Université de Strasbourg
Logique et programmation logique — Feuille de TD 1 (Correction)

Ensembles définis inductivement, récursivité

Soit A un ensemble (fini). Un mot sur A est une suite finie d'élément de A. On définit l'opération de concaténation sur les mots de A comme étant $u.v$ est la suite u suivie de la suite v. On note ϵ la suite vide (le mot sans lettre). On note A^* l'ensemble des mots sur A.

Exercice 1 Palindromes

Soit V un ensemble. Donner une définition inductive des palindromes sur V .

Correction : ϵ est un palindrome.
Si $x \in V$ alors x est un palindrome.
Si u est un palindrome et $x \in V$, xux est un palindrome

Exercice 2

Soit $V = \{a, b, c\}$. Donner une définition inductive de l'ensemble X des mots non vides sur V tels que deux lettres consécutives soient distinctes.

Correction : $\{a, b, c\} \subset X$
Si $xu \in X$, et $x' = x$ alors $x'xu \in X$

Exercice 3

On définit inductivement l'ensemble $X \subset \{a, b\}^*$ de la façon suivante : $\epsilon \in X$; si $u \in X$ alors $a.u.b \in X$.
Montrer que $X = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
Par convention $a^0 = \epsilon$

Correction : Correction :

- $X \subset \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$: Par induction sur la définition de X.
  - $\epsilon \in \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$: trivial.
  - Si $u \in X etu \in \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, on montre que $a.u.b \in \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Puisque $u \in \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ alors il existe n_0 t.q. $u = a^{n_0} b^{n_0}$ et donc $a.u.b = a^{n_0+1} b^{n_0+1} \in \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
- $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset X$: par induction sur n.
  - $a^0 b^0 = \epsilon \in X$
  - Si $a^n b^n \in X$ alors $a^{n+1} b^{n+1} = a.a^n.b^n.b \in X$

Exercice 4

Soit $V = \{a, x\}$. On définit X le sous-ensemble de V^* formé des mots contenant une seule fois le symbole x.

1) Donner une définition inductive de X.
2) Soit A le sous-ensemble de X définit par $xa \in A$; et si $m \in A$ alors $ama \in A$. Montrer que si $m \in A$ alors m contient un nombre impaire de a.

Correction :

- $x \in X$
- Si $u \in X$ alors $ua \in X$
- Si $u \in X$ alors $au \in X$

Par récurrence sur n.

Exercice 5

On considère le sous-ensemble D de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ défini inductivement par : $(n, 0) \in D$; si $(n, n') \in D$ alors $(n, n+n') \in D$.

1) Donner quelques éléments de D.

2) Montrer que pour deux entiers n et n' , $(n, n') \in D$ si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{N}$, tel que $n' = kn$.

Correction :

Par double inclusion.

- $D \subset \{(n, kn) | (n, k) \in \mathbb{N}^2\} = F$: Par induction sur D.
  $(n, 0) \in F$: trivial.
  Si $(n, m) \in D$ et $(n, m) \in F$, on a donc $m = kn$ pour un certain k et donc $(n, n+m) = (n, n+kn) = (n, (k+1)n) \in F$.
- $F \subset D$ Soit n$\in \mathbb{N}$, on montre par récurrence sur k $P_n(k) = def$"alors $(n, kn) \in D$".
  $k = 0$: trivial
  Si $(n, kn) \in D$ alors $(n, (k+1)n) = (n, n+kn) \in D$.

Exercice 6

On considère l'ensemble $X \subset \mathbb{N}^2$ définit inductivement par l'élément de base $(0, 0)$ et par les règles d'inférence suivantes :

$$\frac{(a, b)}{(a+1, b+1)}\ I_1 \qquad\qquad \frac{(a, b)}{(a+1, b)}\ I_2$$

1) Donner quelques éléments de X.
2) Pour chaque élément suivant dire s'il appartient à X ou non. Si oui , donnez l'arbre de construction, sinon justifiez.
   a) $(3, 3)$
   b) $(2, 5)$
   c) $(4, 2)$
3) Donner une définition non inductive des éléments de X.

Correction :

1) $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$, $(2, 1)$
2) Oui, Non, Oui
3) C'est l'ensemble des couple $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ tels que $x \geq y$.
   Preuve :
   D'une part, on montre que tous les couples (x, y) tels que $x \geq y$ sont des théorèmes. On applique la deuxième règle $x - y$ fois et la première ensuite y fois.
   D'autre part, on montre que tous les théorème sont des couples $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ tels que $x \geq y$. Par induction sur la déduction :
   (a) C'est vrai pour l'axiome.
   (b) Si $x \geq y$ alors $x + 1 \geq y + 1$.
   (c) Si $x \geq y$ alors $x + 1 \geq y$.

Exercice 7

On considère l'ensemble $X \subset \mathbb{N}^3$ définit inductivement par l'élément de base $(0, 0, 0)$ et par les règles d'inférence suivantes :

$$\frac{(a, b, c)}{(a+1, b+1, c)}\ I_1 \qquad\qquad \frac{(a, b, c)}{(a+1, b, c+1)}\ I_2$$

1) Donner quelques éléments de X.
2) Pour chaque élément suivant dire s'il appartient à X ou non. Si oui , donnez l'arbre de construction, sinon justifiez.
   a) $(2, 1, 1)$
   b) $(3, 2, 2)$
   c) $(5, 2, 3)$

3) Donner une définition non inductive des éléments de X.

Correction :

1) $(0,0,0)$, $(1,0,1)$, $(1,1,0)$, $(2,2,0)$, $(2,1,1)$
2) Oui, Non, Oui
3) C'est l'ensemble des couple $(x,y,z) \in \mathbb{N}^2$ tels que $x = y + z$.
   Preuve :
   D'une part, on montre que tous les couples (x,y,z) tels que $x = y + z$ sont des théorèmes. On applique la deuxième règle z fois et la première ensuite y fois.
   D'autre part, on montre que tous les théorème sont des couples $(x,y,z) \in \mathbb{N}^2$ tels que $x = y + z$. Par induction sur la déduction :
   (a) C'est vrai pour l'élément de base.
   (b) Si $x = y + z$ alors $x + 1 = y + 1 + z$.
   (c) Si $x = y + z$ alors $x + 1 = y + z + 1$.

Exercice 8

Montrer que toute fonction totale f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ décroissance est récursive.

Exercice 9

Indiquer en justifiant brièvement votre réponse quelles sont, parmi les fonctions suivantes, celles qui sont récursives et celles qui ne le sont pas :

1) $f(n) =$ le nombre de programmes de moins de n symboles
2) $f(n) = 0$ s'il y a une infinité de programme P tel que $P(0) = n$, $f(n) = 1$ sinon.
3) $f(n) = n$-ième chiffre dans le développement décimal de π
4) $f(l) = 1$ pour tout $l \in \mathbb{N}$ s'il existe $n, m, p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $q \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$ tels que $m^q + n^q = p^q$.
   $f(l) = 0$ pour tout $l \in \mathbb{N}$ sinon.
5) $f(n) = 1$ si $P_n(k) \neq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   $f(n) = 0$ sinon.