Université de Strasbourg
Logique et programmation logique — Feuille de CC 1

Logique Propositionnelle et Systèmes Formels

Une feuille recto verso manuscrite autorisée, 45 minutes, toutes les réponses doivent être justifiées (sauf précisé autrement).

Rappels :

- En cas d'ambiguïté, l'implication "$\Rightarrow$" est associative à droite ; par exemple, $p \Rightarrow q \Rightarrow r$ signifie $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$. De plus les opérateur $\wedge$ et $\vee$ sont prioritaire sur l'implication : $p \vee q \Rightarrow r$ signifie $(p \vee q) \Rightarrow r$
- Pour un ensemble de formules Γ et une formule F, $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} F$ signifie que F est prouvable à partir des hypothèses Γ dans le système $\mathcal{S}$. Γ, F est une notation pour $\Gamma \cup \{F\}$.
- pour un alphabet A (ou une simple lettre), A^+ signifie $A^* \setminus \{\epsilon\}$ c'est à dire un mot quelconque non vide.

1. Axiome K : $A \Rightarrow B \Rightarrow A$
2. Axiome S : $(A \Rightarrow B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow B) \Rightarrow A \Rightarrow C$
3. Règle :

$$\frac{A \Rightarrow B \qquad A}{B}\ \mathrm{MP}$$

FIGURE 1 – Système de Hilbert minimal H

Théorème 1 (de la déduction)

$$\Gamma \vdash_H A \Rightarrow B \text{ si et seulement si } \Gamma, A \vdash_H B$$

Définition 1 *Voici un rappel de l'interprétation usuelle issue de chaque opérateur en logique propositionnelle en fonction de l'interprétation des formules A et B.*

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$\neg A$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	0

Une formule A est valide (tautologie) si ***toute*** *interprétation satisfait A.*

Exercices

Exercice 1 ($\approx$10min)

1) Déterminez parmi les formules suivantes, celles qui sont valides, celles qui sont satisfiables et celles qui sont contradictoires (il n'y a pas forcément une de chaque).
   (a) $A \Rightarrow B \Rightarrow (A \wedge B)$
   (b) $(A \wedge ((B \wedge E) \Rightarrow ((\neg C \Rightarrow A) \wedge (A \vee C \vee D)))) \Rightarrow A$
2) Mettre la formule suivante sous forme normale conjonctive :

$$(B \Rightarrow A) \Rightarrow \neg(B \vee C)$$

Exercice 2 (≈25min)

On ajoute l'opérateur binaire 🍎 aux formules logique (si A et B sont des formules, alors A🍎B est aussi une formule). Soit $H_{🍎}$ le système H de Hilbert augmenté des schémas d'axiomes $\mathcal{X}_1$ et $\mathcal{X}_2$ suivants : pour toute formules A et B,
$\mathcal{X}_1 = A \Rightarrow (B \Rightarrow (A$🍎$B)$,
$\mathcal{X}_2 = (A$🍎$B) \Rightarrow A$.

1) Justifiez rapidement (par une/deux phrases simples) pourquoi on a l'équivalence suivante :

$$\Gamma, \mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2 \vdash_H P \text{ si et seulement si } \Gamma \vdash_{H_{🍎}} P$$

2) En déduire que le théorème de déduction est vrai dans $H_{🍎}$, c'est-à-dire que :

$$\Gamma \vdash_{H_{🍎}} A \Rightarrow B \text{ si et seulement si } \Gamma, A \vdash_{H_{🍎}} B$$

(on pourra se servir du Théorème 1. de la déduction dans H).

3) Montrez que les formules suivantes sont des théorèmes du système $H_{🍎}$:
   (a) $(A$🍎$B) \Rightarrow (B \Rightarrow (B$🍎$A))$
   (b) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow (B$🍎$A))$

4) On propose deux interprétations possibles pour l'opérateur 🍎 : I_1 et I_2 définis par les tableaux de vérité suivants :

Interprétation I_1 :

A	B	A🍎B
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	1

Interprétation I_2 :

A	B	A🍎B
0	0	0
1	0	1
0	1	0
1	1	1

L'opérateur $\Rightarrow$ s'interprète de manière usuel (voir rappel en début de page). On dit qu'une formule F est valide avec I_i, avec $i = 1, 2$, si pour toutes interprétations des variables propositionnelles on a $I_i(F) = 1$.
Montrer que le système $H_{🍎}$ est correct avec l'interprétation I_2 ? (on admettra dans la suite qu'il est correct pour l'interprétation I_1).

5) La formule A🍎$B \Rightarrow B$🍎A est-elle valide avec I_1 ? avec I_2 ? est-ce un théorème du système $H_{🍎}$?

6) Le système $H_{🍎}$ avec l' interprétation I_1 est-il complet ?

Exercice 3 (≈ 10min)

On considère le système formel (Σ, F, A, R) où :

- $\Sigma = \{\sim, \Box\}$;
- $F = \{x\Box y \quad | \quad x, y \in \sim^*\}$;
- $A = \{\Box \sim\}$;
- R contient une règle définie par :

$$[R_1]\frac{x\Box y}{\sim x\Box yy}$$

1) Les formules suivantes sont-elles des théorèmes du système (justifier chaque réponse) :
   (i) $\sim\sim\sim \Box \sim\sim\sim\sim\sim\sim$
   (ii) $\sim\sim \Box \sim\sim\sim\sim$
   (iii) $\sim \Box$

2) Donner une interprétation de ce système formel qui soit correcte et complête (Justifier chaque réponse).