Université de Strasbourg
Logique et programmation logique Feuille de TD 3

Systèmes Formels

On rappelle qu'en cas d'ambiguïté, l'implication "$\Rightarrow$" est associative à droite ; par exemple, $p \Rightarrow q \Rightarrow r$ signifie $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$.

1. Axiome K : $A \Rightarrow B \Rightarrow A$
2. Axiome S : $(A \Rightarrow B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow B) \Rightarrow A \Rightarrow C$
3. Règle :

$$\frac{A \Rightarrow B \qquad A}{B}\ \text{MP}$$

FIGURE 1 – Système de Hilbert minimal H

Exercice 1

Montrer que les formules suivantes sont des théorèmes de la logique minimale de Hilbert :

1) Montrez que $p \Rightarrow p$.
2) Montrez que $p \Rightarrow q \Rightarrow q$
3) Montrez que $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow r) \Rightarrow p \Rightarrow r$
4) Montrez aussi que $p \Rightarrow (p \Rightarrow p \Rightarrow q) \Rightarrow p \Rightarrow q$

Exercice 2

Soit H^+ le système H de Hilbert augmenté de la règle suivante :

$$\frac{A \Rightarrow B \Rightarrow C}{B \Rightarrow A \Rightarrow C}$$

1) Montrez que $\Delta \vdash_H P$ si et seulement si $\Delta \vdash_{H^+} P$
2) Déduisez-en que $\vdash_H (p \Rightarrow q) \Rightarrow (r \Rightarrow p) \Rightarrow r \Rightarrow q$

Exercice 3 Système `fg`

Le système `fg` est défini par $\mathtt{fg} = (\Sigma_{\mathtt{fg}}, F_{\mathtt{fg}}, A_{\mathtt{fg}}, R_{\mathtt{fg}})$ avec :

- $\Sigma_{\mathtt{fg}} = \{\mathtt{f}, \mathtt{g}, \mathtt{-}\}$;
- $F_{\mathtt{fg}} = \Sigma^*_{\mathtt{fg}}$;
- $A_{\mathtt{fg}} = \{X\mathtt{f}\text{-}\mathtt{g} \mid X \in \text{-}^*\}$;
- $R_{\mathtt{fg}}$ contient une seule règle d'inférence définie par :

$$\frac{X\mathtt{f}Y\mathtt{g}Z}{X\mathtt{f}Y\mathtt{g}ZX}$$

1 - Énumérer quelques axiomes de `fg`. Donner un théorème de `fg` issu d'une déduction de longueur 0, puis un autre issu d'une déduction de longueur 1.

2 - Les formules suivantes sont-elles des théorèmes de `fg` ?

F_1 `--f-g------`

F_2 `--f---g------`

F_3 `--f--g---`

3 - Quelle est la forme générale des théorèmes de `fg` ?

Exercice 4 Jeu des allumettes

On dispose d'un nombre n d'allumettes ($n > 0$) sur une table. Les joueurs A et B jouent chacun leur tour et peuvent retirer de 1 à 3 allumettes de la table. Le joueur qui retire la dernière allumette a gagné.

Exemple de partie :

On dispose 12 allumettes. C'est au joueur A de commencer.

1. Le joueur A retire 2 allumettes, il en reste 10
2. Le joueur B retire 1 allumettes, il en reste 9
3. Le joueur A retire 3 allumettes, il en reste 6
4. Le joueur B retire 2 allumettes, il en reste 4
5. Le joueur A retire 2 allumettes, il en reste 2
6. Le joueur B retire 2 allumettes, il n'en reste plus, le joueur B a gagné.

Nous allons étudier des systèmes formels qui tente de modéliser ce jeu. Soit E l'ensemble des joueurs qui contient seulement deux éléments : A et B. Le language est l'ensemble des triplets $E \times E \times \mathbb{N}^*$.

La formule (X, Y, n) est valide $\models (X, Y, n)$ signifie que le joueur X peut gagner de façon sûre si c'est au joueur Y de jouer et qu'il reste n allumettes sur la table. Par exemple la formule $(A, A, 2)$ signifie que le joueur A peut gagner de façon sûre si c'est au joueur A de jouer et qu'il reste 2 allumettes sur la table.

1) Etant données nos conventions est-ce que la formule $(A, B, 4)$ est valide ? pourquoi ?
2) Etant données nos conventions est-ce que la formule $(A, B, 5)$ est valide ? pourquoi ?
3) Proposer un ensemble de formules qui expriment le fait que si c'est à A de jouer et qu'il reste moins de 3 allumettes alors il a gagné. Même question pour B.
4) Est-ce que $\models (X, Y, n)$ implique que $\models (X, X, n)$?
5) Considérons le système formel suivant :

   Axiomes :

$$\frac{}{(A, B, 4)}$$

$$\frac{}{(B, A, 4)}$$

   Règles :

$$\frac{(X, Y, n), \quad \text{avec } X \neq Y}{(X, X, n+1)}$$

$$\frac{(X, Y, n), \quad \text{avec } X \neq Y}{(X, X, n+2)}$$

$$\frac{(X, Y, n), \quad \text{avec } X \neq Y}{(X, X, n+3)}$$

   (a) Montrer que $(A, A, 5)$ est un théorème de ce système.
   (b) La formule $(A, B, 8)$ est-elle un théorème de ce système ? justifier.
   (c) Est-ce que ce système est correct ? c'est à dire est-ce que tous les théorèmes de ce système sont des formules valides ? justifier.
   (d) Est-ce que ce système est complet ? c'est à dire est-ce que toutes les formules valides sont des théorèmes de ce système ? justifier.
   (e) On ajoute la règle suivante au système

$$\frac{(X, Y, n), \quad \text{avec } X \neq Y}{(X, Y, n+4)}$$

Le système est-il correct ?

(f) Montrer que $\vdash (X, Y, n)$ si et seulement si $\not\vdash (X, X, n)$

(g) Le système est-il complet ? Si non que peut-on ajouter au système pour qu'il le soit ?

Exercice 5 Système $\texttt{pe}$

Le système $\texttt{pe}$ est défini par $\texttt{pe} = (\Sigma_{\texttt{pe}}, F_{\texttt{pe}}, A_{\texttt{pe}}, R_{\texttt{pe}})$ avec :

- $\Sigma_{\texttt{pe}} = \{p, e, -\}$;
- $F_{\texttt{pe}} = \Sigma^*_{\texttt{pe}}$;
- $A_{\texttt{pe}} = \{ \; pe \; \}$;
- $R_{\texttt{pe}}$ contient deux règles d'inférence définies par (avec X, Y et $Z \in -^*$) :

$$\frac{XpYeZ}{X{-}pYeZ{-}}\, R_1 \qquad\qquad \frac{XpYeZ}{XpY{-}eZ{-}}\, R_2$$

1) Énumérer quelques axiomes de $\texttt{pe}$. Donner un théorème de $\texttt{pe}$ issu d'une déduction de longueur 0, puis un autre issu d'une déduction de longueur 1.
2) Les formules suivantes sont-elles des théorèmes de $\texttt{pe}$?

   F_1 $--p--e---$

   F_2 $--p---e-----$
3) Donner une interprétation de $\texttt{pe}$ afin qu'il soit correct et complet ?
4) L'affirmation suivante est-elle vrai ? $XpYeZ \vdash YpXeZ$
5) Les affirmations suivantes sont-elles vraies dans votre modèle.
   - Si $A \models B$ alors $A \vdash B$
   - Si $A \vdash B$ alors $A \models B$

Exercice 6 Système MU de D. Hofstadter

On considère le système formel MU défini par :

- Σ_{MU} = {M, I, U} ;
- $F_{MU} = \Sigma^*_{MU}$;
- A_{MU} = {MI} ;
- $R_{MU} = \{r_1, r_2, r_3, r_4\}$ avec :

$$\frac{fI}{fIU}\, r_1 \qquad \frac{Mf}{Mff}\, r_2 \qquad \frac{fIIIg}{fUg}\, r_3 \qquad \frac{fUUg}{fg}\, r_4$$

1) Montrer que MUI, et $MUIU$ sont des théorèmes de MU.
2) Montrer que tout théorème de MU commence par M.
3) Est-ce que MU est un théorème de MU ? (indication : montrer que le nombre de I des théorèmes de MU suit une certaine règle arithmétique).
4) Montrer que pour $t \in \mathbb{N}$, MI^{2^t} et $MI^{2^t}U$ sont des théorèmes de MU.
5) Caractériser les théorèmes de MU.

Annale (contrôle terminal 2017)

Dans cette partie on ne considère que les formules contenant l'opérateur $\Rightarrow$ et on définie un nouvelle interprétation pour les formules de la logique propositionnelle. On définie l'interprétation J comme une fonction de l'ensemble des variables propositionnelles dans l'ensemble $\{-1, 0, 1\}$. Une interprétation J s'étend à toutes les formules (n'utilisant que le connecteur $\Rightarrow$) de la façon suivante, $J(A \Rightarrow B)$

- est égale à -1 si $J(A) = 1$ et $J(B) = -1$
- est égale à 0 si $J(B) = 0$ et $J(A) \neq 0$
- est égale à 1 dans tous les autres cas

Le tableau 1 résume la valeur de $J(A \Rightarrow B)$ en fonction de $J(A)$ et de $J(B)$. En utilisant cette interprétation, on dit qu'une interprétation J satisfait une formule F si $J(F) = 1$ et **on dit qu'une formule F est valide, si toute interprétation satisfait** F. Dans la suite, on admettra que la formule axiome S : $(A \Rightarrow B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow B) \Rightarrow A \Rightarrow C$ est valide.

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
0	-1	1
1	0	0
1	1	1
1	-1	-1
-1	0	0
-1	1	1
-1	-1	1

TABLE 1 – interprétation J

1) Dresser le tableau de vérité des formules suivantes (en utilisant l'interprétation J).
   (a) Axiome K : $B \Rightarrow A \Rightarrow B$
   (b) Schéma de Peirce $\mathcal{P}$: $((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$
2) Pour notre interprétation, le système de Hilbert minimal H est-il correct ?
3) La formule de Peirce est-elle un théorème dans le système H ?
4) Que peut-on en déduire pour le système H avec l'interprétation standard I des formules (la définition de I est rappelée en annexe).
5) Soit H_+ le système H de Hilbert augmenté du schéma d'axiomes $\mathcal{P}$.
   (a) Sous l'interprétation J, le système H_+ est-il correct ?
   (b) Sous l'interprétation I, le système H_+ est-il correct ?