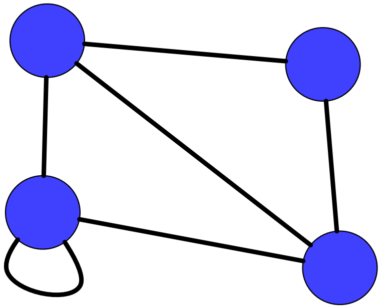
# Théorie des Graphes
## *Types, Modèles & Propriétés*

Fabrice Theoleyre

theoleyre@unistra.fr
http://www.theoleyre.eu

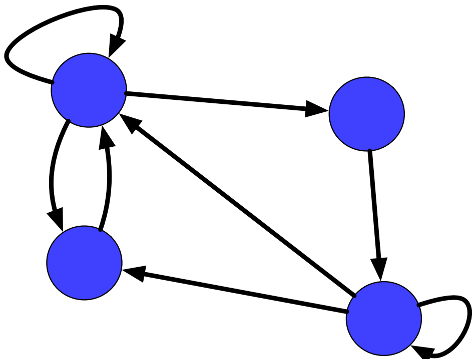
# Graphe non orienté

- Graphe non orienté
  - S = ensemble des sommets de G
  - A = ensemble des arrêtes de G
    - ❖ Arrête = couple de sommets
    - ❖ Sous ensemble de V x V
  - Boucle : un arc d’un sommet avec lui-même
    - ❖ (u,u)
  - E.g. : appels téléphoniques



# Graphe orienté

- Graphe orienté *(digraph)* G=(S,A)
  - S est l'ensemble des sommets
  - A est l'ensemble des arcs (i.e. la direction est importante)
    - Paire ordonnée de sommets
  - E.g: relation de filiation, réseau routier

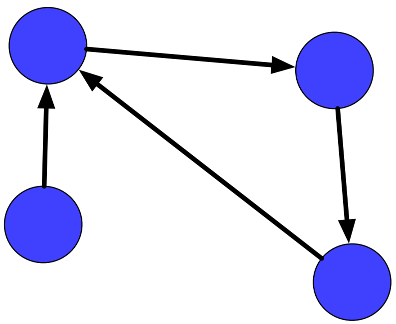


- Taxonomie
  - v successeur de u ssi $(u,v)\ in\ A$
    - Notation : $v \in succ(u)$
  - v prédécesseur de u ssi $(v,u)\ in\ A$
    - Notation : $v \in pred(u)$

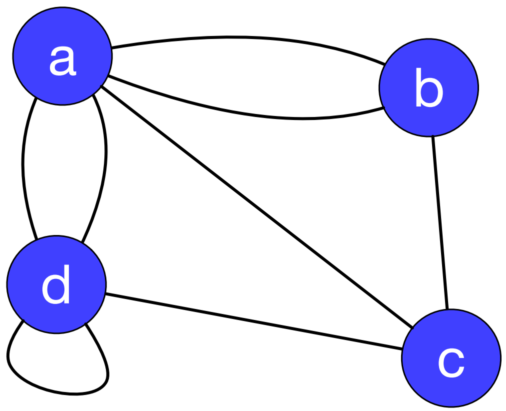
- Formellement
  - Soit R une relation binaire de S dans S
    - Le graphe est défini par G(S,R) (ou G(S,A))
    - $u, v \in S, (u,v) \in A$
    - $\{v\}_{v \in S \mid uRv}$représente alors l'ensemble des successeurs de u

# Typologie

- **Graphe simple**
  - Sans boucle
  - $G(S,A) | \{\forall (u,v) \in A, u \neq v\}$



- **Multigraphes**
  - Il peut exister plusieurs arc entre deux même sommets
  - Comment définir formellement $G(S,A)$ ?
    - ❖ $S = \{S_i\}_{i \in [1,n]}$
      - S={a,b,c,d}
    - ❖ $A = \{e_i\}_{i \in [1,m]}$
      - m=8
    - ❖ $e_i = \{u,v\}_{u,v \in S}$
      - $e_1 = (a,a), e_2 = (a,b), e_3 = (a,b), e_4 = (a,c)$, etc.



# Poids dans un graphe

- Poids = valeur réelle associée à chaque arête

- Graphes pondérés
  - triplet (S, A, P)
    - ❖ P : A -> R est une application de pondération/valuation définie sur les arêtes du graphe G
    - ❖ P(a=(x,y)) désigne le poids d'une arête a=(x,y).

- Exemples ?
  - Réseau routier : temps de parcours
  - Réseau de données : débit des liens, délai de transmission, charge du routeur, etc.
  - Fréquence des interactions entre deux contacts sur Facebook

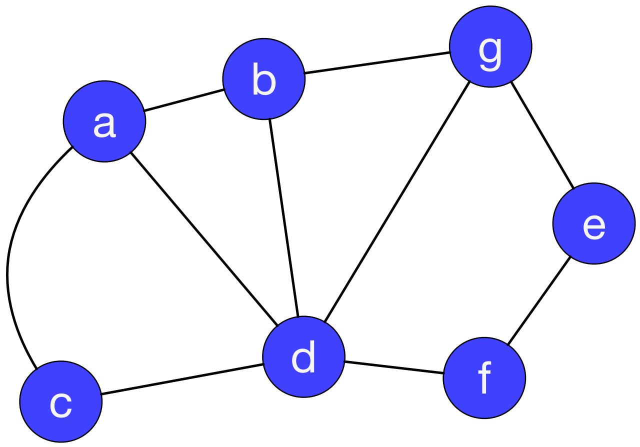
- Alternativement : poids associé à un sommet
  - Temps d'attente moyen pour une correspondance en train, le traitement d'un paquet dans un entrepôt de logistique
  - Réserve en énergie d'un routeur

# PROPRIÉTÉS & DÉFINITIONS

Caractérisation d’un graphe : métriques, propriétés

# Sous-Graphes, Graphes partiels

- Un graphe G'=(S',A') est un sous graphe de G=(S,A) ssi $S' \subseteq S$ et $A' = A \cap (S' \times S')$
  - On dit que G' est de sous graphe de G induit (ou engendré) par S' et que A' est la restriction de A à l'ensemble S'
  - Autrement dit, G' contient les arêtes de A dont les **deux** extrémités sont dans S'

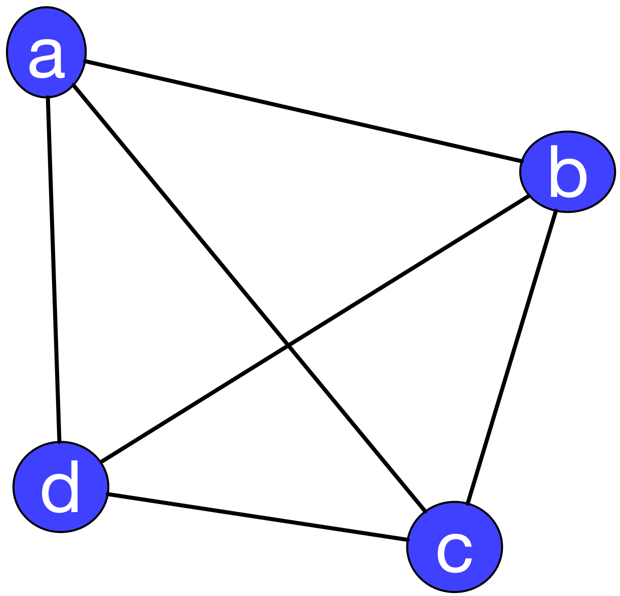



- Un graphe G'=(S,A') est un graphe partiel de G=(S,A) ssi $A' \subseteq A$
  - On maintient la propriété de (non) orientabilité

- Un graphe non orienté à n sommets possède $2^n$ sous-graphes distincts
  - De même, un graphe à k arêtes possède $2^k$ graphes partiels distincts
  - Démonstration ?

# Adjacence & incidence

- Arrêtes incidentes
  - Ssi elles partagent un sommet commun
  - $\big((u_1, v_1), (u_2, v_2)\big) \in A_{inc} \Leftrightarrow u_1 = u_2 \vee u_1 = v_2 \vee v_1 = v_2 \vee v_1 = u_2$
  - Exemple
    - ❖ (a,d) et (a,b)
    - ❖ Mais pas (a,d) et (b,c)

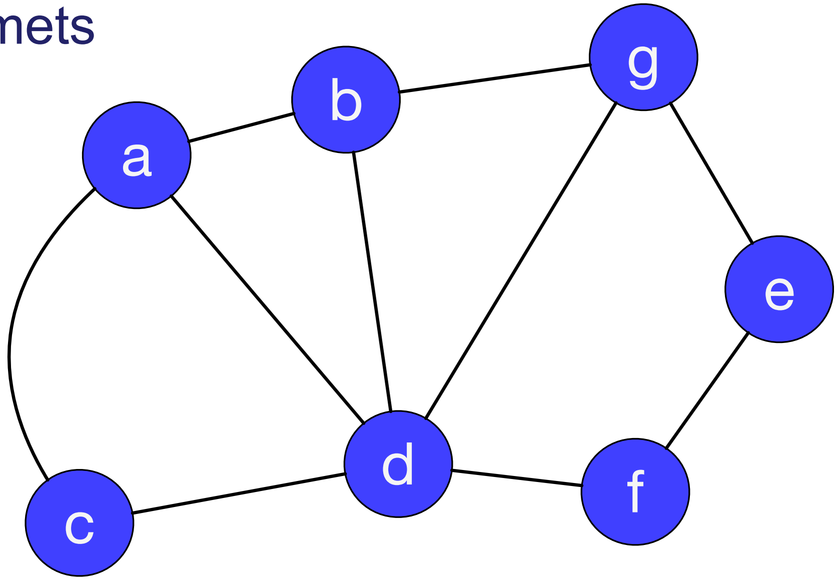



- Sommets adjacents
  - Partagent une même arrête
  - $(u, v) \in S_{adj} \Leftrightarrow (u, v) \in A$
  - Exemple
    - ❖ a et d
    - ❖ a et d sont aussi appelés *voisins*

# Voisinage & degré (graphe non orienté)

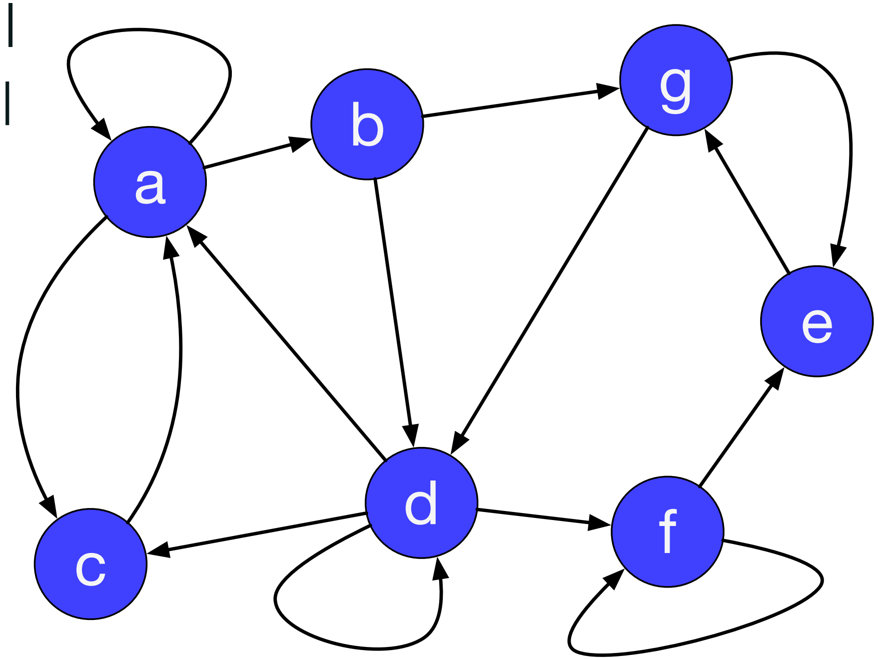
- Degrés
  - Degré d'un sommet = nombre d'arêtes incidentes
    - ❖ $d(u) = |D(u)|\,, \quad D(u) = \{(u,v)\}_{v \in S \,\wedge\, (u,v) \in A} \cup \{(u,u)\}_{(u,u) \in A}$
    - ❖ Remarque : une boucle est comptée double
  - plus grand degré parmi tous les sommets
    - ❖ $\Delta(\mathrm{G}) = Max_{u \in V}\, d(u)$
  - plus petit degré parmi tous les sommets
    - ❖ $\delta(G) = Min_{u \in V}\, d(u)$

- Voisins
  - Liste des sommets adjacents
  - $\mathrm{N(u)} = \{v \in V \,|(u,v) \in E\}$



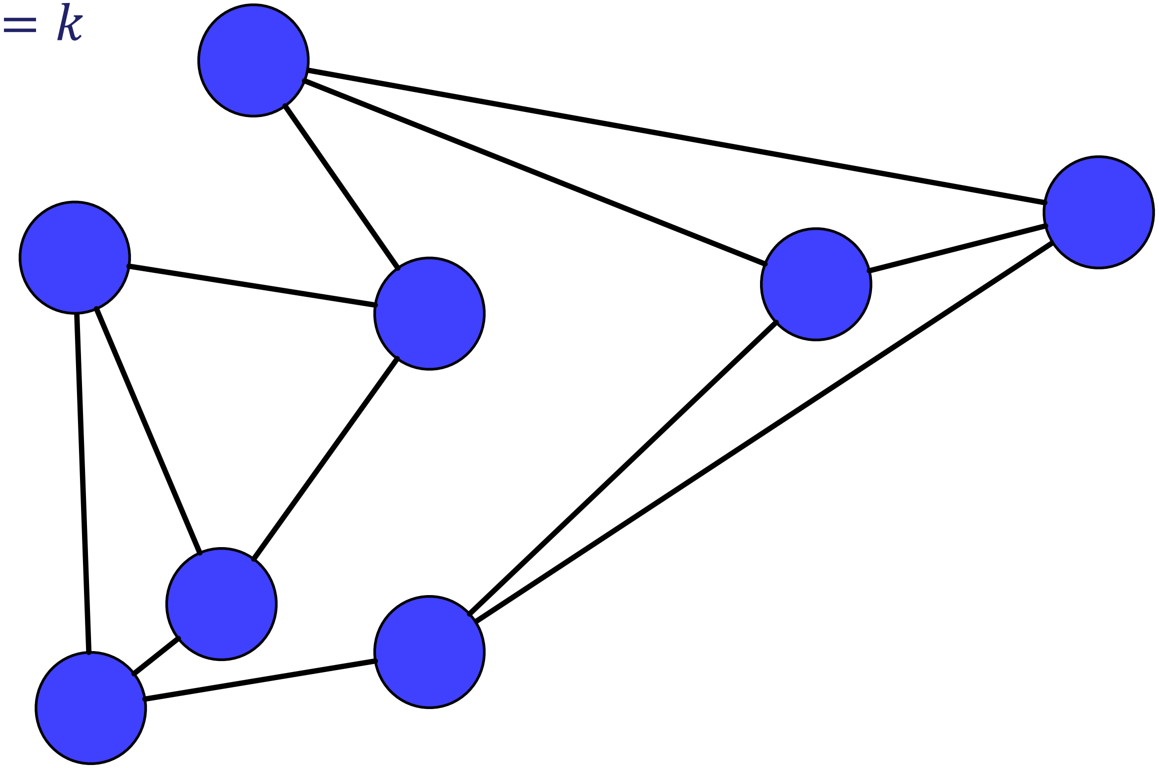
# Voisinage et degré (graphe orienté)

- Avec des arcs
  - Voisinage
    - ❖ Liste des sommets entrants $\mathrm{N}^+(\mathrm{u}) = \{v \in V \mid (v, u) \in A\}$
    - ❖ Liste des sommets sortants $\mathrm{N}^-(\mathrm{u}) = \{v \in V \mid (u, v) \in A\}$
  - Degré
    - ❖ Degré entrant $d^+(u) = |N^+(u)|$
    - ❖ Degré sortant $d^-(u) = |N^-(u)|$
    - ❖ Degré $d(u) = d^+(u) + d^-(u)$



# Graphe régulier

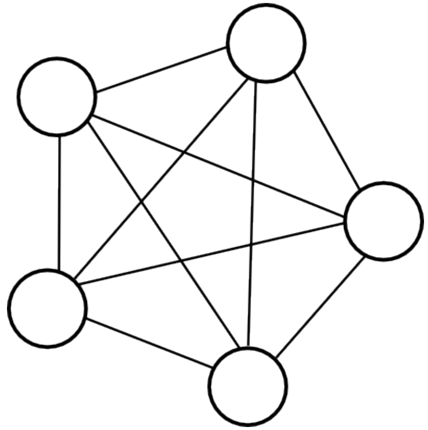
- Tous les sommets présentent le même degré
  - Soit le graphe G(S,A)
  - $\exists k \in \mathbb{N} | \forall u \in V, d(u) = k$
  - $\Leftrightarrow \delta(G) = \Delta(G) = k$



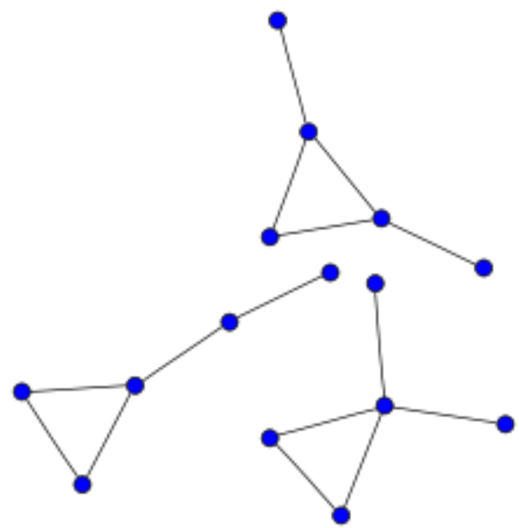
Graphe régulier de degré 3
avec 8 sommets ?

# Propriétés d’un graphe

- Soit un graphe G connexe



- Excentricité d’un sommet
  - Distance du sommet le plus éloigné
  - Définition de la distance?
- Diamètre
  - Excentricité maximale

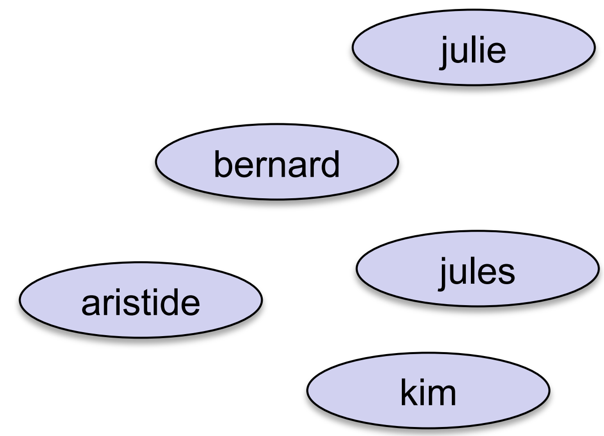


- Rayon
  - Excentricité minimale
  - Centre d’un graphe : ensemble des sommets d’excentricité minimale

# Stable d'un graphe

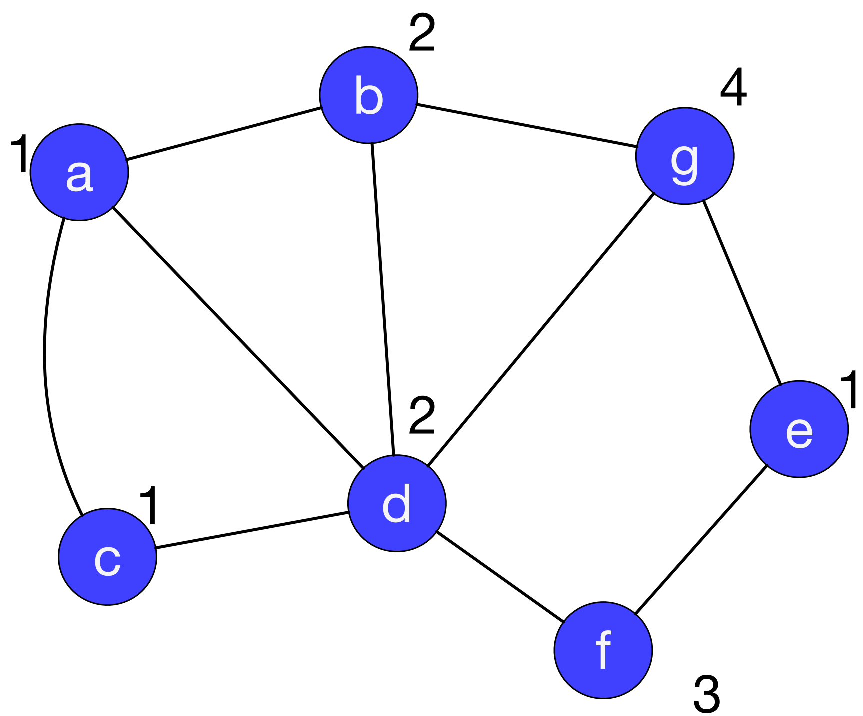
- $E$ est un stable du graphe G(S,A)
  - $E \subseteq S$
  - $\forall (u, v) \in E, (u, v) \notin A$

- Problème décisionnel du stable de poids maximum
  - Maximum Independent Set (MIS)
  - Un des 21 problèmes NP-complets de Karp
    - ❖ Même difficile à approximer



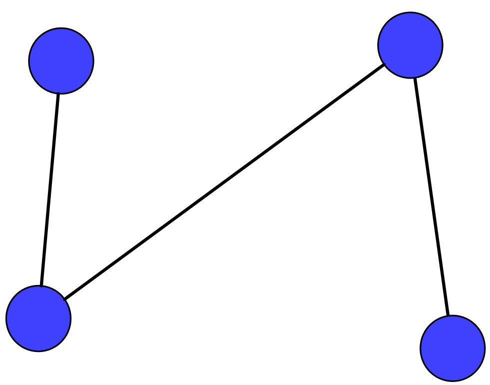

- Application
  - Liste des invités à une fête d'anniversaire
    - ❖ Arête = conflit
    - ❖ Poids = importance de l'invité
    - ❖ Comment maximiser la satisfaction ?

# Stable de poids max

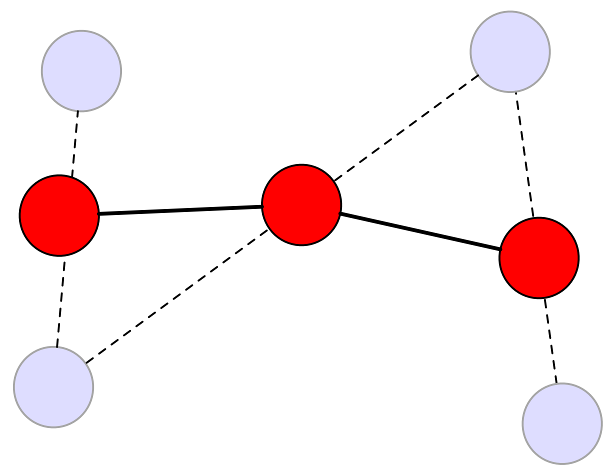


# Line graphe

- Soit un graphe G(S,A)
  - LG=(S',A') de G
  - Il existe une application bijective R: A → S'
    - ❖ $(u,v) \in A \wedge (u,w) \in A \; ssi \; \big(R(u,v), R(v,w)\big) \in A'$

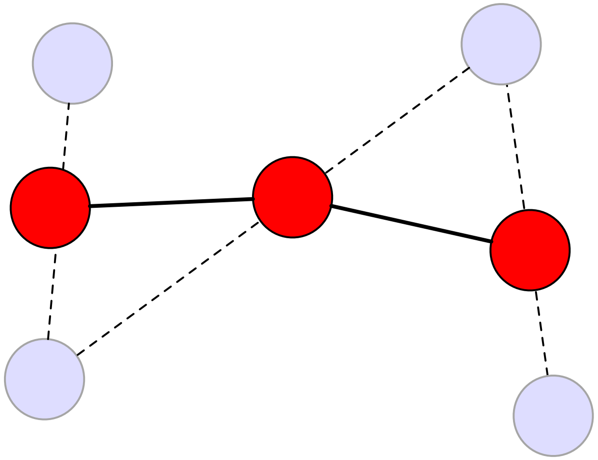


Line graphe ?



# Line graph

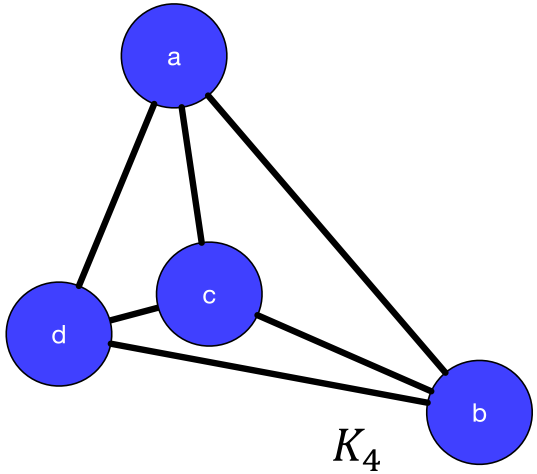
- Propriétés
  - Le linegraphe d'un graphe connexe est également connexe
  - Un couplage max dans G correspond à un stable max dans LG
    - ❖ Couplage = ensemble d'arêtes sans sommet commun



# GRAPHES PARTICULIERS

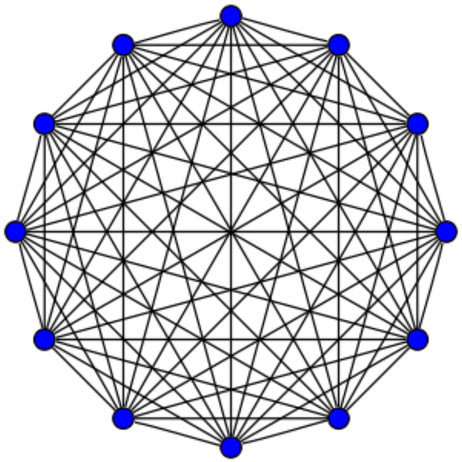
# Graphe Complet

- Graphe complet
  - Un sommet est connecté à tous les autres
  - Notation : $K_j$ graphe complet à j sommets




$K_4$

- Formellement
  - G(S,A) Complet ssi
  - $\forall u, v \in S \wedge u \neq v, (u, v) \in A$
  - $\forall u \in V, (u, u) \notin A$
    - ❖ Pas de boucle

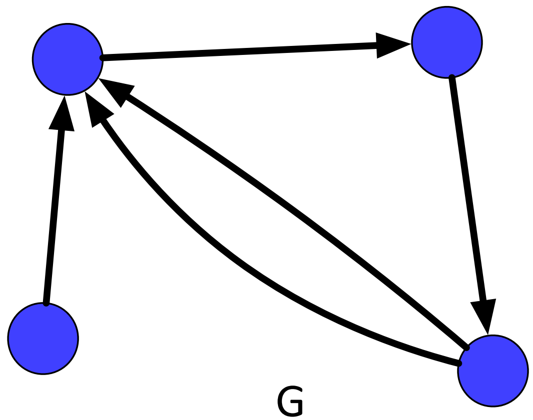


$K_{12}$

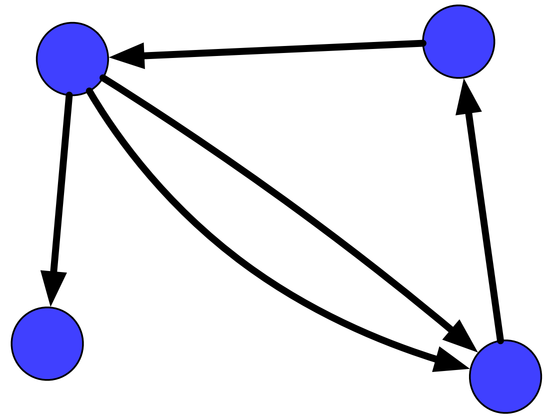
- Exemple :
  - Interférences entre stations Wi-Fi localisés dans une même pièce
- Clique
  - Sous-graphe complet

# Graphe Inverse

- Soit G(S, A) un graphe
  - Le graphe inverse est obtenu en *inversant* toutes les arêtes
  - $G^{-1}(S, A') \mid A' = \bigcup_{(v,u)\in A}\{(u, v)\}$



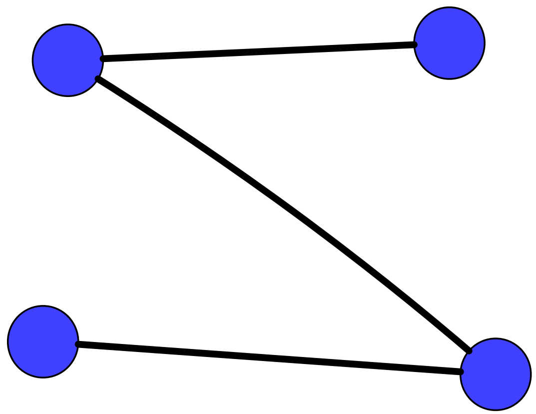
G



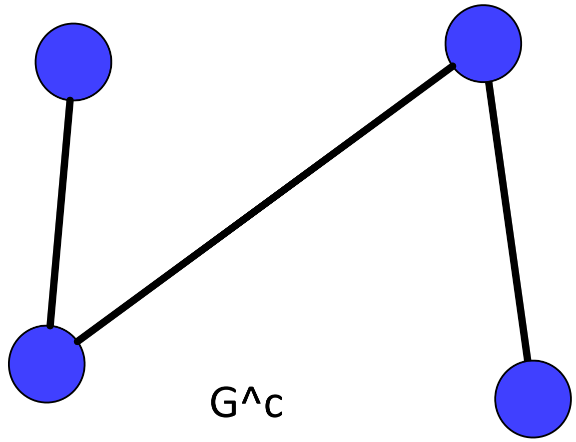
G^-1

# Graphe Complémentaire

- Soit G(S, A) un graphe non orienté
  - $G^c ou\ \bar{G}(S, A') |\ A' = \cup_{(u,v) \notin A} \{(u, v)\}$
  - Les mêmes sommets mais avec l'ensemble '*contraire*' des arêtes



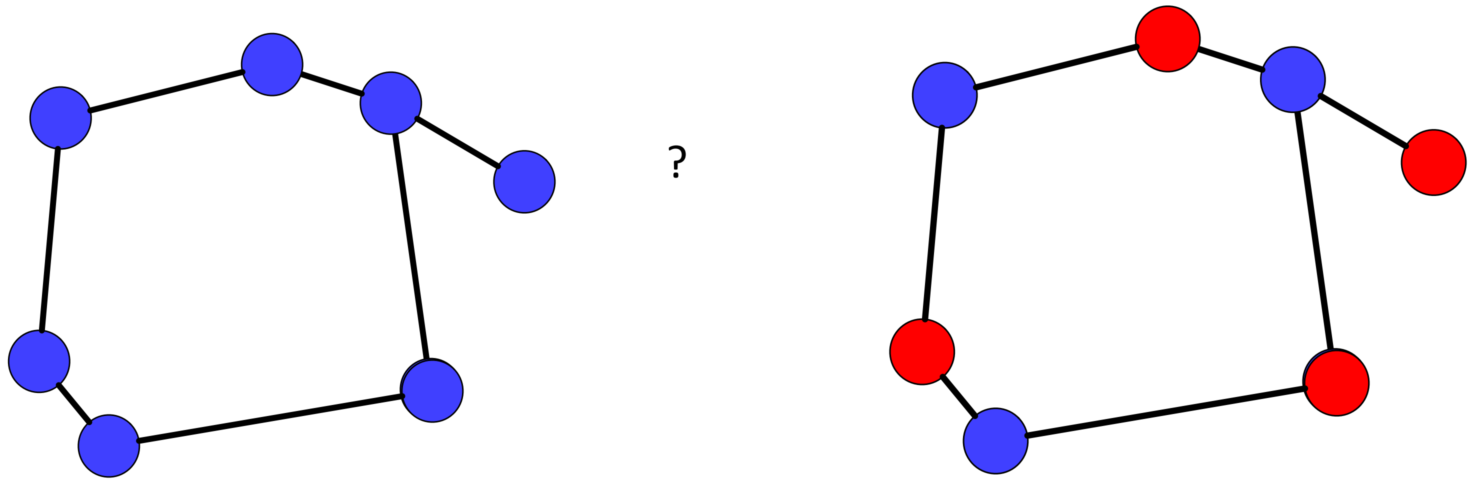
G



G^c

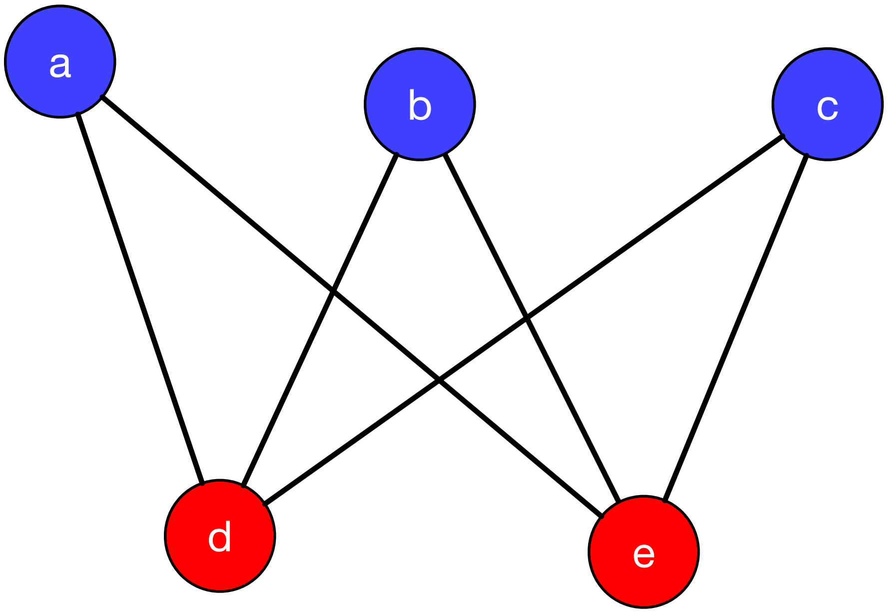
# Graphe biparti

- G(S,A)
  - Biparti ssi $\exists S_1 \cup S_2 = S$ qui respecte toutes les conditions suivantes:
    - $\nexists\, u, v \in S_1 | (u, v) \in A$
    - $\nexists\, u, v \in S_2 | (u, v) \in A$
    - $S_1 \cap S_2 = \emptyset$
  - Il existe une partition des sommets en deux sous-ensembles tels qu'aucun arc ne relie des sommets appartenant au même sous-ensemble



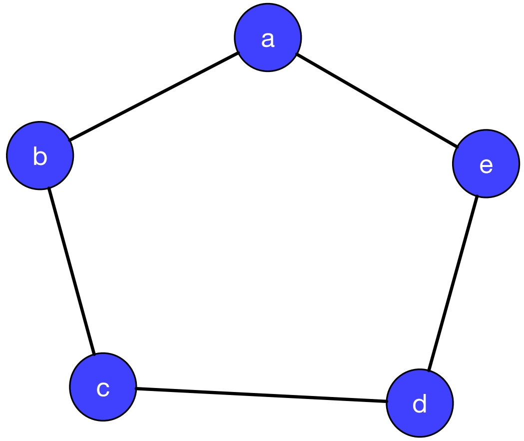
# Graphe biparti complet

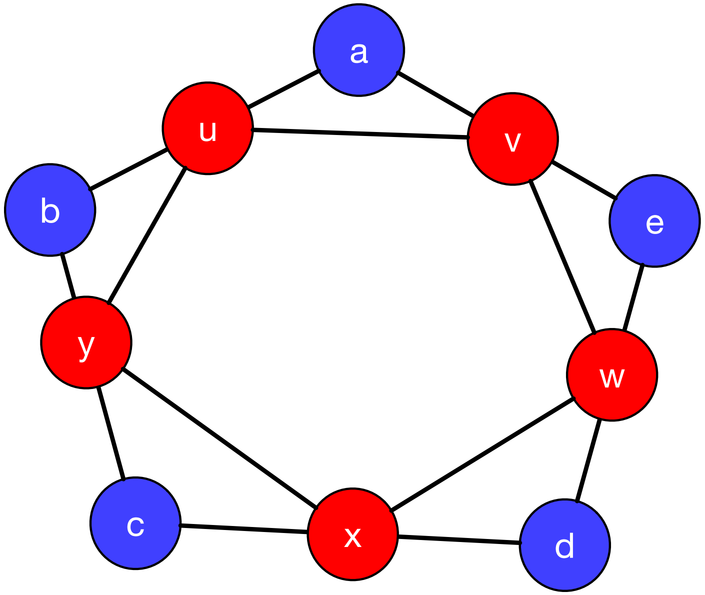
- Notation
  - $K_{n,m}$ : graphe complet biparti avec n+m sommets
    - ❖ $G = (S \cup S', A) \mid S = \{s_i\}_{i \in [1,n]} \wedge S' = \{s_i\}_{i \in [1+n, n+m]}$
    - ❖ $\forall (u,v) \in S, (u,v) \notin A \wedge \forall (u,v) \in S', (u,v) \notin A$
    - ❖ $\forall u \in S, \forall v \in S', (u,v) \in A$
  - $K_{3,2}$ ?



# Graphes cycles

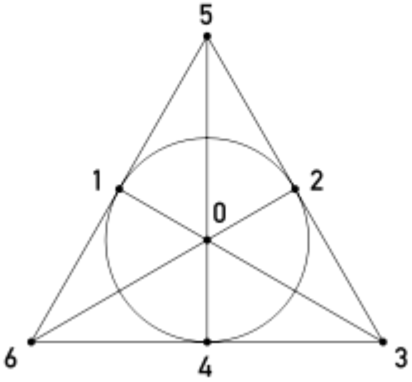
- Graphe connexe de degré max et min égal à 2
  - $G = \left(S = \{s_i\}_{i\in[1,n]}, A\right) \mid (s_n, s_1) \in A \wedge \forall i \in [1, n-1], (s_i, s_{i+1}) \in A$
  - $\delta(G) = \Delta(G) = 2$
  - Noté $C_n$
- Propriétés
  - L'unique cycle contenu dans C est le circuit hamiltonien
    - Euler ?
  - Graphe planaire
  - Le line graph de $C_n$ est $C_n$



# Hypergraphes

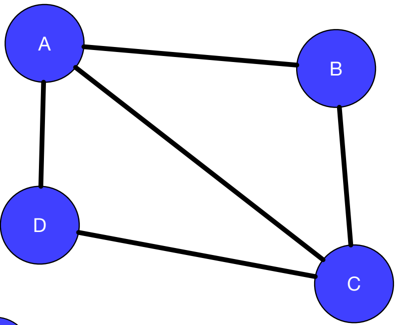
- Hypergraphes
  - C. Berge en 1960 : généralisation du concept de graphe
  - Une arête relie entre eux un nombre **quelconque** de sommets
  - $G = (S, A) \big| V = \{v_1, \dots, v_n\} \wedge A = \cup_{i=1}^{k} A_i \big| \forall i \in [1, k], A_i \subset S \wedge A_i \neq \emptyset$
  - n = ordre de l'hypergraphe
  - Nombre de sommets associés à une arrête ( <= ordre)
    - ❖ Rang = maximal
    - ❖ Anti-rang = min
  - Relation n-aire
- Hypergraphe du plan de Fano
  - Ordre = 7
  - Rang = anti-rang = 3
  - 1974 (Lehmers) : factorisation des entiers par formes quadratiques

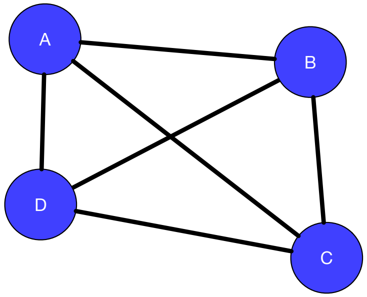


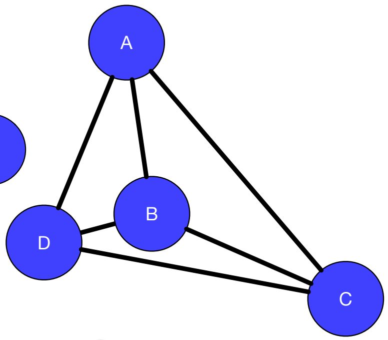

Lehmer, D. H. and Lehmer, E. "A New Factorization Technique Using Quadratic Forms." *Math. Comput.* **28**, 625-635, 1974.

# Graphes planaires

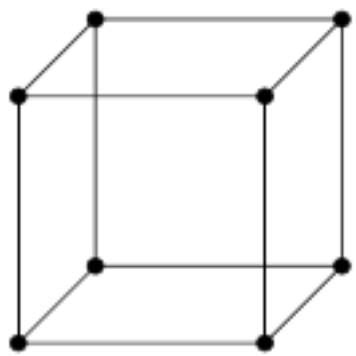
- Notion topologique
  - Le graphe peut se représenter sur un plan (2D)
  - Aucune paire d'arêtes ne se croise
  - 1930 : Kazimierz Kuratowski
    - ❖ Ssi ne contient pas de sous graphe qui est une extension de K5 ou de K3,3
      - – Notion de mineur
      - – Clique à 5 sommets, Graphe complet bipartite à 3+3 sommets
  - Exemples
    - ❖ Réseau routier planaire si pas de pont / tunnel
    - ❖ Métro de Paris non planaire




- Intérêt : de nombreux problèmes deviennent faciles
  - Formule d'Euler : n – a + f = 2
    - ❖ n=nb sommets, a=nb arrêtes, f=nb faces
    - ❖ Face = région délimité par des arêtes (frontières), mais qui n'en contient aucune
  - Démonstration : partir d'un graphe à une face, puis ajouter les arêtes

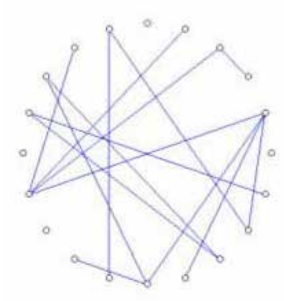


# Graphes aléatoires

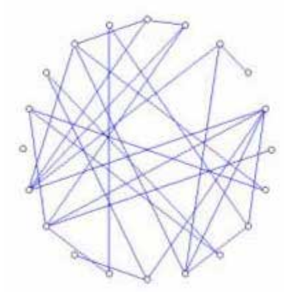
- Généré par un processus aléatoire
  - 50’: trouver un modèle synthétique quand le graphe réel est inconnu
  - Nombre de sommets fixe (n)
  - Graphe aléatoire binomial
    - ❖ Chaque arête existe selon : $P_{exist}[(u,v)] = p$
    - ❖ m (nombre d’arêtes) suit une loi binomiale de paramètres n(n-1)/2 et p
      - – Théorème central limite : valeurs très concentrées autour de l’espérance
  - Graphe aléatoire uniforme
    - ❖ Nb. d’arêtes fixé (m)
    - ❖ Choix uniforme des arêtes
      - – Toutes les arêtes sont équiprobables
      - – Tout graphe G(n,m) a la même probabilité d’être choisi :
        - » $P_{choisi}(G) = \frac{1}{\binom{\binom{n}{2}}{m}}$

P=0

P=0,1



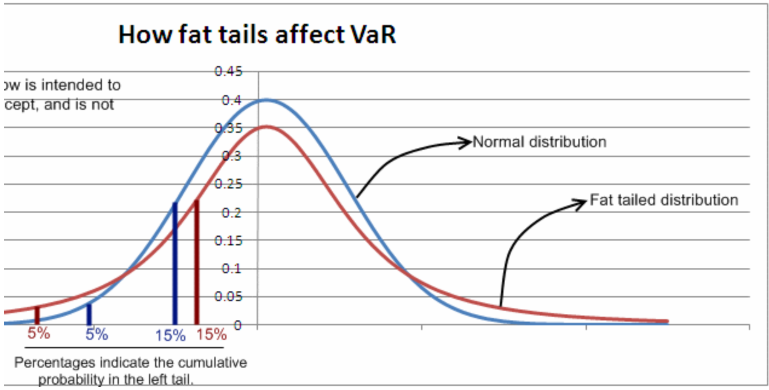
P=0,2



- Connexité
  - Si p < p1 : de nombreuses composantes connexes
  - Si p1 < p < p2 : une composante connexe géante
    - ❖ $p2 = \frac{(\log\ \ n)a^{\gamma}}{n}$
  - Si p2 < p : fortement connexe

# Graphes Petit Monde

- Graphe petit monde = sous classe des graphes aléatoires
  - Deux sommets pris aléatoirement ne sont pas voisins
  - Distance petite entre deux sommets quelconque
    - ❖ Logarithme du nombre de sommets  O(log N)
  - Degré des nœuds suit une distribution à queue lourde
    - ❖ Certains sommets sont très connectés



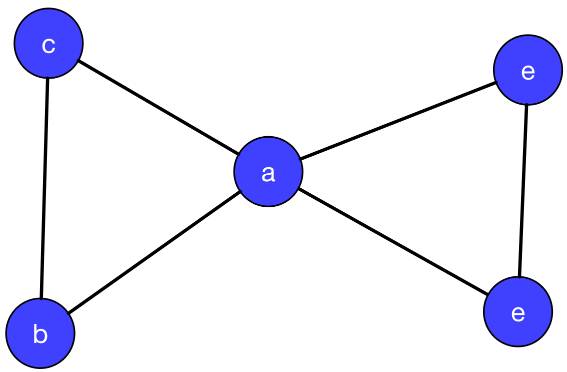

Riskprep(c)

- Grand graphe de faible diamètre
  - Soit un graphe non orienté G(S,A)
  - $\forall u, v \in S, \exists k \propto \log(n) \mid dist(u,v) \leq k$

- Applicable : réseau électrique, réseaux neuronaux de C. elegans
  - Facebook (2011) : 721M de personnes reliées par en moyenne 4,74 relations

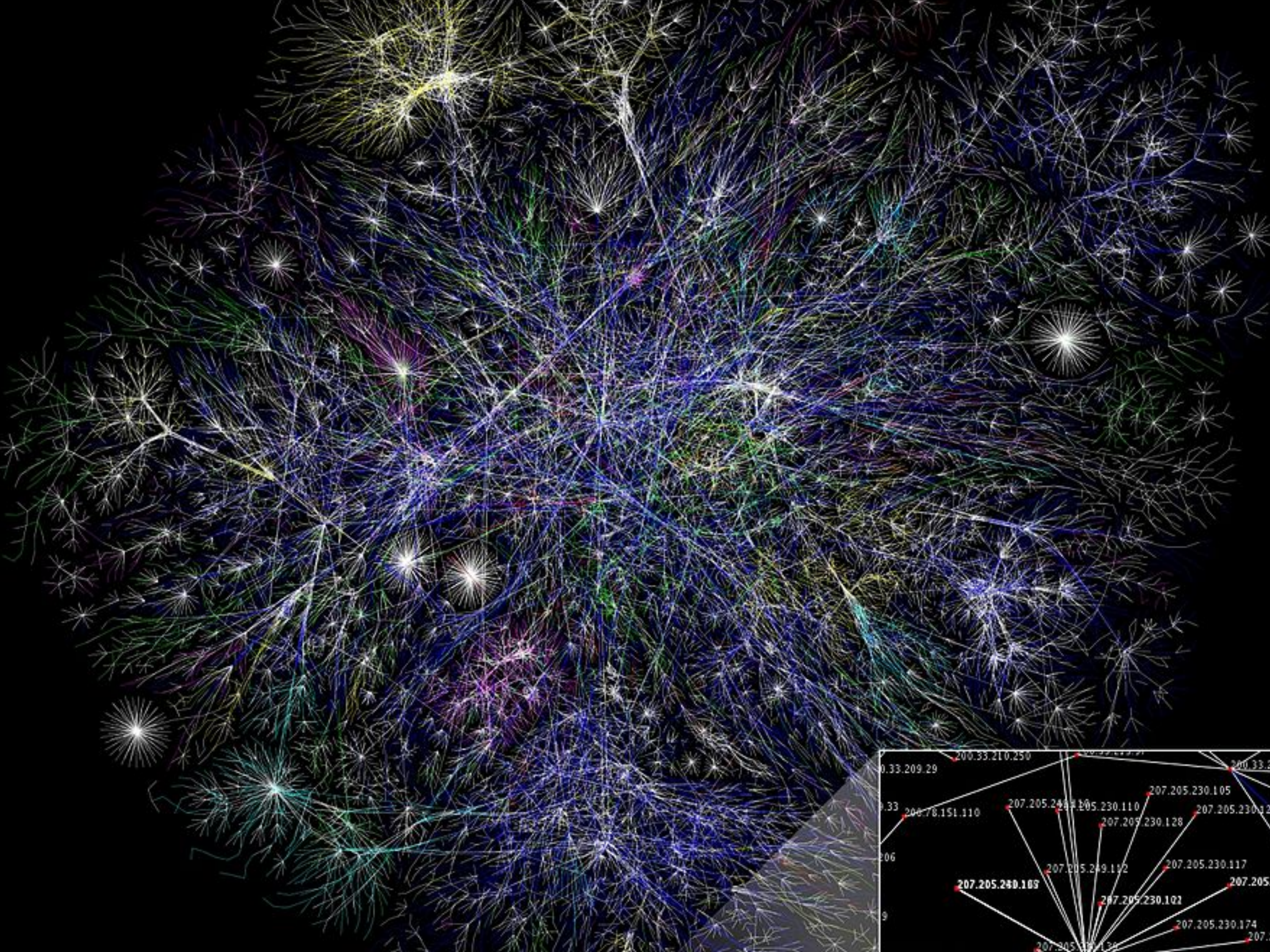
# Propriétés des graphes petits monde

- Coefficient de clustering
  - Mesure la ressemblance à une clique
  - si $|N(u)| \geq 2$
    - ❖ $C(u) = 2 * \frac{|\{(v,w) \in A \mid v,w \in N(u)\}|}{|N(u)|(|N(u)|-1)}$
    - ❖ Graphe orienté : sans multiplicateur 2
  - Sinon,
    - ❖ $C(u) = 0$

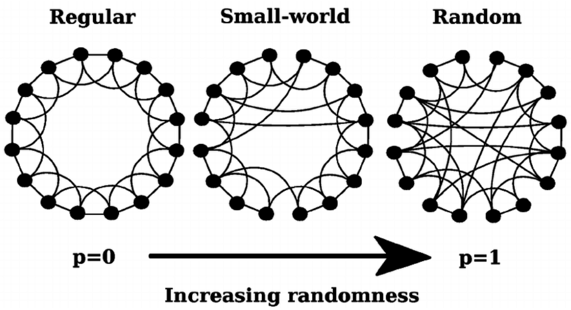



C(a) = 2 * 2 / (4 * 3) = 0,3
C(b) = 2 * 1 / 2 = 1

- Les « amis de mes amis sont mes amis »
  - Amis de u notés A(u)
  - Coefficient : $c = \frac{|A(u) \cap A(v)|}{|A(u) \cup A(v)|}$
    - ❖ Graphes petit monde → coefficient élevé


200.33.210.250
207.205.230.105
200.78.151.110
207.205.230.117
207.205.230.174

# Modèle de Watts et Strogatz (1998)




- N sommets sur un anneau
  - Sommets ordonnés $\{x_i\}$, graphe de degré D
    - ❖ Partie fixe :
      - $\exists (x_i, x_j) \in A \; iif \; 0 < |i-j| mod \left(n - 1 - \frac{D}{2}\right) \leq \frac{D}{2}$
    - ❖ Partie aléatoire
      - Pour chaque sommet, choisit une arête (i,j) (i<j), et déplace l'arête selon la probabilité $\beta$
      - Déplacement : choix d'un nouveau sommet k aléatoire (mais sans boucle et sans arête multiple)
  - Longueur moyenne des chemins
    - ❖ N/2D (partie fixe, régulière)
    - ❖ Si $0 < \beta < 1$ , la longueur diminue très vite
      - Si $\beta$=1 , correspond à un graphe aléatoire
  - Coeff clustering
    - ❖ $C = \frac{3(D+2)}{4(D-1)}, \quad \lim_{D \to \infty} C = \frac{3}{4}$
  - Limite
    - ❖ Distribution des degrés non réaliste
    - → attachement préférentiel de Barabasi-Albert