Théorie des Graphes
Plus courts chemins

TPS 1A INOC

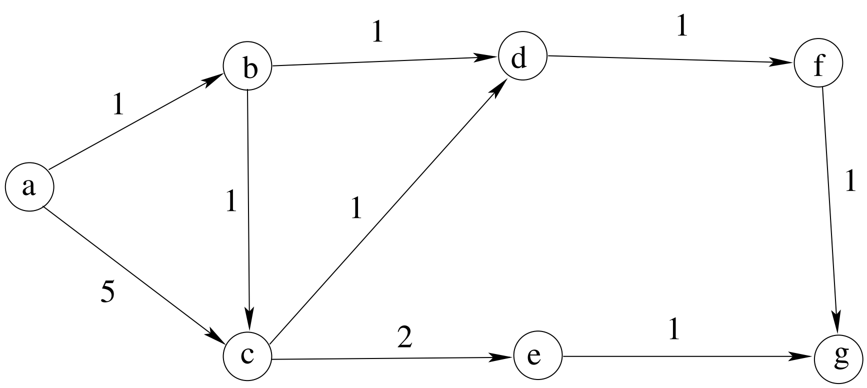
theoleyre@unistra.fr

Objectif : comment calculer les plus courts chemins dans un graphe ?

Durée : 2 heures

Exercice 1: Algorithmes

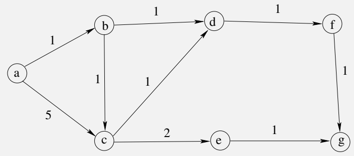
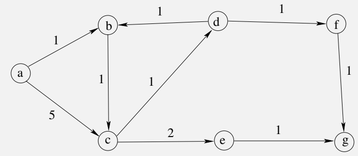
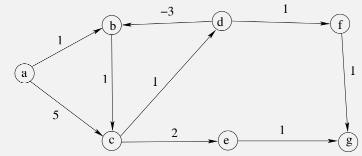
On considère le réseau représenté ci-après.



1. Quels en sont les sources et les puits ?

source : a
puits : g

2. En utilisant tous les algorithmes licites vus en cours (justifier les choix), trouver le graphe des chemins minimaux (resp. maximaux) à partir de a. Ce graphe est-il équivalent à un arbre couvrant de poids minimal (resp. maximal) ?

Le réseau de gauche est à longueurs positives et ne possède pas de circuit. On peut donc appliquer les algorithmes de Dijsktra, Bellman et Bellman sans circuits. On propose d'appliquer Bellman sans circuit. Pour celà, on applique l'algorithme circuit/niveau pour obtenir une partition en niveaux du réseau. Le tableau suivant décrit le déroulement de cet algo avec les notations du cours :

k	N	$d^-(a)$	$d^-(b)$	$d^-(c)$	$d^-(d)$	$d^-(e)$	$d^-(f)$	$d^-(g)$	S_k	CI
0	0	0	1	2	2	1	1	2	$\{a\}$	
1	1	0	0	1	2	1	1	2	$\{b\}$	
2	2	0	0	0	1	1	1	2	$\{c\}$	
3	3	0	0	0	0	0	1	2	$\{d,e\}$	
4	5	0	0	0	0	0	0	1	$\{f\}$	
5	6	0	0	0	0	0	0	0	$\{g\}$	$\perp$

On obtient alors la partition en niveaux suivante : $\{\{a\},\{b\},\{c\},\{d,e\},\{f\},\{g\}\}$, et $\{a,b,c,d,e,f,g\}$ est une liste des sommets triés par rangs croissants. On applique alors l'algorithme de Bellman sans circuit :

k	x_k	$\pi_a(a)$	$\pi_a(b)$	$\pi_a(c)$	$\pi_a(d)$	$\pi_a(e)$	$\pi_a(f)$	$\pi_a(g)$
1	a	0	-	-	-	-	-	-
2	b	0	1	-	-	-	-	-
3	c	0	1	2	-	-	-	-
4	d	0	1	2	2	-	-	-
5	e	0	1	2	2	4	-	-
6	f	0	1	2	2	4	3	-
7	g	0	1	2	2	4	3	4

3. Mêmes questions en remplaçant l'arc (b,d) par l'arc (d,b) (et en conservant le même poids).

Le réseau du centre possède un circuit et est à longueurs positives. On peut alors appliquer Dijsktra et Bellman. On propose d'appliquer Dijsktra.

k	s_k	S'	$\pi_a(a)$	$\pi_a(b)$	$\pi_a(c)$	$\pi_a(d)$	$\pi_a(e)$	$\pi_a(f)$	$\pi_a(g)$
1	a	$\{a\}$	0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
2	b	$\{a,b\}$	0	1	5	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
3	c	$\{a,b,c\}$	0	1	2	2	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
4	d	$\{a,b,c,d\}$	0	1	2	2	4	$+\infty$	$+\infty$
5	f	$\{a,b,c,d,f\}$	0	1	2	2	4	3	$+\infty$
6	e	$\{a,b,c,d,f,e\}$	0	1	2	2	4	3	4

4. Mêmes questions en remplaçant le poids de l'arc (d,b) par -3.

Le réseau de droite est à longeurs quelconques et possède un circuit absorbant. On peut donc appliquer l'algorithme de Bellman.

k	$\pi_a^k(a)$	$\pi_a^k(b)$	$\pi_a^k(c)$	$\pi_a^k(d)$	$\pi_a^k(e)$	$\pi_a^k(f)$	$\pi_a^k(g)$	CA	π
0	0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$		
1	0	1	5	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$		
2	0	1	2	6	7	$+\infty$	$+\infty$		
3	0	1	2	3	4	7	8		
4	0	0	2	3	4	4	5		
5	0	0	1	3	4	4	5		
6	0	0	1	2	3	4	5		
7	0	-1	1	2	3	3	4	$\top$	

Exercice 2: Graphe des plus courts chemins d'un réseau

Soit $R = (S, A, l)$ un réseau sans circuit absorbant, $x \in S$ un sommet de R et $\pi_x : S \to \overline{\mathbb{R}}$ l'application associant à tous sommet y de S la longueur $L(C)$ du plus court chemin C de x à y s'il existe, $+\infty$ sinon. On définit le graphe partiel $R' = (S, A')$ de (S, A) par $A' = \{(y, z) \mid L((y, z)) = \pi_x(z) - \pi_x(y)\}$.

Le but de l'exercice est de montrer que pour tout sommet $y \in S$, un plus court chemin dans R de x à y est *exactement* un chemin de x à y dans R'.

1. Soit y un sommet de R, et $C_1 = (x_i)_{i=1}^{l}$ un plus court chemin de x à y dans R. Montrer que pour tout $1 \leq i \leq l-1$, $(x_i, x_{i+1}) \in A'$.
2. Soit maintenant C_2 un chemin de x à y dans R'. Montrer que C_2 est un plus court chemin dans R.
3. Conclure.

1. Démontrons déjà le premier sens.
   Nous avons une chaine de x à y comprenant toutes les arêtes (x_i, x_{i-1}).
   $y \longrightarrow \ldots \quad xi{+}1 \longrightarrow xi \quad \ldots \longrightarrow x0 \longrightarrow x$

   Si le chemin C est le plus court chemin de y à x, tous les sous-chemins de x_i à x $(= \{(x_j, x_{j_1})\}_{j\in[i..0]})$ sont également plus courts chemins de x_i à x. En effet, supposons le contraire. Comme vu dans le concours, il suffirait de remplacer $= \{(x_j, x_{j_1})\}_{j\in[i..0]}$ dans C par le plus petit chemin pour faire un plus court chemin. Ceci vient en contradiction avec le principe d'optimalité de C.
   Dénotons C' le plus court chemin de x_i à x et par C" le plus court chemin de x_{i-1} à x :

   $$L(C') = L((x_i, x_{i-1}) \oplus C'') = L((x_i, x_{i-1})) + L(C'') \tag{1}$$

   avec $\oplus$ l'opérateur de concaténation de chemin.
   Ainsi :

   $$\pi_x(x_i) = \pi_x(x_{i_1}) + L(x_i, x_{i-1}) \tag{2}$$

   et donc (x_i, x_{i-1}) est dans A'.
2. Démontrons maintenant le deuxième sens. Il "suffit" de montrer que la somme des poids des arêtes du chemin correspond à la longueur du plus court chemin de x à y (cad $\pi_x(y)$).
   Soit $C_2 = (x_i)_{i=1}^{l}$. Alors $\forall 1 \leq i \leq l-1, L((x_i, x_{i+1})) = \pi_x(x_{i+1}) - \pi_x(x_i)$. On a alors :
   $L(C_2) = L((x, x_1)) + L((x_1, x_2)) + ... + L((x_l, y))$
   $= \pi_x(x_1) - \pi_x(x) + \pi_x(x_2) - \pi_x(x_1) + ... + \pi_x(x_l) - \pi_x(x_{l-1}) + \pi_x(y) - \pi_x(x_l) = \pi_x(y)$
   d'où C_2 est un plus court chemin de x à y.
3. Conclusion : un plus court chemin de x à y dans un réseau est exactement un chemin de x à y dans son graphe des plus cours chemins depuis x.

Exercice 3: Réseau à coût constant

Soit $G = (S, A, L)$ un réseau tel que pour tout arc $a \in A$ on a $L(a) = k > 0$. Proposer un algorithme (ne traitant qu'une seule fois chaque sommet et chaque arc de G) permettant de trouver la longueur du plus court chemin d'un sommet donné $x \in S$ à tout autre sommet de G.

Soit $G = (S, A, L)$ un réseau tel que pour tout arc $a \in A$ on a $L(a) = k > 0$. Sans perte de généralité, on suppose $k = 1$. Soit $x \in S$. La procédure suivante marque chaque sommet y du réseau avec la longueur du plus court chemin de x à y.

Données :
S_1, S_2 listes de sommets initialement vides
$R = (S, A, L)$ un réseau tel que $\forall y \in A, L(y) = 1$
entier k
Procédure :
$k = 1$.
Marquer x à 0
Marquer tous les autres sommets à $+\infty$
$S_1 \leftarrow \Gamma(x)$
Tant que $S_1 \neq \emptyset$
    Pour tout $y \in S_1$
        Marquer y à k
        Pour tout $z \in \Gamma(y)$ tel que $marque(z) == +\infty$
            Ajouter z à S_2
        Fin Pour
    Fin Pour
    $S_1 \leftarrow S_2$
    Vider S_2
    $k \leftarrow k + 1$
Fin Tant que

L'algorithme s'arrête lorsque tous les sommets atteignables depuis x sont marqués par une valeur $< +\infty$. L'algorithme marque chaque sommet y par le nombre minimum d'arêtes d'un chemin joignant x à y, ce qui est demandé. Il s'agit à peu près d'un *parcours en largeur* du graphe.
On pourrait aussi retourner si le graphe est connexe : l'information est "gratuite".

Exercice 4: Plan de vol

Une compagnie aérienne dessert différentes villes européennes. Le tableau ci-dessous donne les durées de vol entre ces villes.

	A	B	C	D	E
A		1h30	2h00		2h15
B	1h40				3h00
C	2h20			2h55	
D			3h20		1h05
E	2h25	3h10		1h10	

1. Comment déterminer le trajet le plus rapide entre deux villes ?

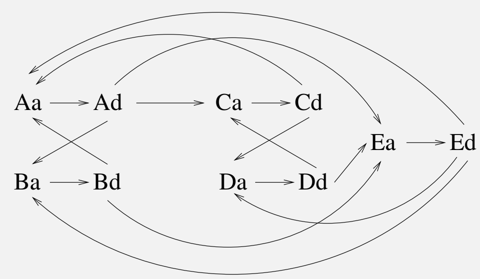
On peut appliquer l'algorithme de Dijsktra pour chaque ville. On obtient un coût en $O(n^3)$.

2. Comment modifier l'algorithme utilisé précédemment afin de prendre en compte la durée des escales dans les différentes villes ?

On peut associer à chaque sommet un coût correspondant à la durée de l'escale, et noter $E : S \rightarrow \mathcal{N}$ l'application qui à chaque sommet associe ce coût. Dans l'algorithme de Dijsktra, on remplace alors la ligne : $\pi_x(y) \leftarrow min\{\pi_x(y), \pi_x(s_k) + L((s_k, y))\}$ par la ligne : $\pi_x(y) \leftarrow min\{\pi_x(y), \pi_x(s_k) + L((s_k, y)) + E(s_k)\}$.

3. Comment prendre en compte la durée des escales dans les différentes villes sans modifier l'algorithme ? On suppose pour simplifier que tous les vols arrivent / partent en même temps d'un aéroport.

On peut créer un nouveau graphe de la manière suivante : on associe à chaque ville deux sommets, un correspondant aux départs depuis cette ville, un aux arrivées à cette ville. On crée alors une arête avec pour coût la durée de l'escale dans la ville allant du sommet des arrivées au sommet des départs.



4. Comment faire si les vols ne sont pas synchronisés ?

On ajoute pour chaque aéroport :

— un sommet pour chaque vol arrivant

— un sommet pour chaque vol partant

— une arête d'un vol arrivant à un vol partant, pondérée par la durée d'attente