjacence du graphe précédent après avoir rappelé ses dimensions
2. Quelle est la propriété de la matrice d'adjacence d'un graphe non orienté ? Qu'en déduisez vous quant à la complexité en terme d'opérations et de mémoire ?

Exercice 3: Liste d'adjacence

1. Donnez la liste d'adjacence du graphe précédent après avoir rappelé ses dimensions
2. Discutez de la taille mémoire des différentes structures de données
3. Donnez un pseudo-code pour calculer le degré entrant vs. sortant des sommets

Partie 2

Graphes et Relations

Exercice 1: Relation

$\mathcal{R}$ la relation sur S donnée par $\mathcal{R} = \{(A, B), (B, C), (C, D), (D, E), (E, F), (A, F), (D, A)\}$.

Dessiner le graphe orienté G défini par $G = (S, \mathcal{R})$. $\mathcal{R}$ est-elle symétrique, réflexive, transitive ?

Écrire la matrice d'adjacence de $\mathcal{R}$.

Exercice 2: Relation sous forme de matrice

R la matrice :

$$R : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarquer que R définit une relation $\mathcal{R}$ sur tout sous-ensemble de S de cardinal 5, et écrire cette relation.

Dire si $\mathcal{R}$ est symétrique, réflexive, transitive.

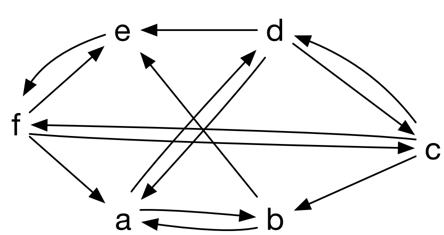
Enfin, dessiner le graphe orienté $G = (S, \mathcal{R})$ induit par cette relation.

Exercice 3: Relation sous forme de condition

Soit la relation d'ordre R définie sur l'ensemble $\{1,2,3,4,5,6\}$ définie par $R = \{(a, b)|b = a + 1\}$. Cette relation est-elle réflexive, symétrique et/ou transitive ?

Exercice 4: Codage d'un graphe

$G = (S, \mathcal{R})$ le graphe orienté :



Considérer la définition d'un graphe orienté $< S, A, \alpha, \beta >$ où :

— S est un ensemble de sommets,

— A est un ensemble d'arêtes,

— $\alpha : A \to S$ donne l'extremité initiale d'une arête,

— $\beta : A \to S$ donne l'extremité finale d'une arête, et décrire G avec cette définition. Donner la matrice d'incidence de G.

Partie 3

Manipulations matricielles

Exercice 1: Propriétés matricielles

Pour chacune des relations définies par les matrices d'adjacence ci-dessous, indiquer si elle est réflexive, symétrique, transitive, faiblement ou fortement anti-symétrique. Quelles sont les relations d'équivalence ? les relations d'ordre ?

$$R_0 : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R_1 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R_2 : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_3 : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad R_4 : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R_5 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2: Composition et transitivité

Soient S un ensemble et $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ deux relations sur S. On appelle composée de $\mathcal{R}_1$ par $\mathcal{R}_2$, et on la note $\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1$, la relation :

$$\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1 = \{(a, b) \in S \times S \mid \exists c \in S, ((a, c) \in \mathcal{R}_1) \wedge ((c, b) \in \mathcal{R}_2)\}.$$

1. Comment calculer la matrice d'adjacence de la composée de deux relations données par leur matrice d'adjacence ?
2. Calculer la composée de R_4 par elle-même, et montrer qu'une relation $\mathcal{R}$ est transitive si et seulement si $\mathcal{R} \circ \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}$.
3. Proposer un algorithme testant si une relation, donnée par sa matrice d'adjacence, est transitive.

Partie 4

Structure de données

Exercice 1: Structures de données et algorithmes

Nous supposons que le graphe est codé sous la forme d'une matrice d'adjacence. Écrire en pseudo-code des algorithmes pour :

1. tester si une relation est réflexive ;
2. tester si une relation est symétrique ;
3. tester si une relation est une relation d'ordre ;

Exercice 2: Degrés

1. Construire le graphe dont l'ensemble des sommets est $[\![1, 7]\!]$ et correspondant à la relation de divisibilité (*i.e.*, il y a un arc entre x et y si et seulement si x divise y). Donner les degrés entrants et sortants de chaque sommet.
2. Cette relation de divisibilité correspond-elle à une relation d'ordre ?
3. Construire un graphe $G = (S, A)$ où $S = \{s_1, s_2, s_3\}$ et :
   — $d^+_{s_1} = 1$ et $d^-_{s_1} = 1$;
   — $d^+_{s_2} = 3$ et $d^-_{s_2} = 2$;
   — $d^+_{s_3} = 1$ et $d^-_{s_3} = 2$.
4. Une suite de couples d'entiers est une suite graphique si elle correspond aux degrés des sommets d'un graphe orienté (le premier élément du couple correspondant au degré entrant et le second au degré sortant). Les suites suivantes sont-elles graphiques ?
   — $(0, 1), (1, 1), (1, 1), (1, 1), (1, 0)$
   — $(0, 2), (1, 1), (1, 1), (1, 1)$
   — $(0, 2), (1, 1), (1, 1), (2, 0)$

   Donnez une condition nécessaire (non triviale) pour qu'une suite soit graphique.