

Title

Erik Thorsell  
Robert Gustafsson

2015-10-08

### 3.1 Fourierserie Uppbyggnad

a)

En fyrkantssignal enligt Figur 3 i lab-pm kan betecknas på följande vis:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < \frac{T}{2} \\ -1 & \frac{T}{2} < t < T \end{cases}$$

För att beräkna Fourierkoefficienterna för signalen använde vi oss av följande kända uttryck från kurslitteraturen:

$$2C_k = A_k - jB_k \quad (A, B \in \mathbb{R})$$

$$C_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Beräkningar följer nedan:

$$C_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \left( \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-jk\omega_0 t} dt - \int_{\frac{T}{2}}^T e^{-jk\omega_0 t} dt \right) =$$

$$\frac{1}{T} \left( \left[ \frac{e^{-jk\omega_0 t}}{-jk\omega_0} \right]_0^{\frac{T}{2}} - \left[ \frac{e^{-jk\omega_0 t}}{-jk\omega_0} \right]_{\frac{T}{2}}^T \right) =$$

$$\frac{1}{T} \left( \frac{e^{-\frac{jk\omega_0 T}{2}}}{-jk\omega_0} - \frac{1}{-jk\omega_0} - \left( \frac{e^{-jk\omega_0 T}}{-jk\omega_0} - \frac{e^{-\frac{jk\omega_0 T}{2}}}{-jk\omega_0} \right) \right) =$$

$$\frac{2e^{-\frac{jk\omega_0 T}{2}} - e^{-jk\omega_0 T} - 1}{-jk\omega_0 T} =$$

$$\frac{1}{-jk\omega_0 T} \left( 2e^{-\frac{jk\omega_0 T}{2}} - e^{-jk\omega_0 T} - 1 \right) =$$

$$\frac{1}{-jk\omega_0 T} \left( 2\cos\left(\frac{k\omega_0 T}{2}\right) - 2j\sin\left(\frac{k\omega_0 T}{2}\right) - \cos(k\omega_0 T) + j\sin(k\omega_0 T) - 1 \right) =$$

$$\frac{1}{-jk2\pi} (2\cos(k\pi) - 2j\sin(k\pi) - \cos(2k\pi) + j\sin(2k\pi)) =$$

$$\begin{cases} \frac{1}{-jk2\pi} (2 - 1 - 1) = 0 & \text{Om } k \text{ jämn.} \\ \frac{1}{-jk2\pi} (-2 - 1 - 1) = \frac{-2j}{k\pi} & \text{Om } k \text{ udda.} \end{cases}$$

$$2C_k = A_k - jB_k$$

$$\text{Eftersom } C_k = 0 \text{ för jämna } k \Rightarrow A_k = 0$$

$$\Rightarrow 2C_k = -jB_k \Rightarrow B_k = -2C_k/j = -2j/k\pi \Leftrightarrow B_k = \frac{4}{k\pi}$$

b)

Givet i labpm finns kod för att rita ut en sinusvåg. Genom att modifiera den koden kan vi genom våra erhållna Fourierkoefficienter rita upp en bättre och bättre approximation av en fyrkantsvåg. Koden för att beskriva fyrkantsvågsapproximationen finns nedan och figur 1 visar vår approximerade fyrkantsvåg efter summationsindex satt till 100.

```

T=1;
w=2*pi/T;
M=200;
x=0;
t=T*(0:M-1)/M;

for n=1:100
    Ak = 0;
    Bk = 4*mod(n,2)/(n*pi);
    x = x + Ak*cos(n*w*t) + Bk*sin(n*w*t);
end
plot(t,x)

```

## 3.2 Linjära System och Sinusar

a)

Givet i labpm vinns ekvation 12 enligt:  $G(s) = \frac{(s+0.1)(s+10)}{(s+1)(s^2+s+9)} = \frac{s^2+10.1s+1}{s^3+2s^2+10s+9}$  detta polynom kan tecknas som täljare och nämnare i Matlab - samt ovandlas till en överföringsfunktion - med följande kod:

```

num = [1 10.1 1];
den = [1 2 10 9];
Gs=tf(num, den);

```

Bode-diagramet samt systemets pol- och nollställena kan ses i figur 2 och figur 3.

b)

De tre sinussignalerna ( $x1 = \sin(t)$ ,  $x2 = \sin(3t)$ ,  $x3 = \sin(5t)$ ) finns att beskåda i figur 4

c)

Efter att ha låtit signalerna passera genom vårt givna system ( $G(s)$ ) erhöll vi tre nya signaler ( $y1, y2, y3$ ) vilka hade förändrad amplitud och fas gentemot vår insignal. Detta var givetvis väntat. Den svarta kurvan visar insignalen och den blå visar signalen vilken returnerades av lsim. Vidare beräknade vi även amplitud och fas var och en för sig varefter vi lät den signalen gå genom systemet för att erhålla en signal lika med den som erhöles av lsim. Detta för att bekräfta ekvation 2 i labpm.

Koden för att bekräfta ekv 2 kan ses nedan:

```

phi1 = angle(evalfr(Gs,1j));
x1p = sin(t+phi1);
y1p = abs(evalfr(Gs,1j))*x1p;

phi2 = angle(evalfr(Gs,3j));
x2p = sin(3*t+phi2);
y2p = abs(evalfr(Gs,3j))*x2p;

phi3 = angle(evalfr(Gs,5j));
x3p = sin(5*t+phi3);
y3p = abs(evalfr(Gs,5j))*x3p;

```

Här kommer  $y1p, y2p$  samt  $y3p$  vara lika med  $y1, y2$  och  $y3$  vilka erhöles från lsim och vi ser alltså att ekv 2 stämmer.

### 3.3 Periodiska Insignaler och DFT

a)

För att generera och rita upp en fyrkantsvåg i Matlab använde vi oss av följande kod:

```
N = 2.^13;  
F = 100;  
Ts = 1/F;  
t = 0:Ts:40*pi;  
x = square(t);  
plot(t, x)
```

Den resulterande grafen, samt dess fourierkoefficienter (vilka ska räknas ut i senare uppgifter) finns att finna i figur 6.

b)

De tre första - nollskiljda - fourierkoefficienterna för fyrkantsvågen är: 1.2732, 0.4244, 0.2546 och beräknades i enlighet med ekvation 6 i labpm.

c)

Genom att använda den snabba fouriertransformen (den inbyggda matlabfunktionen *fft*) kunde vi beräkna den diskreta fouriertransformen av fyrkantsvågen. Grafen till uppgiften återfinns i figur ?? vilket är samma figur som i uppgift a).

d)

Genom att använda sambandet i ekvation 10 i labpm kunde vi beräkna de praktiska värdena för fourierkoefficienterna vi tog fram i uppgift b. Resultatet för de båda ges i tabellen nedan.

	1	3	5
Teoretiska	1.2732	0.4244	0.2546
Praktiska	1.2702	0.4154	0.2398

e)

Fyrkantssignalen applicerades på  $G(s)$  varefter de tre första fourierkoefficienterna bestämdes teoretiskt med hjälp av ekvation 8 i labpm. Därefter användes återigen den snabba fouriertransformen för att beräkna koefficienterna i praktiken. En tabell med värdena ges nedan och i figur ?? ges återigen spektrumet för fyrkantsvågen i frekvensdomänen samt spektrumet för utsignalen när fyrkantsvågen applicerats på systemet  $G(s)$ .

	1	3	5
Teoretiska	1.1279	1.4020	0.1666
Praktiska	1.023	1.3378	0.1513

### 3.4 Notch-filter

a)

Polynomet vilket söks i uppgiften är  $Ts = s*(s-1j)*(s+1j)*(s-5j)*(s+5j)*(s-7j)*(s+7j)*(s-9j)*(s+9j)$  där komplexkonjugerade nollställen används för att få ett polynom med reella koefficienter. Om man låter nämnaren vara lika med 1 och använder Matlabs inbyggda funktion för att generera en överföringsfunktion kan det resulterande systemet visas med hjälp av ett Bodediagram. Detta diagram finns att beskåda i figur 8.

b)

Efter att ha provat oss fram drog vi slutsatsen att 10 stycken poler sådana att  $p = -4$  var lämpliga för att dämpa höga frekvenser med systemet. Bodediagramet finns att se i figur 9.

c)

För att gå en dämpning på 60 dB för vinkelfrekvenser  $\omega \gg 9 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  erfordrades 11 poler.

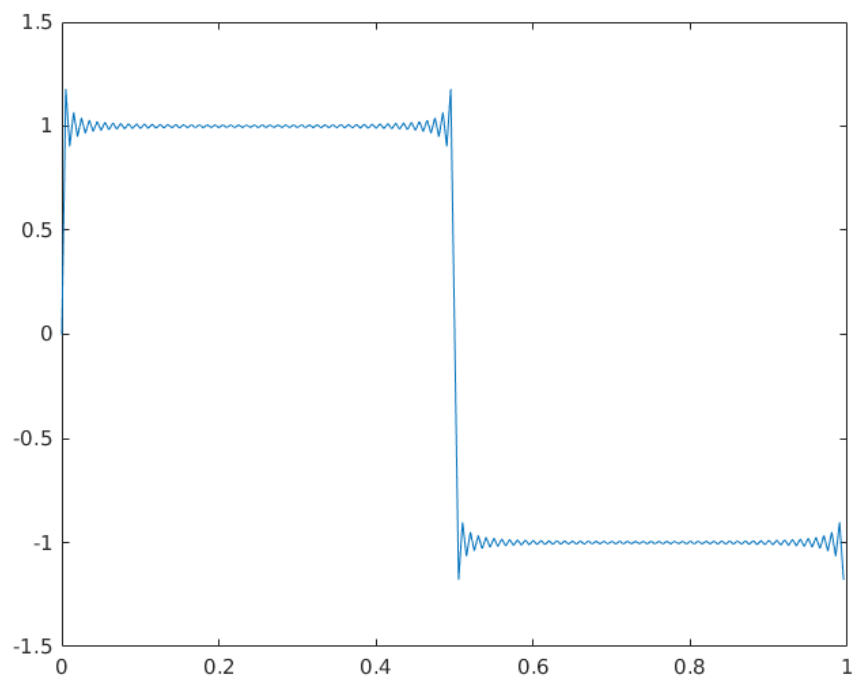
d)

För att förstärka vårt system skalade vi täljarpolynomet med  $|H(j3)|$ . Filtrets frekvenssvar finns återgivet i figur 10.

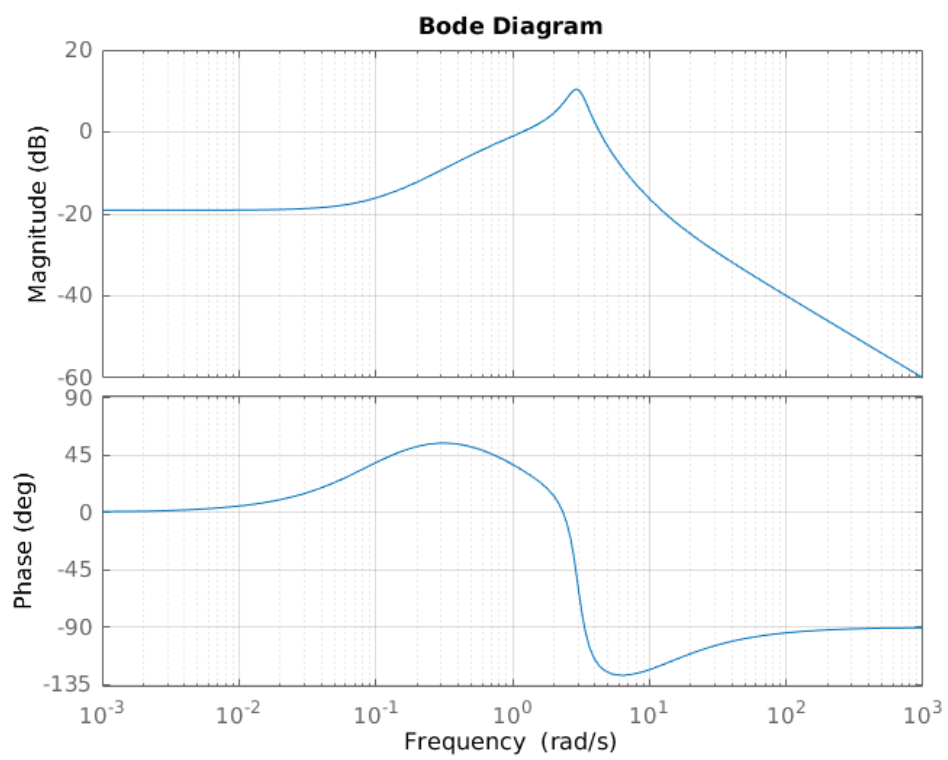
e)

Det finns massor med bilder längst ner!

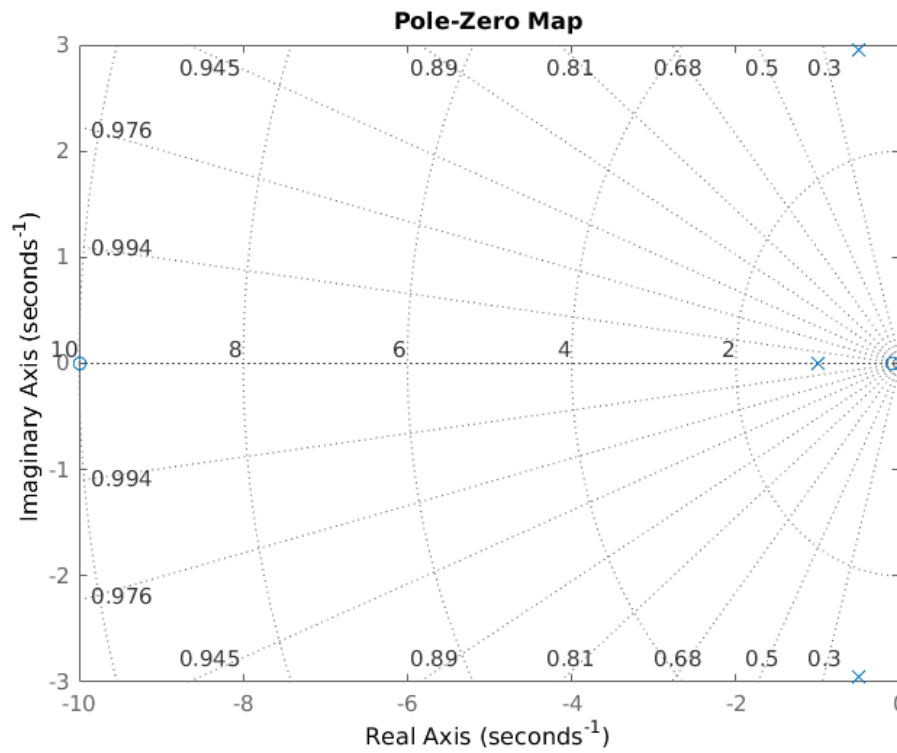
Figur 1: Fyrkantsvåg för uppgift 3.1 b).



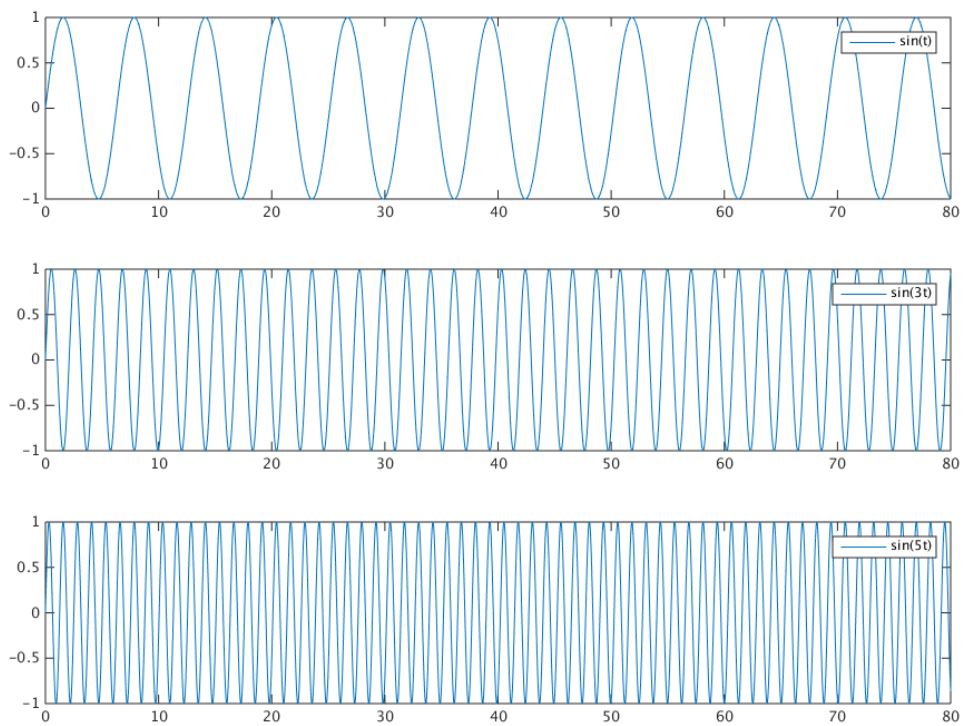
Figur 2: Bodediagram för  $G(s)$ .



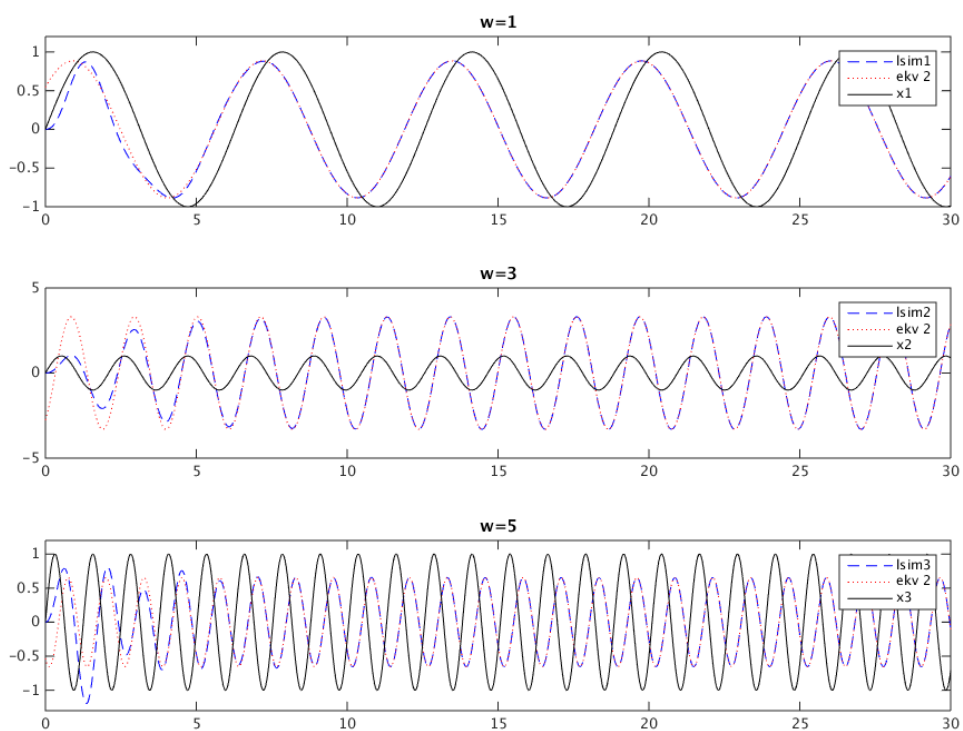
Figur 3: Nod- och polgraf för  $G(s)$ .



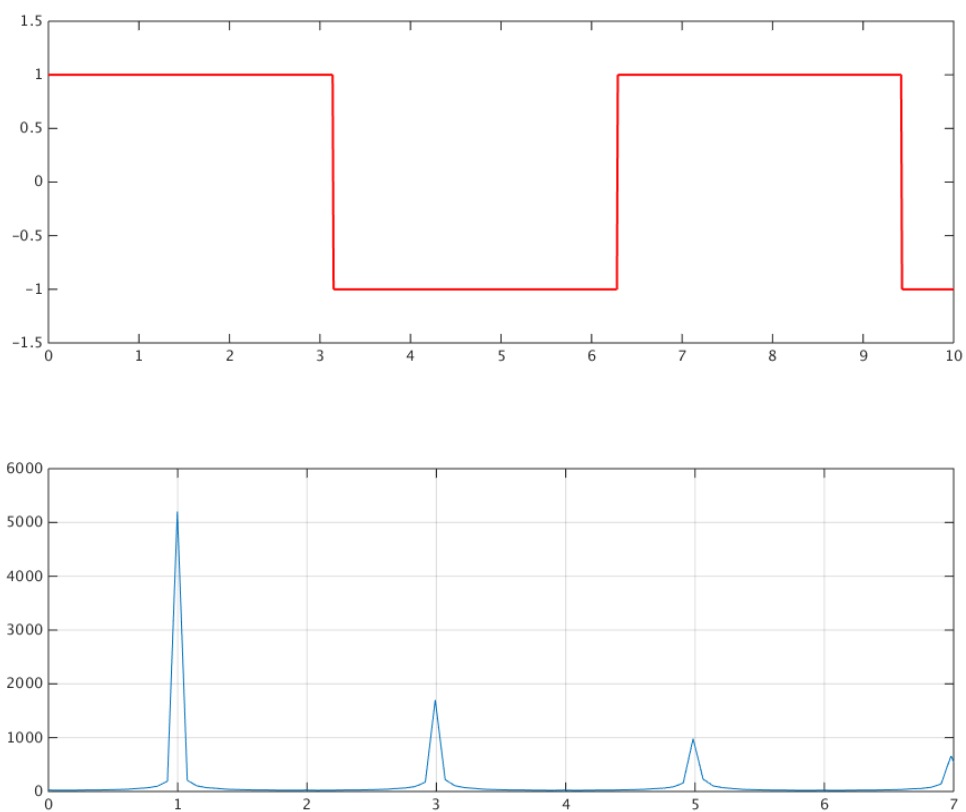
Figur 4: De tre insignalerna givna i uppgift 3.2 b).



Figur 5: Utsignaler samt insignal för uppgift 3.2 c).

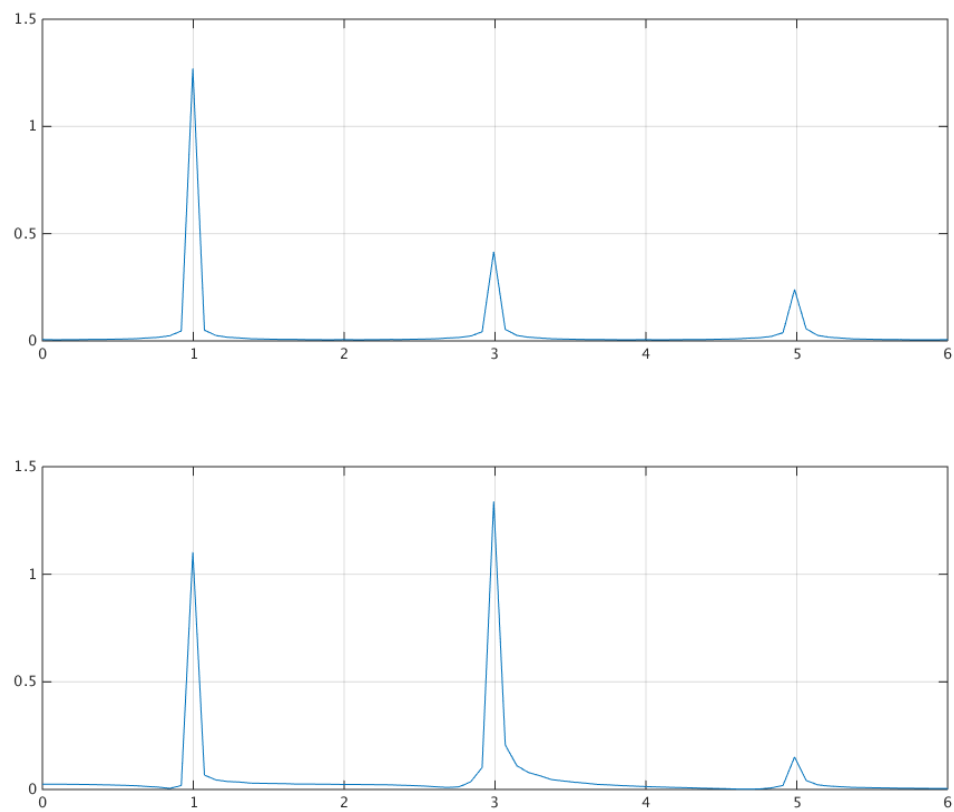


Figur 6: En, av matlab genererad, fyrkantsvåg samt dess tre första - nollskiljda - fourierkoefficienter.

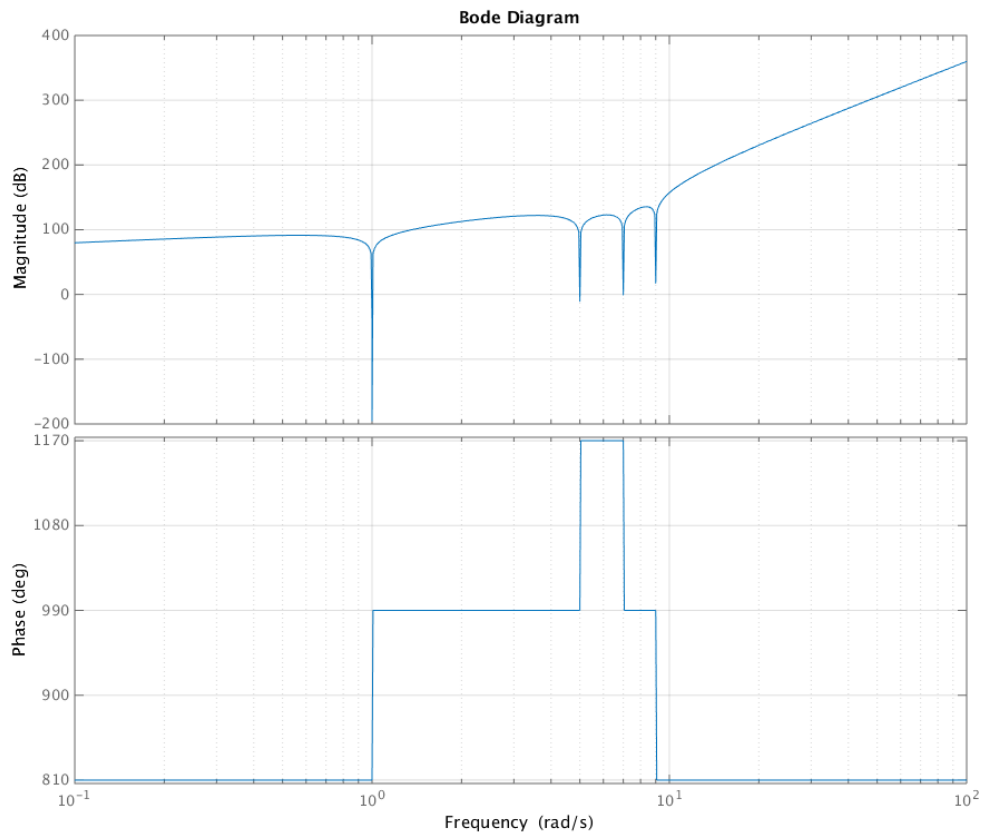




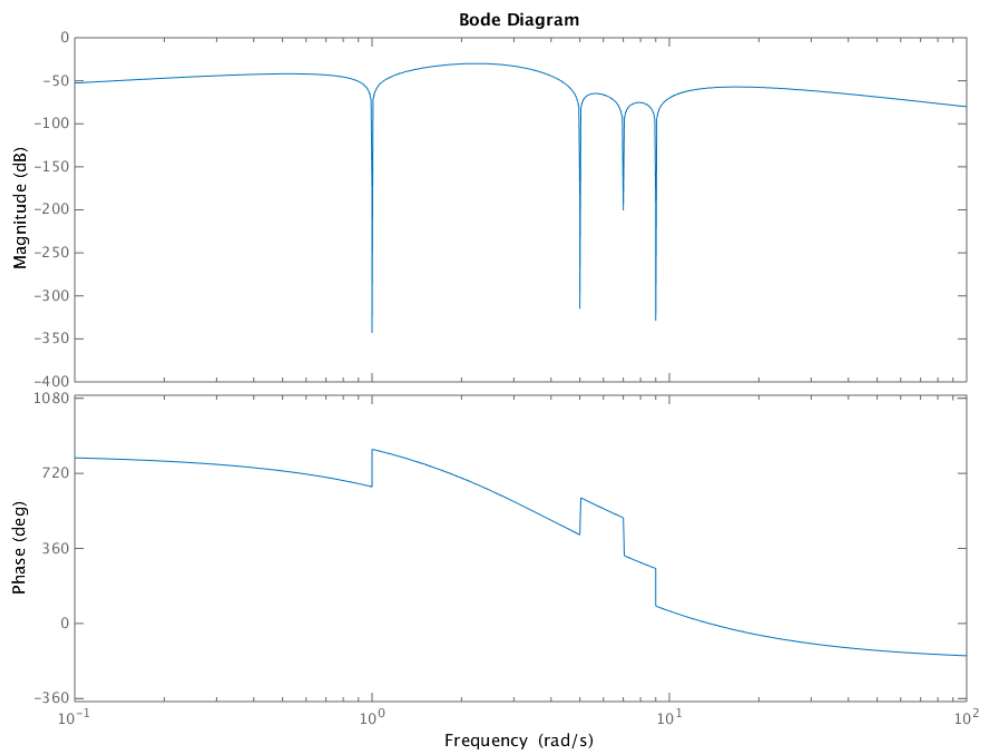
Figur 7: De tre första - nollskiljda - fourierkoefficienterna för fyrkantsvågen (samma som ovan) samt för utsignalen som ges när fyrkantsvågen passerar systemet  $G(s)$ .



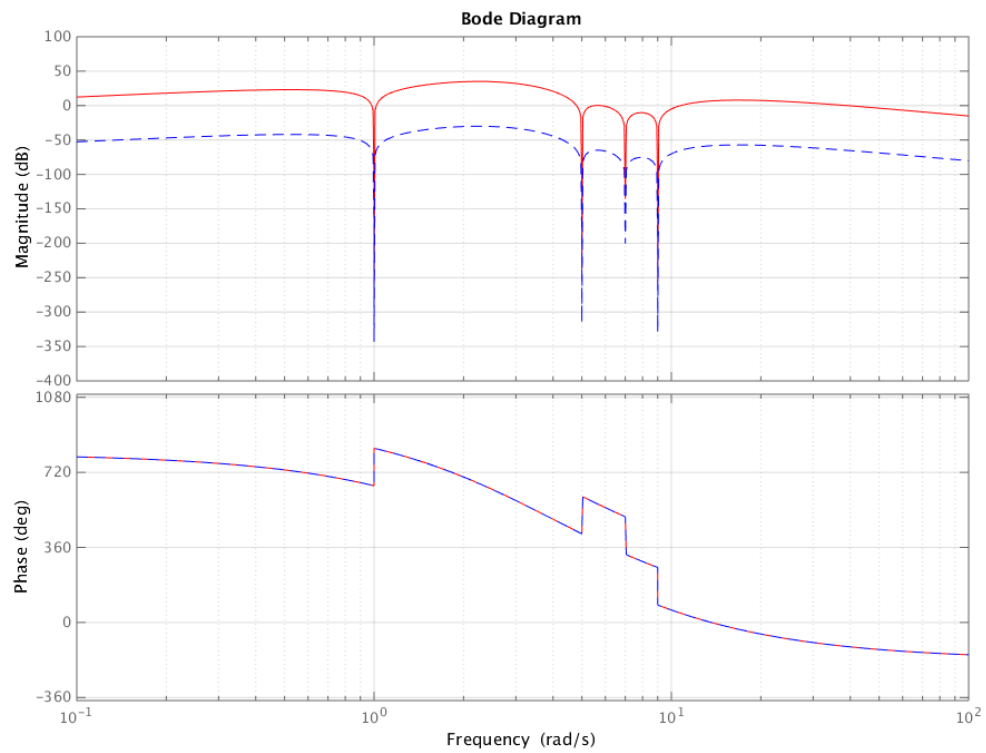
Figur 8: Bodediagram för vårt egentillverkade system enligt uppgift 3.4 a).



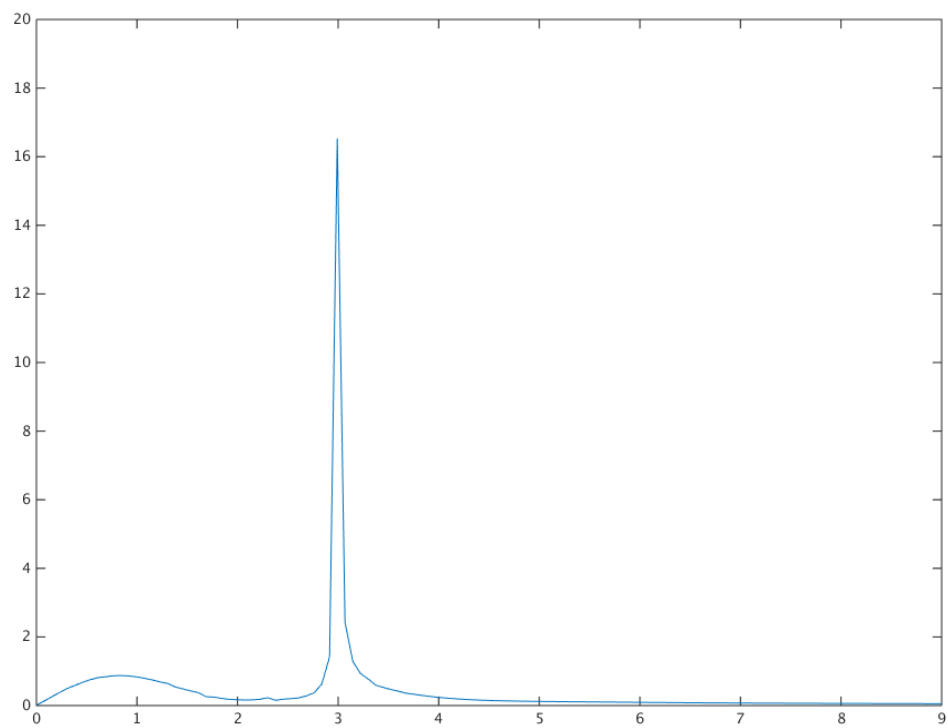
Figur 9: Bodediagram som visar systemet efter att  $\omega > 9$  dämpats.



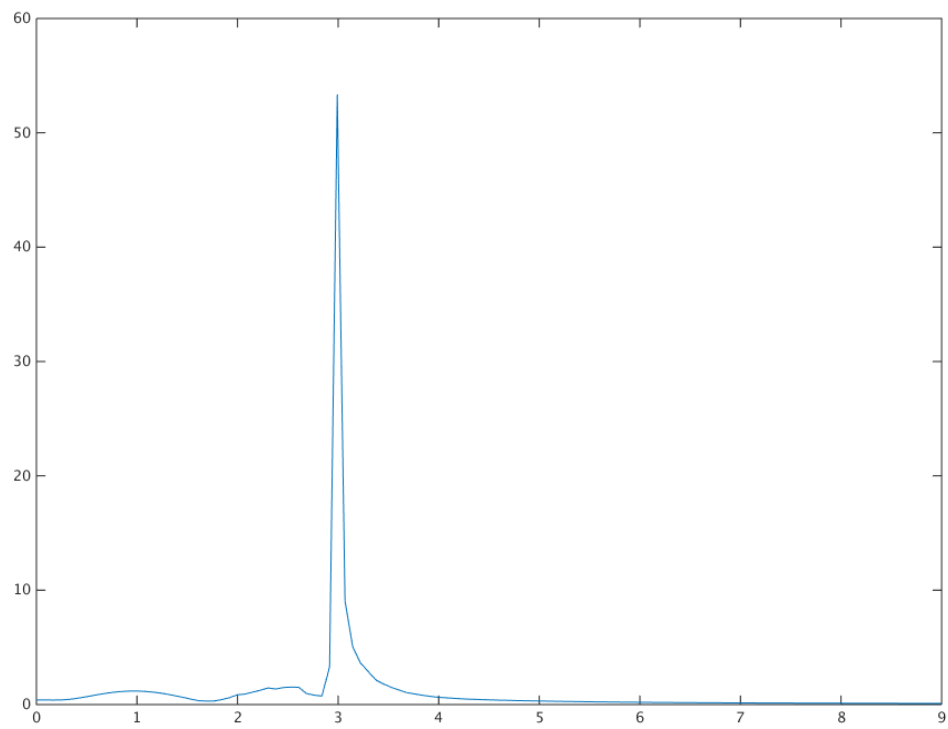
Figur 10: Bodediagram som visar vårt system innan amplitudkorrigering i blått och det slutliga systemet i rött.



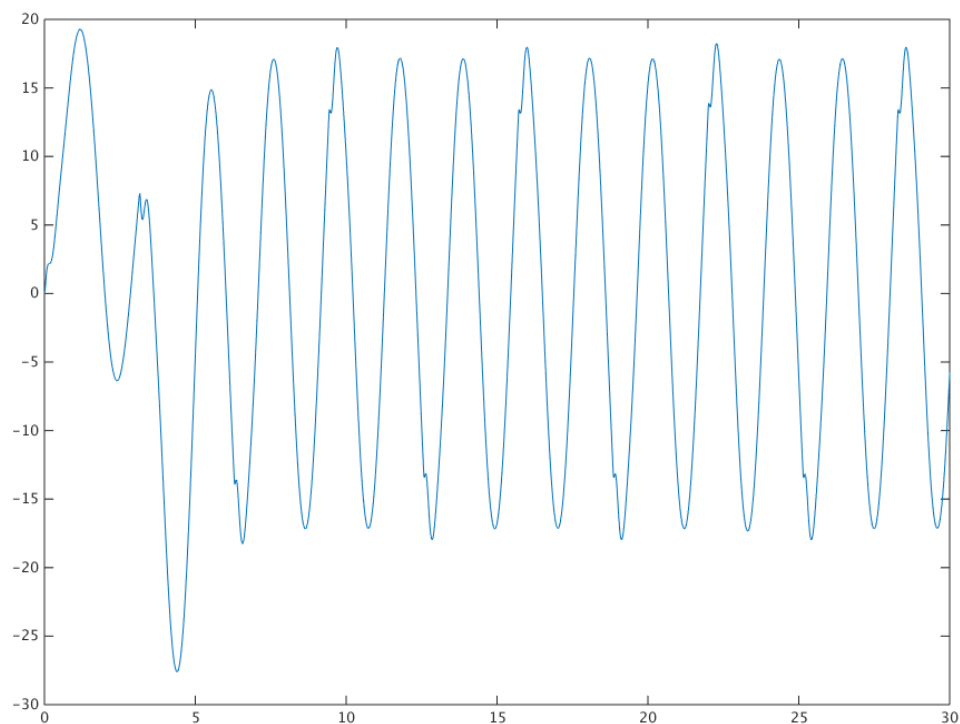
Figur 11: Här ses tydligt att  $\omega = 3$  släpps igenom.



Figur 12: Även här släpps  $\omega = 3$  igenom som brukligt.



Figur 13: När x-signalen passerat systemet synns tydligt att frekvensvinkeln  $\omega = 3$  och signalen är tydligt sinusformad, om än med små "skavanker".



Figur 14: När y-signalen (fyrkantsvågen som först passerat  $G(s)$  och sedan vårt notchfilter) slutligen ritas upp återfinns den förväntade vinkelfrekvensen och sinuskaraktären.

