Université de Strasbourg
Logique et programmation logique — Feuille de TD 2 (Correction)

Logique Propositionnelle

Exercice 1

1) Donner un exemple de formule valide.
2) Donner un exemple de formule satisfiable mais non valide.
3) Donner un exemple de formule insatisfiable.

Exercice 2

Parmi les formules suivantes, lesquelles sont valides ? contradictoires ? Si une formule n'est ni valide, ni contradictoire, on donnera une interprétation qui la falsifie et une interprétation qui la satisfait. On essaiera de raisonner sans écrire la table de vérité.

1) $p \wedge \neg q$
   satisfiable, $\top : p = 1 \wedge q = 0$
   falsifiable, $\bot : p = 0 \wedge q = 0$
2) $(p \wedge (p \to q)) \to q$
   valide
3) $(p \wedge \neg q) \to q$
   satisfiable, $\bot : q = 1$
   falsifiable, $\top : p = 1 \wedge q = 0$
4) $(p \wedge q) \to p$
   valide
5) $(p \vee q) \to q$
   satisfiable, $\bot : q = 1$
   falsifiable, $\top : p = 1 \wedge q = 0$
6) $p \to (p \vee q)$
   valide
7) $p \to (p \wedge q)$
   satisfiable, $\bot : p = 0$
   falsifiable, $\top : p = 1 \wedge q = 0$
8) $p \vee (p \to q)$
   valide
9) $q \vee (p \to q)$
   satisfiable, $\bot : q = 1$
   falsifiable, $\top : p = 1 \wedge q = 0$
10) $p \wedge (p \to q)$
   satisfiable, $\bot : p = 1 \wedge q = 1$
   falsifiable, $\top : p = 0$
11) $q \wedge (p \to q)$
   satisfiable, $\bot : p = 1 \wedge q = 1$
   falsifiable, $\top : q = 0$
12) $p \vee q$
   satisfiable, $\bot : p = 1 \wedge q = 1$
   falsifiable, $\top : p = 0 \wedge q = 0$
13) $p \wedge \neg p$
   contradictoire
14) $((p \to q) \wedge (\neg p \to q)) \to q$
   valide
15) $((p \to q) \wedge (p \to \neg q)) \to \neg p$
   valide
16) $(\neg p \to p) \to p$
   valide
17) $\neg p \to (p \to \neg p)$
   valide
18) $((p \to q) \to p) \to q)$
   satisfiable, $\bot : q = 1$
   falsifiable, $\top : p = 1 \wedge q = 0$

Exercice 3

1) Montrez (par analyse sémantique / tables de vérité) que la formule suivante est valide :

$$p \to ((p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q))$$

2) Montrez (par analyse sémantique / tables de vérité) que la formule suivante est satisfiable :

$$\neg(p \to (q \wedge (q \to p)))$$

3) Mettre chacunes des deux formules précédentes sous forme normale conjonctive.

Correction :

1) Supposons que la formule soit fausse avec l'interprétation I. Alors on a forcément $I(p) = V$ et $I((p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)) = F$. Donc $I(p \wedge q) = F$ et $I(p \wedge \neg q) = F$. Comme $I(p) = V$ dans le premier cas on conclut que $I(q) = F$ et dans le deuxième $I(q) = V$, ce qui est une contradiction.
2) Utilisons un tableau de vérité :

p	q	$q \to p$	$q \wedge (q \to p)$	$p \to (q \wedge (q \to p))$	F
0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	1	0
1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	0

3) $p \to ((p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)) = p \vee \neg p = \top$
   $\neg(p \to (q \wedge (q \to p))) = p \wedge \neg q$

Exercice 4

Donner une formule correspondant à la table de vérité suivante :

P	Q	R	
F	F	F	V
F	F	V	V
F	V	F	F
F	V	V	V
V	F	F	F
V	F	V	F
V	V	F	F
V	V	V	V

Mettre cette formule sous forme normale conjonctive.

Correction : $(\neg P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge R)$ soit $(P \vee Q) \to (Q \wedge R)$ soit $(\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R)$

Exercice 5

Que pensez vous des affirmations suivantes :

1) Si $G \vee H$ est insatisfaisable alors G et H sont deux formules insatisfiables.
2) Si $G \vee H$ est valide alors G et H sont deux formules valides.

Correction :

1) Correcte, si l'une était satisfiable, alors la disjonction avec n'importe quelle autre formule le serait aussi.
2) Faux, l'une peut être falsifiée lorsque l'autre est satisfaite.

Exercice 6

1) Pour quelles valeurs de m la formule $(m = 1) \to (m = 2)$ est-elle vraie ?
2) Pour quelles valeurs de m la formule $(m = 1) \leftrightarrow (m = 2)$ est-elle vraie ?

Correction :

1) $m \neq 1$, $(3 = 1 \to 2 = 0 \to 1 = 0 \to 3 = 2)$
2) $m \neq 1 \wedge m \neq 2$

Exercice 7

Lesquels des raisonnements suivants sont formalisables en logique propositionnelle ? Si c'est le cas, donnez une formalisation et vérifiez s'il est effectivement valide.

1) Si j'étudie la logique, alors je serai heureux et sage ;
   je serai heureux et sage ;
   donc j'étudie la logique
2) Napoléon était allemand ;
   les allemands sont européens ;
   donc Napoléon était européen.
3) Napoléon était allemand ;
   les allemands sont asiatiques ;
   donc Napoléon était asiatique
4) Napoléon était français ;
   tous les francais sont européens ;
   donc Hitler était Autrichien
5) Si Napoléon avait été chinois, alors il aurait été asiatique ;
   Napoléon n'était pas asiatique ;
   donc il n'était pas chinois.
6) S'il pleut, on annulera le pique nique ;
   s'il ne pleut pas, Marie insistera pour aller à la plage et le pique nique sera annulé ;
   ou bien il pleuvra ou bien il ne pleuvra pas ;
   donc le pique nique sera annulé.

Correction :

1) $((L \to (H \wedge S)) \wedge (H \wedge S)) \to L$
   ou bien écrit comme cela : $L \to (H \wedge S), H \wedge S \models L$
   satisfiable si $L = \top$
   falsifiable $L = \bot \wedge H = S = \top$

Exercice 8 Problème de Bill

1. Si Bill Prend l'autobus et si l'autobus est en retard, alors Bill manquera son rendez-vous.

2. Bill n'ira pas à la maison si il manque son rendez-vous et si il est déprimé.
3. Si Bill n'obtient pas de travail alors Bill sera déprié et Bill ira à la maison.

Pour chaque affirmation, dire si elle est conséquence logique des affirmations précédentes :

1) Si Bill prend l'autobus et si l'autobus est en retard, alors Bill obtient du travail.
2) Bill obtiendra du travail s'il manque son rendez-vous et s'il va à la maison.
3) Si l'autobus est en retard, Bill ne prendra pas l'autobus ou Bill manquera son rendez-vous.
4) Si Bill prend l'autobus et va à la maison, alors Bill ne sera pas déprimé si l'autobus est en retard.

Correction :

1) Oui car si on prends une interprétation qui falsifie l'affirmation, alors elle falsifie forcément les prémices (donc toutes les interprétations qui satisfont les prémices satisfont aussi l'affirmation).
2) Non. Par exemple, il peut ne pas obtenir de travail, aller à la maison, manquer son rdv, être déprimé, prendre le bus, et le prendre en retard. Cela ne contredit pas les prémices mais falsifie l'affirmation.
3) Non.
4) Oui.

Exercice 9 Le club écossais

Un club est régi par le règlement suivant :

1. Tout membre non écossais porte des chaussettes oranges.
2. Tout membre porte un kilt ou ne porte pas des chaussettes oranges.
3. Les membres mariés ne sortent pas le dimanche.
4. Un membre sort le dimanche si et seulement si il est écossais.
5. Tout membre qui porte un kilt est écossais et marié.
6. Tout membre écossais porte un kilt.

Exprimer ce règlement au moyen d'une formule de la logique propositionnelle. Montrer qu'il est impossible d'adhérer au club.

Correction : Si E est faut (son interprétation) alors on arrive à une contradiction. Sinon, on arrive aussi à une contradiction.

Exercice 10 Enigme

Un prince est dans un cruel embarras. Le voici au pied du manoir où la sorcière retient prisonnière sa princesse. Deux portes donnent accès au château. L'une conduit aux appartements de la princesse, l'autre s'ouvre sur l'antre d'un dragon. Le prince sait seulement que l'une de ces portes s'ouvre si on énonce une porposition vraie, et l'autre si on énonce une proposition fausse. Comment le prince peut-il délivrer la princesse ?

Correction : On a $(F \wedge V_P) \vee (\neg F \wedge \neg V_P) \equiv O_P$ avec O_P : la porte qui s'ouvre mène à la princesse ; V_P la porte qui accepte la vérité mène à la princesse ; F votre proposition. Ainsi on voit qu'en replacant F par V_P, $(V_P \wedge V_P) \vee (\neg V_P \wedge \neg V_P)$ est une tautologie, donc O_P aussi.

Exercice 11

1) Montrer que pour toute formule H il existe H' equivalente à H n'ayant comme connecteur logique que la négation et l'implication.
2) Appliquer ce résultat à la formule : $(P \vee Q) \leftrightarrow (R \vee S)$

Correction : $[(P \vee Q) \rightarrow (R \vee S)] \wedge [(R \vee S) \rightarrow (P \vee Q)]$
$[(\neg P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg R \rightarrow S)] \wedge [(\neg R \rightarrow S) \rightarrow (\neg P \rightarrow Q)]$
$\neg\left([(\neg P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg R \rightarrow S)] \rightarrow \neg\left[(\neg R \rightarrow S) \rightarrow (\neg P \rightarrow Q)\right]\right)$

Exercice 12

Montrer que $|$ est un connecteur complet.

$\vert$	V	F
V	F	V
F	V	V

Correction : $\neg A \equiv A|A$
$A \to B \equiv A|\neg B \equiv A|(B|B)$