

---

*Objectif* : choisir les bons types de graphes pour la modélisation de problèmes simples

*Durée* : 2 heures

---

Partie 1

## Modélisation

### Exercice 1: Gare de triage

Entrent dans cette gare 6 wagons dans l'ordre 2, 5, 3, 6, 1, 4 et doivent ressortir triés (1,2,4,5,6). Par ailleurs, sur une voie, les wagons doivent également être rangés de façon croissante (e.g. si  $i$  suit  $j$ , alors  $i > j$ ). En vous aidant d'une représentation en graphe, combien de voies sont nécessaires pour trier ces wagons ?

### Exercice 2: Affectation

Soit trois enseignants  $E_1, E_2, E_3$  et trois groupes d'étudiants  $G_1, G_2, G_3$ .

- $E_1$  doit donner un cours de 2h à  $G_1$  et 2 heures à  $G_2$ .
- $E_2$  doit donner un cours de 1h à  $G_1$ , 2 heures à  $G_2$ , 1h à  $G_3$ .
- $E_3$  doit donner un cours de 2h à  $G_1$  et  $G_2$ , 2 heures à  $G_3$ .

Comment représenteriez vous un tel problème sous forme de graphe et quelle plage horaire est néces-

saire ? Vous proposerez une affectation.

Partie 2

## Propriétés

### Exercice 1: Lemme des poignées de main

**Théorème 1** *Tout graphe comprend un nombre pair de sommets de degré impair.*

Pouvez vous démontrer ce théorème ? <sup>1</sup>

### Exercice 2: Graphe à propriétés contraintes

Est-il possible de relier 14 ordinateurs de telle sorte que chaque appareil soit relié à exactement 3 autres ?

### Exercice 3: Propriétés d'un graphe

Soit le graphe orienté  $G(S,A)$  tel quel :

- $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $A = \{(1,2), (1,4), (2,2), (2,4), (3,2), (3,5), (4,3), (5,3)\}$

1. Pouvez vous représenter graphiquement ce graphe ?
2. Quel est le degré entrant (vs. sortant) de chaque sommet ?
3. Donnez les prédécesseurs de 4 et les successeurs de 2
4. Ce graphe est-il simplement connexe ? Quelles en sont les composantes fortement connexes ?
5. Quel est le diamètre et les centres de la plus grande composante connexe ?
6. Donnez un exemple de graphe partiel, et de sous-graphe de  $G$ .

---

1. Cette propriété est apparue la première fois dans l'article d'Euler en 1736 dans le problème des 7 ponts de Königsberg.

**Exercice 4: Graphe Modulo**

Soit le graphe  $G(S,A)$  défini par :

- $S = \{s_i\}_{i \in [0,k]}, k \in \mathbb{N}$
- $A = \{(s_i, s_j)\}_{i \pmod 2 = j \pmod 2 \wedge i \neq j}$

1. Pouvez vous donner une représentation graphique de  $G$  pour  $k=3,4$  et  $7$ ?
2.  $G$  est-il connexe?
3.  $G$  est-il un graphe biparti?
4. Que forme le sous-graphe  $S' = \{s_i\}_{i \pmod 2 = 0}$ ?
5. Quelle est la valeur de respectivement  $\delta(G)$  et  $\Delta(G)$ ?