

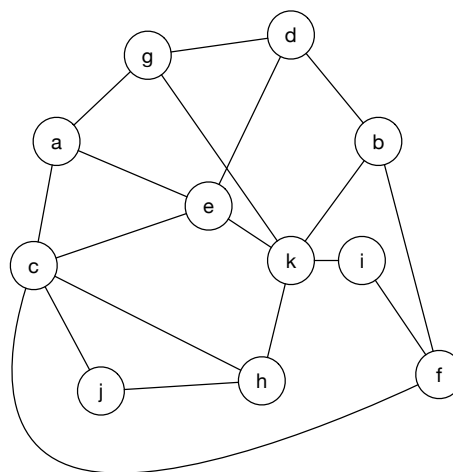
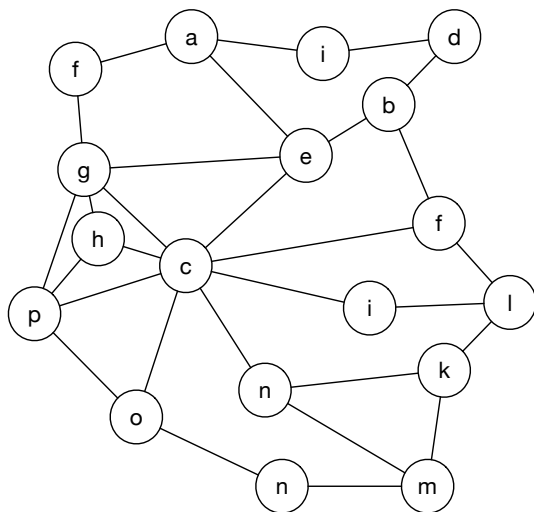
*Objectif* : comprendre la coloration de graphes, et étudier quelques heuristiques simples

*Durée* : 2 heures

### Exercice 1: Echauffement

Combien faut-il de couleurs pour colorier les sommets

1. d'un graphe biparti ?
2. d'une clique (graphe complet) ?
3. des graphes suivants



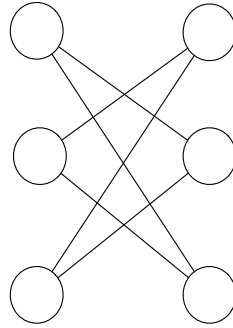
4. d'un graphe quelconque (donner des bornes) ?
5. Construire un graphe sans triangle ( $K_3$ ) tel que  $\chi(G) = 3$ .
6. En déduire un graphe sans  $K_4$  tel que  $\chi(G) = 4$ .

### Exercice 2: Coloration d'arêtes

Supposons maintenant que nous souhaitons colorer les arêtes (2 arêtes incidentes sur le même sommet doivent avoir une couleur différente). Combien de couleurs sont nécessaires pour colorer  $K_n$  ?

### Exercice 3: Algorithme de Welsh & Powell

Décrire en pseudo-code l'algorithme de Welsh & Powell. Vous testerez votre "implémentation" sur la topologie suivante en discutant de l'ordre dans votre choix des sommets.



Vous ferez de même sur le graphe  $G(S,A)$  défini comme suit :

- $U = \{u_i\}_{i \in [0,k]}$  et  $V = \{v_i\}_{i \in [0,k]}$  forment une partition des sommets  $S$ <sup>1</sup>
- $A = \{(u_i, v_j)\}_{i \neq j}$

Vous choisirez par exemple  $k = 4$ .

Qu'en concluez vous sur l'efficacité de l'approche ?

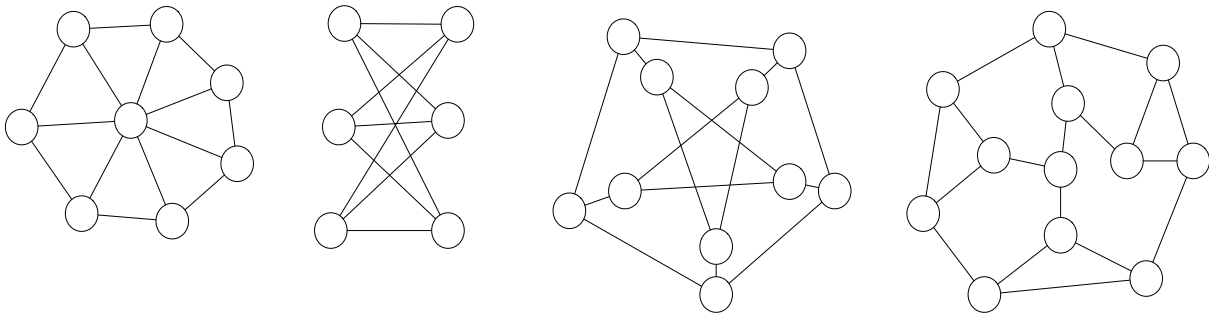
## Exercice 4: Connaissances

Montrez que dans un groupe formé de six personnes, il y en a nécessairement trois qui se connaissent mutuellement ou trois qui ne se connaissent pas (on suppose que si A connaît B, B connaît également A).

Montrez que cela n'est plus nécessairement vrai dans un groupe de cinq personnes.

## Exercice 5: Algorithme DSAT

1. Appliquez l'algorithme DSAT sur le graphe ci-dessous



2. Ecrivez le pseudo-code de l'algorithme DSAT
3. Montrez qu'il est optimal pour les graphes bipartis complets

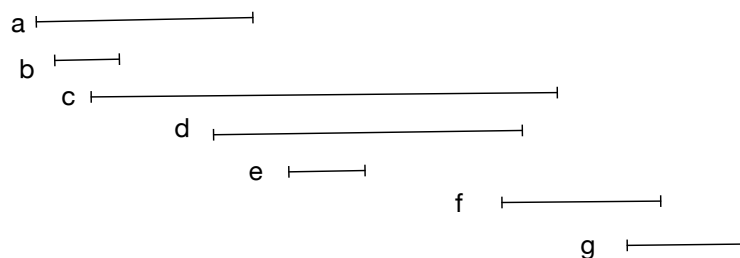
---

1.  $S = V \cup U$ ,  $V \cap U = \emptyset$

## Exercice 6: Graphes d'intervalles

A un ensemble fini d'intervalles  $[a_i, b_i[, 0 \leq i \leq n - 1$ , on associe un graphe  $G = (V, E)$  pour lequel les sommets de  $V$  sont les intervalles et dont les arêtes relient les couples d'intervalles dont l'intersection est non vide. Un tel graphe est appelé graphe d'intervalle.

1. Représenter le graphe correspondant aux intervalles suivants :



2. Quel est le nombre minimal de couleurs nécessaires pour le colorier ?
3. Considérez la stratégie qui consiste à ordonner les sommets par leur extrémité gauche des intervalles, à savoir a, b, c, d, e, f, g sur l'exemple. Cette stratégie est-elle optimale ? Donnez le coloriage obtenu.
4. Considérez la stratégie qui consiste à ordonner les sommets par leur extrémité droite des intervalles. Cette stratégie est-elle optimale ? Donnez le coloriage obtenu.