

Logique Propositionnelle

Exercice 1

- 1) Donner un exemple de formule valide.
- 2) Donner un exemple de formule satisfiable mais non valide.
- 3) Donner un exemple de formule insatisfiable.

Exercice 2

Parmi les formules suivantes, lesquelles sont valides ? contradictoires ? Si une formule n'est ni valide, ni contradictoire, on donnera une interprétation qui la falsifie et une interprétation qui la satisfait. On essaiera de raisonner sans écrire la table de vérité.

- | | | |
|---|----------------------------------|--|
| 1) $p \wedge \neg q$ | 7) $p \rightarrow (p \wedge q)$ | 13) $p \wedge \neg p$ |
| 2) $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$ | 8) $p \vee (p \rightarrow q)$ | 14) $((p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q)) \rightarrow q$ |
| 3) $(p \wedge \neg q) \rightarrow q$ | 9) $q \vee (p \rightarrow q)$ | 15) $((p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \neg q)) \rightarrow \neg p$ |
| 4) $(p \wedge q) \rightarrow p$ | 10) $p \wedge (p \rightarrow q)$ | 16) $(\neg p \rightarrow p) \rightarrow p$ |
| 5) $(p \vee q) \rightarrow q$ | 11) $q \wedge (p \rightarrow q)$ | 17) $\neg p \rightarrow (p \rightarrow \neg p)$ |
| 6) $p \rightarrow (p \vee q)$ | 12) $p \vee q$ | 18) $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow q$ |

Exercice 3

- 1) Montrez (par analyse sémantique / tables de vérité) que la formule suivante est valide :

$$p \rightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q))$$

- 2) Montrez (par analyse sémantique / tables de vérité) que la formule suivante est satisfiable :

$$\neg(p \rightarrow (q \wedge (q \rightarrow p)))$$

- 3) Mettre chacune des deux formules précédentes sous forme normale conjonctive.

Exercice 4

Donner une formule correspondant à la table de vérité suivante :

P	Q	R	
F	F	F	V
F	F	V	V
F	V	F	F
F	V	V	V
V	F	F	F
V	F	V	F
V	V	F	F
V	V	V	V

Mettre cette formule sous forme normale conjonctive.

Exercice 6

- 1) Pour quelles valeurs de m la formule $(m = 1) \rightarrow (m = 2)$ est-elle vraie ?
- 2) Pour quelles valeurs de m la formule $(m = 1) \leftrightarrow (m = 2)$ est-elle vraie ?

Exercice 7

Lesquels des raisonnements suivants sont formalisables en logique propositionnelle ? Si c'est le cas, donnez une formalisation et vérifiez s'il est effectivement valide.

Exercice 5

Que pensez vous des affirmations suivantes :

- 1) Si $G \vee H$ est insatisfiable alors G et H sont deux formules insatisfiables.
- 2) Si $G \vee H$ est valide alors G et H sont deux formules valides.

- 1) Si j'étudie la logique, alors je serai heureux et sage ;
je serai heureux et sage ;
donc j'étudie la logique
- 2) Napoléon était allemand ;
les allemands sont européens ;
donc Napoléon était européen.
- 3) Napoléon était allemand ;
les allemands sont asiatiques ;
donc Napoléon était asiatique
- 4) Napoléon était français ;
tous les français sont européens ;
donc Hitler était Autrichien
- 5) Si Napoléon avait été chinois, alors il aurait été asiatique ;
Napoléon n'était pas asiatique ;
donc il n'était pas chinois.
- 6) S'il pleut, on annulera le pique nique ;
s'il ne pleut pas, Marie insistera pour aller à la plage et le pique nique sera annulé ;
ou bien il pleuvra ou bien il ne pleuvra pas ;
donc le pique nique sera annulé.

Exercice 8 Problème de Bill

1. Si Bill Prend l'autobus et si l'autobus est en retard, alors Bill manquera son rendez-vous.
2. Bill n'ira pas à la maison si il manque son rendez-vous et si il est déprimé.
3. Si Bill n'obtient pas de travail alors Bill sera déprimé et Bill ira à la maison.

Pour chaque affirmation, dire si elle est conséquence logique des affirmations précédentes :

- 1) Si Bill prend l'autobus et si l'autobus est en retard, alors Bill obtient du travail.
- 2) Bill obtiendra du travail s'il manque son rendez-vous et s'il va à la maison.
- 3) Si l'autobus est en retard, Bill ne prendra pas l'autobus ou Bill manquera son rendez-vous.
- 4) Si Bill prend l'autobus et va à la maison, alors Bill ne sera pas déprimé si l'autobus est en retard.

Exercice 9 Le club écossais

Un club est régi par le règlement suivant :

1. Tout membre non écossais porte des chaussettes oranges.
2. Tout membre porte un kilt ou ne porte pas des chaussettes oranges.
3. Les membres mariés ne sortent pas le dimanche.
4. Un membre sort le dimanche si et seulement si il est écossais.
5. Tout membre qui porte un kilt est écossais et marié.
6. Tout membre écossais porte un kilt.

Exprimer ce règlement au moyen d'une formule de la logique propositionnelle. Montrer qu'il est impossible d'adhérer au club.

Exercice 10 Enigme

Un prince est dans un cruel embarras. Le voici au pied du manoir où la sorcière retient prisonnière sa princesse. Deux portes donnent accès au château. L'une conduit aux appartements de la princesse, l'autre s'ouvre sur l'antre d'un dragon. Le prince sait seulement que l'une de ces portes s'ouvre si on énonce une proposition vraie, et l'autre si on énonce une proposition fausse. Comment le prince peut-il délivrer la princesse ?

Exercice 11

- 1) Montrer que pour toute formule H il existe H' équivalente à H n'ayant comme connecteur logique que la négation et l'implication.
- 2) Appliquer ce résultat à la formule : $(P \vee Q) \leftrightarrow (R \vee S)$

Exercice 12

Montrer que $|$ est un connecteur complet.

	V	F
V	F	V
F	V	V