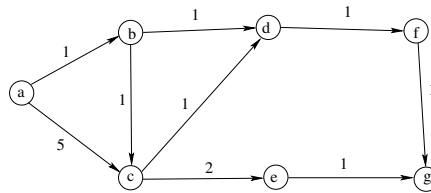


Objectif : comment calculer les plus courts chemins dans un graphe ?

Durée : 2 heures

Exercice 1: Algorithmes

On considère le réseau représenté ci-après.



1. Quels en sont les sources et les puits ?
2. En utilisant tous les algorithmes licites vus en cours (justifier les choix), trouver le graphe des chemins minimaux (resp. maximaux) à partir de a . Ce graphe est-il équivalent à un arbre couvrant de poids minimal (resp. maximal) ?
3. Mêmes questions en remplaçant l'arc (b, d) par l'arc (d, b) (et en conservant le même poids).
4. Mêmes questions en remplaçant le poids de l'arc (d, b) par -3 .

Exercice 2: Graphe des plus courts chemins d'un réseau

Soit $R = (S, A, l)$ un réseau sans circuit absorbant, $x \in S$ un sommet de R et $\pi_x : S \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ l'application associant à tous sommet y de S la longueur $L(C)$ du plus court chemin C de x à y s'il existe, $+\infty$ sinon. On définit le graphe partiel $R' = (S, A')$ de (S, A) par $A' = \{(y, z) \mid L((y, z)) = \pi_x(z) - \pi_x(y)\}$.

Le but de l'exercice est de montrer que pour tout sommet $y \in S$, un plus court chemin dans R de x à y est *exactement* un chemin de x à y dans R' .

1. Soit y un sommet de R , et $C_1 = (x_i)_{i=1}^l$ un plus court chemin de x à y dans R . Montrer que pour tout $1 \leq i \leq l-1$, $(x_i, x_{i+1}) \in A'$.
2. Soit maintenant C_2 un chemin de x à y dans R' . Montrer que C_2 est un plus court chemin dans R .
3. Conclure.

Exercice 3: Réseau à coût constant

Soit $G = (S, A, L)$ un réseau tel que pour tout arc $a \in A$ on a $L(a) = k > 0$. Proposer un algorithme (ne traitant qu'une seule fois chaque sommet et chaque arc de G) permettant de trouver la longueur du plus court chemin d'un sommet donné $x \in S$ à tout autre sommet de G .

Exercice 4: Plan de vol

Une compagnie aérienne dessert différentes villes européennes. Le tableau ci-dessous donne les durées de vol entre ces villes.

	A	B	C	D	E
A		1h30	2h00		2h15
B	1h40				3h00
C	2h20			2h55	
D			3h20		1h05
E	2h25	3h10		1h10	

1. Comment déterminer le trajet le plus rapide entre deux villes ?
2. Comment modifier l'algorithme utilisé précédemment afin de prendre en compte la durée des escales dans les différentes villes ?
3. Comment prendre en compte la durée des escales dans les différentes villes sans modifier l'algorithme ?