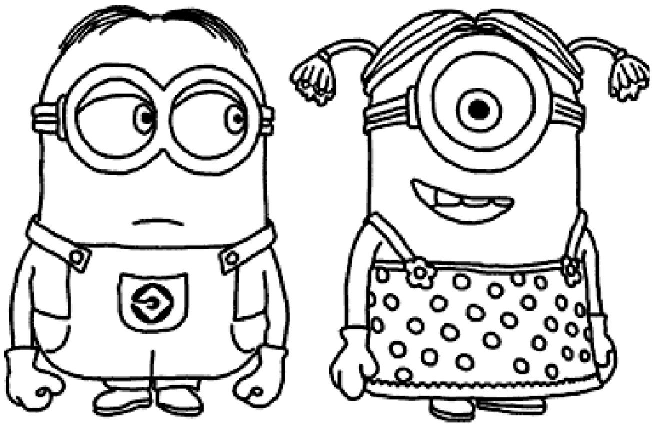
Théorie des Graphes

Coloration de graphes

Fabrice Theoleyre

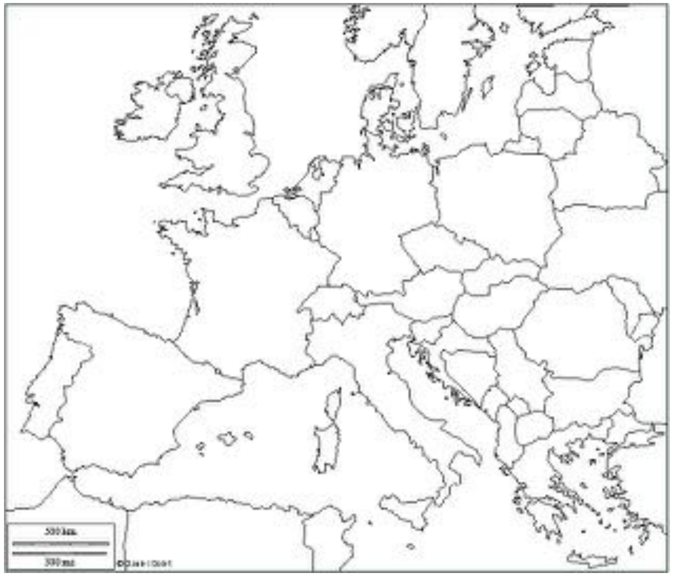
theoleyre@unistra.fr
http://www.theoleyre.eu

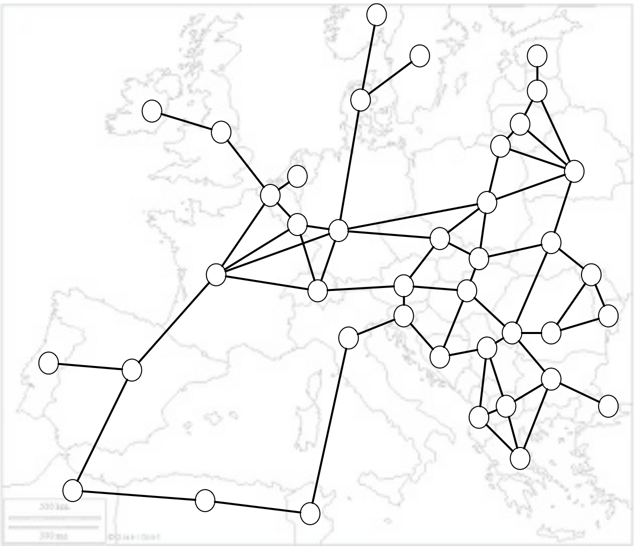
Coloriage & coloration ?



Coloration par l'exemple

- Exercice Terminale ES
  - Est-il possible de colorier le dessin
    - ❖ En utilisant le minimum de couleurs différentes
    - ❖ Deux zones ayant une frontière commune ont deux couleurs différentes

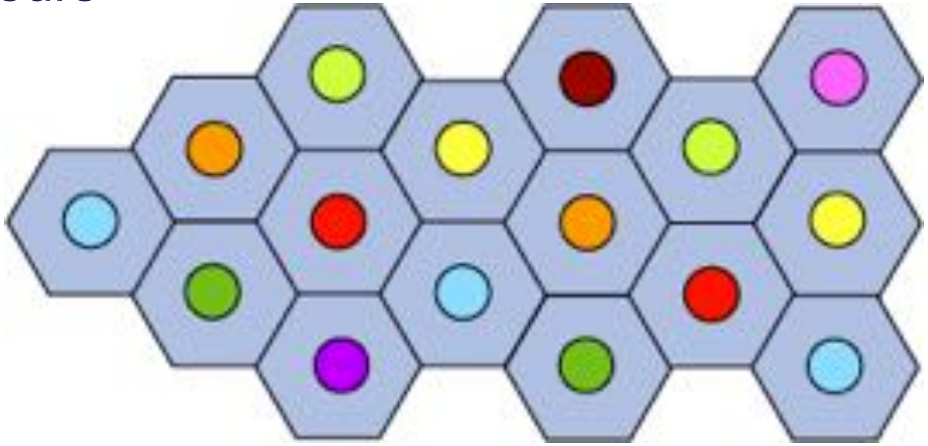




UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

Allocation de fréquences en GSM

- Problème : des ressources restreintes
  - LTE: 2,5 Mds € (partagés entre opérateurs)
  - Objectif: réutilisation spatiale
- Coloration
  - Pavage hexagonal, avec 7 couleurs



- Extensions
  - Antennes directionnelles
    - 3 directions (120°)
  - MicroCell, Picocell, femtocell
    - Différents pavages avec des couleurs différentes

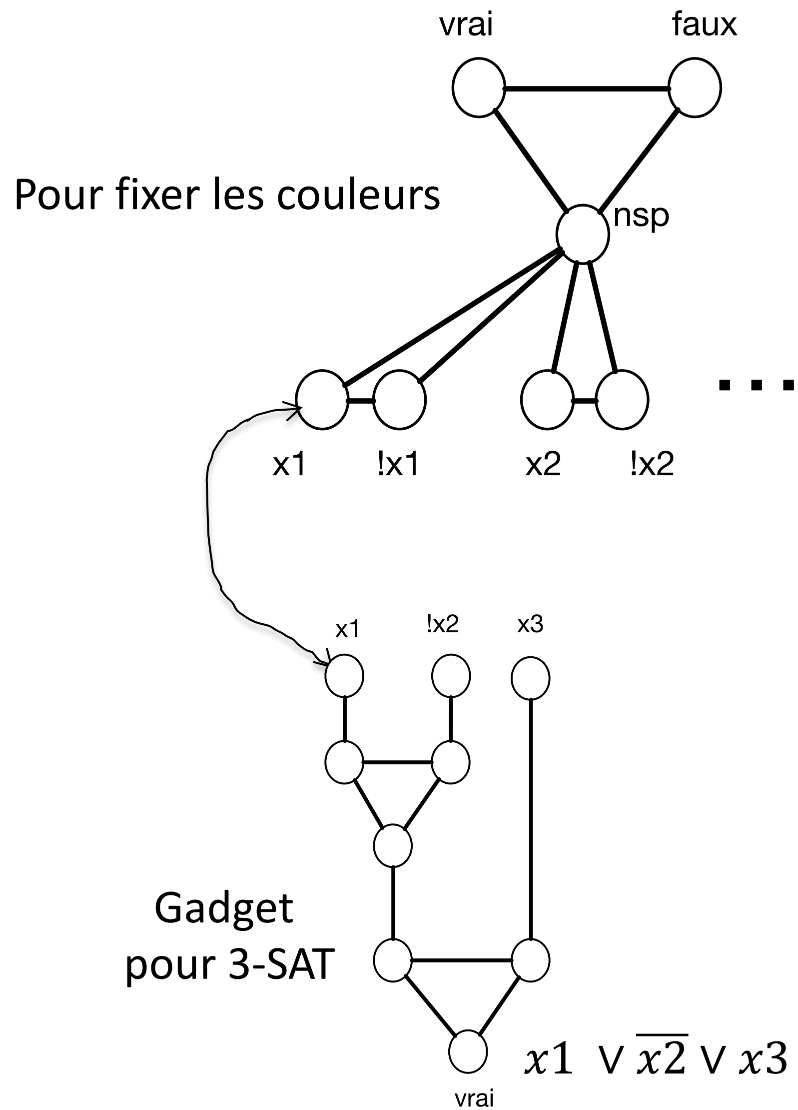
Formalisation

- Soit un graphe non orienté G(S,A)
  - Soit une application $c : S \to \mathbb{N}$
  - $\forall (x, y) \in A, c(x) \neq c(y)$
- Problème
  - Décisionnel : existe-t-il une coloration avec k couleurs ?
    - Application $c: S \to [1, k]$
  - Optimisation : trouver le nombre minimum de couleurs
    - Nombre chromatique (notation $\mathcal{X}(G)$)
  - Approche naïve
    1. Nombre croissant de couleurs
    2. Teste toutes les combinaisons possibles
- Complexité 3-colorabilité, dans NP : vérification en temps polynomial
    - Chaque arête a des extrémités de couleur différente

Formalisation

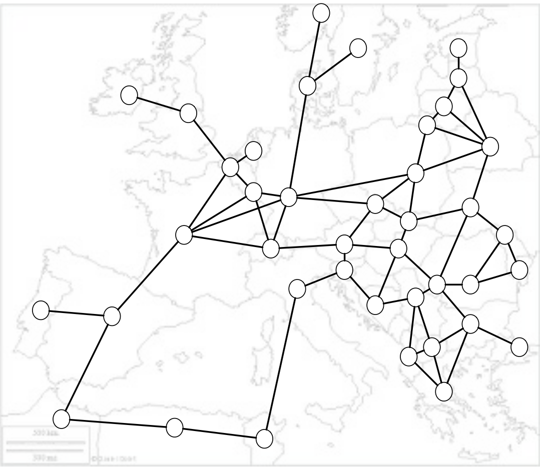
- 3-SAT
  - Soit une expression booléenne : existe-t-il des affectations pour x1, x2 et x3 telles que l'assertion soit vraie ?
  - $x1 \lor \overline{x2} \lor x3$

- Réduction de 3-SAT à de la 3-Coloriabilité
  1. Si le graphe est 3-coloriable, alors soit xi soit !xi est de la couleur de vrai (donc xi est soit vrai, soit faux)
  2. Pour chaque clause, on crée un gadget qui crée un triangle pour chaque paire de variables
  3. On relie les variables entre gadgets et graphe principal



Propriétés

- Borne inférieure du nombre chromatique d'un graphe G(S,A) ?
  - Le degré ?
    - ❖ $\forall u \in S, \mathcal{X}(G) \geq |\mathrm{N(u)}|$?
  - La taille de la clique ?
    - ❖ $\forall (u,v) \in A, \mathcal{X}(G) \geq |\{(\mathrm{u,x})\}_{(v,x)\in A}|$?

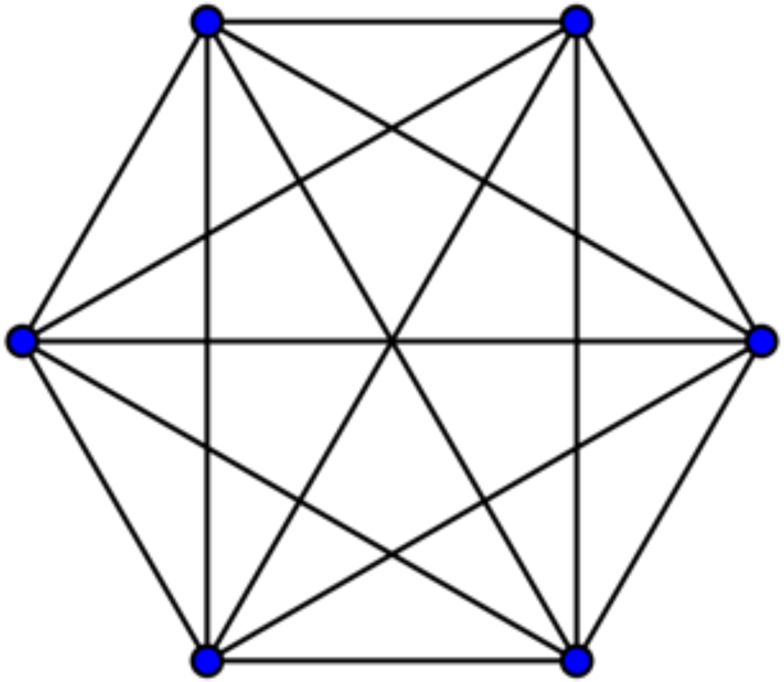


- Cas particuliers : nombre Chromatique de :
  - C_n
    - ❖ 2 si n pair
    - ❖ 3 si n impair

BORNES DU NOMBRE CHROMATIQUE

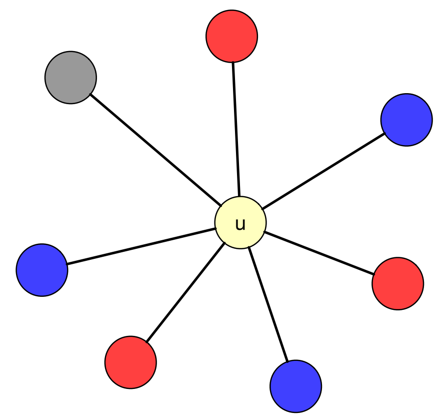
Bornes de coloration

- Théorème de Brooks (1941)
  - $\mathcal{X}(G) \leq \Delta(G) + 1$
  - $\mathcal{X}(G) = \Delta(G) + 1$ ssi G est complet ou G est un cycle impair

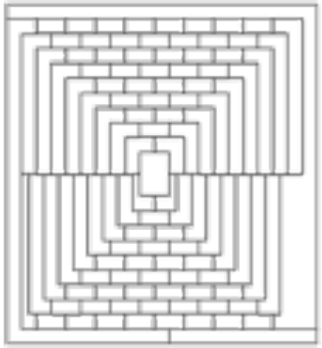


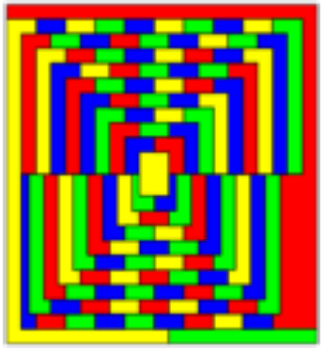
Bornes de coloration

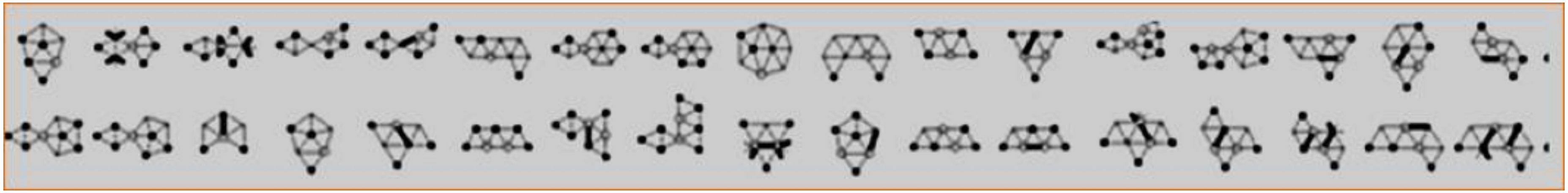
- Graphes planaires
  - Kenneth Appel et Wolfgang Haken (1976)
  - Premier théorème dont la démonstration a nécessité l'usage d'un ordinateur
    - ❖ 1 200 heures de calcul
  - Un graphe planaire est 4-colorable
    - ❖ $\mathcal{X}(G) = 4$
    - ❖ 4 couleurs nécessaires quand il existe un nombre impair de régions (faces) qui l'entourent
      - – Région = zone délimitée par un groupe d'arêtes
    - ❖ ➔ traiter tous les cas possibles
      - – Il faut retirer un sommet et lui réaffecter sa couleur pour enlever le besoin de 5 couleurs
    - ❖ 1476 anneaux à 14 sommets possibles



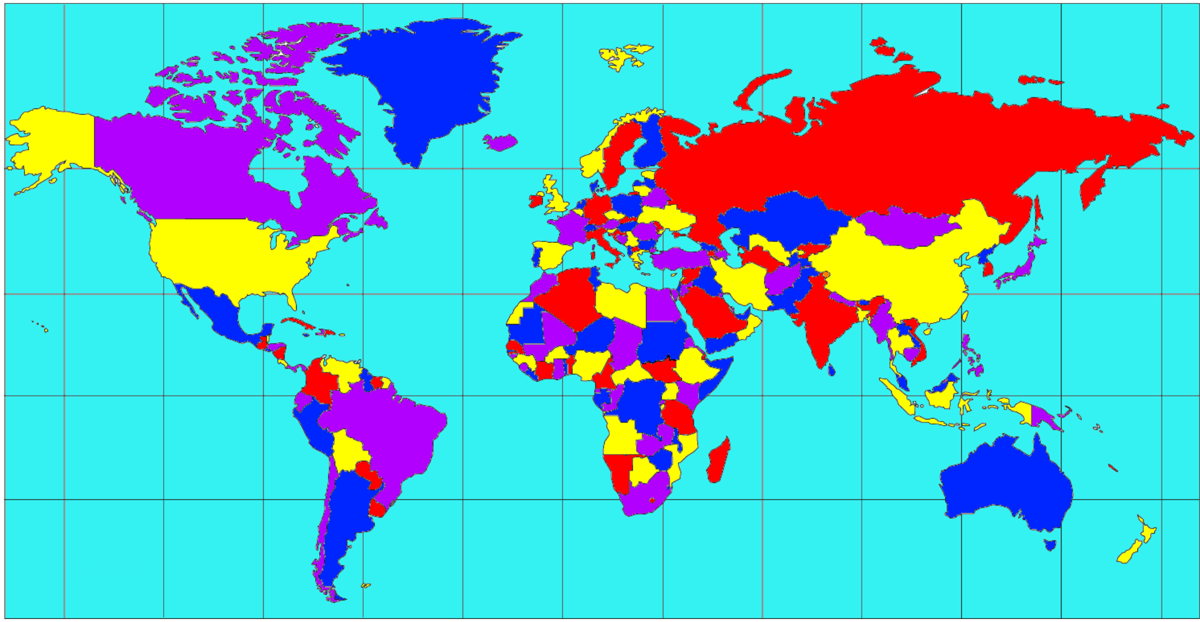
7 régions





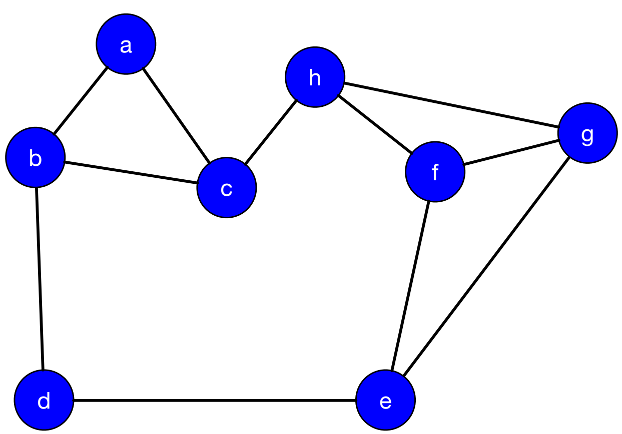


Théorème des 4 couleurs

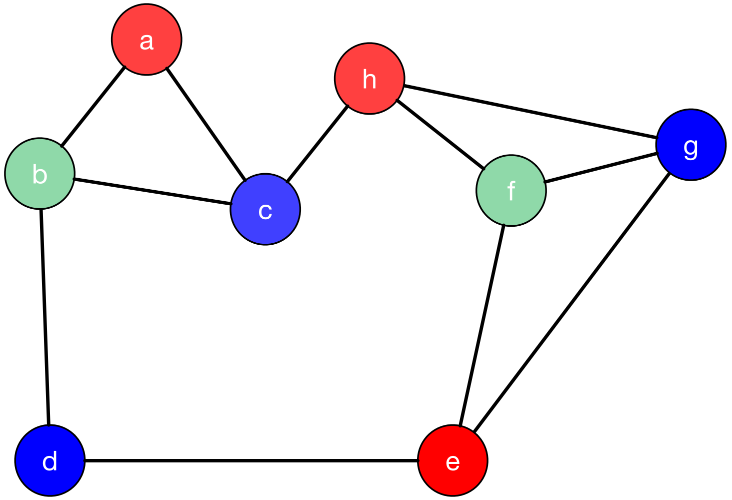


Stables et coloration

- Stable = indépendance des sommets
  - Créer une partition en sous-ensembles stables
    - ❖ Une couleur par stable
      - – Preuve ?
  - Nombre chromatique
    - ❖ Le plus petit entier k tel qu'il existe une partition en k stables
    - ❖ $\mathcal{X}(G) \leq k$
- Application
  - Montrer que $\mathcal{X}(G) = 3$



Sous graphe complet (a,b,c): $\mathcal{X}(G) \geq 3$
Partition en 3 stables : $\mathcal{X}(G) \leq 3$

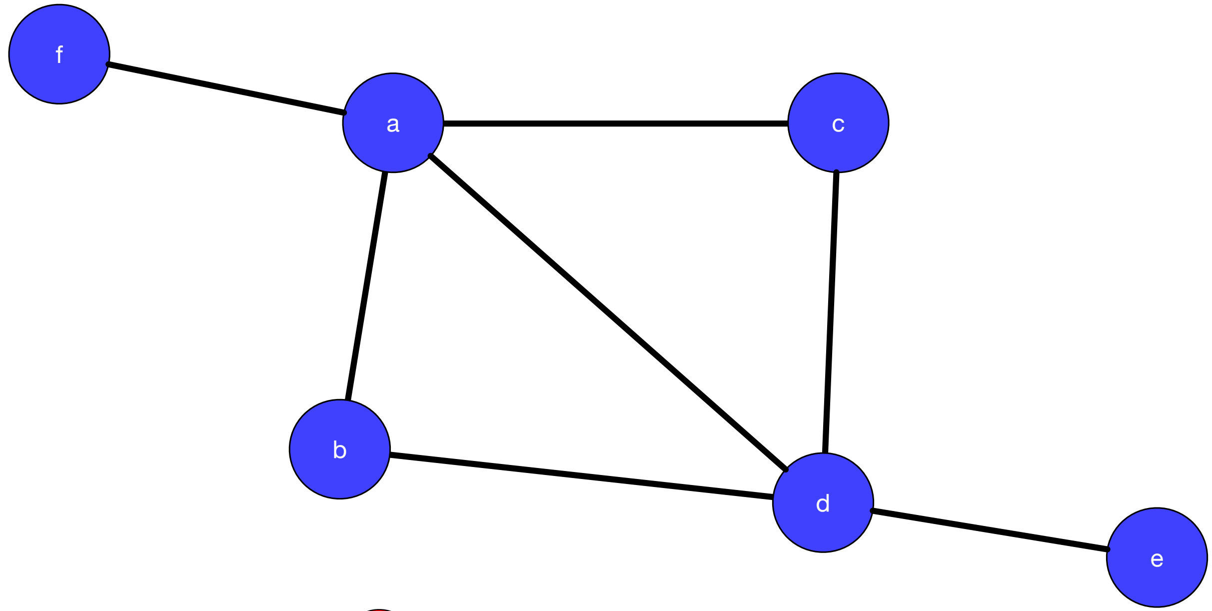


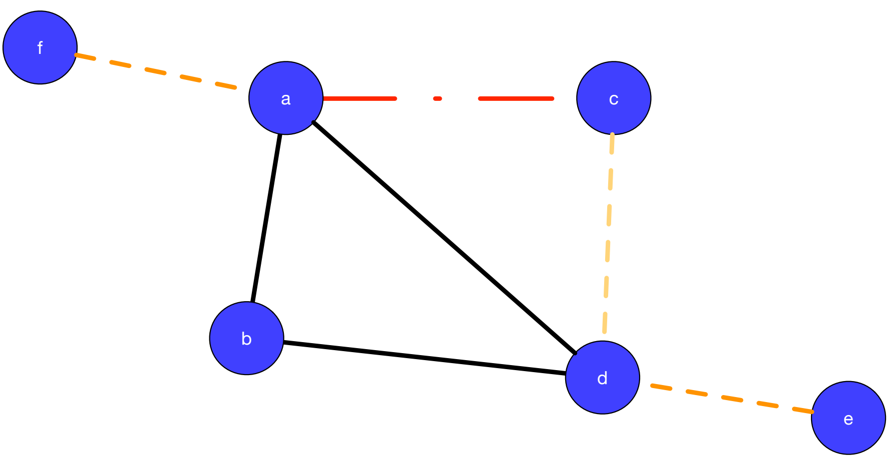
Mineur d’un graphe

- H est mineur de G (non orienté)
  - G → H après un nombre quelconque d’opérations
    - Extraction d’un sommet isolé de G
    - Suppression d’une arrête (en gardant les sommets)
    - Contraction d’une arrête : fusionne les deux sommets correspondants
- Utilité
  - Permet de caractériser un graphe
    - Exemples
      - Existence d’un mineur K_5
      - Conjecture de Hadwiger : tout graphe dont K_k n’est pas un mineur est colorable avec k-1 couleurs
        - Ordonnancement, assignation de ressources
        - K>=6 ouvert

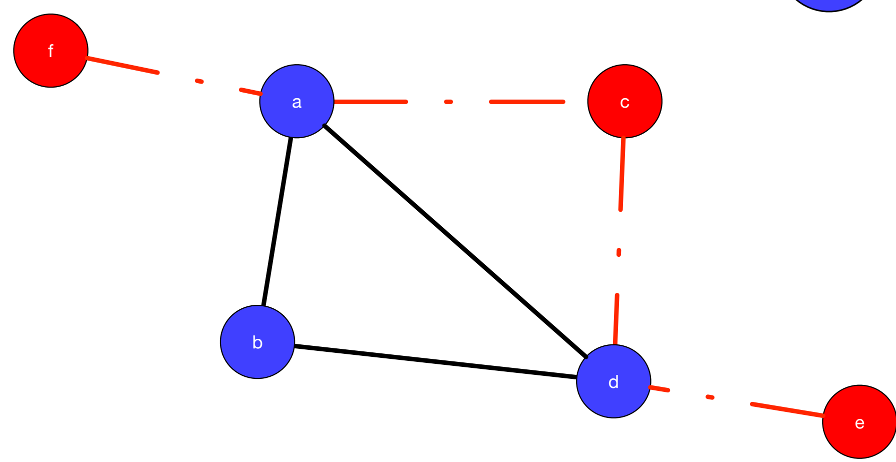
Mineur d’un graphe

- K_3 mineur de G ?





ou



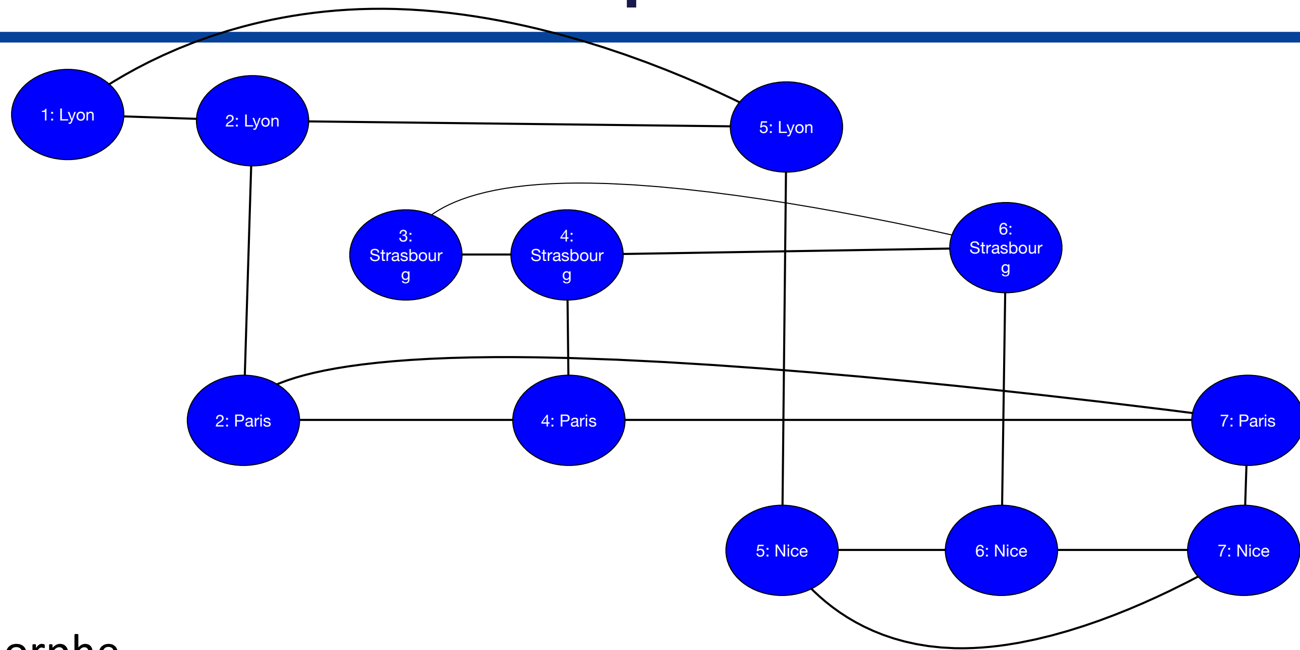
RÉSOLUTION

Tourisme & Tours opérateurs

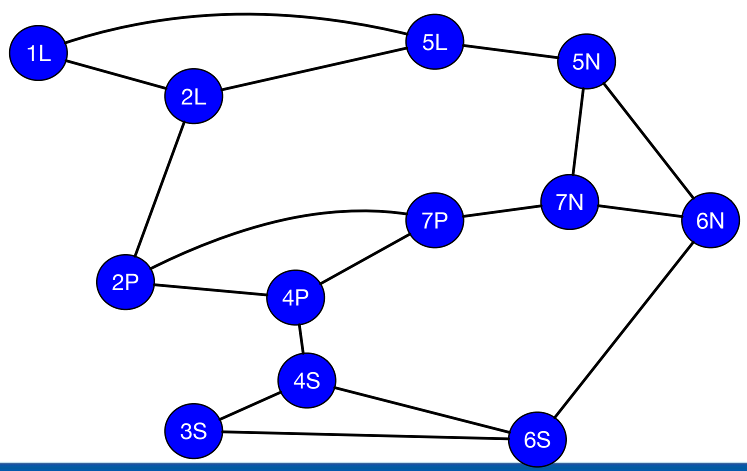
- 7 agences de voyages qui organisent les visites de :
  - Lyon, Paris, Strasbourg, Nice
  - Pas deux agences dans la même ville le même jour
  - Une seule ville par jour
  - Programme
    - ❖ Ag1: Lyon
    - ❖ Ag2: Lyon & Paris
    - ❖ Ag3: Strasbourg
    - ❖ Ag4: Paris & Strasbourg
    - ❖ Ag5: Lyon, Nice
    - ❖ Ag6: Nice & Strasbourg
    - ❖ Ag7: Nice & Paris

- Est-il possible de programmer toutes les visites en 3 jours ?
  - Borne inférieure : nombre de villes par agence

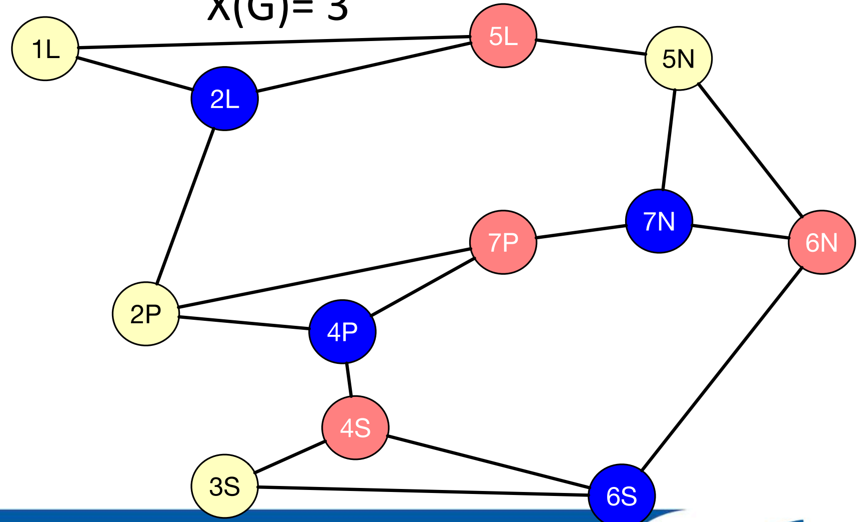
Tourisme & Tours opérateurs



isomorphe

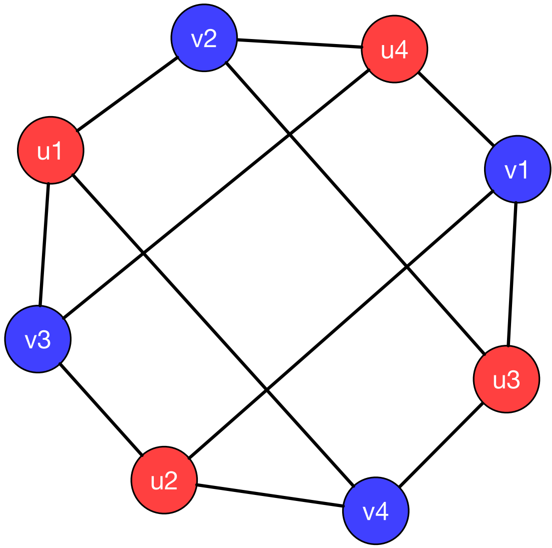


X(G)= 3



Algorithme de Welsh-Powell

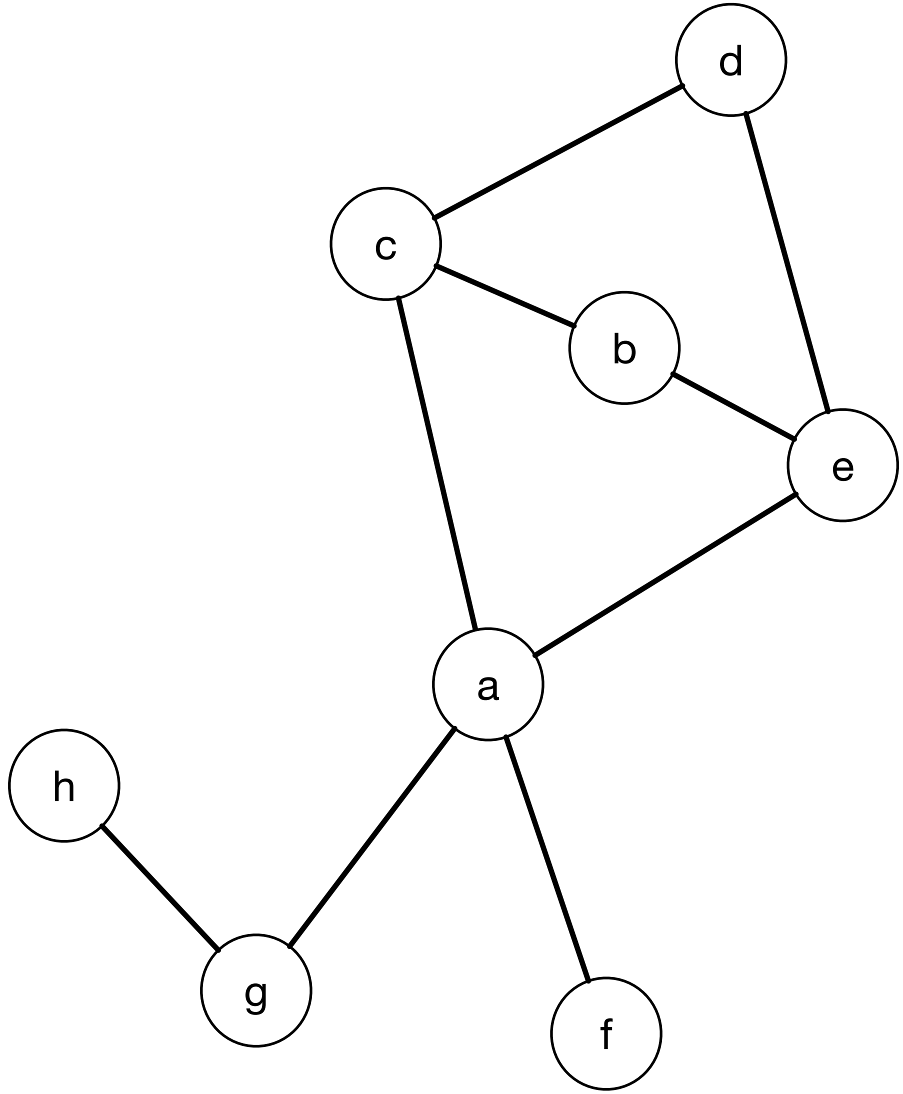
- Approche gloutonne
  1. Classer les sommets par degré décroissant
     a) Créer une nouvelle partition c
     b) Parcourir la liste ordonnée des sommets non marqués
        a) Si le sommet u est non adjacent à un autre sommet de la partition c
           1. marquer u et l'assigner à cette partition
     c) S'il reste un sommet non marqué, retourner à a).



Welsh, D. J. A.; Powell, M. B. (1967), "An upper bound for the chromatic number of a graph and its application to timetabling problems", The Computer Journal 10 (1): 85–86, doi:10.1093/comjnl/10.1.85

Algorithme de Welsh-Powell

- Application



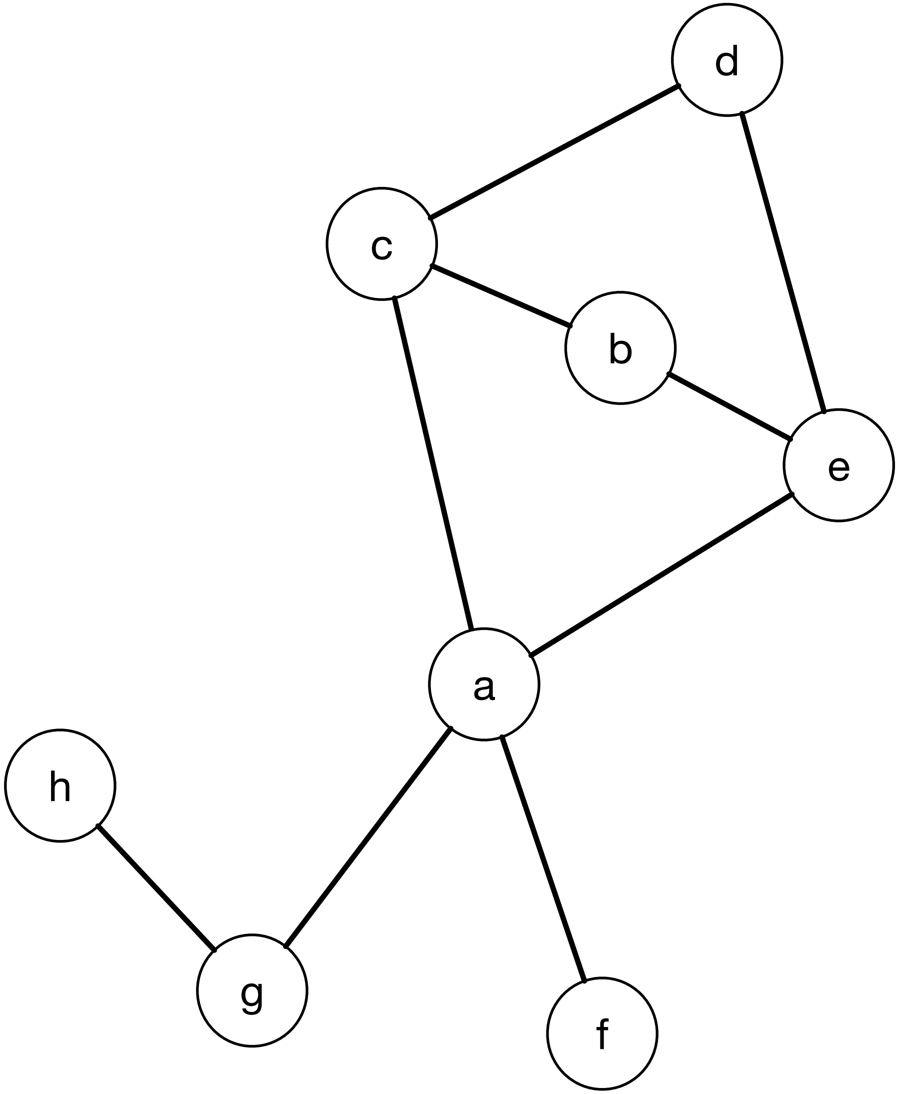
Algorithme DSAT

- Brélaz, 1979
  1. Ordonner les sommets par ordre décroissant
  2. Assigner la couleur 0 à tous les sommets
     a) Couleur invalide
  3. Sélectionner le sommet de degré maximum et le colorer en c1
  4. Sélectionner le degré avec DSAT maximum (si conflit, degré)
     a) Métrique de choix du sommet à colorer
  5. Le colorer avec la plus petite couleur disponible
  6. S'il existe encore un sommet de couleur 0, revenir en 2.

- Critère de gloutonnerie
  - DSAT(u) = nombre de couleurs différentes parmi les sommets adjacents à u
    - Relatif à la « *pression* » de coloration
    - Soit c(u) la couleur associée au sommet u, et $\mathcal{C} = \{c_i\}$ l'ensemble des couleurs
      - $DSAT(u) = |\{c_i | \exists v \in S \,|(u,v) \in A \wedge c(v) = c_i\}|_{c_i \in \mathcal{C}/\{0\}}$

Algorithme DSAT

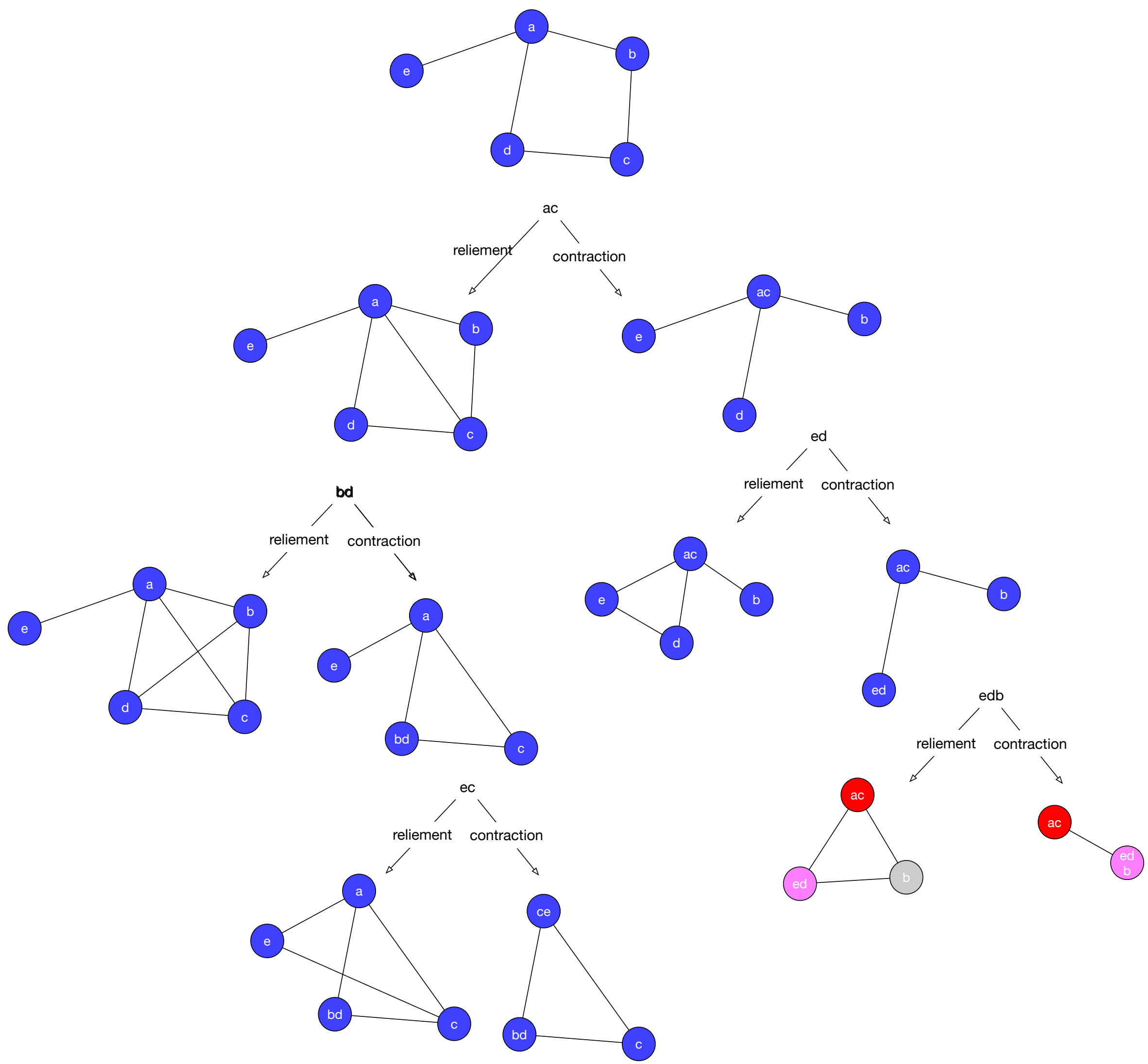
- Application



Algorithme de reliements-contraction

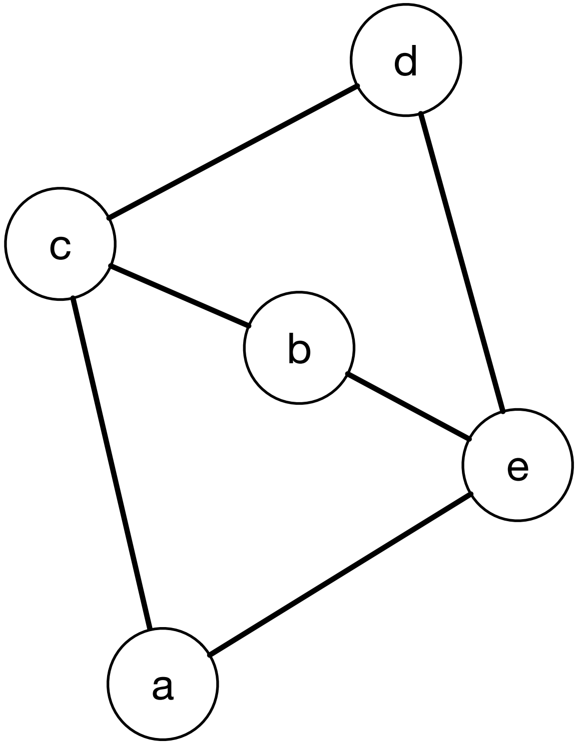
- Ce qui doit nous guider : pour colorier une clique de taille n, il faut n couleurs
- Principe
  - 2 sommets non reliés (i.e. non voisins)
    - ❖ Contraction (en un seul sommet) : même couleur
    - ❖ Reliement (on ajoute une arête) : couleur différente
  - Optimal
    - ❖ Pour toute paire de sommets, on teste les 2 possibilités
- Arrêt
  - Le graphe est une clique : la taille donne le nombre de couleurs

Algorithme de reliements-contraction



Algorithme de reliements-contraction

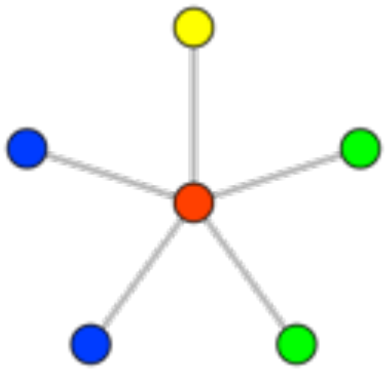
- Heuristique gloutonne
  - On contracte gloutonnement les deux sommets qui enlèvent le plus d'arêtes
    - ❖ $vc(x,y) = |E(G)| - |E(G')|$
    - ❖ Avec G' le sous-graphe contractant x et y



Variante

- Coloration équitable : les ensembles de sommets pour chaque couleur ont la même cardinalité
  - Plus ou moins 1
  - Équilibrage de charge dans des affectations

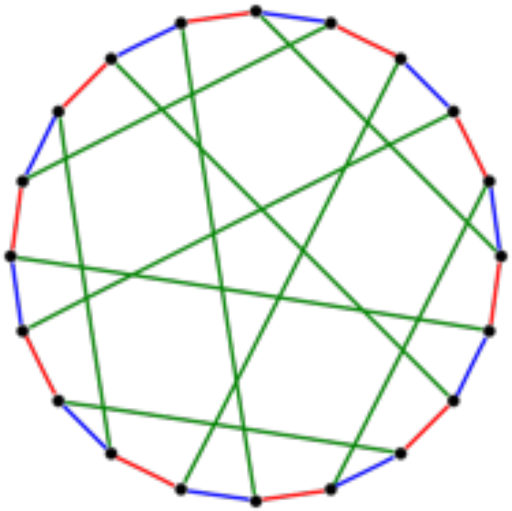
- Coloration équitable d'un graphe étoile à k sommets ?



COLORATION D'ARÊTES

Coloration des arêtes

- Coloration
  - c couleurs : affectation d’une couleur à chaque arête
  - **Couleur** à chaque **Couplage** du graphe
    - ❖ Couplage = des arêtes sans sommet commun



- Indice chromatique -- q(G)
  - Contrainte : deux arêtes adjacentes ont deux couleurs distinctes
  - Nombre minimal de couleurs pour les arêtes

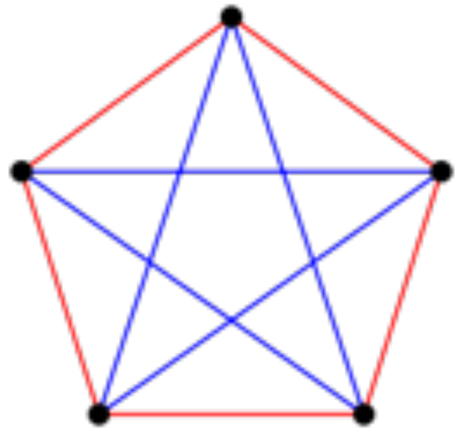
- Indice chromatique de Cn ?

Théorème de Ramsey (1930)

- Coloration des **arêtes** d’un graphe
  - c couleurs : affectation d’une couleur à chaque arête
    - Attention : coloration quelconque, sans contrainte
- Théorème de Ramsey
  - « Pour tout entier N, il existe un graphe complet suffisamment grand dont une clique d’ordre N est colorée avec la même couleur »
- Equivalent à
  - Un graphe complet K_N coloré à l’aide de *c* couleurs
    - Si N suffisamment grand :
    - Coloration en c couleurs
      - une suite d’entier (n1, .., nc) donnée
      - Il existe une couleur i telle qu’une clique monochromatique d’ordre ni existe
    - But : calculer R(n1,..,nc) = N pour une suite d’entiers donnée
      - N le plus petit entier pour lequel le graphe complet K_N vérifie cette propriété
    - R(s,t) = en coloriant en 2 couleurs, il existe une clique de taille s pour la couleur c1 ou une clique de taille t pour la couleur c2
      - NB: R(s,t) = R(t,s)

Application du théorème de Ramsey

- Calcul de R(3,3) : deux couleurs, et au moins une avec un K3
  - Un graphe complet K5 utilisant 2 couleurs
    - ❖ Coloration sans aucun K3 monochromatique
  - Graphe Complet K6 utilisant 2 couleurs
    - ❖ Au moins une clique d'ordre 3 monochromatique
  - Conclusion
    - ❖ R(3,3) <= 6 et R(3,3) > 5
    - ❖ R(3,3) = 6
      - – 2 couleurs, K3 pour chaque couleur (3,3)



- Objectif : Trouver des sous-structures organisées
  - Bornes d'efficacité
    - ❖ R(4,4) =18
    - ❖ Inconnu pour R(5,5) et plus
      - – R(5,5) : entre 43 et 49
      - – R(10,10) : entre 798 et 23,556