Université de Strasbourg
Logique et programmation logique — Feuille de TD 1

Ensembles définis inductivement, récursivité

Soit A un ensemble (fini). Un mot sur A est une suite finie d'élément de A. On définit l'opération de concaténation sur les mots de A comme étant $u.v$ est la suite u suivie de la suite v. On note ϵ la suite vide (le mot sans lettre). On note A^* l'ensemble des mots sur A.

Exercice 1 Palindromes

Soit V un ensemble. Donner une définition inductive des palindromes sur V .

Exercice 2

Soit $V = \{a, b, c\}$. Donner une définition inductive de l'ensemble X des mots non vides sur V tels que deux lettres consécutives soient distinctes.

Exercice 3

On définit inductivement l'ensemble $X \subset \{a, b\}^*$ de la façon suivante : $\epsilon \in X$; si $u \in X$ alors $a.u.b \in X$.
Montrer que $X = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
Par convention $a^0 = \epsilon$

Exercice 4

Soit $V = \{a, x\}$. On définit X le sous-ensemble de V^* formé des mots contenant une seule fois le symbole x.

1) Donner une définition inductive de X.
2) Soit A le sous-ensemble de X définit par $xa \in A$; et si $m \in A$ alors $ama \in A$. Montrer que si $m \in A$ alors m contient un nombre impaire de a.

Exercice 5

On considère le sous-ensemble D de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ défini inductivement par : $(n, 0) \in D$; si $(n, n') \in D$ alors $(n, n+n') \in D$.

1) Donner quelques éléments de D.
2) Montrer que pour deux entiers n et n' , $(n, n') \in D$ si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{N}$, tel que $n' = kn$.

Exercice 6

On considère l'ensemble $X \subset \mathbb{N}^2$ définit inductivement par l'élément de base $(0, 0)$ et par les règles d'inférence suivantes :

$$\frac{(a,b)}{(a+1,b+1)}\, I_1 \qquad\qquad \frac{(a,b)}{(a+1,b)}\, I_2$$

1) Donner quelques éléments de X.
2) Pour chaque élément suivant dire s'il appartient à X ou non. Si oui , donnez l'arbre de construction, sinon justifiez.
   a) $(3, 3)$
   b) $(2, 5)$
   c) $(4, 2)$
3) Donner une définition non inductive des éléments de X.

Exercice 7

On considère l'ensemble $X \subset \mathbb{N}^3$ définit inductivement par l'élément de base $(0, 0, 0)$ et par les règles d'inférence suivantes :

$$\frac{(a,b,c)}{(a+1,b+1,c)}\ I_1 \qquad\qquad \frac{(a,b,c)}{(a+1,b,c+1)}\ I_2$$

1) Donner quelques éléments de X.
2) Pour chaque élément suivant dire s'il appartient à X ou non. Si oui , donnez l'arbre de construction, sinon justifiez.
   a) $(2,1,1)$
   b) $(3,2,2)$
   c) $(5,2,3)$
3) Donner une définition non inductive des éléments de X.

Exercice 8

Montrer que toute fonction totale f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ décroissance est récursive.

Exercice 9

Indiquer en justifiant brièvement votre réponse quelles sont, parmi les fonctions suivantes, celles qui sont récursives et celles qui ne le sont pas :

1) $f(n) =$ le nombre de programmes de moins de n symboles
2) $f(n) = 0$ s'il y a une infinité de programme P tel que $P(0) = n$, $f(n) = 1$ sinon.
3) $f(n) = n$-ième chiffre dans le développement décimal de π
4) $f(l) = 1$ pour tout $l \in \mathbb{N}$ s'il existe $n, m, p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $q \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}$ tels que $m^q + n^q = p^q$.
   $f(l) = 0$ pour tout $l \in \mathbb{N}$ sinon.
5) $f(l) = 1$ pour tout $l \in \mathbb{N}$ si P=NP.
   $f(l) = 0$ pour tout $l \in \mathbb{N}$ sinon.
6) $f(n) = 1$ si $P_n(k) \neq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   $f(n) = 0$ sinon.