Théorie des Graphes
Codage matriciel et Relations

TPS 1A INOC

theoleyre@unistra.fr

Objectif : maitriser les représentations matricielles de graphes, et les propriétés classiques dans les relations

Durée : 3 heures

Partie 1

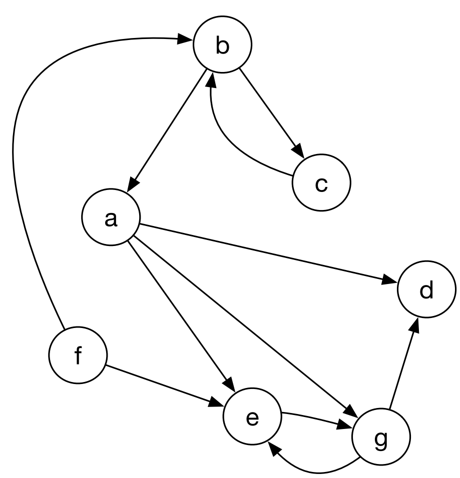
Codage Matriciel

Exercice 1: Matrice d'incidence

1. Quelles sont les dimensions de la matrice d'incidence d'un graphe G(S,A)

Réponse : matrice de taille |S| (lignes) x |A| (colonnes)

2. Donnez la matrice d'incidence des graphes ci-dessous.



Réponse : Application directe du cours : 1 pour le sommet d'arrivée, -1 pour le sommet de départ

3. Donnez également un algorithme permettant de calculer le degré entrant et sortant de chaque sommet, tel que :
   — Entrée : $MatI[]$
   — Sorties : $degE[]$ et $degS[]$

```
#include <stdio.h>
#define         N       100     //sommets
#define M       200  //aretes
short MatI[N][M];       // matrice d'incidence
short degE[N];          //degre entrant
short degS[N];          //degre sortant
}
```

```
*/ intialisation */
bzero(degS, sizeof(short) * N);
bzero(degE, sizeof(short) * N);

/* parcours */
for(a=0; a<M; a++)
        for (u=0; u<N; u++)
                //arrete sortante
                if MatI[a][u] == -1
                        degS[u] ++;
                //arete entrante
                if MatI[a][u] == 1
                        degE[u] ++;
                //cas de la boucle
                if MatI[a][u] == 2
                        degE[u] ++;
                        degS[u] ++;
return (degS, degV);
}
```

Exercice 2: Matrice d'adjacence

1. Donnez la matrice d'adjacence du graphe précédent après avoir rappelé ses dimensions

Réponse : Il s'agit de la matrice sommet x sommet donc de dimension n x n.
Application directe du cours : 1 ssi l'arête de i vers j existe.

2. Quelle est la propriété de la matrice d'adjacence d'un graphe non orienté ? Qu'en déduisez vous quant à la complexité en terme d'opérations et de mémoire ?

Réponse : Elle est symétrique, nous pourrions donc la coder que sous une de ses moitiés (m[i][j] avec i<= j). On a donc deux fois moins d'opérations quand on teste les arêtes, degrés, etc.
Par contre, la taille mémoire reste la même (bloc de n x n). Sinon, il faut modifier la façon de le parcourir ...

Exercice 3: Liste d'adjacence

1. Donnez la liste d'adjacence du graphe précédent après avoir rappelé ses dimensions

Réponse : Il s'agit de deux listes :

(a) une liste de début (un élément par sommet) : n éléments
(b) une liste des extrémités terminales des arêtes (une par arête) : m éléments

Ainsi :
Liste des débuts : (0, 3, 5, 7, 7, 8, 10)
Liste des arêtes : (3,4,6, 0, 2, 1, 2, 6, 1, 5, 3, 5)
On a fait correspondre les sommets a,b,c,d,e,f,g à des entiers 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6

2. Discutez de la taille mémoire des différentes structures de données

Réponse : pour les graphes creux, les matrices sont inefficaces, et la liste d'adjacence est plus adaptée. Par contre, elle requiert de parcourir plus pour tester l'existence d'une arête.

3. Donnez un pseudo-code pour calculer le degré entrant vs. sortant des sommets

Réponse : Pour tous les sommets, le degré sortant représente la différence entre les pointeurs sur le début de liste (ptr[i]) et celui suivant (ptr[i+1]), ou la taille de la liste pour le dernier sommet.
Pour le degré entrant, il faut tester toutes les arêtes, ce qui est plus long :

Partie 2

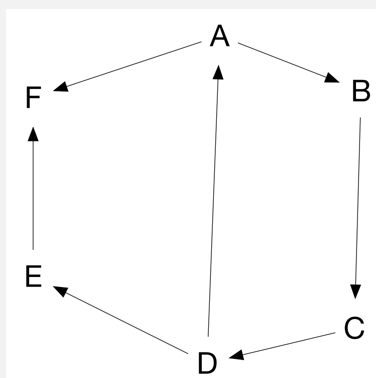
Graphes et Relations

Exercice 1: Relation

$\mathcal{R}$ la relation sur S donnée par $\mathcal{R} = \{(A,B),(B,C),(C,D),(D,E),(E,F),(A,F),(D,A)\}$.

Dessiner le graphe orienté G défini par $G = (S, \mathcal{R})$. $\mathcal{R}$ est-elle symétrique, réflexive, transitive ?

Réponse :



$$M : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

elle est non symétrique (la matrice ne l'est pas)
elle est non transitive (par exemple (AB, BC mais pas AC)).
Elle est non réflexive (des zéros présents sur la diagonale).

Écrire la matrice d'adjacence de $\mathcal{R}$.

Exercice 2: Relation sous forme de matrice

R la matrice :

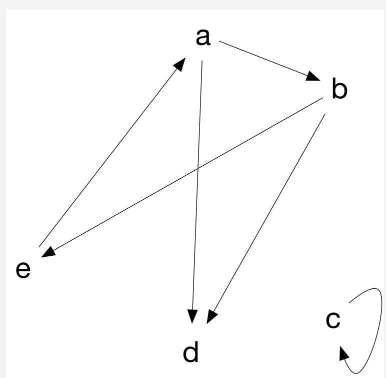
$$R : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarquer que R définit une relation $\mathcal{R}$ sur tout sous-ensemble de S de cardinal 5, et écrire cette relation.

Dire si $\mathcal{R}$ est symétrique, réflexive, transitive.

Enfin, dessiner le graphe orienté $G = (S, \mathcal{R})$ induit par cette relation.

Réponse : S={A,B,C,D,E}
R= {(A,B), (A,D), (B,D), (B,E), (C,C), (E,A)}
Elle est non transitive (B/E/A mais pas de B/A). Elle est également non réflexive (pas de boucle systématique), et elle n'est pas symétrique.



Exercice 3: Relation sous forme de condition

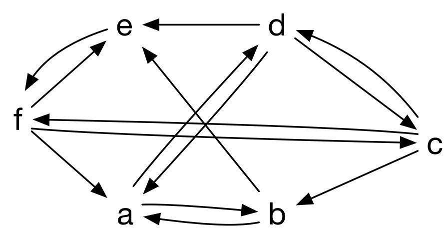
Soit la relation d'ordre R définie sur l'ensemble {1,2,3,4,5,6} définie par $R = \{(a, b)|b = a + 1\}$. Cette relation est-elle réflexive, symétrique et/ou transitive ?

Réponse : Elle n'est pas réflexive puisque nous n'avons pas les relations aRa (e.g. (1,1) n'est pas dans R).
Elle n'est pas symétrique (e.g. (1,2) mais pas (2,1).

Elle n'est pas transitive ((1,2) et (2,3) mais pas (1,3)).

Exercice 4: Codage d'un graphe

$G = (S, \mathcal{R})$ le graphe orienté :



Considérer la définition d'un graphe orienté $< S, A, \alpha, \beta >$ où :

— S est un ensemble de sommets,

— A est un ensemble d'arêtes,

— $\alpha : A \to S$ donne l'extremité initiale d'une arête,

— $\beta : A \to S$ donne l'extremité finale d'une arête,

et décrire G avec cette définition. Donner la matrice d'incidence de G.

Réponse : $S = \{a, b, c, d, e, f\}$
$A = \{e_0, .., e_j\}$
$\alpha = \{(e_0, a), (e_1, a), (e_2, b), (e_3, b), (e_4, c), ..\}$
$\beta = \{(e_0, b), (e_1, d), (e_2, e), (e_3, a), (e_4, b), ..\}$

Partie 3

Manipulations matricielles

Exercice 1: Propriétés matricielles

Pour chacune des relations définies par les matrices d'adjacence ci-dessous, indiquer si elle est réflexive, symétrique, transitive, faiblement ou fortement anti-symétrique. Quelles sont les relations d'équivalence ?

les relations d'ordre ?

$$R_0 : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R_1 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R_2 : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_3 : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad R_4 : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R_5 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Réponse : Soit $E = [0, n]$ un ensemble, et $\mathcal{R}$ une relation sur E : sa matrice d'adjacence $R \in \mathcal{M}_{n,n}(\{0,1\})$ est définie par $R(i,j) = 1$ si $(i\mathcal{R}j)$, $R(i,j) = 0$ sinon.

Une relation est **réflexive** ssi la diagonale de sa matrice d'adjacence ne comporte pas d'élément nul car $(R(i,i) = 0) \Rightarrow (i,i) \notin \mathcal{R}$. Seules R_2 et R_5 ne sont pas réflexives.

Une relation est **symétrique** ssi sa matrice d'adjacence est symétrique :

— R symétrique $\Rightarrow \forall 1 \leq i,j \leq n, R(i,j) = R(j,i)$, d'où $(i\mathcal{R}j) \Rightarrow R(i,j) = 1 = R(j,i) \Rightarrow (j\mathcal{R}i)$, d'où $\mathcal{R}$ est symétrique,

— $\mathcal{R}$ symétrique $\Rightarrow R(i,j) = R(j,i)$ d'où R est symétrique.

R_1 et R_3 sont des matrices de relations symétriques.

Une relation est **transitive** ssi $R^2(i,j) \neq 0 \Rightarrow R(i,j) \neq 0$. En effet :

— $R^2(i,j) \neq 0 \Leftrightarrow \exists 0 \leq k \leq n \mid R(i,k) \neq 0 \wedge R(k,j) \neq 0 \Leftrightarrow \exists k \mid (i\mathcal{R}k) \wedge (k\mathcal{R}j)$.

— $R(i,j) \neq 0 \Leftrightarrow (i\mathcal{R}j)$.

D'où $(R^2(i,j) \neq 0 \Rightarrow R(i,j) \neq 0) \Leftrightarrow (\exists k \mid (i\mathcal{R}k) \wedge (k\mathcal{R}j) \Rightarrow (i\mathcal{R}j)) \Leftrightarrow \mathcal{R}$ est transitive. (On peut aussi tester si R est égale à la matrice de la fermeture transitive de $\mathcal{R}$).
Seule R_2 n'est pas la matrice d'une relation transitive.

Une relation est **antisymétrique** ssi sa matrice d'adjacence vérifie :
$\forall 0 \leq i,j \leq n \mid i \neq j,\ R(i,j) \neq 0 \Rightarrow R(j,i) = 0$:

— Soit $\mathcal{R}$ antisymétrique, et R sa matrice d'adjacence telle que $\exists 0 \leq i,j \leq n, i \neq j$ avec $R(i,j) \neq 0 \wedge R(j,i) \neq 0$. Alors $(i\mathcal{R}j)$ et $(j\mathcal{R}i)$ mais $i \neq j$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse d'antisymétrie.

— On montre la contraposée de la réciproque : soit $\mathcal{R}$ non antisymétrique : $\exists i,j \in E \mid (i\mathcal{R}j) \wedge (j\mathcal{R}i) \wedge (i \neq j)$. Alors on a $R(i,j) \neq 0$ et $R(j,i) \neq 0$ avec $i \neq j$.

R_0, R_4 et R_5 sont les matrices d'adjacence de relations faiblement antisymétriques.

Une relation est **fortement antisymétrique** ssi sa matrice d'adjacence vérifie :
$\forall 0 \leq i,j \leq n,\ R(i,j) \neq 0 \Rightarrow R(j,i) = 0$.
Seule R_5 est la matrice d'adjacence d'une relation fortement antisymétrique.

R_1, R_3 sont les matrices d'adjacence de **relations d'équivalence** ; R_0 et R_4 sont les matrices d'adjacence de **relations d'ordre.**

Exercice 2: Composition et transitivité

Soient S un ensemble et $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ deux relations sur S. On appelle composée de $\mathcal{R}_1$ par $\mathcal{R}_2$, et on la note $\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1$, la relation :

$$\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1 = \{(a, b) \in S \times S \mid \exists c \in S, ((a, c) \in \mathcal{R}_1) \wedge ((c, b) \in \mathcal{R}_2)\}.$$

1. Comment calculer la matrice d'adjacence de la composée de deux relations données par leur matrice d'adjacence ?
2. Calculer la composée de R_4 par elle-même, et montrer qu'une relation $\mathcal{R}$ est transitive si et seulement si $\mathcal{R} \circ \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}$.
3. Proposer un algorithme testant si une relation, donnée par sa matrice d'adjacence, est transitive.

Réponse :

1. Si R_1 est la matrice d'adjacence de $\mathcal{R}_1$, R_2 celle de $\mathcal{R}_2$ alors la matrice d'adjacence R de $\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1$ est donnée par $R(i, j) = 0$ si $R_1R_2(i, j) = 0$ [a], $R(i, j) = 1$ sinon. En effet, supposons $|A| = n$ et $R_1R_2(i, j) = 0$. Alors $\sum_{1 \leq k \leq n} R_1(i, k)R_2(k, j) = 0$; or $\forall i, j, R_1(i, j) \geq 0$ et $R_2(i, j) \geq 0$, d'où $\forall k, R_1(i, k) = 0 \vee R_2(k, j) = 0$ et (i, j) n'appartient pas à $\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1$.

   On démontre l'autre sens de la même façon.
2. On trouve $R_4R_4 = R_4$.

   Si $\mathcal{R}$ est transitive, $(i, j) \in \mathcal{R} \wedge (j, k) \in \mathcal{R} \Rightarrow (i, k) \in \mathcal{R}$, d'où $\mathcal{R} \circ \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}$. Pour l'inclusion dans le sens $\supseteq$, il faut que $\mathcal{R}$ soit réflexive !

   Supposons maintenant $\mathcal{R} \circ \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}$. L'implication est directe !
3. Avec les matrices d'adjacence, on obtient $\mathcal{R}$ est transitive ssi $R^2(i, j) \neq 0 \Rightarrow R(i, j) \neq 0$.

   L'algorithme est alors facile à écrire.

[a] $R_1R_2 = R_1 \times R_2$, produit matriciel

Partie 4

Structure de données

Exercice 1: Structures de données et algorithmes

Nous supposons que le graphe est codé sous la forme d'une matrice d'adjacence. Écrire en pseudo-code des algorithmes pour :

1. tester si une relation est réflexive ;
2. tester si une relation est symétrique ;
3. tester si une relation est une relation d'ordre ;

Réponse :

Tester si une relation est **réflexive** :

fonction : estréflexive
paramètres : R matrice d'adjacence de $\mathcal{R}$
résultat : Vrai ou Faux.
entier $i = 1$;
retour$\leftarrow \neg(R(i,i) = 0)$;
tant que retour et $i \leq n-1$
  $i \leftarrow i+1$;
  retour$\leftarrow \neg(R(i,i) = 0)$;
fin tant que
sortir avec la valeur retour ;

Tester si une relation est **symétrique** :

fonction : estsymétrique
paramètres : R matrice d'adjacence de $\mathcal{R}$
résultat : Vrai ou Faux.
matrice R' =transposée(R) ;
sortir avec la valeur de $R - R' = 0_{\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{N})}$; [a]

Tester si une relation est une **relation d'ordre** :

fonction : estordre
paramètres : R matrice d'adjacence de $\mathcal{R}$
résultat : Vrai ou Faux.
sortir avec la valeur estréflexive(R)$\wedge$estAntisymétrique(R)$\wedge$estTransitive(R) ;

a. matrice carrée nulle de dimension n par n

Tester si une relation est **antisymétrique** :

fonction : estantisymétrique
paramètres : R matrice d'adjacence de $\mathcal{R}$
résultat : Vrai ou Faux.
entiers $i = 1$, $j = 2$;
retour$\leftarrow \neg((R(i,j) \neq 0) \wedge (R(j,i) \neq 0))$;
tant que retour et $i \leq n - 1$
  tant que retour et $j \leq n - 1$
    $j \leftarrow j + 1$;
    retour$\leftarrow \neg((R(i,j) \neq 0) \wedge (R(j,i) \neq 0))$;
  fin tant que
  $i \leftarrow i + 1$;
  $j \leftarrow i + 1$;
fin tant que
sortir avec la valeur de retour ;

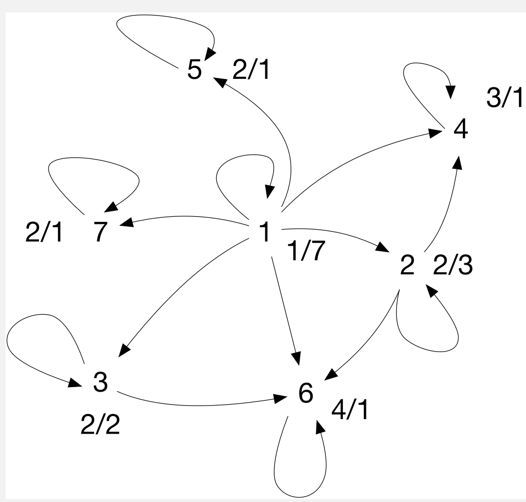
Tester si une relation est **transitive** :

fonction : esttransitive
paramètres : R matrice d'adjacence de $\mathcal{R}$
résultat : Vrai ou Faux.
Pour toute paire $(M[u][v] == Vrai$ et $M[v][w] == Vrai)$
  Si $(R[u,w] ==$ Faux)
    Retourne Faux
Retourne Vrai ;

Exercice 2: Degrés

1. Construire le graphe dont l'ensemble des sommets est $[\![1,7]\!]$ et correspondant à la relation de divisibilité (*i.e.*, il y a un arc entre x et y si et seulement si x divise y). Donner les degrés entrants et sortants de chaque sommet.

Réponse :



2. Cette relation de divisibilité correspond-elle à une relation d'ordre ?

Réponse :
Oui, il s'agit bien d'une relation d'ordre :

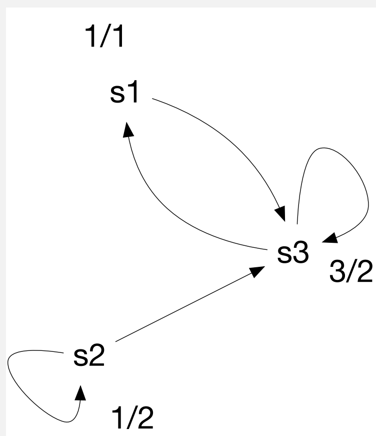
— réflexive : un nombre se divise lui même ;

— antisymétrique : si a divise b, b ne peut pas diviser a ;

— transitive : soit i,j,k.
$Si\ iRj \rightarrow \exists p | i * p = j$
$Si\ jRk \rightarrow \exists q | j * q = k$
Ainsi $i * p * q = k$ et donc iRk

3. Construire un graphe $G = (S, A)$ où $S = \{s_1, s_2, s_3\}$ et :
   — $d^+_{s_1} = 1$ et $d^-_{s_1} = 1$;
   — $d^+_{s_2} = 3$ et $d^-_{s_2} = 2$;
   — $d^+_{s_3} = 1$ et $d^-_{s_3} = 2$.

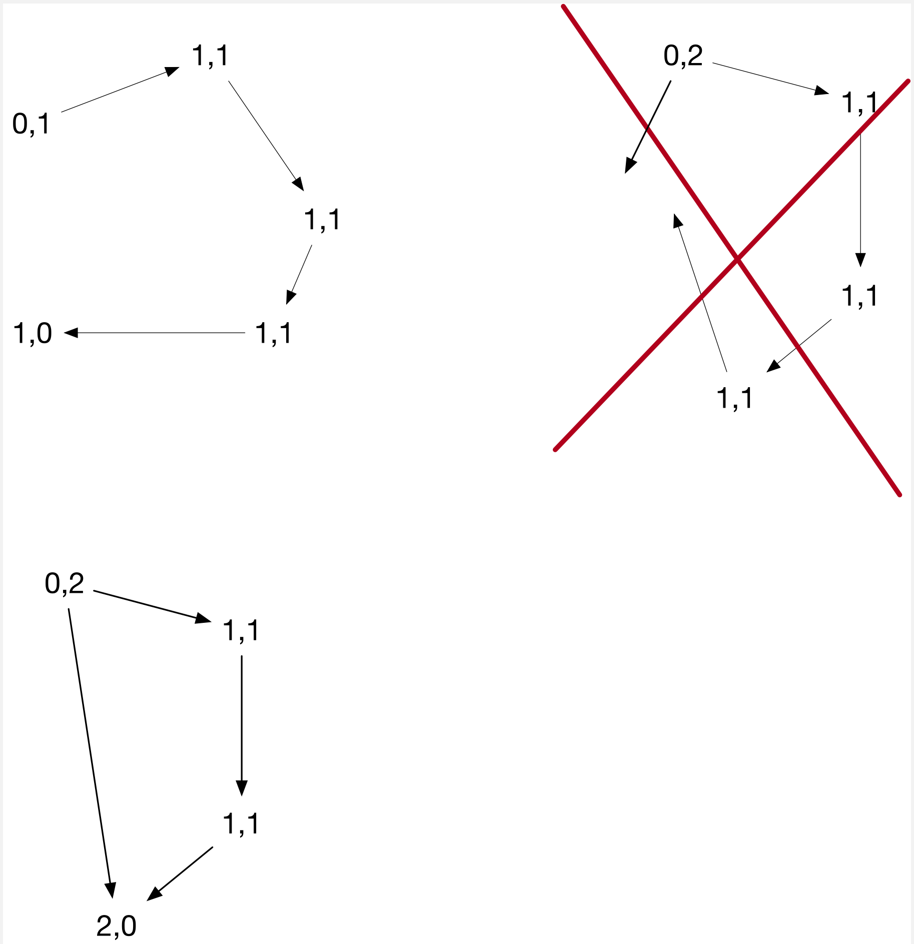
Réponse :



4. Une suite de couples d'entiers est une suite graphique si elle correspond aux degrés des sommets d'un graphe orienté (le premier élément du couple correspondant au degré entrant et le second au degré sortant). Les suites suivantes sont-elles graphiques ?
   — $(0, 1), (1, 1), (1, 1), (1, 1), (1, 0)$
   — $(0, 2), (1, 1), (1, 1), (1, 1)$
   — $(0, 2), (1, 1), (1, 1), (2, 0)$

   Donnez une condition nécessaire (non triviale) pour qu'une suite soit graphique.

Réponse :



Il est nécessaire que la somme des degrés sortants et entrants soit égale.