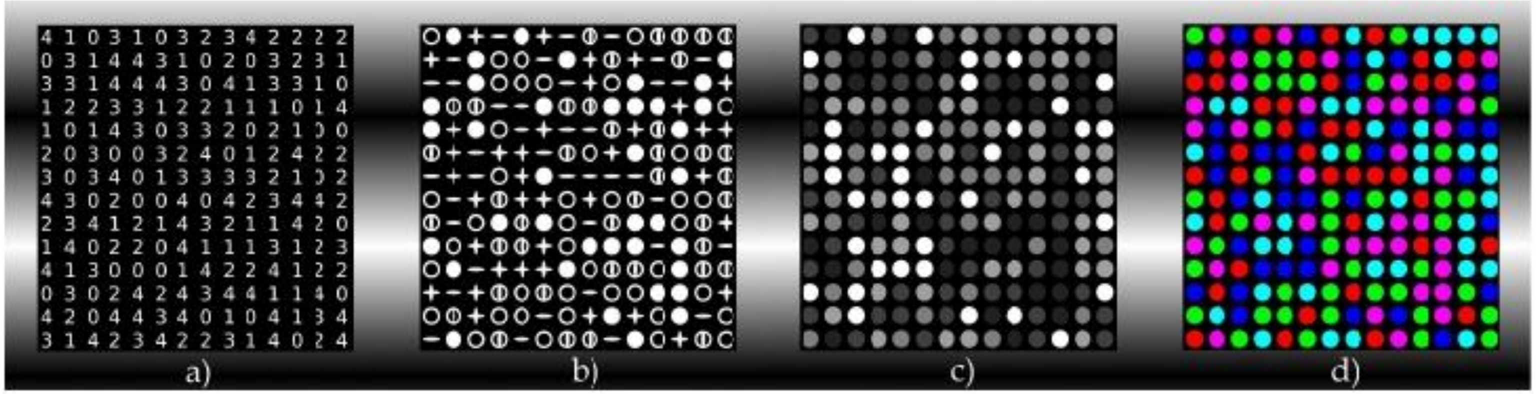
Université de Strasbourg

École d'ingénieurs Télécom Physique Strasbourg

# Analyse Matricielle

Formation d'Ingénieurs Informatique et Réseaux
(édition 2019-2020)




A Perfect Map (14,14,3,3,5) and some associated patterns (*shape, grey and colour levels*)

Christophe DOIGNON

Professeur à Télécom Physique Strasbourg
ICube, Université de Strasbourg
Bureau C418 – Courriel : **c.doignon@unistra.fr**

# Références

***Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur (vol. 2 Méthodes itératives)***, Pascal Lascaux et Raymond Théodor, Dunod, ISBN:2-10-005335-3, 2000, 310 pages

***Méthodes de calcul numérique (vol. 1: Systèmes d'équations)***, Jean-Pierre Nougier, Hermes, ISBN:2-7462-0278-6, 2001, 332 pages

***Introduction à l'optimisation***, Jean-Christophe Culioli, Editions Ellipses, ISBN:978-2-7298-76241, 2012, 380 pages

***Méthodes Numériques : Algorithmes, analyse et applications***, Alfio Quarteroni, Riccardo Sacco, Fausto Saleri, Springer, ISBN:13-978-88-470-0495-5, 2007, 537 pages

**Numerical Analysis**, Richard L. Burden, Douglas J. Faires, Annette M. Burden, Editions CENGAGE Learning, ISBN:978-1-305-25366-7, 2016, 900 pages

**Matrix Computations**, Gene H. Golub, Charles F. Van Loan, 4th edition, The Johns Hopkins University Press, ISBN:978-1-4214-0794-4, 2013, 756 pages

# Plan du cours

## Références

## Chapitre 0 : Objectifs et Introduction

- Objectifs, compétences, prérequis et mise en application.

## Chapitre 1 : Le formalisme matriciel et caractéristiques des matrices

- Généralités
- Dépendance linéaire et noyau, Normes et conditionnement
- Matrices de rotation, rotations de Givens et décomposition RQ

## Chapitre 2 : Méthodes de décomposition

- Inversion généralisée,
- Méthodes d'inversions par blocs
- Méthodes par factorisation et Méthodes itératives
- Décomposition en valeurs singulières : SVD

## Chapitre 3 : Résolution de problèmes par les moindres carrés

- Solutions de systèmes linéaires inhomogènes
- Solutions de systèmes linéaires homogènes
- Applications de la décomposition QR

# Chapitre 0

# Objectifs et Introduction

# Introduction

- **Objectifs**

Ce cours propose d'acquérir des *compétences sur résolution d'un problème physique multi-dimensionnel à partir d'une formulation mathématique déterministe*, linéaire ou quadratique la plupart du temps. Les matrices sont utilisées à cette fin, et plus précisément leurs structures spécifiques qui embarquent des informations à préserver.

On trouve ce type de formulation surtout dans la classification des données et la caractérisation des déformations et des déplacements, par exemple en vision par ordinateur (recalage, reconstruction 3-D, tracking visuel), en traitement des images (filtrage RIF, compression d'images, espaces couleur et conversion, ACP,…), en apprentissage supervisé, en robotique et en réalité augmentée,…

Nous commencerons donc par rappeler des notions élémentaires sur le formalisme matriciel, tout en relevant les structures spécifiques rencontrées. ➔ ***cf. Chapitre 1***

Dans un second temps, il s'agira d'appréhender des techniques de résolutions spécifiques par la prise en compte des caractéristiques des matrices mises en jeu (matrice symétrique, orthogonale, triangulaire, de Hessenberg, tri-diagonale, diagonale, nilpotente, de Householder,…) qu'il est la plupart du temps possible d'intégrer avec des décompositions ou des factorisations adéquates (SVD, Cholesky, QR, Schur, SMW,...). ➔ ***cf. Chapitre 2***

Enfin, nous terminerons par l'application de ces décompositions et factorisations dans la résolution des systèmes linéaires homogènes et inhomogènes avec ou sans contraintes, apparaissant dans la réduction et la classification des données. ➔ ***cf. Chapitre 3***

# Introduction

- **Compétences**

A l'issue de cet enseignement, l'élève-ingénieur aura appris à :

- ✓ Manipuler le formalisme matriciel traduisant le comportement linéaire d'un système physique,
- ✓ Choisir et mettre en œuvre une méthode adéquate pour sa résolution : calculer l'inverse ou l'adjoint d'une matrice avec précision à l'aide des techniques directes ou itératives et préservant les caractéristiques spécifiques du système.

- **Prérequis et mise en application**

Les prérequis pour ce cours concernent l'algèbre linéaire, la formulation matricielle des endomorphismes, les normes et, dans une moindre mesure, les polynômes.

Cet enseignement s'appuie sur des exemples concrets issus des sciences pour l'ingénieur (traitement du signal déterministe, théorie de l'information, robotique et vision par ordinateur,…).

# Introduction

- **Exemple 1** : inversion d'une matrice de rotation

Une rotation est une transformation géométrique qui **conserve le produit scalaire** (donc les angles et les distances) : c'est une isométrie qui, en dimension 3, est utile pour modéliser une catégorie de déplacements d'objets rigides.

Parmi toutes les représentations possibles, on considère ici une matrice orthogonale, $R$, ayant un déterminant positif

$$R^T R = R\,R^T = I_n \text{ et } \det(R) = +1 \;\Rightarrow\; R^{-1} = R^T$$

où $I_n$ est la matrice identité en dimension $n$.

Ces deux propriétés montrent qu'à travers une manipulation sur les indices des lignes et des colonnes, on obtient la matrice inverse d'une isométrie au lieu de mettre en place une méthode générale d'inversion de matrice quelconque, bien plus lourde en ce qui concerne la complexité algorithmique, et forcément moins stable numériquement.

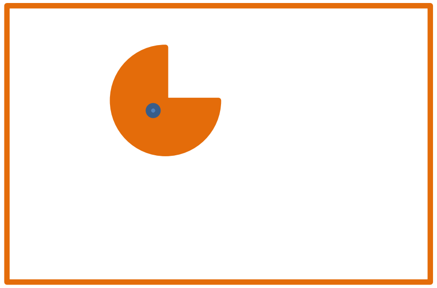
# Introduction

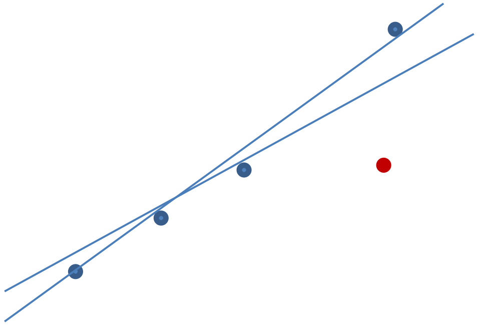
- **Exemple 2** : estimation sans biais (…le plus faible possible du moins)

Pour réaliser une estimation la moins biaisée possible, il faut donc savoir si une mesure est éligible (la conserver ou non) pour le calcul à effectuer, mais aussi savoir quel est l'impact d'une mesure erronée sur la précision du résultat, comme c'est la cas ci-dessous avec

✓ l'image d'un disque partiellement occulté lors de l'estimation de son rayon et de son centre,

✓ l'estimation d'une droite passant par 4 points sélectionnés ou par tous les points…

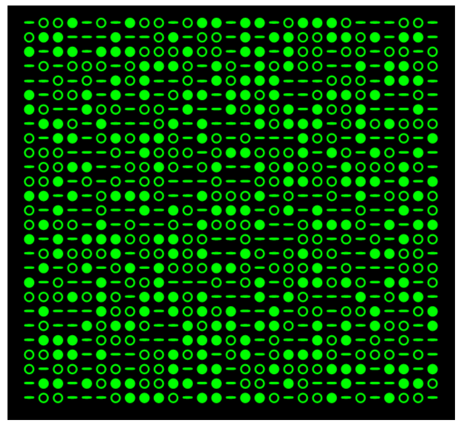


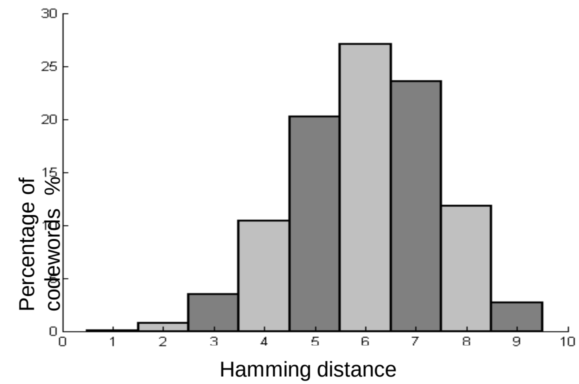


# Introduction

- **Exemple 3** : vision (active) par ordinateur

Les motifs numériques utilisés en vision active par lumière structurée intègrent une forte redondance des informations permettant de les identifier sans ambiguïté parmi des dizaines de milliers. Alors que leurs projections dans les images acquises sont la plupart du temps déformées et partiellement occultées, celles-ci peuvent être tout de même retrouvées, mises en correspondance, et aboutir à une reconstruction 3-D en temps réel !!





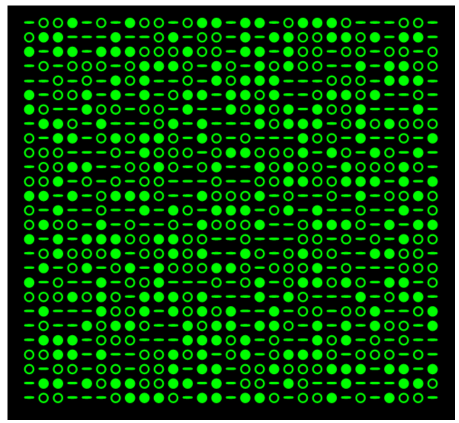

The distribution of *Hamming* distance

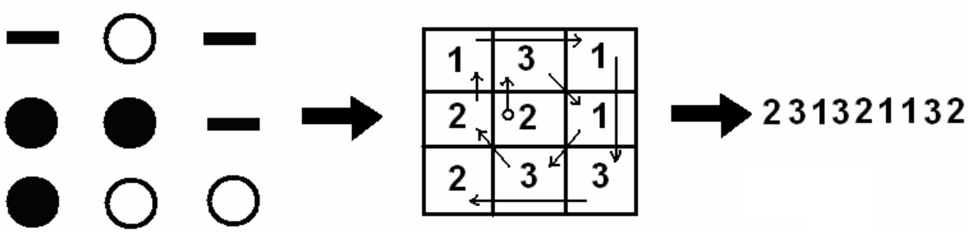
$$\overline{H} = 6.0084$$

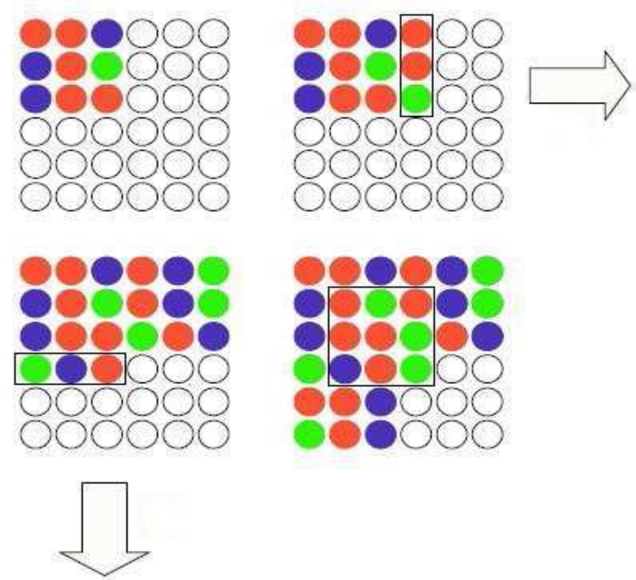
# Introduction

- **Exemple 3** : vision (active) par ordinateur

Les motifs numériques utilisés en vision active par lumière structurée intègrent une forte redondance des informations permettant de les identifier sans ambiguïté parmi des dizaines de milliers. Alors que leurs projections dans les images acquises sont la plupart du temps déformées et partiellement occultées, celles-ci peuvent être tout de même retrouvées, mises en correspondance, et aboutir à une reconstruction 3-D en temps réel !!



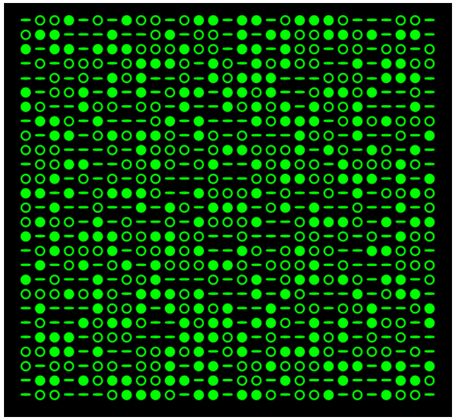


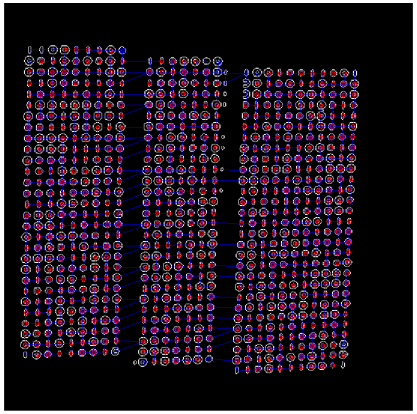



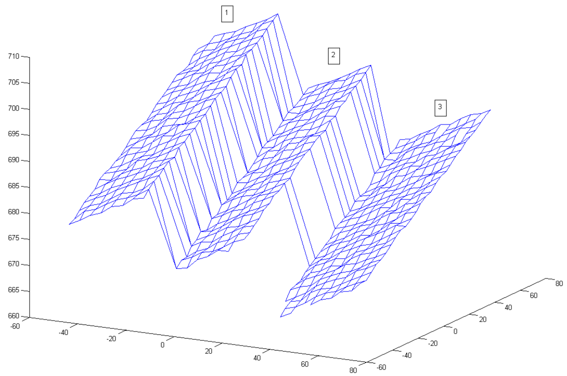
# Introduction

- **Exemple 3** : vision (active) par ordinateur

Les motifs numériques utilisés en vision active par lumière structurée intègrent une forte redondance des informations permettant de les identifier sans ambiguïté parmi des dizaines de milliers. Alors que leurs projections dans les images acquises sont la plupart du temps déformées et partiellement occultées, celles-ci peuvent être tout de même retrouvées, mises en correspondance, et aboutir à une reconstruction 3-D en temps réel !!







# Chapitre 1

## Le formalisme matriciel et caractéristiques des matrices

## 1.1 Généralités

- **Matrice**

Une matrice $(m \times n)$ est un tableau composé de $m$ lignes et $n$ colonnes. Les éléments qui composent ce tableau sont appelés composantes de la matrice. Une matrice à $m$ lignes et $n$ colonnes est dite de dimensions $(m \times n)$ ou d'ordre $n$ (si $m = n$). Les composantes considérées ici sont des éléments d'un corps $K$ (des réels $\mathbb{R}$ ou des complexes $\mathbb{C}$ le plus souvent).
L'ensemble des matrices de dimensions $(m \times n)$ est noté $M_{m,n}(K)$.

- Si $m = n$, la matrice est dite carrée, et appartient à $M_n(K)$.
- Si $A$ est une matrice de dimensions $(m \times n)$, on note généralement $a_{ij}$ l'élément qui se trouve à la $i$-ème ligne et sur la $j$-ème colonne, où $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$.

Remarque : Un vecteur est donc représentable par une matrice ($m = 1$ ou $n = 1$).

- **Sous-matrice**

Une sous-matrice d'ordre $(k \times l)$ d'une matrice $A$ d'ordre $(m \times n)$ est une matrice obtenue en sélectionnant une partie $I$ de $k$ éléments, $I \subset \{1, \dots, m\}$ parmi ses lignes et une partie $J$ de $l$ éléments, $J \subset \{1, \dots, n\}$, parmi ses colonnes.

## 1.1 Généralités

- **Exemple** : $M \in M_{3,5}(\mathbb{R})$

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} & m_{15} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} & m_{25} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} & m_{35} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 5 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$N = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ est une sous-matrice de $M$.

- **Exemple** : $C \in M_2(\mathbb{C})$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \det(C) = 0$$

- **Exemple** : $S \in M_3(\mathbb{R})$

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \det(S) = 0$$

- **Exemple** : $P \in M_5(\mathbb{N}) = PM(5,5;2,2;1)$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ Toute sous-matrice $(2 \times 2)$ de $P$ n'apparait qu'une seule fois !

## 1.1 Généralités

- **Matrice nulle**

La matrice $(m \times n)$ est une matrice nulle si tous les éléments sont constitués que des valeurs $0$. Elle est notée $0_{m\times n}$ ou simplement $0$.

- **Matrice identité**

La matrice $(n \times n)$ carrée $I_n \in M_n(\mathbb{R})$ (ou notée simplement $I$) est l'identité si elle est diagonale et constituée que de 1 sur sa diagonale principale et que de 0 ailleurs. Cette matrice est commutable avec n'importe quelle autre matrice de même dimension lors d'un produit.

- **Matrice diagonale**

Une matrice $(n \times n)$ carrée est diagonale si elle est constituée que de valeurs nulles en dehors de sa diagonale principale.

- **Exemples** $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ; $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$Q$ est anti-diagonale mais $Q^2 = QQ$ est diagonale

## 1.1 Généralités

- **Matrice à diagonale dominante**

Une matrice $(n \times n)$ carrée est dite à diagonale dominante si ses composantes vérifient :

$$\boxed{|a_{ii}| \geq \sum_{j=1\ (j\neq i)}^{n} |a_{ij}| \ ,}$$

pour toutes les lignes $i = 1,2,\ldots,n$ de la matrice.

Une matrice carrée est dite à diagonale strictement dominante si on remplace l'opérateur $\geq$ par l'opérateur $>$.

- **Exemple** : $M = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & 5 & -6 \end{pmatrix}$

Dans cet exemple, $M$ est à diagonale strictement dominante, mais on remarque que sa transposée $M^T$ n'est pas à diagonale strictement dominante puisque sa ligne milieu vaut $[2\ 5\ 5]$.

➔ Une matrice à diagonale strictement dominante est inversible.

## 1.1 Généralités

- **Matrice triangulaire**

La matrice $T \in M_n(\mathbb{C})$ est triangulaire supérieure si elle est constituée que de valeurs nulles en-dessous de sa diagonale (principale), triangulaire inférieure si elle est constituée que de valeurs nulles au-dessus de sa diagonale. En voici des exemples :

$$T = \begin{pmatrix} 5 & 23 & -6 \\ 0 & 10 & 9 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \;;\; E = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \;;\; F = \begin{pmatrix} 5 & 23 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \;;\; G = \begin{pmatrix} 5 & 23 \\ 0 & 10 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Remarques</u> :

1. Une matrice carrée n'est pas toujours trigonalisable en considérant seulement le corps des réels pour la recherche d'une matrice triangulaire à partir d'une relation entre matrices semblables.
2. Pour une matrice non carrée, on parle plutôt de matrice <u>trapézoïdale</u> (ex. matrice $G$).

- **Matrice échelonnée**

Une matrice est dite <u>échelonnée en lignes</u> si le nombre de zéros précédant la première valeur non nulle d'une ligne augmente ligne par ligne jusqu'à ce qu'il ne reste éventuellement plus que des zéros. Cette première valeur non nulle est appelée pivot.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad ; \quad J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & -6 & 0 & 27 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 9 \end{pmatrix}$$

Si de plus les pivots valent 1, alors la matrice est appelée <u>échelonnée réduite</u> (ex : matrice $J$).

## 1.1 Généralités

- **Matrice de Hessenberg**

Une matrice de Hessenberg supérieure (resp. inférieure) est une matrice carrée dont les éléments se trouvant en-dessous de la première sous-diagonale (resp. au-dessus de la première sur-diagonale) sont nuls.

$$G = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 10 & 9 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 5 & 0 \\ 4 & 2 & 7 & 6 & 4 \\ 5 & 8 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

- **Matrice tri-diagonale**

Une matrice tri-diagonale est telle que tous les éléments qui ne sont ni sur la diagonale principale, ni sur la première sur-diagonale, ni sur la première sous-diagonale, sont nuls. La matrice $A = a_{ij} \in M_n(\mathbb{C})$ est tri-diagonale si $a_{ij} = 0$ pour tout couple d'indices $(i, j)$ de la matrice pour lequel $|i - j| > 1$.

$$W = \begin{pmatrix} 5 & 23 & 0 \\ 0 & 10 & 9 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Remarques :

1. une matrice tri-diagonale est une matrice de Hessenberg à la fois supérieure et inférieure.
2. L'extension de la définition d'une matrice tri-diagonale pour laquelle l'inéquation ci-dessus est remplacée par $|i - j| > k$, permet d'introduire la définition des matrices-bandes (à $2k + 1$ bandes).

## 1.1 Généralités

- **Matrice transposée**

Une matrice réelle $A^T$ est appelée matrice transposée de la matrice réelle $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. Elle est obtenue en substituant la position des éléments en lignes par la position des éléments en colonnes : ${a^T}_{ji} = a_{ij}$ et $A^T \in M_{n,m}(\mathbb{R})$.

- ✓ $(A+B)^T = A^T + B^T$
- ✓ $(AB)^T = B^T A^T$
- ✓ $(A^T)^T = A$

- **Exemple** $M^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ ; $(M^T)^T = M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 5 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- **Matrice Orthogonale**

La matrice $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice orthogonale ssi $AA^T = A^T A = I_n$. Dans une matrice orthogonale, toutes les composantes $a_{ij}$ ont des valeurs telles que : $-1 \leq a_{ij} \leq 1$, et de plus son déterminant vaut $\pm 1$.

## 1.1 Généralités

- **Matrice conjuguée**

La matrice conjuguée $\bar{A}$ de la matrice complexe $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ est obtenue en substituant chaque élément de $A$ par son complexe conjugué.

- **Matrice adjointe ou trans-conjuguée**

Une matrice complexe $A^*$ est appelée matrice trans-conjuguée ou matrice adjointe de la matrice complexe $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$.
Elle est la matrice transposée de la matrice conjuguée de $A$ : $a^*{}_{ji} = a_{ij}$ et $A^* \in M_{n,m}(\mathbb{C})$.

✓ $(A+B)^* = A^* + B^*$
✓ $(AB)^* = B^* A^*$
✓ $(A^*)^* = A$

- **Exemple** $N = \begin{pmatrix} 3-i & 1-i & 7 \\ -2 & -i & 0 \end{pmatrix}$ ; $N^* = \begin{pmatrix} 3+i & -2 \\ 1+i & i \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$

- **Matrice Unitaire**

La matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ est une matrice unitaire ssi $AA^* = A^*A = I_n$. Dans une matrice unitaire, toutes les composantes $a_{ij}$ ont des modules tels que : $0 \leq |a_{ij}| \leq 1$, et de plus son déterminant est de module égal à 1.

## 1.1 Généralités

- **Matrice Symétrique et Matrice Antisymétrique**

Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est symétrique si et seulement si $A = A^T$
Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique si et seulement si $A = -A^T$

Remarques :

1. Un nombre réel est une matrice symétrique ($m = 1$ et $n = 1$).
2. Le produit d'une matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ par sa transposée $A^T$ est une matrice carrée symétrique : $A\,A^T$ est de dimensions $(m \times m)$ et $A^T A$ est de dimensions $(n \times n)$. Ces matrices sont différentes mais partagent plusieurs propriétés.
3. Soit la matrice $S \in M_n(\mathbb{R})$ antisymétrique et $\forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ x^T\, S\, x = 0$
4. Une matrice antisymétrique $A \in M_n(\mathbb{R})$ a toujours une diagonale nulle et a un déterminant positif ou nul. Si $n$ est impair, son déterminant est nul.
5. La partie symétrique, $A_s$, d'une matrice carrée et réelle $A$ s'obtient par : $A_s = \frac{A+A^T}{2}$
6. La partie antisymétrique, $A_a$, d'une matrice carrée et réelle $A$ s'obtient par : $A_a = \frac{A-A^T}{2}$
7. On a : $$A = A_s + A_a$$
8. Toute matrice symétrique et réelle est congruente à une matrice diagonale $D$ n'ayant que $0$, $-1$ ou $1$ sur sa diagonale : il existe une matrice inversible $P \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $D = P^T A_s P$.
9. Toute matrice antisymétrique et réelle est diagonalisable sur le corps des nombres complexes.

## 1.1 Généralités

- **Matrice Hermitienne et Matrice Anti-hermitienne**

Une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ est hermitienne (ou autoadjointe) si et seulement si $A = A^*$
Une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ est anti-hermitienne si et seulement si $A = -A^*$

<u>Remarques</u> :

1. Le produit d'une matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ par sa trans-conjuguée $A^*$ est une matrice carrée symétrique : $A\,A^*$ est de dimensions $(m \times m)$ et $A^*A$ est de dimensions $(n \times n)$. Ces matrices sont différentes mais partagent plusieurs propriétés.
2. Une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ est dite normale ssi $A\,A^* = A^*A$, et unitaire si $A\,A^* = A^*A = I$
3. Une matrice hermitienne $A \in M_n(\mathbb{C})$ est unitairement semblable à une matrice diagonale réelle.
4. Les éléments diagonaux d'une matrice hermitienne sont réels
5. La partie hermitienne, $A_H$, d'une matrice carrée $A$ s'obtient par : $A_H = \frac{A+A^*}{2}$
6. La partie anti-hermitienne, $A_a$, d'une matrice carrée $A$ s'obtient par : $A_a = \frac{A-A^*}{2}$
7. On a : $$A = A_H + A_a$$

## 1.1 Généralités

- **Déterminant**

Le déterminant d'une matrice carrée $A$ d'ordre $n$, $A \in M_n(K)$, noté $\det(A)$, est un élément du corps $K$ défini à partir d'une forme bilinéaire alternée qui caractérise la singularité de la matrice en identifiant si des colonnes forment des vecteurs liés. Si le déterminant est nul, la matrice est dite singulière ou non-inversible. Cette forme bilinéaire sera explicitée ci-après à l'aide des cofacteurs.

- **Matrice inverse**

Une matrice carrée $A \in M_n(K)$, est dite inversible (ou régulière ou encore non singulière) si son déterminant n'est pas l'élément nul du corps $K$. Dans ce cas, la matrice $B \in M_n(K)$ définie par la relation $AB = BA = I_n$ est l'inverse de $A$, et est notée $B = A^{-1}$.

- **Mineurs**

Les mineurs d'une matrice sont les déterminants de ses sous-matrices carrées. Si $A$ est une matrice d'ordre $(m \times n)$, on appelle mineur d'ordre $k$ le déterminant d'une sous-matrice de taille $(k \times k)$ obtenue en supprimant $(m-k)$ lignes et $(n-k)$ colonnes de $A$.

Un mineur d'ordre $k$ est noté $A_{I,J}$ où $I$ est une partie à $k$ éléments de $\{1, \dots, m\}$ et $J$ est une partie à $k$ éléments de $\{1, \dots, n\}$.

Un **mineur principal** est le déterminant d'une sous-matrice de $A$ obtenue en extrayant les lignes et les colonnes de mêmes indices. Il est noté $A_{I,I}$.

## 1.1 Généralités

- **Exemple** $H = (h)_{ij} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ a trois mineurs principaux d'ordre 2 :

$H_{33} = \det\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 4,\ \ H_{22} = \det\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = -6,\ \ H_{11} = \det\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = -6.$

$H_{12}$ est un des mineurs (non principaux) de $H$ qui vaut $H_{12} = \det\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = -2$

- **Les cofacteurs**

Le cofacteur $C_{IJ}$ d'une matrice $A$ est défini par la relation : $C_{IJ} = (-1)^{I+J}\, A_{IJ}$ . Le cofacteur et le mineur ont toujours la même valeur, au signe près (ex : $C_{33} = (-1)^6 H_{33} = 4$ pour la matrice $H$ ci-dessus).

- **Expansion par cofacteurs**

Soit $A$ une matrice carrée et $C_{IJ}$ ses cofacteurs. Le déterminant d'une matrice peut être obtenu en suivant la procédure dite de l'expansion par cofacteurs :

  - Choisir une ligne ou une colonne de $A$, (ci-dessous, on a choisi la ligne $I$)
  - Multiplier chacune des composantes $a_{ij}$ de $A$ par son cofacteur correspondant
  - Faire la somme.

$$\boxed{\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{I+k}\, a_{Ik}\, A_{Ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{Ik}\, C_{Ik}}$$

## 1.1 Généralités

- **Exemple** $H = (h)_{ij} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

*(choix de la première ligne)*

$$\det(H) = h_{11}C_{11} + h_{12}C_{12} + h_{13}C_{13} = 3(-6) + (-1)(2) + 2(1) = -18$$

*(choix de la deuxième ligne)*

$$\det(H) = h_{21}C_{21} + h_{22}C_{22} + h_{23}C_{23} = (1)(-0) + (1)(-6) + 4(-3) = -18$$

*(choix de la troisième ligne)*

$$\det(H) = h_{31}C_{31} + h_{32}C_{32} + h_{33}C_{33} = (0)(-6) + (1)(-10) + (-2)(4) = -18$$

Remarque : le déterminant d'une matrice change de signe lorsque l'on échange deux lignes ou deux colonnes.

- **Comatrice**

La comatrice de $A \in M_n(K)$, notée $(\text{com } A)$, est la matrice de ses cofacteurs :

$$(\text{com } A)_{IJ} = C_{IJ}$$

où $C_{IJ} = (-1)^{I+J} A_{IJ}$ est le cofacteur calculé à partir du mineur $A_{IJ}$ d'ordre $n-1$ (déterminant de la sous-matrice $(n-1) \times (n-1)$ de $A$ à laquelle on a ôté la ligne $I$ et la colonne $J$).

## 1.1 Généralités

- **Exemple** : A partir de la matrice $H = (h)_{ij} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, on calcule sa comatrice :

$$(\text{com } H) = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & -3 \\ -6 & -10 & 4 \end{pmatrix}$$

Remarques :

- La **comatrice existe toujours** et on a la propriété suivante entre $A$ et $(\text{com } A)$ pour les matrices réelles :

$$\boxed{A^T \text{com}(A) = (\text{com } A)^T A = \det(A)\ I_n}$$

- Si $A$ est inversible, alors on en déduit que :

$$(\text{com } A)^T = \det(A)\, A^{-1}$$

- Dans les références anglophones, cette matrice est nommée *adjoint matrix*. Attention donc à ne pas la confondre avec la matrice trans-conjuguée !

- Pour les matrices complexes, la propriété ci-dessus entre $A$ et $(\text{com } A)$ devient :

$$A^* \text{com}(A) = (\text{com } A)^* A = \det(A)\ I_n$$

## 1.1 Généralités

- **Trace**

La trace d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$, $Tr(A)$, est un nombre complexe obtenu en sommant les éléments de la diagonale $a_{ii}$ :

$$\boxed{Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.}$$

➔ Etant donné deux matrices $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, alors

$Tr(A+B) = Tr(A) + Tr(B)$ et $Tr(AB) = Tr(BA)$.

➔ Etant donné deux vecteurs $x$ et $y$ de même dimension. Alors,

$x^* y = Tr(x\, y^*)$, et en particulier $\|x\|^2 = x^* x = Tr(x\, x^*)$.

➔ **Exemple** : angle d'une rotation 3D (représentation angle/axe)

- **Nilpotence**

Une matrice carrée est dite nilpotente d'indice $p$, s'il existe un entier positif $p$ fini tel que $A^p = 0$.

- **Exemple** : $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est telle que $A^2 = 0$

$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est telle que $C = I + A$ ; $C^p = (I+A)^p = \begin{pmatrix} 1 & 2p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I + pA$ ($p$ entier $> 0$)

## 1.1 Généralités

- **Matrices équivalentes**

Deux matrices $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ et $B \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ sont équivalentes s'il existe deux matrices inversibles $P \in M_n(\mathbb{C})$ et $Q \in M_m(\mathbb{C})$ telles que $B = Q^{-1}A\,P$.

- **Matrices semblables**

Deux matrices carrées $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $B \in M_n(\mathbb{C})$ sont semblables s'il existe une matrice inversible $P \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $B = P^{-1}A\,P$. Cette transformation de $A$ vers $B$ est appelée similitude. De plus, $A$ et $B$ sont unitairement semblables si $P$ est unitaire ($P\,P^* = P^*P = I$).

Remarques *(propriétés)*:

- Deux matrices de même dimension sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang.
- Deux matrices semblables ont les mêmes déterminants, traces, rangs et valeurs propres (mais si $x$ est vecteur propre de $A$, alors $P^{-1}x$ est vecteur propre de $B$).
- Deux matrices semblables sont équivalentes (réciproque fausse évidemment).

- **Matrices congruentes**

Deux matrices carrées $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $B \in M_n(\mathbb{C})$ sont congruentes s'il existe une matrice inversible $P \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $B = P^*A\,P$.

## 1.1 Généralités

- **Matrice de pré-produit vectoriel** (dimension 3 uniquement)

Soit un vecteur à trois composantes réelles $v = (v_x, v_y, v_z\ )^T$ alors la matrice

$$[v]_\times = \begin{pmatrix} 0 & -v_z & v_y \\ v_z & 0 & -v_x \\ -v_y & v_x & 0 \end{pmatrix}$$

est la matrice de pré-produit vectoriel, antisymétrique, parfois notée aussi $S(v)$ ou $A_s(v)$. Il est possible de former d'autres matrices antisymétriques à partir de ces 3 composantes de $v$, mais la matrice $[v]_\times$ ci-dessus est telle que pour tout vecteur à trois composantes réelles $u$, $[v]_\times u = v \wedge u$ (produit vectoriel).

<u>Remarques</u> *(identités)* :

- $\forall\, A \in M_3(\mathbb{R})$ inversible et $\forall\, v \in \mathbb{R}^3$ : $A^T\ [v]_\times\, A = \det(A)\ [A^{-1}v]_\times$.
- $\forall\, v \in \mathbb{R}^3$ : $[v]_\times\ [v]_\times{}^T = (v^T v)\, I\ - v\, v^T$

## 1.1 Généralités

- **Matrices positives**

Une matrice est **définie positive** si, pour tout vecteur $v \neq 0$, la forme réelle ou complexe (correspondant au corps dont les composantes de $v$ appartiennent) $v^T A\, v$ est strictement positive ($v^T A\, v > 0$). Une telle matrice est toujours inversible. Il faut donc préciser sur quel corps est définie la propriété de positivité ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Une matrice est appelée **semi-définie positive** si, pour tout vecteur $v \neq 0$, la forme $v^T A\, v$ est positive ou nulle ($v^T A\, v \geq 0$).

Remarques :

- Une matrice est définie positive ssi tous ses mineurs principaux sont strictement positifs.
- La matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est définie positive si sa partie symétrique $A_s$ est définie positive.

- **Exemple** : étant donné le réel $t$ la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & t \\ -2-t & 2 \end{pmatrix}$ est toujours définie positive sur $\mathbb{R}^2$.

En effet, pour tout vecteur à composantes réelles $x = (x_1, x_2)^T$, $x^T A\, x = 2(x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2) > 0$ et $A_s = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. On obtient alors : $x^T A_s x = 2(x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2) = x^T A\, x$.
Sur cet exemple toujours, la matrice $A$ n'est pas définie positive sur $\mathbb{C}^2$. En effet, en prenant un vecteur complexe $x = (x_1, x_2)^T$, $x^T A\, x$ n'est en général pas réel.

## 1.1 **Généralités** (exercices)

- Calculer les parties symétriques $A_s$ et antisymétriques $A_a$ de la matrice

$$A = A_s + A_a = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix}.$$

- La matrice $A_s$ est-elle définie positive ?

- Quelles sont les valeurs possibles pour les nombres réels $a$, $b$ et $c$ pour que la matrice $M \in M_3(\mathbb{R})$ ci-dessous soit symétrique ? $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & a \\ -b & 5 & c^2+1 \\ c-1 & b & c \end{pmatrix}$

- Quels sont les mineurs d'ordre 2 de la matrice $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ? Combien de mineurs d'ordre 2 et de mineurs principaux d'ordre 2 possède la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 5 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ? Donnez ces derniers.

- Trouver la matrice $X$, telle que $X = AX + B$, avec

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

## 1.1 Généralités *(exercices)*

- Montrer que la comatrice de la matrice

$$M = (m)_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3i \\ 4 & 5 & 6i \\ 7 & 8 & 9i \end{pmatrix}$$ dont le déterminant est nul est égale à

$$(\text{com}\, M) = \begin{pmatrix} -3i & 6i & -3 \\ 6i & -12i & 6 \\ -3i & 6i & -3 \end{pmatrix}$$

- Etant donné la matrice réelle $C = (c_{ij}) = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 0 \\ -2 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & -6 \end{pmatrix} = C^{(0)}$,

1. Montrer sans calculer de déterminants que la matrice $C$ ci-dessus est inversible.
2. On pose : $C^{(i)} = H_i C^{(i-1)}$, pour un nombre entier $i \geq 1$. Trouver une matrice triangulaire supérieure $C^{(3)} = H_3 H_2 H_1 C$ où chaque matrice $H_i$ permet par une combinaison linéaire de lignes d'annuler successivement les coefficients $c_{21} = c_{21}^{(i=0)}$, $c_{31}^{(i=1)}$ et $c_{32}^{(i=2)}$ situés sous la diagonale de $C^{(i-1)}$.
3. En déduire le lien entre le nombre d'itérations nécessaires $i_{max}$ et la dimension de la matrice $C$. En particulier si nous avions affaire à une matrice $(7 \times 7)$, indiquer quelle aurait été la valeur de $i_{max}$ ?

## 1.2 Dépendance linéaire et noyau

- **Dépendance linéaire et Rang**

Soit un ensemble de $m$ vecteurs $(v_1, v_2, \dots, v_m)$ de mêmes dimensions $(n \times 1)$ :

Deux vecteurs $v_j$ et $v_k$ sont dits **linéairement dépendants** s'il existe des nombres complexes $\alpha_j$ et $\alpha_k$ non nuls tels que : $\alpha_j v_j + \alpha_k v_k = 0$.
(exemple : $v_2 = -3\, v_1$)

Par généralisation, les $m$ vecteurs sont linéairement dépendants (ou **liés**) s'il existe $m$ nombres réels ou complexes $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$, non tous nuls, tels que

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i\, v_i = 0$$

Si aucune dépendance linéaire existe, alors les vecteurs sont dits linéairement indépendants.

- **Exemple** : dans la base orthonormée directe $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, les vecteurs $v_1 = (1,0,0)^T$, $v_2 = (1,-1,0)^T$ et $v_3 = (0,-1,1)^T$ sont linéairement indépendants mais les vecteurs $v_4 = (1,2,0)^T$, $v_5 = (-2,1,0)^T$ et $v_6 = (0,3,0)^T$ sont linéairement dépendants puisque $2v_4 + v_5 = \frac{5}{3} v_6$.

## 1.2 Dépendance linéaire et noyau

- **Dépendance linéaire et Rang**

Soit une matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$. Le rang de $A$, noté $r$ ou $rg(A)$ ou $rank(A)$, est le nombre maximal de lignes ou de colonnes de $A$ qui sont linéairement indépendantes.

Remarques :

- ✓ $A$, $A^T$ et $A^*$ ont le même rang.
- ✓ Le rang $r$ de $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ est tel que $1 \leq r \leq Min\{m,n\}$
- ✓ Rang du produit de matrices : $rank(AB) = Min\{rank(A), rank(B)\}$
- ✓ Soit une matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{C})$. Si $rg(A) = n$ alors $A$ est non singulière ($\det(A) \neq 0$)

- **Exemples** :

- $A = \begin{pmatrix} -1{,}5 & 3 \\ 4 & -8 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \in M_{3,2}(\mathbb{R})$. Son rang $r$ ne peut être supérieur à 2. En fait $r = 1$ car les deux colonnes de $A = (c_1, c_2)$ sont telles que $c_2 = -2c_1$ (ou voir que les deux mineurs d'ordre 2 sont nuls).

- $S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ a un rang égal à 1. C'est un opérateur très utile en traitement des images pour détecter les contours par filtres RIF ($S$ et $S^T$ sont appelés les opérateurs de Sobel).

## 1.2 Dépendance linéaire et noyau

- **Espace nul (noyau)**

L'espace noyau de la transformation représentée par la matrice $A$ de dimensions $(m \times n)$, est noté $\mathcal{N}(A)$ ou $Ker(A)$ et est défini par :

$$\mathcal{N}(A) = \{v, v \in \mathbb{C}^n, \qquad A\,v = 0\}$$

**Théorème du rang** pour une matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{C})$ :

$$\boxed{\dim(\mathcal{N}(A)) + \mathrm{rg}(\mathrm{A}) = n.}$$

Il s'ensuit que si le rang d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ est $n$ (on dit aussi **rang plein**), alors la dimension de son noyau est nulle;

Remarques :

1. Si le seul vecteur $v$ qui vérifie $A\,v = 0$ est le vecteur nul ($v = 0$) alors $A$ est de rang plein.
2. L'**espace invariant** d'une transformation linéaire représentée par une matrice $C$ est l'ensemble des vecteurs $x$ tel que $C\,x = x$, ce qui est équivalent à $(C - I)\,x = 0$, correspondant alors au noyau de $C - I$.

## 1.2 Dépendance linéaire et noyau

- **Espace propre**

Les $n$ valeurs propres d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$, donc carrée, sont les solutions en $\lambda$ de l'équation suivante, annulant le polynôme caractéristique $P_A$ de la matrice $A$ :

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = 0$$

Si $\lambda_i$ est une valeur propre de $A$, un vecteur propre de A associé à $\lambda_i$ est un vecteur non nul $u_i$ solution du système d'équations :

$$(\lambda_i I_n - A)\, u_i = 0$$

On écrit souvent aussi $A\, u_i = \lambda_i\, u_i$ pour mettre en évidence que les vecteurs propres ont une direction qui reste inchangée par la transformation linéaire représentée par la matrice $A$.

Remarques :

1. L'espace nul (noyau) de $A$ correspond à l'espace engendré par les vecteurs propres dont les valeurs propres associées sont nulles $A\, u_i = \lambda_i\, u_i = 0$.

2. Si les $n$ valeurs propres sont distinctes, alors les vecteurs propres sont linéairement indépendants entre eux et forment donc une base. La réciproque est fausse (matrice identité).

## 1.2 Dépendance linéaire et noyau

Remarques :

1. Si $A$ est une matrice réelle symétrique, alors les vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes, $\lambda_i$ et $\lambda_j$ , sont orthogonaux : $u_i^T u_j = 0$.

2. Si $A$ est une matrice réelle symétrique, alors :
   a) ses valeurs propres sont réelles et il existe une base orthonormée de vecteurs propres.

   a) Il existe une matrice orthogonale $U$ et une matrice diagonale réelle $D$ pour lesquelles $A$ et $D$ sont congruentes. On a donc : $A = U\ D\ U^T$

   ce qui revient à écrire que ($r$ est le rang de la matrice) :

$$A = \lambda_1 u_1 u_1^T + \lambda_2 u_2 u_2^T + \cdots + \lambda_r u_r u_r^T$$

3. Si $A$ est une matrice réelle antisymétrique, alors il existe une matrice orthogonale $U$ et une matrice diagonale par bloc, réelle, $B$, de la forme $diag\{a_1 Z, a_2 Z, \dots, a_j Z, 0, \dots, 0\}$ où $Z = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ et les nombres $a_i$ sont des nombres complexes, et pour lesquelles $A$ et $B$ sont des matrices congruentes. On a donc :

$$A = U\ B\ U^T$$

## 1.2 Dépendance linéaire et noyau

- **Espace propre et trigonalisation**

Si les $n$ valeurs propres de $A$ sont notées $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, alors le polynôme caractéristique est dit <u>scindé</u> sur le corps $K$ s'il peut être factorisable par des produits du premier degré dans ce même corps :

$$P_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda - \lambda_i)$$

Il existe alors une transformation de similitude $P$ telle que la matrice $T = P^{-1}A\,P$ est triangulaire avec les mêmes valeurs propres (sur la diagonale) que celles de la matrice $A$ (matrices semblables).

➔ Ainsi, toute matrice carrée complexe, $A \in M_n(\mathbb{C})$, est trigonalisable.

Dans le corps des réels cependant, qui n'est pas algébriquement clos, $A \in M_n(\mathbb{R})$, la matrice triangulaire $T$ ne peut être obtenue par trigonalisation que si le polynôme caractéristique de $A$ est scindé.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, les $n$ valeurs propres de $A$, pas nécessairement distinctes, alors il existe une base dans laquelle $T$ peut être mise sous la forme :

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & t_{12} & t_{13} & \cdots & t_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & t_{23} & & t_{2n} \\ 0 & 0 & \lambda_3 & & t_{3n} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

## 1.2 Dépendance linéaire et noyau

- **Espace propre et trigonalisation**

- **Exemple** $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ est une matrice réelle antisymétrique, dont les valeurs propres sont complexes : $\lambda_1 = i$ , $\lambda_2 = -i$. Son polynôme caractéristique n'est pas scindé sur le corps des réels $\mathbb{R}$ puisqu'il s'exprime dans $\mathbb{R}$ seulement par un second degré : $P_A(\lambda) = \lambda^2 + 1$ alors qu'il se factorise par $(\lambda - i)(\lambda + i)$ dans $\mathbb{C}$. $A$ n'est donc pas trigonalisable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$T = P^{-1} A\, P = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$$

en prenant pour colonnes de $P$ les vecteurs propres associés à $\lambda_1$ et à $\lambda_2$.

## 1.2 Dépendance linéaire et noyau

- **Espace propre**

Remarques :

- L'ordre de multiplicité d'une valeur propre correspond à une racine multiple dans le polynôme caractéristique (racine double, triple,...).
- Une matrice ayant au moins une valeur propre nulle est singulière.
- Une matrice réelle symétrique a des valeurs propres réelles.
- Une matrice qui possède des valeurs propres toutes positives strictement est une matrice définie positive. Une matrice qui possède des valeurs propres positives ou nulles est une matrice semi-définie positive.

- Propriétés utiles : $\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \det(A) \quad ; \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = Tr(A) \quad ; \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k = Tr(A^k)$

pour $k$ entier positif (les sommes et les produits des valeurs propres sont comptés avec l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre).

- **Exemple** : soit une matrice $C$ réelle et carrée, $C \in M_3(\mathbb{R})$, qui possède un polynôme caractéristique $\det(\lambda I_3 - C) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$. Il faut donc compter deux valeurs propres égales à 1 et une égale à $-1$ ; $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = -1$.

## 1.2 Dépendance et noyau (exercices)

- Quels sont les valeurs propres des trois matrices suivantes ?

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{1}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Quel est le rang de la matrice $Q = I - v\, v^T$ pour les vecteurs suivants:
  - $v = (1, 0, -1)^T$
  - $v = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})^T$

- Etant donné le vecteur $X = (x_1, x_2, x_3\ )^T$ des inconnues, on considère le système classique suivant où $\|X\| = 1$ (norme euclidienne) et

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

1. Déterminer directement toutes les solutions pour $X$
2. Mettre les équations linéaires sous la forme d'un système: $A\, X = \sigma\, X$ en fournissant la matrice $A$ et la valeur de $\sigma$.

- Quel est le rang de la matrice $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ? Quelle est la dimension de son noyau ?

## 1.3 Normes et conditionnement – *normes des vecteurs*

Commençons par oublier qu'une norme est forcément la norme euclidienne. Si pour un vecteur ou une matrice, la norme euclidienne est définie par la racine carrée de la somme des carrés des composantes, une norme est plus généralement une application d'un espace vectoriel $V$ isomorphe à $\mathbb{C}^n$ ou à $\mathbb{R}^n$ - (de $n$ composantes notées $x_i$) vers un corps (ici nous nous limiterons à celui des nombres réels positifs $\mathbb{R}^+$).

Une norme de vecteur, notée || . || , est définie par les trois propriétés suivantes :

1. $\|v\| \geq 0, \forall\, v \in V$ et $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$ ,
2. $\|a\, v\| = |a|\|v\|$ , $\forall\, a \in \mathbb{C}$ et $\forall\, v \in V$ ,
3. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|,\ \forall\, u, v \in V$

On peut facilement vérifier que la définition de la norme euclidienne satisfait les propriétés ci-dessus. Comme déjà mentionné, il existe plusieurs normes pour un même espace vectoriel. On a entre autre les normes $p$, dites naturelles, d'un vecteur $x$. Celles-ci se calculent de la manière générique suivante :

$$\|x\|_p = \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\Big)^{1/p}$$

## 1.3 Normes et conditionnement – *normes des vecteurs*

Lorsque $p = 2$, on retrouve la définition de la norme euclidienne pour les vecteurs. Il y a également la norme dite infinie, notée $\|x\|_\infty$ , et qui est définie par :

$$\boxed{\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|}$$

Celle-ci est la plus utilisée avec la norme 2 et la norme 1 :

$$\boxed{\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|}$$

- **Exercice** : Déterminer les normes 1, 2 et ∞ du vecteur $x = (1,0,-1,-4)$.

*Réponses : 6, $\sqrt{18}$ et 4*

## 1.3 Normes et conditionnement – *normes des matrices*

Tout comme pour les vecteurs, des normes sont définies aussi pour les matrices (les vecteurs sont des matrices à une ligne ou à une colonne). Aux trois propriétés vues auparavant s'y ajoute une quatrième pour les matrices.

1. $\|A\| \geq 0, \forall A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ et $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$ ,
2. $\|a\, A\| = |a| \|A\|$ , $\forall a \in \mathbb{C}$ et $\forall A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$,
3. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|, \ \forall A, B \in M_{m,n}(\mathbb{C})$,
4. $\|A\, B\| \leq \|A\| \, \|B\|, \ \forall A \in M_{m,n}(\mathbb{C}), \forall B \in M_{n,q}(\mathbb{C})$

Regardons maintenant quelques normes matricielles. Celles qui sont les plus utilisées, encore une fois nommées naturelles, découlent des normes vectorielles décrites plus haut.
Soit $a_{ij}$ une composante de la matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$, les normes infinie et 1 sont exprimées respectivement par :

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$$

## 1.3 **Normes et conditionnement** – *normes des matrices*

Il est plus difficile d'arriver à une formule pour la norme 2. Nous accepterons cette dernière sans démonstration. Mais avant cela, définissons ce qu'est le rayon spectral d'une matrice.

- Le rayon spectrale d'une matrice $A$ carrée, noté $\rho(A)$, est défini par :

$$\boxed{\rho(A) = \max_i |\lambda_i| \,,}$$

où les $\lambda_i$ sont les valeurs propres de la matrice $A$. Il est à noter que les valeurs propres peuvent être complexes et alors $|\lambda_i|$ représente le module.

- La norme 2 d'une matrice $A$ est alors définie par :

$$\boxed{\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)} \,.}$$

- **Exercice** : Déterminer les normes 1, 2 et ∞ de la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3i & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

*Réponses : 5, environ 4.894 et 7*
*Indice pour la norme 2 : calculer les valeurs propres de $A^*A$ ={1.00000;4.05012;23.94987}*

## 1.3 Normes et conditionnement – *normes des matrices*

Remarques :

1. la norme matricielle est utile en analyse numérique afin de quantifier des erreurs commises lors d'approximations. Elle sert également à évaluer l'efficacité de la résolution itérative d'un système linéaire.

2. La norme 2 ne doit pas être confondue avec la norme de Frobenius, $\|A\|_F$, qui vaut :

$$\boxed{\|A\|_F = \sqrt{tr(A^*A)} = \Big(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\Big)^{1/2}}$$

$$\Big(\|A\|_F = \sqrt{29} \approx 5{,}38 \text{ pour la matrice } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3i & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\Big)$$

- **Exercice** : Déterminer les normes 2 et de Frobenius pour la matrice :

$$R(x,\pi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

*Réponses : 1 et* $\sqrt{3}$

## 1.3 Normes et conditionnement – *conditionnement des matrices*

Le conditionnement d'une matrice inversible $A$ relativement à une norme, notée || . || est défini par :

$$\kappa(A) = \|A^{-1}\| \, \|A\|$$

De par les propriétés que doit vérifier une norme, on a : $\kappa(A) \geq 1$

Plus la valeur de $\kappa(A)$ s'éloigne de 1, moins la matrice est bien conditionnée. C'est généralement en puissance de 10 qu'on évalue le conditionnement.

## 1.3 Normes et conditionnement – *conditionnement des matrices*

- **Exemple** : Considérons le système linéaire $A\,X = b$ suivant ($X = (x\ y)^T$) :

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases} \quad \text{où} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

Ce système est le même en apparence que le système suivant :

$$\begin{cases} 0.001x = 0.003 \\ 1000\,y = -1000 \end{cases} \quad \text{où} \quad A = \begin{bmatrix} 0.001 & 0 \\ 0 & 1000 \end{bmatrix} \text{ et } b' = \begin{bmatrix} 0.003 \\ -1000 \end{bmatrix}$$

Le conditionnement $\kappa(A)$ vaut 1 dans le premier cas et $10^6$ dans le second. On peut cependant revenir à un meilleur conditionnement en opérant un changement de variables, $X' = (x' = \frac{x}{1000}, y' = 1000\,y)^T$ par exemple, correspondant à la transformation $X = P\,X'$ avec $P = \begin{bmatrix} 1000 & 0 \\ 0 & 0.001 \end{bmatrix}$ et l'inversion portera alors sur le produit $AP$ dans la résolution du système linéaire $A\,P\,X' = b' = P^{-1}b$. Les matrices $A$ et $AP$ n'ont pas les mêmes valeurs propres, et on aura $\kappa(AP) \approx 1$.

Avec Matlab :

```
A = [0.001 0;0 1000];
iA = inv(A);
sqrt(max(eig(iA'*iA)))*sqrt(max(eig(A'*A)))
```

équivaut à la commande

```
cond(A) /* affiche 1000000 */
```

## 1.3 Normes et conditionnement – *conditionnement des matrices*

- Le calcul effectif de l'inversion du système linéaire $Ax = b$ où la matrice $A$ est connue avec précision et où la valeur du second membre $b$, supposé non nul, est entachée d'une erreur $\Delta b$, produira une erreur relative sur la solution, $||\Delta x||/||x||$ majorée par :

$$\boxed{\frac{||\Delta x||}{||x||} \leq \kappa(A)\,\frac{||\Delta b||}{||b||}}$$

- Si la matrice $A$ subit une modification de $\Delta A$, on dispose d'une majoration de l'erreur par rapport au calcul de la matrice exacte $A$ donnée par :

$$\boxed{\frac{||\Delta x||}{||x + \Delta x||} \leq \kappa(A)\,\frac{||\Delta A||}{||A||}}$$

## 1.3 Normes et conditionnement – *conditionnement des matrices*

- **Exemple** : Soit la matrice $A = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 11 & 10 \\ 2 & 6 & 5 & 2 \\ 8 & 11 & 3 & 8 \\ 6 & 9 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ et le vecteur $b = \begin{bmatrix} 29 \\ 15 \\ 30 \\ 24 \end{bmatrix}$.

La résolution du système linéaire $Ax = b$ donne $x = (1,1,1,1)^T$.

Si ce système a son second membre légèrement perturbé, de telle sorte que :

$b' = b + \begin{bmatrix} 0.1 \\ -0.1 \\ 0.1 \\ -0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29.1 \\ 14.9 \\ 30.1 \\ 23.9 \end{bmatrix}$, alors la solution $x' = A^{-1}b' \approx \begin{bmatrix} 6.222 \\ 0.133 \\ 1.633 \\ -3.256 \end{bmatrix}$

Notons que $\kappa(A)$ ici vaut $\kappa(A) \approx 1.425\ 10^3$.

Les erreurs relatives sur $b$ et $x$ sont respectivement $0.004$ et $3.4108$, ce qui représente une multiplication par environ $860$, valeur qui est du même ordre de grandeur que le conditionnement de la matrice $A$.

## 1.4 Matrices de rotation

- Une rotation est une transformation géométrique qui **conserve le produit scalaire** (donc les angles et les distances) : c'est une **isométrie** (positive). Parmi toutes les représentations possibles, on considère ici l'utilisation d'une matrice orthogonale, $R$, ayant un déterminant positif :

$$\boxed{R^T R = R\,R^T = I_n \quad \text{et} \quad \det(R) = +1 \;\Rightarrow\; R^{-1} = R^T}$$

où $I_n$ est la matrice identité en dimension $n$.

Un résultat issu de l'algèbre linéaire (connu sous le nom de formule de Cayley) indique que pour toute matrice $(n \times n)$ antisymétrique $S$ à coefficients réels, il existe une matrice orthogonale $R$, de déterminant égal à 1 - donc une rotation – définie par

$$\boxed{R = (I_3 - S)\left(I_3 \ + S\right)^{-1}}$$

➔ En dimension $n = 2$, une telle matrice antisymétrique $(S = -S^T)$ est définie par seulement 1 paramètre, car elle peut se mettre sous la forme :

$$S = \begin{bmatrix} 0 & \tan(\theta/2) \\ -\tan(\theta/2) & 0 \end{bmatrix} \quad \text{donne} \quad R = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

où $\theta$ est un nombre réel. Il en résulte immédiatement qu'une **rotation 2-D**, quelle que soit sa représentation, est définie exactement **par un seul paramètre**.

## 1.4 Matrices de rotation

➔ En dimension $n = 3$, une matrice antisymétrique $S$ est définie par seulement 3 paramètres, car elle peut se mettre sous la forme (matrice de pré-produit vectoriel) :

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -s_z & s_y \\ s_z & 0 & -s_x \\ -s_y & s_x & 0 \end{bmatrix} = [\underline{s}]_\times$$

où $\underline{s} = (s_x, s_y, s_z)^T$ est un vecteur.

Une conséquence immédiate est qu'une **rotation 3-D**, quelle que soit sa représentation, est définie exactement **par trois paramètres**. Ces trois paramètres (composantes de $\underline{s}$, angles d'Euler,….) sont indépendants.

➔ En généralisant, en dimension $n$ quelconque, une **rotation $n$-D** est définie par exactement $\boldsymbol{\frac{n\times(n-1)}{2}}$ **paramètres indépendants**, puisque c'est le nombre de composantes qui définissent complètement une matrice antisymétrique.

## 1.4 Matrices de rotation (en dimension 3)

### ➔ Relation entre les composantes

La matrice $(3 \times 3)$ de rotation $R = r_{ij}$ a ses 9 composantes qui sont dépendantes entre elles par des relations quadratiques qui sont issues des caractéristiques des isométries : $R^T R = I_3$ (identité). Les colonnes sont notées respectivement $c_1$, $c_2$, et $c_3$ :

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = (c_1\,, c_2\,, c_3)$$

La relation matricielle $R^T R = I_3$ implique que les deux premières colonnes soient <u>unitaires</u> et <u>orthogonales</u> entre elles (3 équations) :

$$\|c_1\|^2 = 1 = r_{11}^2 + r_{21}^2 + r_{31}^2$$

$$\|c_2\|^2 = 1 = r_{12}^2 + r_{22}^2 + r_{32}^2$$

$${c_1}^T c_2 = 0 = r_{11} r_{12} + r_{21} r_{22} + r_{31} r_{32}$$

et la troisième colonne est le produit vectoriel des deux premières : $c_3 = c_1 \wedge c_2$, dans cet ordre pour assurer que $\det(R) = +1$.

➔ toutes les composantes de $R$ sont telles que : $|r_{ij}| \leq 1$.

## 1.4 Matrices de rotation

- **Les matrices de Givens**

Les matrices élémentaires de Givens sont des matrices de rotation qui permettent d’annuler certains coefficients d’un vecteur ou d’une matrice, comme c’est le cas par exemple dans la décomposition triangulaire d’une matrice. En dimension $n$, pour un couple donné d’indices de lignes/colonnes $i$ et $k$, et un angle $\theta$, ces matrices sont définies par la structure suivante :

$$Q(i,k,\theta) = \begin{array}{c} \begin{matrix} \phantom{1} & \phantom{1} & \phantom{\ddots} & i & \ldots & k & \phantom{\ddots} & \phantom{1} & \phantom{1} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & 0 \\ & 1 & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & \\ & & & \cos\theta & & \sin\theta & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & -\sin\theta & & \cos\theta & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & 1 & \\ 0 & & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Pour un vecteur donné $v \in \mathbb{R}^n$, le produit $w = Q(i,k,\theta)^T v$ revient à effectuer une rotation élémentaire de $v$ d’angle $\theta$ dans le plan de coordonnées $(v_i, v_k)$.

Question : comment est défini simplement l’axe de rotation ?

## 1.4 Matrices de rotation

- **Les matrices de Givens**

En posant $c = \cos\theta$ et $s = \sin\theta$, on a donc

$$w_j = \begin{cases} v_j & j \neq i, j \neq k \\ cv_i - sv_k & j = i \\ sv_i + cv_k & j = k \end{cases}$$

Soit alors le réel positif $\rho_{ik} = \sqrt{v_i^2 + v_k^2}$, si $c$ et $s$ satisfont $c = v_i/\rho_{ik}$ et $s = -v_k/\rho_{ik}$ (dans ce cas, $\theta = \arctan(-v_k/v_i)$), on obtient $w_k = 0$, $w_i = \rho_{ik}$ et $w_j = v_j$ pour tout $j \neq i, j \neq k$. De même, si $c$ et $s$ satisfont $c = v_k/\rho_{ik}$ et $s = v_i/\rho_{ik}$ (dans ce cas, $\theta = \arctan(v_i/v_k)$), on obtient $w_i = 0$, $w_k = \rho_{ik}$ et $w_j = v_j$ pour tout $j \neq i, j \neq k$.

- **Exemple d'application des matrices de Givens en 3-D**

En notant par $Q$, une rotation en dimension 3 autour d'un des axes de base des coordonnées, il existe trois matrices de Givens, chacune autour d'un des axes $x$, $y$, et $z$ :

$$Q_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_x & -s_x \\ 0 & s_x & c_x \end{bmatrix} \quad , \quad Q_y = \begin{bmatrix} c_y & 0 & s_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_y & 0 & c_y \end{bmatrix} \quad , \quad Q_z = \begin{bmatrix} c_z & -s_z & 0 \\ s_z & c_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

où $c_x = \cos\theta_x$ , $s_x = \sin\theta_x$, etc.

## 1.4 Matrices de rotation

- **Application des matrices de Givens en 3-D à la décomposition RQ**

En post-multipliant une matrice $A = (a_{ij}) \in M_3(\mathbb{R})$ à droite par la matrice de Givens $Q_z$, on laisse inchangée la troisième colonne de $A$ et les deux premières colonnes sont substituées par une combinaison linéaire des deux premières colonnes. L'angle $\theta_z$ peut alors être choisi afin d'annuler toute composante de ces deux premières colonnes.

Par exemple, pour mettre à zéro la composante $a_{21}$ nous avons besoin de résoudre l'équation (issue du produit $AQ_z$) $c_z\, a_{21} + s_z a_{22} = 0$. Les formules de Givens nous fournissent la solution : $c_z = -a_{22/\rho_{21}}$ et $s_z = a_{21/\rho_{21}}$ avec ($\rho_{21} = \sqrt{a_{22}^2 + a_{21}^2}$) et où $c_x = \cos\theta_x$ , $s_x = \sin\theta_x$, etc.

On peut ainsi généraliser cette démarche pour annuler <u>successivement</u> les trois composantes $a_{32}$, $a_{31}$ et $a_{21}$ et obtenir alors la factorisation suivante d'une matrice réelle $(3 \times 3)$

$$A = RQ \;\; \Rightarrow \;\; A\, Q_x Q_y Q_z = R$$

et qui fournit la matrice triangulaire supérieure $R$ (attention aux notations), ce qui revient à définir la matrice $Q$ telle que $Q^T = Q_x Q_y Q_z$ (c'est la rotation inverse, correspondant à prendre chaque angle avec le signe opposé, donc le sinus avec le signe opposé).

## 1.4 Matrices de rotation

- **Application des matrices de Givens en 3-D à la décomposition RQ**

<u>Remarques</u> :

1. En considérant les les trois composantes $a_{21}$, $a_{31}$ et $a_{32}$, la post-multiplication de $A$ par $Q_x$ laisse la première colonne invariante : elle ne peut donc agir que sur $a_{32}$; La post-multiplication par $Q_y$ laisse la seconde colonne invariante : elle ne peut donc agir que sur $a_{31}$ ou $a_{21}$; La post-multiplication par $Q_z$ laisse la troisième colonne invariante : elle peut donc agir les trois composantes. Alors qu'il n'y a pas d'ambiguïté pour $Q_x$ , le choix pour $Q_y$ se portera sur l'annulation de $a_{31}$ et non sur $a_{21}$, permettant alors, quand la multiplication par $Q_z$ aura été effectuée de ne pas faire réapparaître un coefficient non-nul.

2. Etant donné que le nombre de rotations de Givens en dimension $n$, $n(n-1)/2$, correspond exactement au nombre de composantes indépendantes d'une matrice antisymétrique, c'est-à-dire aussi au nombre de composantes sous la diagonale principale, on induit de ce qui précède que l'on peut factoriser une matrice carrée d'ordre $n$ par ce procédé : <u>*c'est la décomposition RQ*</u>.

3. On notera que cette décomposition RQ obtenue, qui est une factorisation particulière de matrices, est à distinguer du processus de trigonalisation, qui lui, se base sur une relation de similitudes entre matrices semblables ($A = P^{-1}RP$, $P$ est une matrice dite de passage). Or, nous avons vu que la trigonalisation n'était possible que si le polynôme caractéristique était scindé, cette condition n'est pas nécessaire pour l'obtention de la factorisation par décomposition RQ. De plus, nous verrons au prochain chapitre que la matrice dont on recherche une décomposition QR ou RQ n'est pas forcément carrée…

## 1.4 Matrices de rotation (exercice)

**Partie 1** : Montrer qu'étant donné la sous-matrice supérieure gauche $(2 \times 2)$ d'une rotation de dimension $n = 3$, $R = (r_{ij})$, $(i, j = 1{,}2{,}3)$ :

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & * \\ r_{21} & r_{22} & * \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

1. il existe une relation mathématique entre les composantes $r_{11}$, $r_{21}$, $r_{12}$ et $r_{22}$, et fournir cette relation,

2. il n'existe que deux solutions pour la matrice complète $R$ ; indiquer ces deux solutions, fonctions de $r_{11}, r_{21}, r_{12}$ et $r_{22}$.

**Partie 2** : Etant donné la matrice $sR$ suivante, matrice incomplète, qui doit représenter une transformation géométrique d'échelle isotrope ($s$ est un nombre réel positif) suivie d'une rotation $R$, faisant partie d'une transformation de similitude

$$sR = \begin{bmatrix} 3 & 2 & * \\ -2 & 4 & * \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

1. Déterminer $s^2$, puis la seule solution valide pour $s$.

2. Déterminer alors complètement les deux solutions pour la matrice $R$.

## 1.5 Problème

- **Matrice essentielle** $E$ : $E \equiv [\underline{t}]_\times R$ : matrice $(3 \times 3)$ réelle définie à un facteur près, utilisée en vision par ordinateur. $R$ est une matrice de rotation, $\underline{t}$ est un vecteur (de translation).

1. Montrer que $E$ possède une valeur propre nulle dont $R^T\underline{t}$ est le vecteur propre associé et que $E\,E^T$ a deux valeurs propres égales (recherche d'une matrice congruente de valeurs propres $\{1{,}1{,}0\}$)

2. Montrez que l'on peut extraire la direction de $\underline{t}$ grâce au calcul de $E\,E^T$ (on fixera la norme de $\underline{t}$ à l'aide de la trace de $E\,E^T$ par exemple). Voir aussi la seconde remarque sur les matrices de pré-produit vectoriel.

3. Comparez alors les quantités $2(E\,E^T)E$ et $Tr(E\,E^T)E$. Conclusion ?

4. On définit la matrice $F$, appelée **matrice fondamentale** *(toujours en vision par ordinateur)* à partir de $E$, de la manière suivante : quelles que soient les matrices réelles triangulaires et inversibles $K_1$ et $K_2$

$$F \equiv K_2^{-T} E\, K_1^{-1}$$

Grâce à la première remarque sur les matrices de pré-produit vectoriel, montrez que $F$ peut se mettre sous la forme $F \equiv [\underline{e}]_\times H$ , où $H$ est une matrice inversible ne dépendant pas du vecteur $\underline{t}$, et $\underline{e}$ est un vecteur ne dépendant pas de la matrice de rotation $R$. En déduire qu'il est possible de déterminer une matrice équivalente à $F$ de la forme

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$