Théorie des Graphes
Codage & Représentation

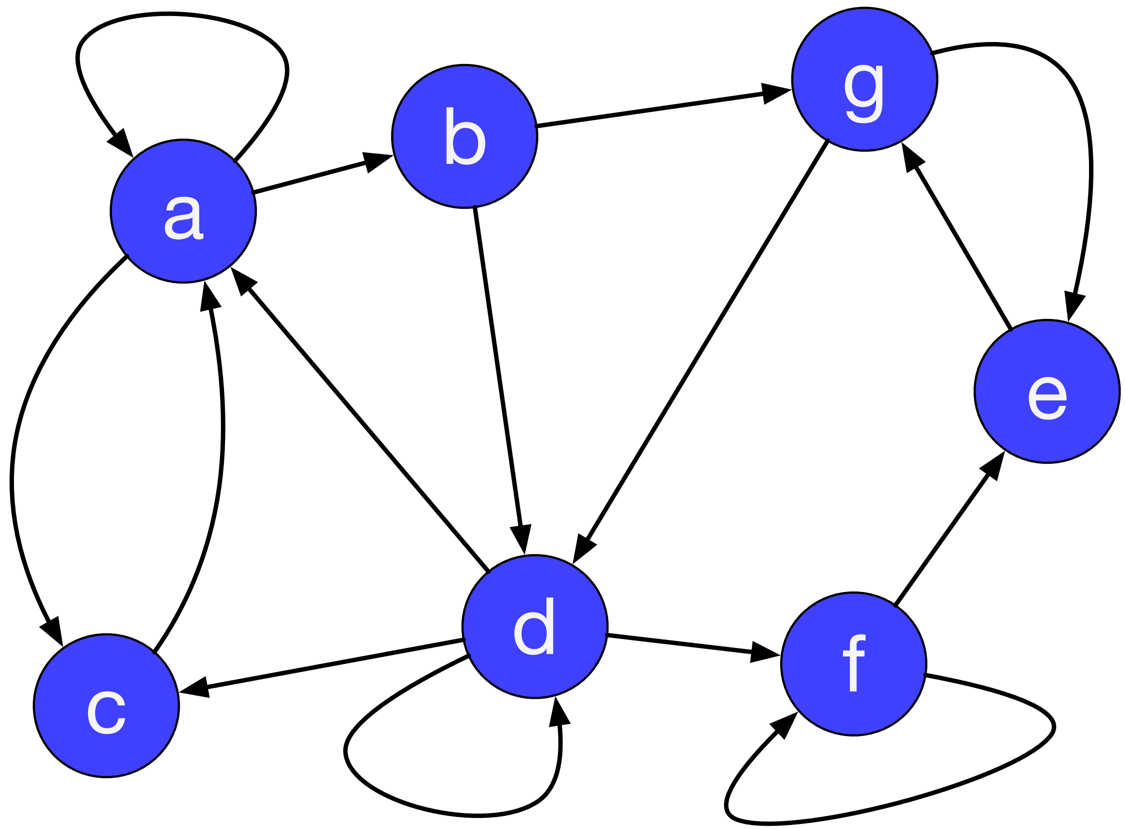
Fabrice Theoleyre

theoleyre@unistra.fr
http://www.theoleyre.eu

REPRÉSENTATIONS

Comment représenter un graphe ?

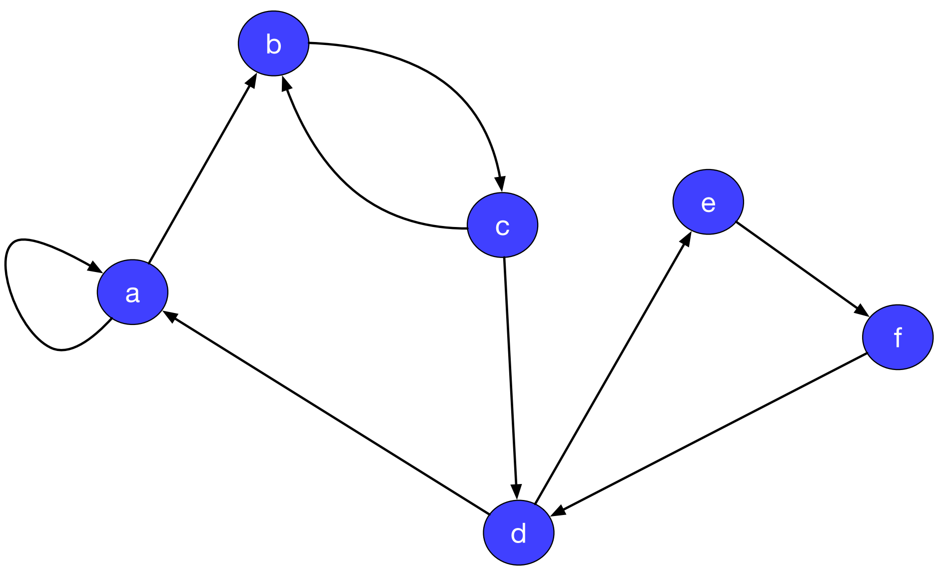
- Codage
  - On met de côté les multigraphes (plus compliqués)
  - Visuellement :



- Et formellement ?

Matrice d’adjacence

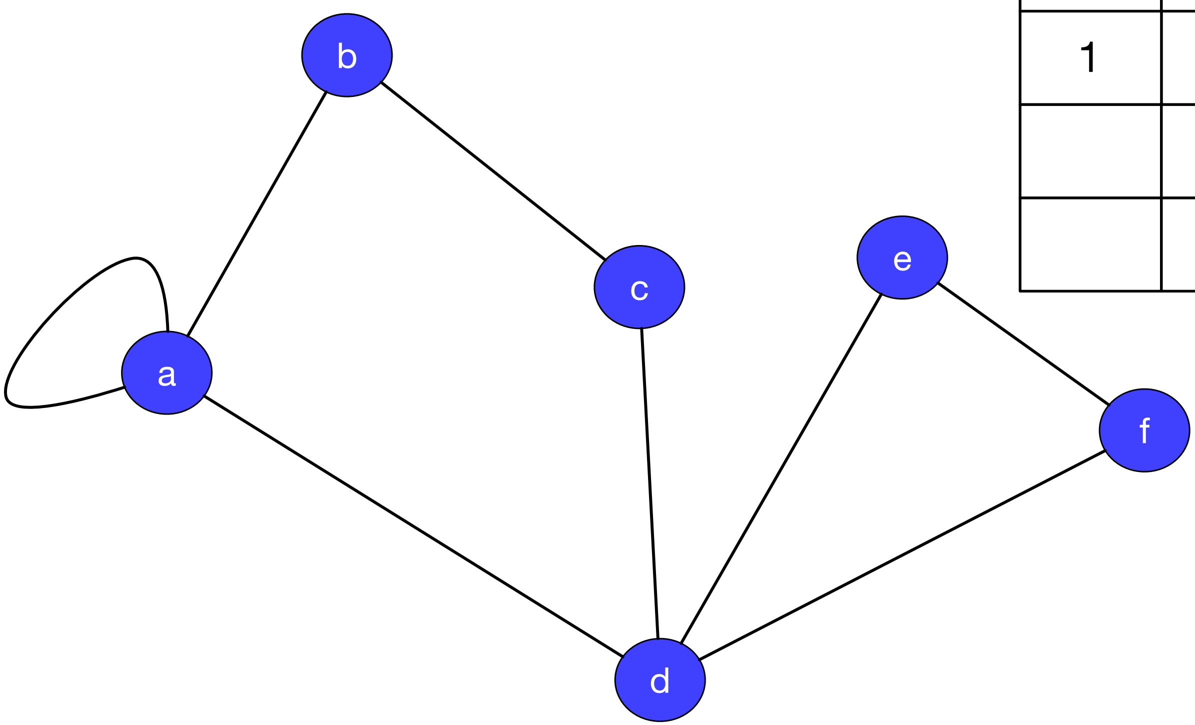
- Matrice : sommets x sommets
  - booléen qui décrit l’existence de la relation entre les sommets
  - Limite
    - ❖ place mémoire (n^2) si peu d’arrêtes
  - R() une application faisant correspondre un sommet à un nombre
  - $A = \{A_{ij}\}_{i,j \in [1..|V|]} \mid A_{ij} = 1 \; ssi \; (R^{-1}(i), R^{-1}(j)) \in E$
  - Graphe pondéré : les valeurs notées représentent le poids des arêtes
    - ❖ 0 si elles n’existent pas



1	1				
		1			
	1		1		
1				1	
					1
			1		

Matrice d'adjacence

- Quelle propriété pour un graphe non orienté ?



1	1		1		
1		1			
	1		1		
1		1		1	1
			1		1
			1	1	

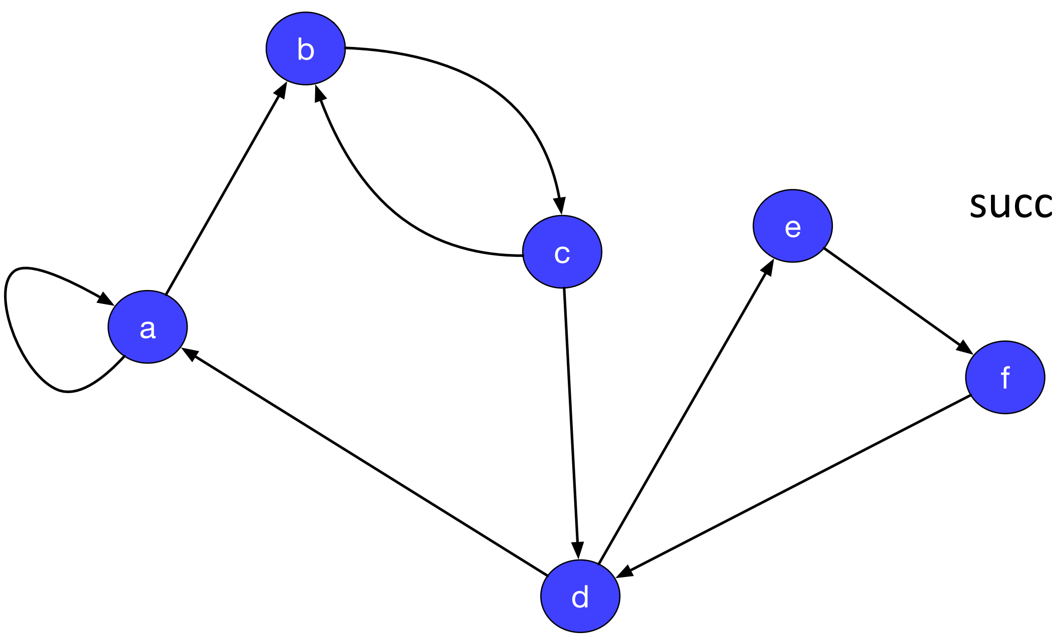
Matrice Symétrique
→ Optimiser le parcours

Liste d’adjacence

- 2 listes
  - Application R faisant correspondre chaque sommet à un entier positif ou nul
  - Liste des sommets successeurs (i.e. liste des arêtes, ordonnées par leur sommet de départ)
    - ❖ Une case par arête
  - Liste des sommets de tête, case pointant sur le début de la liste de leurs arêtes
    - ❖ Une case par sommet
  - Atout : compacité si peu d’arêtes – O(N + M)
  - Coût d’une recherche d’existence d’arrête ?
    - ❖ Algo ExisteArete(i,j)   (succ[*], head[*])

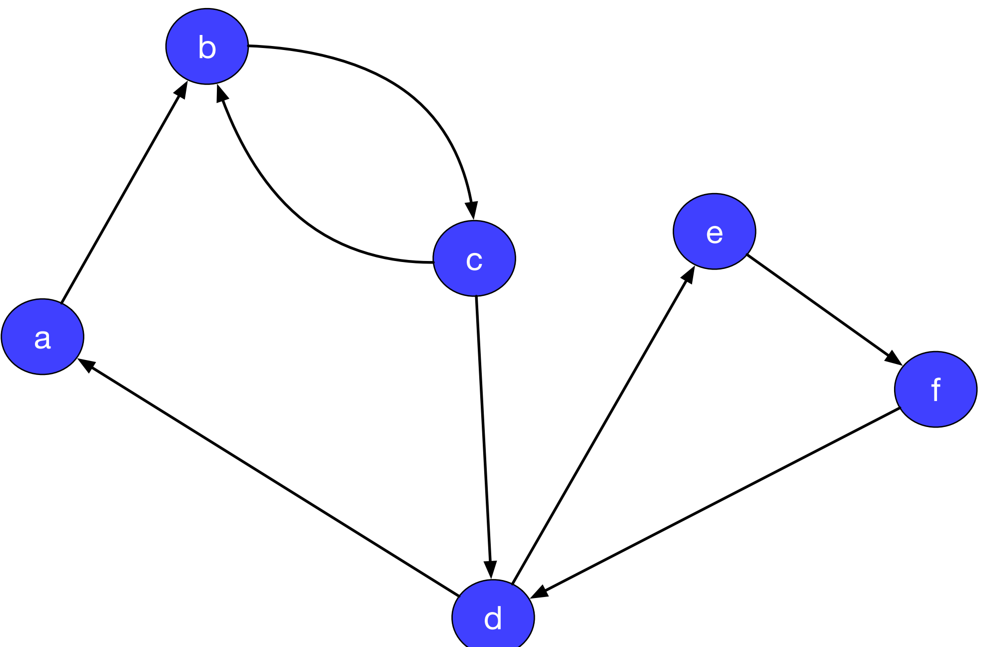
	A	B	C	D	E	F
head	0	2	3	5	7	8

succ	0	1	2	1	3	0	4	5	3



Matrice d’incidence

- Matrice d’incidence (sommets * arrêtes)
  - Si orienté
    - -1 arc sortant
    - +1 arc entrant
  - Non orienté
    - 1 si le sommet est une extrémité
  - si une boucle
    - +2 pour le sommet correspondant



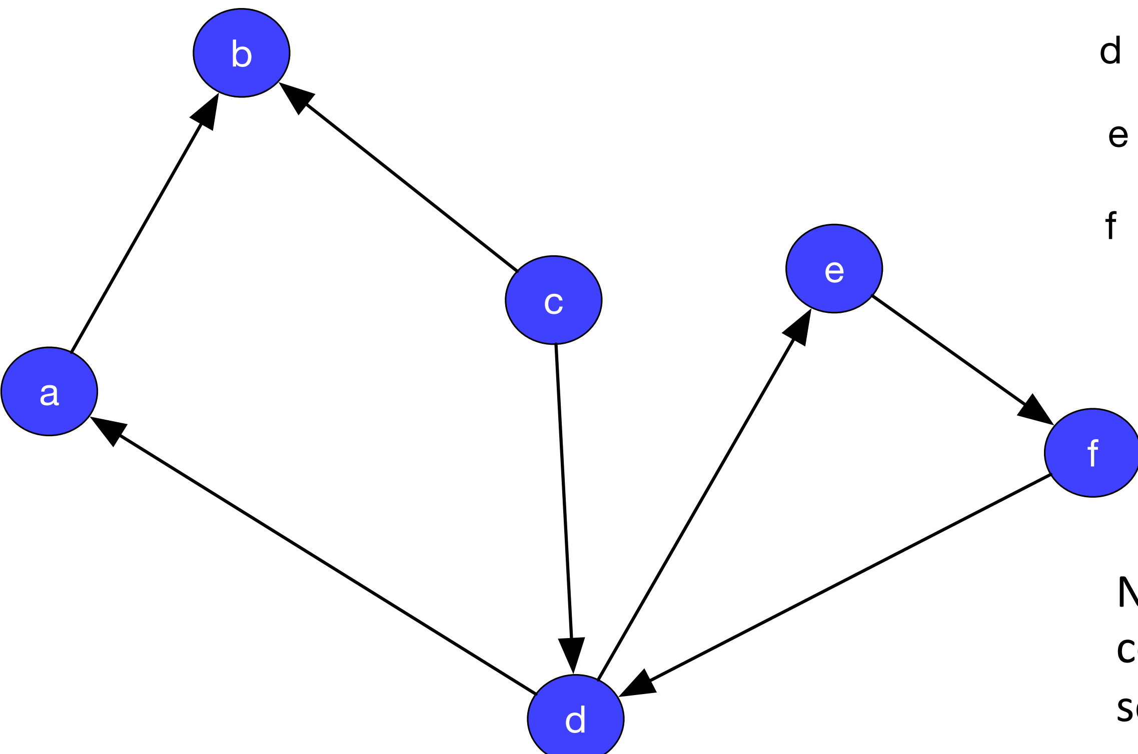
A	-1				1			
B	1	-1	1					
C		1	-1	-1				
D				1	-1	-1		1
E						1	-1	
F							1	-1

Multigraphes / hypergraphes
?

Matrice Laplacienne

- Soit un graphe G(S,A), sans boucle
  - Matrice Laplacienne non normalisée
    - ❖ Eléments de la diagonale : degré du sommet
    - ❖ Elément (i,j) = -1 ss'il existe un arc de i à j
      - – 0 sinon
  - $M_{laplacienne} = M_{degre} - M_{adjacence}$

a	2	-1		-1		
b	-1	2	-1			
c		-1	2	-1		
d	-1		-1	4	-1	-1
e				-1	2	-1
f				-1	-1	2



NB : Si le graphe est orienté, considère le degré entrant ou sortant

Pour aller plus loin : bibliothèque Tangente. Num. 54. La matrice laplacienne d'un graphe

Matrice Laplacienne

- Calcul de la matrice Laplacienne
  - Dans un graphe non-orienté :
    - ❖ $M_{laplace} = M_{incidence} * M^{t}_{incidence}$

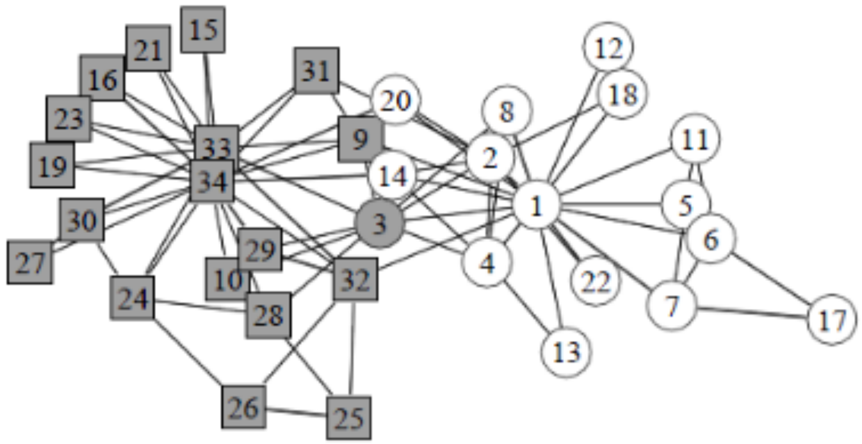
-1	1				
	1	-1			
1			-1		
		-1	1		
			-1	1	
			1		-1
				-1	1

a	-1		1				
b	1	1					
c		-1		-1			
d			-1	1	-1	1	
e					1		-1
f						-1	1

2	-1		-1		
-1	2	-1			
	-1	2	-1		
-1		-1	4	-1	-1
			-1	2	-1
			-1	-1	2

Matrice Laplacienne

- Utilisation
  - Analyse spectrale & partitionnement
    - ❖ Spectre du graphe



  - Théorème de Kirchoff pour calculer le nombre d’arbres couvrants
    - ❖ Cofacteur = déterminant de la laplacienne en enlevant n’importe quelle paire de colonne / ligne
    - ❖ Cofacteur = nombre d’arbres couvrants

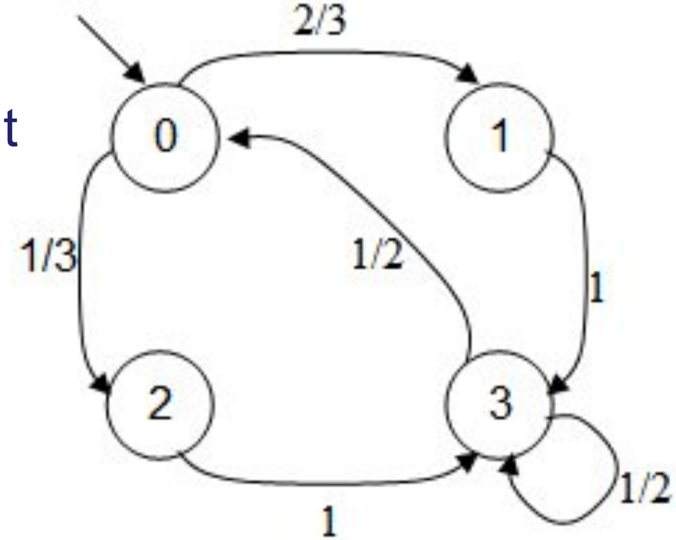
Matrice de transition (graphe proba.)

- **Matrice stochastique**
  - Probabilité de passer du sommet A à B
  - Triplet (S,A,P)
    - ❖ $P: A \to \mathbb{R}$ application de pondération des arêtes
    - ❖ $\forall u \in S, \sum_{e^+=\{u,v\}_{v\in S \wedge (u,v)\in A}} P(e^+) = 1$
      - – Évènements complémentaires
- **Utilité**
  - Modélisation des déplacements d'une foule
  - Modélisation du comportement d'un utilisateur
- **Chaines de Markov**
  - Processus sans mémoire, dont l'état futur ne dépend que de l'état actuel

Matrice de transition (graphe proba.)

- 4 états
  - 0: couché
  - 1: assis
  - 2: debout
  - 3: en mouvement

State diagram



Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Probability distribution

Start.	(1,	0,	0,	0)
1.	(0,	2/3,	1/3,	0)
2.	(0,	0,	0,	1)
3.	(1/2,	0,	0,	1/2)
4.	(1/4,	1/3,	1/6,	1/4)

Agoston Torok ©

CALCULS MATRICIELS

Composition

- Composition de fonctions
  - g() puis f() -> fog()
    - ❖ f[g(x)]

1		
1	1	
	1	1

1		
1	1	
	1	1

1		
1	1	
1	1	1

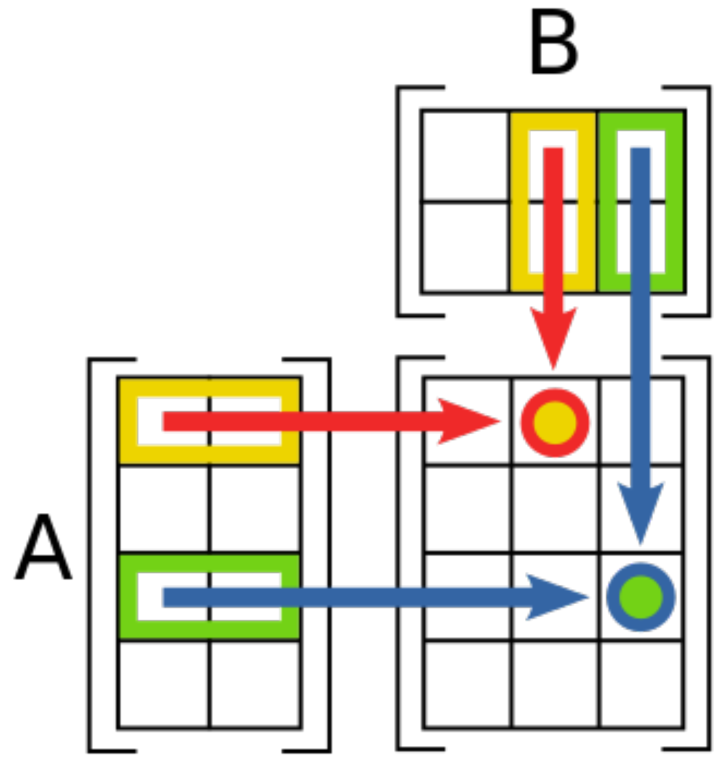
- Soit R1 et R2 deux relations sur S, alors la composée de R2 par R1 se note et se définit de la manière suivante :

$$R_1 o R_2 = \{(a,b) \in S \times S | \exists c \in S, (a,c) \in R_1 \wedge (c,b) \in \mathrm{R}_2\}$$

  - En particulier on a $R^2 = \{(a,b) \in S^2 | \exists c \in S, (a,c) \in R \wedge (c,b) \in R\}$

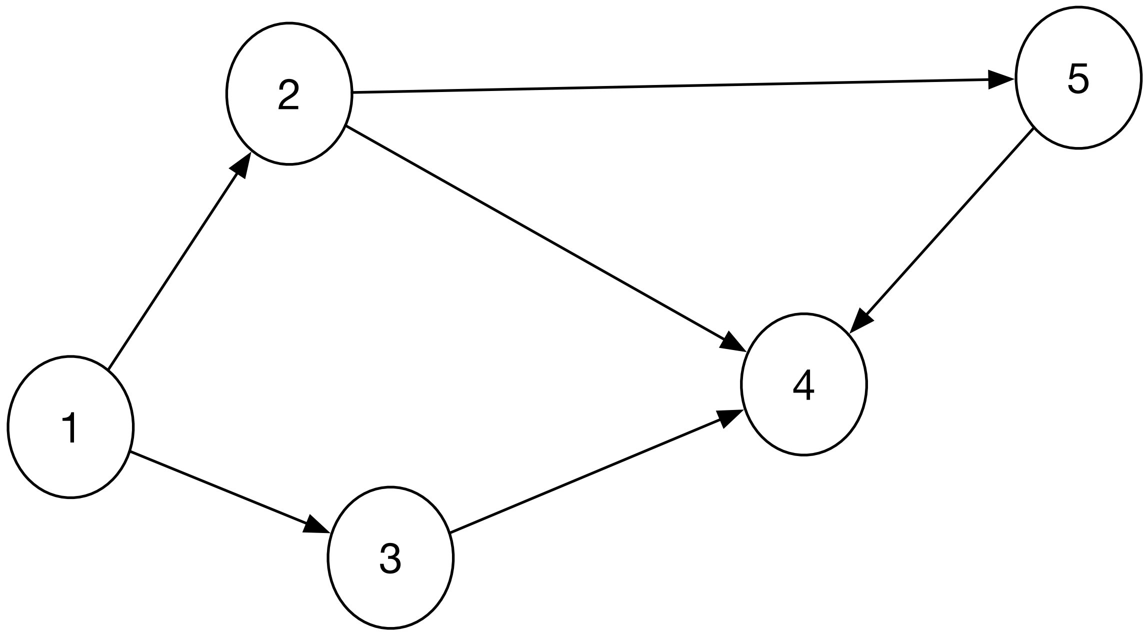
- D'un point de vue matriciel
  - matrice d'adjacence R
  - On a R^2 qui correspond à un produit de matrice R*R
    - ❖ $R^2(a,b)=1$ ssi il existe c ∊ S tel que R(a,c)=1 et R(c,b)=1
    - ❖ $R^2(a,b)= 0$ sinon
    - ❖ Remarque : 1+1+…=1

Visualisation d’une composition par produit matriciel



$$c_{12} = \sum_{r=1}^{2} a_{1r} b_{r2} = a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22}$$

Composition et calcul matriciel



$$A = \begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

- Que fait A^2 ?

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

$$A\text{^}2= \begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

MULTIPLICITÉ DE VISUALISATION

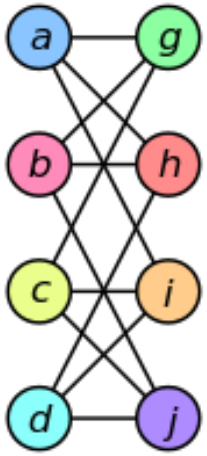
Homomorphisme

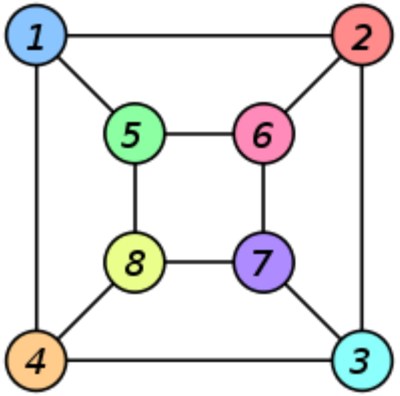
- Isomorphisme
  - Opération bijective qui préserve la structure (et sa réciproque également)
  - En graphe : G $\simeq$ H
    - ❖ Bijection entre les deux ensembles de sommets
    - ❖ Préservation des arrêtes
    - ❖ $G = (V_G, E_G), H = (V_H, E_H)$

$$\forall u \in V_G, \exists!\, v \in V_H \mid F(u) = v \wedge \forall v \in V_H, \exists!\, u \in V_G \mid F^{-1}(v) = u$$

$$\forall (u, v) \in E_G, (F(u), F(v)) \in E_H$$

  - Problème décisionnel dans la Classe NP
    - ❖ Pas de preuve de NP-complétude dans le cas général
    - ❖ Pas d'algorithme polynomial dans le cas général
- Si G et H sont le même graphe
  - Automorphisme
  - Ex ? Graphe cycle





wikipedia