Théorie des Graphes
Rappels

Fabrice Theoleyre

theoleyre@unistra.fr
http://www.theoleyre.eu

https://moodle3.unistra.fr/course/view.php?id=10236

ENSEMBLES

Rappels et Notations

Rappel sur les notions ensemblistes

- Ensemble : collection (finie ou infinie) d'objets distincts.
  - Ces objets sont dits des éléments de l'ensemble.
  - Notations :
    - ❖ Par convention : x un élément, X un ensemble
    - ❖ *{a,b,…,y,z}* (énumération) : définition par extension
    - ❖ ou *{x | p(x)}* (propriété *p* caractéristique) : définition par intension (ou compréhénsion)
    - ❖ $x \in X$: *x* est un élément de *X (appartenance)*
    - ❖ $X \subseteq E$: tous les éléments de X sont dans E (inclusion)
    - ❖ $X \subset E$: *X est un sous-ensemble strict de E (ne peut pas être égal)*
    - ❖ $\emptyset$: ensemble vide (aucun élément)
      - – remarque : $\forall E,\ \emptyset \subseteq E$

Exemples

- Ensembles infinis
  - Les entiers naturels
  - Les réels
  - Les graphes complets

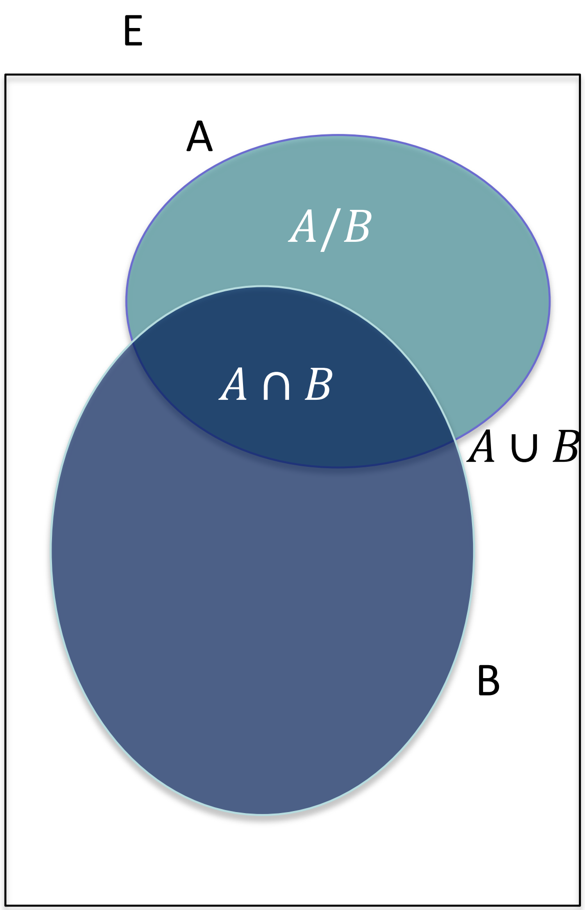
- Ensembles finis
  - Liste des usagers de Facebook
  - Les villes de France
  - Les rues et routes d'Europe
  - Les graphes avec 10 sommets

Union, Intersection

- Soit A et B deux ensembles inclus dans un ensemble E
  - Union : $A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \vee x \in B\}$
  - Intersection : $A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \wedge x \in B\}$

- Soit $(X_i)_{i \in I}, I \subseteq \mathbb{Z}$ une famille de sous-ensembles de E
  - Union : $\bigcup_{i \in I} X_i = \{x \in E \mid \exists i \in I, x \in X_i\}$
  - Intersection : $\bigcap_{i \in I} X_i = \{x \in E \mid \forall i \in I, x \in X_i\}$
    - si I = {1,2,…,n} alors on note l'union $\bigcup_{i=1}^{n} X_i$
    - et respectivement $\bigcap_{i=1}^{n} X_i$ pour l'intersection

- Soit A et B deux ensembles inclus dans E
  - Complémentaire : $\complement_E^A = \{x \in \mathrm{E} \mid x \notin \mathrm{A}\}$
  - Soustraction : $A \setminus B = \{x \in \mathrm{E} \mid x \in \mathrm{A} \wedge x \notin B\}$
  - Union privée de l'intersection :
    - $A \vartriangle B = \{x \in \mathrm{E} \mid (x \in \mathrm{A} \wedge x \notin B) \vee (x \notin \mathrm{A} \wedge x \in B)\}$



Cardinal et sous-ensemble/partie

- Le cardinal désigne le nombre d'éléments d'un ensemble fini.
  - notation pour un ensemble X : *Card(X)* ou ***|X|***
- Un sous-ensemble (ou une partie) est un ensemble inclus dans un autre
  - Y est un sous-ensemble de X noté
    - $Y \subseteq X$
    - ou $Y \subset X$ si $Y \neq X$ (sous-ensemble strict)
  - On note P(X) l'ensemble des parties de X : $P(X) = \{Z | Z \subseteq X\}$
    - Tous les sous-ensembles possibles de X
  - Propriété :$|P(X)| = 2^{|X|}$
    - Intuition/preuve ?
    - Démonstration par récurrence
      - Vrai pour ensemble vide
      - Si vrai pour k et qu'on ajoute un élément e
        - » Anciens qui ne contiennent pas e 2^k
        - » Nouveaux qui contiennent e : également 2^k

Produit cartésien & Partition

- Produit cartésien
  - Soit A et B deux ensembles, on note leur produit cartésien, A x B, l'ensemble des couples de la forme (a,b) avec $a \in A,\ b \in B$
  - Notation formelle : $A{\times}B = \{(a,b) | a \in A, b \in B\}$
- Soit $(X_{ij})_{ij \in I}, I = \{i_1, \dots, i_{|I|}\} \subseteq \mathbb{Z}$ une famille de sous-ensemble de E, on note leur produit cartésien
  - $\prod_{ij \in I} X_{ij} = \{(x_{ij})_{j=1}^{|I|} = \{\ (x_{i1}, x_{i2},\ \dots,\ x_{i|I|})\ | \forall \text{ j} \in [1, |I|], x_{ij} \in X_{ij}\}$
  - on peut avoir A=B ou tous les X_i égaux
  - on parle de couple pour n=2, de triplet pour n=3, ou de n-uplet si n>3
  - $\prod_{ij \in I} |X_{ij}| = |\prod_{ij \in I} X_{ij}\ |$
- P est une partition de X si P vérifie les trois conditions suivantes
  1. ensemble vide inclus : $\emptyset \in P$
  2. Complétude : $X = \ \cup_{Y \in P} Y$
  3. sous ensembles disjoints : $\forall (Y, Z) \in P^2, Y\ \neq Z\ \Rightarrow Y \cap Z = \emptyset$
  - Intérêt des partitions?

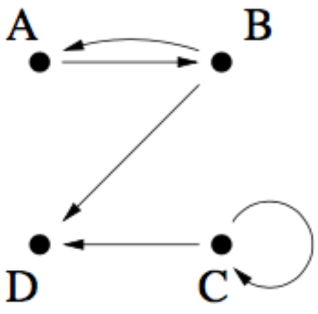
UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

RELATIONS

Et lien avec les graphes

Relations

- Relation Binaire ou n-aire
  - Qui lie (de façon n-aire) un élement du premier ensemble à un ensemble d'éléments du second ensemble
  - 2-aire: un enfant est lié à ses deux parents
    - ❖ Plusieurs relations : adoption et filiation naturelle

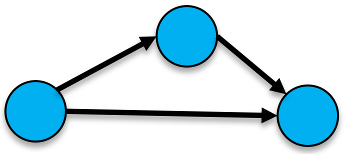


- On s'intéressera surtout ici aux relations binaires de type R : X -> X
  - Même ensemble de départ et d'arrivée
  - il s'agit d'une partie R de X^2
  - un couple (x,y), noté aussi xRy, appartenant à X^2 est en relation par R dans X si celui-ci appartient à R.

- Il existe $2^{|X|^2}$ relations sur X

Propriétés des relations

- Soit R une relation sur X, on dit que la relation R est :
  - réflexive ssi $\forall x \in X, xRx$
  - irréflexive ssi $\forall x \in X, \neg(xRx)$
    - Pas d'arête de retour sur le sommet
  - transitive ssi $\forall (x,y,z) \in X^3, xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$
  - symétrique ssi $\forall (x,y) \in X^2, xRy \Rightarrow yRx$
  - (faiblement) antisymétrique ssi $\forall (x,y) \in X^2, xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$
    - Soit d'un côté, soit de l'autre (either / or) – sauf pour les arêtes « boucles »
    - symétrique et antisymétrique possible ?
      - Non sauf si « relation diagonale » (matrice)
  - fortement antisymétrique ssi $\forall (x,y) \in X^2, xRy \Rightarrow \neg(yRx)$
  - un graphe pour chaque cas ?
    - à 4 sommets



Relations d'ordre

- Une relation d'ordre R sur X vérifie les trois conditions suivantes :
  - R est réflexive
  - R est transitive
  - R est antisymétrique (faible)
    - → comparaison cohérente des éléments entre eux
- Relation d'ordre stricte (<)
  - Relation d'ordre, mais avec une antisymétrie forte
    - ❖ Donc également non réflexive
- Ensemble ordonné
  - Ensemble X muni d'une relation d'ordre
- Ordre total vs. ordre partiel
  - total : $\forall (x, y) \in X^2, xRy \vee yRx$
    - ❖ Deux éléments x et y sont toujours comparables
  - partiel si R est une relation d'ordre qui n'est pas total
    - ❖ $\exists (x, y) \in X^2, \neg(xRy) \wedge \neg(yRx)$

Relations d’équivalence

- Une relation d’équivalence R sur X vérifie les trois conditions suivantes :
  - R est réflexive
  - R est transitive
  - R est symétrique
    - ❖ Une telle relation R se note “~”

- Soit R une relation d’équivalence sur X et $x \in X$
  - La classe d’équivalence de x dans (X,R) se note $[x]_R$
  - Il s’agit d’un sous ensemble de X tel que $[x]_R = \{y \in X \mid yRx\}$
    - ❖ la notation [x] est aussi utilisé avec ~

- L’ensemble quotient se note $X/R = \{[x]_R \mid x \in X\}$
  - Il s’agit d’une partition de X désignant l’ensemble des classes d’équivalence

Applications

- Soit E et F deux ensembles et R une relation de E vers F
  - On dit que R est une application de E dans F ssi

$$\forall X \in E, \exists !\, y \in F \mid xRy$$

    - NB : ∃! signifie qu'il existe un unique élément
  - On écrit y=R(x) avec y l'image de x par R et x l'antécédent de y par R
  - Soit $X \subseteq E$ et $Y \subseteq F$, on note

$$R(X)=\{R(x) \mid x \in X\},\ R^{-1}(Y)=\{x \in E \mid R(x) \in Y\}$$

- Exemples ?
  - Propriétaires des véhicules immatriculés (cartes grises)
    - E= véhicules
    - F = propriétaire (humain ou entreprise)
      - NB : peut avoir plusieurs véhicules

- On note F^E l'ensemble des applications de E dans F
    - $| F^E | = | F|^{|E|}$

COMPLEXITÉ

Et classes de problèmes

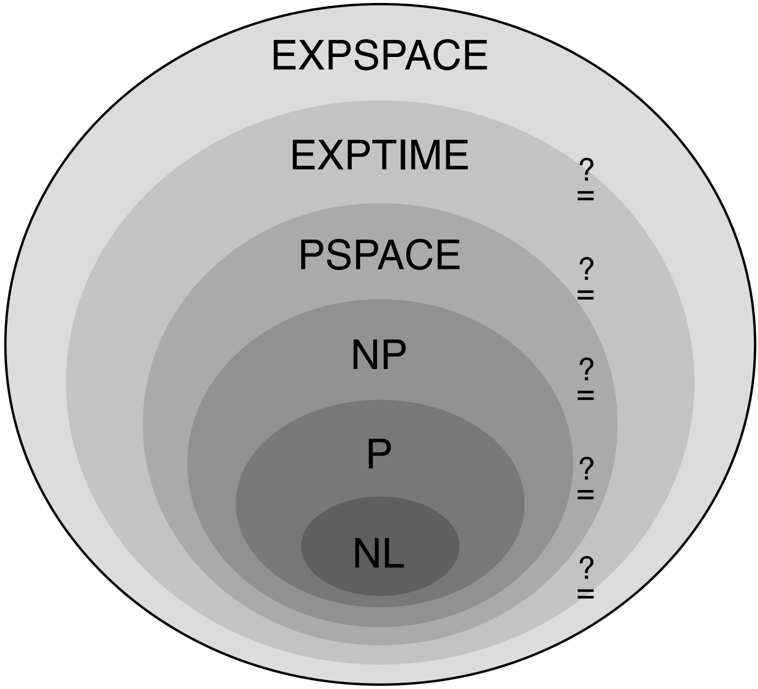
Complexité

- Complexité : temps de calcul ou mémoire d'un algorithme
- f(n) $\in O(g(n))$
  - $\exists N \in \mathbb{N}^*, \exists c \in \mathbb{R}^+ \mid \forall n > N, f(n) < c * g(n)$
  - f est bornée par g (asymptotiquement)
- f(n) $\in o(g(n))$
  - $\exists N \in \mathbb{N}^*, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \mid \forall n > N, f(n) \leq \varepsilon * g(n)$
    - ❖ ε petit (mais positif strict)
  - f est négligeable devant g (domination stricte)
- f(n) $\in \Omega(g(n))$
  - $\exists N \in \mathbb{N}^*, \exists c \in \mathbb{R}^+ \mid \forall n > N, f(n) \geq c * g(n)$
  - f est minorée par g
- f(n) $\in \Theta(g(n))$
  - $\exists N \in \mathbb{N}^*, \exists c, d \in \mathbb{R}^+ \mid \forall n > N, c * g(n) \leq f(n) \leq d * g(n)$
  - $\Theta(g(n)) = \Omega(g(n)) \cup O(g(n))$
  - f est dominée et soumise
- Par abus de langage : g(n) $\in O(f(n)) \rightarrow$ g(n) $= O(f(n))$

```
for(i=0; i<= n; i++)
  for(j=0; j<= n; j++)
    tab_c[i,j] = tab[i,n-j]
Complexité en O(n^2)
```

NP, P, PTAS

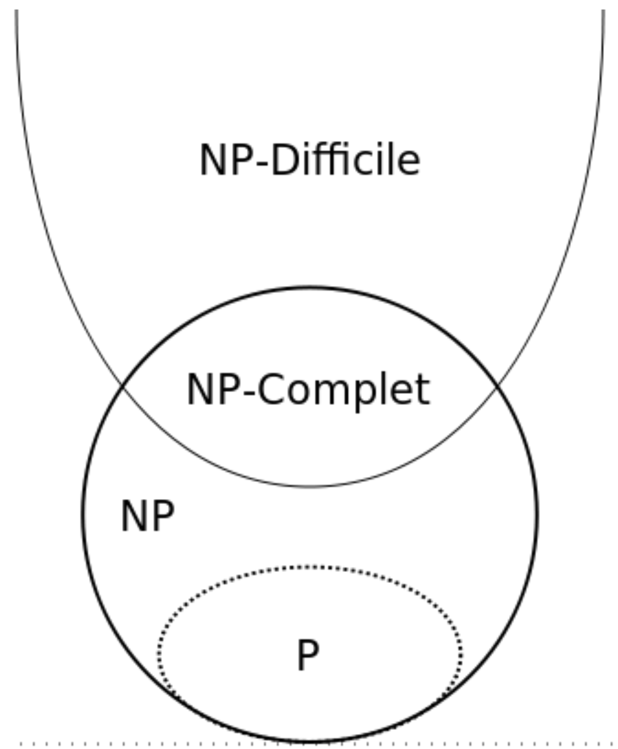
- Problème décisionnel
  - Question dont la réponse est soit positive, soit négative
  - Ensemble des instances positives (dont la réponse est oui)
  - Le chemin c de la maison à l’école est-il correct ?



- Complexité croissante
  - $P \subseteq NP$ (pb de Smale, 1M$)

Classe NP

- Problème de décision dans NP s'il peut être résolu en temps polynomial par une machine de Turing non déterministe
  - = on peut vérifier en temps polynomial si une solution est correcte
  - On peut autoriser des choix non déterministes en cours de route



$P \neq NP$

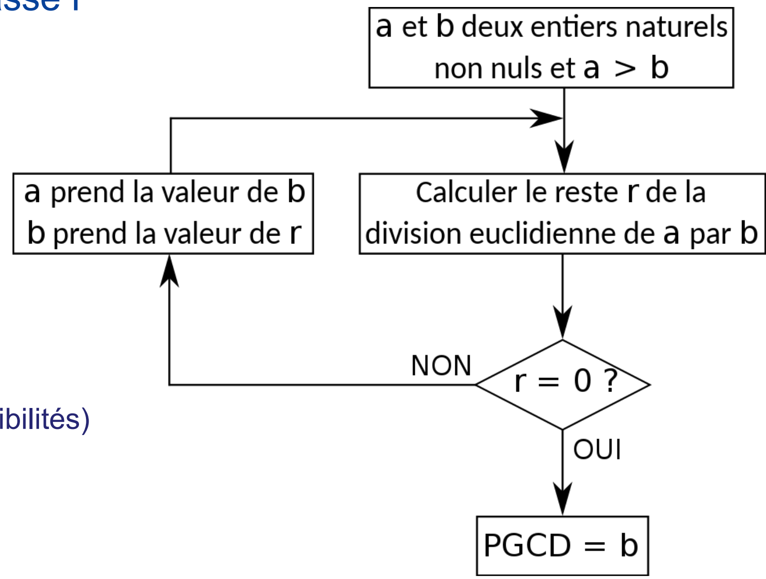
- Exemple : un circuit Hamiltonien de longueur inférieure ou égale à k
  - ❖ Somme des arêtes <= k
  - ❖ Passe par toutes les villes exactement une fois

Classe P

- Problèmes de décision résolubles en temps polynomial
  - Trouver (P) vs. vérifier (NP)

- Attention
  - il existe UNE solution en temps polynomial $\Longrightarrow$ Classe P
  - Il existe UNE solution en temps non polynomial $\not\Rightarrow \notin$ Classe P

- Exemple :
  - Soit deux entiers (a,b)
  - a et b sont ils premiers entre eux ?
  - Solution naïve
    - ❖ Tester chaque diviseur de 2 à a (a < b)
      - – Complexité exponentielle (a sur n bits -> test de 2^n possibilités)
  - Algorithme d'Euclide
    - ❖ Chaque division de complexité quadratique
      - – O(n^2)
    - ❖ Nombre linéaire de divisions
      - – pgcd (a,b) = pgcd (b, a mod b)   a > b
      - – Théorème de Lamé : borné par 5 fois le nombre de chiffres nécessaires pour écrire a en base 10 (a<b)

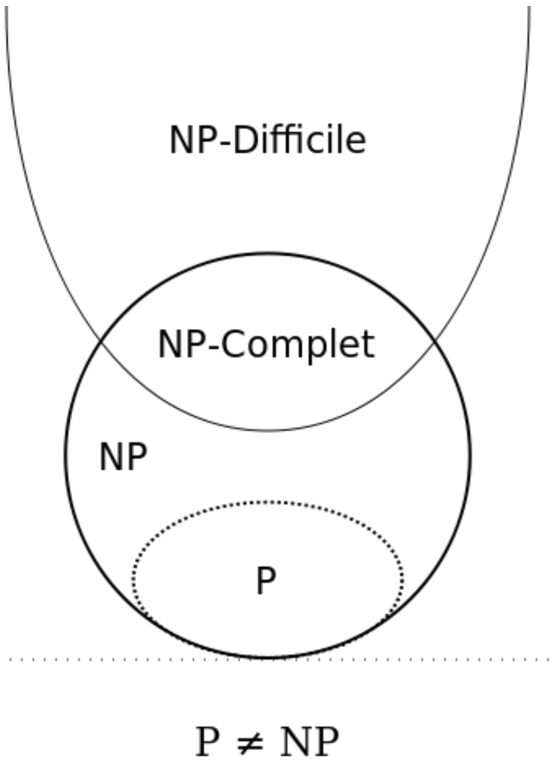


NP-Complet

- Un problème est NP complet si
  - « Vérification de la solution en temps polynomial (NP) »
  - « Tous les problèmes de la classe NP se ramènent à celui-là en temps polynomial »
    - ❖ Au moins aussi difficile

- Complexité
  - Trouver la solution (et non la vérifier)
  - → heuristiques

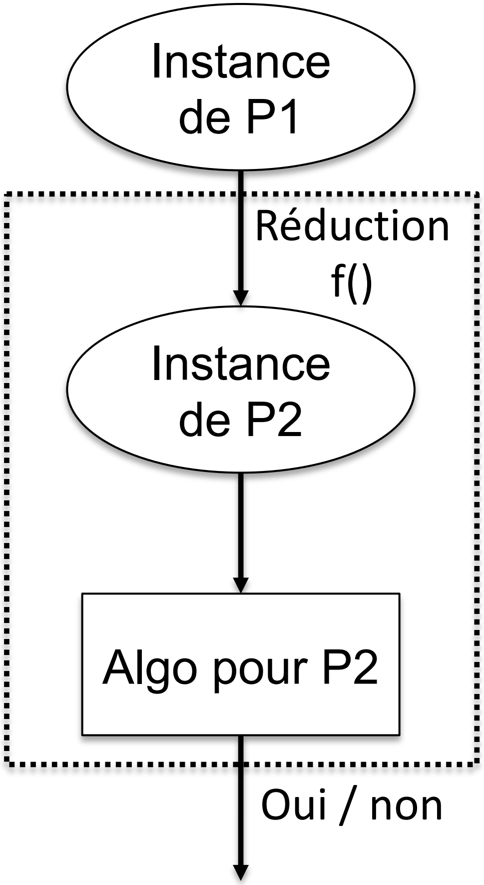
- De nombreux problèmes NP complets
  - Sac à dos
  - Clique maximale (cf. + loin)
  - Cycle hamiltonien
  - Coloration de graphe (cf. + loin)
  - SAT (assignation de valeurs qui rend la formule vraie)
    - ❖ Soit une expression logique de n variables F(x1, … ,xn)
    - ❖ Trouver les valeurs xi pour que F soit satisfaite
    - ❖ Dans NP : il suffit de vérifier F (en temps polynomial)
    - ❖ Théorème de Cook



Preuve de NP-complétude

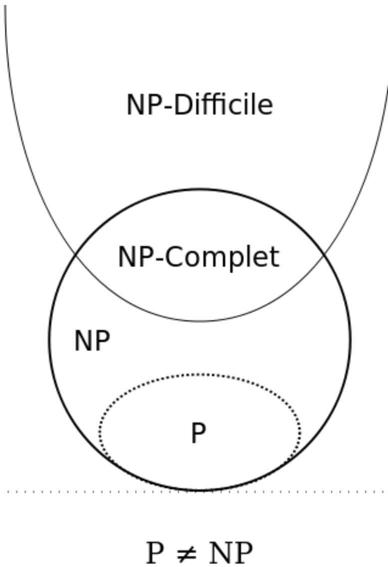
- Réduction
  - *« Un problème A est réductible à un problème B s'il existe un algorithme résolvant A qui utilise un algorithme résolvant B »*
    - *A est un cas particulier de B*
  - Réduction polynomiale : $A \; \alpha \; B$

- Preuve de NP-Complétude
  - Prouver que P1 est dans NP
  - Prouver que P1 est au moins aussi difficile que d'autres problèmes NP complets
    - Choisir un problème P2 déjà connu comme NP-complet
    - Construire une réduction de P1 à P2
    - $u \in oui(P1) \;\Leftrightarrow\; u \in oui(P2)$
    - Si on trouve un algo polynomial pour P2, on en a un aussi pour P1
      - P1 est plus facile que P2 (non strict)



NP-difficile

- Ne remplit que la seconde condition de NP-complétude
  - « Tous les problèmes de la classe NP se ramènent à celui-là en temps polynomial »
  - NB: On ne vérifie pas qu'il est dans NP
    - ❖ On ne sait pas si le test peut être fait en temps polynomial !



- Au moins aussi difficile que tout problème dans NP

Schéma d'approximation en temps polynomial

- $(1+\epsilon)$-approximation
  - Trouve une solution à au plus $(1+\epsilon)$ de l'optimum
  - Exemple : 2-approximation du sac à dos
    - Si somme optimale des importances = M
    - Trouve une solution d'importance *au pire* M/2 en temps polynomial

- Polynomial Time Approximation Scheme (PTAS)
  - Classe d'algorithmes d'approximation pour des problèmes d'optimisation combinatoire
    - Souvent NP difficiles
  - Une instance d'un problème d'optimisation + une valeur ϵ strictement positive
    - Donne une solution $(1+\epsilon)$ optimale en temps polynomial pour ϵ fixé
      - Peut varier en fonction de ϵ
      - Par exemple : complexité en $O\left(n^{\frac{1}{\epsilon}}\right)$