Задачи на метод моментов оценки параметров распределений (с решениями)

Задача 1. Нормальное распределение

Вес пакета кофе X (в граммах) распределён нормально с неизвестными параметрами μ и σ^2. По выборке получены выборочное среднее $\bar{x} = 243$ и выборочный второй начальный момент $\overline{x^2} = 59200$. **Найдите оценки параметров μ и σ^2 методом моментов.**

Решение

Для нормального распределения $\mathrm{M}\{X\} = \mu$, $\mathrm{M}\{X^2\} = \mu^2 + \sigma^2$. Приравниваем:

$$\hat{\mu} = \bar{x} = 243, \quad \hat{\sigma}^2 = \overline{x^2} - \hat{\mu}^2 = 59200 - 243^2.$$

Так как $243^2 = 59049$, получаем $\hat{\sigma}^2 = 59200 - 59049 = 151$.

Задача 2. Равномерное распределение (непрерывное)

Ошибка измерения X равномерно распределена на отрезке $[a, b]$, где $a < b$ неизвестны. По выборке из 200 измерений получены $\bar{x} = 11.5$ и $s^2 = 20.25$ (смещённая выборочная дисперсия). **Найдите оценки параметров a и b методом моментов.**

Решение

Для равномерного распределения на $[a, b]$:

$$\mathrm{M}\{X\} = \frac{a+b}{2}, \quad \mathrm{D}\{X\} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Приравниваем:

$$\frac{a+b}{2} = \bar{x}, \quad \frac{(b-a)^2}{12} = s^2.$$

Из первого $a + b = 2\bar{x}$. Из второго $b - a = \sqrt{12s^2}$. Тогда

$$a = \frac{2\bar{x} - \sqrt{12s^2}}{2} = \bar{x} - \sqrt{3s^2}, \quad b = \bar{x} + \sqrt{3s^2}.$$

Вычисляем:

$$\sqrt{3s^2} = \sqrt{3 \cdot 20.25} = \sqrt{60.75} \approx 7.794, \quad \hat{a} = 11.5 - 7.794 = 3.706, \quad \hat{b} = 11.5 + 7.794 = 19.294.$$

Задача 3. Дискретное равномерное распределение

Случайная величина X принимает целые значения от k до m включительно ($k < m$, $k, m \in \mathbb{Z}$) с равными вероятностями. По выборке получены выборочное среднее $\bar{x} = 12.31$ и выборочная дисперсия $s^2 = 33.78$ (смещённая). **Найдите оценки параметров k и m методом моментов.**

Решение

Для дискретного равномерного распределения на $\{k, k+1, \dots, m\}$:

$$\mathrm{M}\{X\} = \frac{k+m}{2}, \quad \mathrm{D}\{X\} = \frac{(m-k+1)^2 - 1}{12}.$$

Приравниваем:

$$\frac{k+m}{2} = \bar{x}, \quad \frac{(m-k+1)^2 - 1}{12} = s^2.$$

Из первого $k + m = 2\bar{x}$. Из второго $(m - k + 1)^2 = 12s^2 + 1$. Обозначим $d = m - k$, тогда $d + 1 = \sqrt{12s^2 + 1}$, откуда $d = \sqrt{12s^2 + 1} - 1$. Тогда

$$m = \frac{(k + m) + (m - k)}{2} = \bar{x} + \frac{d}{2}, \quad k = \bar{x} - \frac{d}{2}.$$

Вычисляем:

$$\sqrt{12 \cdot 33.78 + 1} = \sqrt{405.36 + 1} = \sqrt{406.36} \approx 20.158, \quad d = 20.158 - 1 = 19.158,$$

$$k \approx 12.31 - 9.579 = 2.731, \quad m \approx 12.31 + 9.579 = 21.889.$$

Поскольку k и m должны быть целыми, округлим: $\hat{k} = 3$, $\hat{m} = 22$. Проверим: при $k = 3$, $m = 22$ среднее равно $(3 + 22)/2 = 12.5$, дисперсия $((22 - 3 + 1)^2 - 1)/12 = (20^2 - 1)/12 = 399/12 = 33.25$, что близко к исходным данным.

Задача 4. Биномиальное распределение (два неизвестных параметра)

Случайная величина X подчиняется биномиальному закону $Bi(m, p)$, где оба параметра $m \in \mathbb{N}$ и $p \in (0, 1)$ неизвестны. По выборке получены выборочное среднее $\bar{x} = 8.5$ и выборочный второй начальный момент $\overline{x^2} = 75.05$. **Найдите оценки параметров m и p методом моментов.**

Решение

Для биномиального распределения:

$$\mathrm{M}\{X\} = mp, \quad \mathrm{M}\{X^2\} = mp(1 - p) + (mp)^2.$$

Обозначим $a = \bar{x} = 8.5$. Тогда из первого уравнения $mp = a$. Подставим во второе:

$$a(1 - p) + a^2 = \overline{x^2} \quad \Rightarrow \quad a(1 - p) = \overline{x^2} - a^2.$$

Отсюда

$$1 - p = \frac{\overline{x^2} - a^2}{a} \quad \Rightarrow \quad p = 1 - \frac{\overline{x^2} - a^2}{a}.$$

Вычисляем:

$$\overline{x^2} - a^2 = 75.05 - 72.25 = 2.8, \quad \frac{2.8}{8.5} \approx 0.3294, \quad p = 1 - 0.3294 = 0.6706.$$

Тогда $m = \dfrac{a}{p} = \dfrac{8.5}{0.6706} \approx 12.675$. Так как m должно быть целым, округлим до ближайшего целого: $\hat{m} = 13$. При этом

$$\hat{p} = \frac{8.5}{13} \approx 0.6538.$$

Задача 5. Распределение Пуассона (линейное преобразование)

Случайная величина Y связана со случайной величиной X соотношением $Y = kX + b$, где X имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda > 0$. По выборке получены выборочные начальные моменты величины Y:

$$\overline{y} = 7, \quad \overline{y^2} = 57, \quad \overline{y^3} = 247.$$

Найдите оценки параметров k, b и λ методом моментов.

Решение

Для пуассоновской случайной величины известны теоретические моменты:

$$\mathrm{M}\{X\} = \lambda, \quad \mathrm{M}\{X^2\} = \lambda + \lambda^2, \quad \mathrm{M}\{X^3\} = \lambda + 3\lambda^2 + \lambda^3.$$

Тогда для $Y = kX + b$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}\{Y\} &= k\lambda + b, \\
\mathrm{M}\{Y^2\} &= k^2(\lambda + \lambda^2) + 2kb\lambda + b^2, \\
\mathrm{M}\{Y^3\} &= k^3(\lambda + 3\lambda^2 + \lambda^3) + 3k^2 b(\lambda + \lambda^2) + 3kb^2\lambda + b^3.
\end{aligned}$$

Приравниваем к выборочным моментам:

$$\begin{cases}
k\lambda + b = 7, \\
k^2(\lambda + \lambda^2) + 2kb\lambda + b^2 = 57, \\
k^3(\lambda + 3\lambda^2 + \lambda^3) + 3k^2 b(\lambda + \lambda^2) + 3kb^2\lambda + b^3 = 247.
\end{cases}$$

Подбором несложно убедиться, что система имеет решение $\lambda = 2,\ k = 2,\ b = 3$. Действительно, при этих значениях:

$$\mathrm{M}\{Y\} = 2\cdot 2+3 = 7, \quad \mathrm{M}\{Y^2\} = 4\cdot(2+4)+2\cdot 2\cdot 3\cdot 2+9 = 4\cdot 6+24+9 = 57,$$

$\mathrm{M}\{Y^3\} = 8{\cdot}(2{+}12{+}8){+}3{\cdot}4{\cdot}3{\cdot}6{+}3{\cdot}2{\cdot}9{\cdot}2{+}27 = 8{\cdot}22{+}12{\cdot}6{+}18{\cdot}2{+}27 = 176{+}72{+}36{+}27 = 247.$

Таким образом, метод моментов даёт оценки:

$$\hat{k} = 2, \quad \hat{b} = 3, \quad \hat{\lambda} = 2.$$

Задача 6. Гамма-распределение (со сдвигом)

Пусть $Y = X + b$, где X имеет гамма-распределение с параметрами $\alpha > 0$ и $\beta > 0$. По выборке получены выборочные начальные моменты величины Y:

$$\overline{y} = 7, \quad \overline{y^2} = 67, \quad \overline{y^3} = 829.$$

Найдите оценки параметров α, β и b методом моментов.

Решение

Для гамма-распределения:

$$\mathrm{M}\{X\} = \alpha\beta, \quad \mathrm{M}\{X^2\} = \alpha(\alpha+1)\beta^2, \quad \mathrm{M}\{X^3\} = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta^3.$$

Тогда для $Y = X + b$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}\{Y\} &= \alpha\beta + b, \\
\mathrm{M}\{Y^2\} &= \alpha(\alpha+1)\beta^2 + 2b\alpha\beta + b^2, \\
\mathrm{M}\{Y^3\} &= \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta^3 + 3b\alpha(\alpha+1)\beta^2 + 3b^2\alpha\beta + b^3.
\end{aligned}$$

Приравниваем к выборочным моментам. Подбором находим решение $\alpha = 2,\ \beta = 3,\ b = 1$:

$\mathrm{M}\{Y\} = 2\cdot 3 + 1 = 7, \quad \mathrm{M}\{Y^2\} = 2\cdot 3\cdot 9 + 2\cdot 1\cdot 2\cdot 3 + 1 = 54 + 12 + 1 = 67,$

$\mathrm{M}\{Y^3\} = 2\cdot 3\cdot 4\cdot 27 + 3\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 9 + 3\cdot 1\cdot 1\cdot 2\cdot 3 + 1 = 648 + 162 + 18 + 1 = 829.$

Таким образом, оценки: $\hat{\alpha} = 2,\ \hat{\beta} = 3,\ \hat{b} = 1.$

Задача 7. Распределение Вейбулла (два неизвестных параметра)

Ресурс работы подшипника X имеет распределение Вейбулла с параметрами формы $k > 0$ и масштаба $\lambda > 0$. Плотность:

$$f(x) = \frac{k}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-(x/\lambda)^k}, \quad x \geq 0.$$

Известно, что $\mathrm{M}\{X\} = \lambda\,\Gamma(1+1/k)$, $\mathrm{M}\{X^2\} = \lambda^2\,\Gamma(1+2/k)$. По выборке получены выборочное среднее $\bar{x} = 447$ и выборочный второй начальный момент $\overline{x^2} = 225\,675$. **Найдите оценки параметров k и λ методом моментов.**

Решение

Приравниваем:

$$\lambda\,\Gamma(1+1/k) = 447, \quad \lambda^2\,\Gamma(1+2/k) = 225675.$$

Разделим второе уравнение на квадрат первого:

$$\frac{\Gamma(1+2/k)}{[\Gamma(1+1/k)]^2} = \frac{225675}{447^2}.$$

Вычислим $447^2 = 199\,809$, тогда отношение равно $225675/199809 \approx 1.1294$. Известно, что для гамма-функции $\Gamma(1+2/k)/[\Gamma(1+1/k)]^2$ убывает с ростом k. При $k = 2$: $\Gamma(1+0.5) = \sqrt{\pi}/2 \approx 0.8862$, $\Gamma(1+1) = \Gamma(2) = 1$, отношение $1/(0.8862^2) = 1/0.7854 \approx 1.273$. При $k = 3$: $\Gamma(1+1/3) = \Gamma(1.3333) \approx 0.8930$, $\Gamma(1+2/3) = \Gamma(1.6667) \approx 0.9027$, отношение $0.9027/0.8930^2 = 0.9027/0.7974 \approx 1.132$. При $k = 4$: $\Gamma(1.25) \approx 0.9064$, $\Gamma(1.5) = 0.8862$, отношение $0.8862/0.9064^2 = 0.8862/0.8216 \approx 1.079$. Таким образом, значение 1.1294 соответствует $k \approx 3$. Уточним: при $k = 3$ получили 1.132, что близко. Примем $\hat{k} = 3$. Тогда $\Gamma(1+1/3) \approx 0.8930$, и из первого уравнения:

$$\hat{\lambda} = \frac{447}{0.8930} \approx 500.6 \approx 501.$$

Можно также решать численно, но для учебных целей достаточно приближённых оценок.

Задача 8. Распределение Максвелла (линейное преобразование)

Случайная величина Y связана со случайной величиной X соотношением $Y = kX + b$, где X имеет распределение Максвелла с параметром масштаба $a > 0$. Известно, что для распределения Максвелла:

$$\mathrm{M}\{X\} = 2a\sqrt{\frac{2}{\pi}}, \quad \mathrm{M}\{X^2\} = 3a^2, \quad \mathrm{M}\{X^3\} = 8a^3\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

По выборке получены выборочные начальные моменты величины Y:

$$\overline{y} = 4.19, \quad \overline{y^2} = 19.38, \quad \overline{y^3} = 97.64.$$

Найдите оценки параметров k, b и a методом моментов.

Решение

Для $Y = kX + b$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}\{Y\} &= k \cdot 2a\sqrt{\frac{2}{\pi}} + b,\\
\mathrm{M}\{Y^2\} &= k^2 \cdot 3a^2 + 2kb \cdot 2a\sqrt{\frac{2}{\pi}} + b^2,\\
\mathrm{M}\{Y^3\} &= k^3 \cdot 8a^3\sqrt{\frac{2}{\pi}} + 3k^2b \cdot 3a^2 + 3kb^2 \cdot 2a\sqrt{\frac{2}{\pi}} + b^3.
\end{aligned}$$

Приравниваем к выборочным моментам. Подбором можно убедиться, что при $a = 1,\ k = 2,\ b = 1$ получаем:

$$\mathrm{M}\{X\} = 2{\cdot}1{\cdot}0.7979 = 1.5958, \quad \mathrm{M}\{X^2\} = 3, \quad \mathrm{M}\{X^3\} = 8{\cdot}1{\cdot}0.7979 = 6.3832,$$

$$\mathrm{M}\{Y\} = 2 \cdot 1.5958 + 1 = 3.1916 + 1 = 4.1916 \approx 4.19,$$

$$\mathrm{M}\{Y^2\} = 4 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1.5958 + 1 = 12 + 6.3832 + 1 = 19.3832 \approx 19.38,$$

$$\mathrm{M}\{Y^3\} = 8{\cdot}6.3832{+}3{\cdot}4{\cdot}1{\cdot}3{+}3{\cdot}2{\cdot}1{\cdot}1.5958{+}1 = 51.0656{+}36{+}9.5748{+}1 = 97.6404 \approx 97.64.$$

Таким образом, метод моментов даёт оценки:

$$\hat{a} = 1, \quad \hat{k} = 2, \quad \hat{b} = 1.$$

Задача 9. Распределение Стьюдента

Случайная величина X имеет распределение Стьюдента с ν степенями свободы (t_ν), где $\nu > 4$ — неизвестный параметр. Теоретический эксцесс (коэффициент эксцесса) определяется как

$$\frac{\mathrm{M}\{(X - \mathrm{M}\{X\})^4\}}{(\mathrm{D}\{X\})^2} = 3 + \frac{6}{\nu - 4} \quad (\text{при } \nu > 4).$$

По выборке получены выборочная дисперсия $s^2 = 2.5$ и выборочный четвёртый центральный момент $m_4 = 30$. **Найдите оценку параметра ν методом моментов.**

Решение

Выборочный эксцесс:

$$\hat{\gamma}_2 = \frac{m_4}{(s^2)^2} = \frac{30}{2.5^2} = \frac{30}{6.25} = 4.8.$$

Приравниваем к теоретическому значению:

$$3 + \frac{6}{\nu - 4} = 4.8 \quad \Rightarrow \quad \frac{6}{\nu - 4} = 1.8 \quad \Rightarrow \quad \nu - 4 = \frac{6}{1.8} = \frac{10}{3} \approx 3.333.$$

Отсюда

$$\hat{\nu} = 4 + 3.333 = 7.333.$$