Сходимость случайных величин

Пусть дана последовательность случайных величин (с.в.) $\{X_n\}$ и случайная величина X, определенные **на одном вероятностном пространстве** $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Определение 1 (Сходимость почти наверное). *$X_n \to X$ почти наверное (п.н.), если $P(\{\omega : X_n(\omega) \to X(\omega)\}) = 1$. То есть $P\left(\lim\limits_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right) = 1$.*

Определение 2 (Сходимость по вероятности). *$X_n \to X$ по вероятности, если для любого $\varepsilon > 0$ выполняется: $\lim\limits_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$.*

Определение 3 (Сходимость в среднем порядка r). *$X_n \to X$ в L^r (в среднем порядка $r > 0$), если $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n - X|^r] = 0$.*

Определение 4 (Сходимость по распределению). *$X_n \to X$ по распределению ($X_n \Rightarrow X$), если для любой ограниченной непрерывной функции f выполняется: $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}[f(X_n)] = \mathbb{E}[f(X)]$.*

Эквивалентно: $F_n(x) \to F(x)$ во всех точках x, где функция распределения $F(x)$ предельной с.в. X непрерывна.

Определение 5 (Верхний предел последовательности событий). *Для последовательности событий $\{A_n\}$:*

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \{A_n \text{ происходят бесконечно часто}\}$$

Связи между видами сходимости

- Сходимость п.н. $\Rightarrow$ сходимость по вероятности
- Сходимость в L^r $\Rightarrow$ сходимость по вероятности
- Сходимость по вероятности $\Rightarrow$ сходимость по распределению

Обратные импликации, вообще говоря, неверны.

Лемма 1 (Первая лемма Бореля-Кантелли). *Пусть $\{A_n\}$ — последовательность событий на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ сходится, то*

$$P\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 0,$$

то есть вероятность того, что события A_n происходят бесконечно часто, равна нулю.

Лемма 2 (Вторая лемма Бореля-Кантелли). *Пусть $\{A_n\}$ — последовательность **независимых** событий на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ расходится, то*

$$P\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 1,$$

то есть вероятность того, что события A_n происходят бесконечно часто, равна единице.

Лемма 3 (Обобщенная лемма Бореля-Кантелли). *Для произвольной последовательности событий $\{A_n\}$ выполняется:*

1. *Если* $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$, *то* $P\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 0$
2. *Если* $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ *и события* $\{A_n\}$ *независимы, то* $P\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 1$

Особенности для типов распределений

Дискретные распределения:

- Сходимость по распределению: часто проверяется через поточечную сходимость вероятностей
- Сходимость в L^r: сводится к сумме $\sum |X_n(\omega) - X(\omega)|^r \cdot P(\omega)$

Непрерывные распределения:

- Сходимость по распределению: исследуется через сходимость функций распределения или плотностей
- Сходимость в L^r: сводится к вычислению интеграла $\int |X_n - X|^r dP$

Примеры

Дискретные распределения

Пример 1 Сходимость по распределению и по вероятности, но не п.н.

Пусть $\{X_n\}$ — последовательность с.в. с распределением Бернулли: $P(X_n = 1) = \frac{1}{n}$, $P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$.

Исследуем последовательность $\{X_n\}$ на сходимость по распределению, по вероятности, почти наверное и в L^r.

- **По распределению**

  Предельное распределение — вырожденное в точке 0: $P(X = 0) = 1$. Функция распределения $F_n(x)$:

  - При $x < 0$: $F_n(x) = 0 \to 0$
  - При $0 \le x < 1$: $F_n(x) = 1 - \frac{1}{n} \to 1$
  - При $x \ge 1$: $F_n(x) = 1 \to 1$

  В точке $x = 0$ предельная функция $F(x)$ имеет разрыв, поэтому сходимость в этой точке не требуется. Во всех точках непрерывности ($x \ne 0$) $F_n(x) \to F(x)$. Значит, $X_n \Rightarrow 0$.

- **По вероятности**

  Для $0 < \varepsilon < 1$: $P(|X_n - 0| > \varepsilon) = P(X_n = 1) = \frac{1}{n} \to 0$. Следовательно, $X_n \to 0$ по вероятности.

- **Почти наверное**

  Рассмотрим событие $A = \{X_n \to 0\}$. Для произвольного ω, если $X_n(\omega) = 1$ для бесконечного числа n, то $X_n(\omega)$ не сходится к 0.

  По лемме Бореля-Кантелли: $\sum P(X_n = 1) = \sum \frac{1}{n} = \infty$. События $\{X_n = 1\}$ независимы (можно считать, модифицировав пример). По второй лемме Бореля-Кантелли, $P(X_n = 1 \text{ б.ч.}) = 1$. Это означает, что для почти всех ω последовательность $X_n(\omega)$ бесконечно часто принимает значение 1. Следовательно, X_n не сходится к 0 п.н.

- **В L^r**

  $M[|X_n - 0|^r] = M[|X_n|^r] = 1^r \cdot \frac{1}{n} + 0 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \to 0$. Следовательно, $X_n \to 0$ в L^r для любого $r > 0$.

Вывод

В этом примере есть сходимость по распределению, по вероятности и в L^r, но нет сходимости п.н.

Пример 2 Сходимость по распределению, но не по вероятности

Рассмотрим пространство $\Omega = [0, 1]$ с мерой Лебега. Определим с.в.: $Y_n(\omega) = 1$ для $\omega \in [0, \frac{1}{2}]$, $Y_n(\omega) = 0$ для $\omega \in (\frac{1}{2}, 1]$. $Z_n(\omega) = 1$ для $\omega \in [\frac{1}{2}, 1]$, $Z_n(\omega) = 0$ для $\omega \in [0, \frac{1}{2})$.

Рассмотрим последовательность: $X_1 = Y_1, X_2 = Z_1, X_3 = Y_2, X_4 = Z_2, \dots$

Исследуем $\{X_n\}$ на сходимость к 0.

(a) **По распределению:** Все X_n имеют одинаковое распределение Бернулли с $p = \frac{1}{2}$. Очевидно, $X_n \Rightarrow X$, где $X \sim \text{Bern}(\frac{1}{2})$.

(b) **По вероятности:** $P(|X_n - 0| > 0.5) = P(X_n = 1) = \frac{1}{2}$. Этот предел не равен 0. Следовательно, X_n не сходится к 0 по вероятности.

Вывод: Сходимость по распределению не влечет сходимость по вероятности.

Непрерывные распределения

Пример 3 Сходимость п.н., но не в L^1

Пусть $X_n(\omega) = n \cdot I_{[0, \frac{1}{n}]}(\omega)$ на $\Omega = [0, 1]$ с мерой Лебега.

Исследуем $\{X_n\}$ на сходимость к 0 п.н., по вероятности и в L^1.

(a) **Почти наверное:** Для любого $\omega > 0$ найдется $N > \frac{1}{\omega}$, такой что для всех $n > N$ будет $X_n(\omega) = 0$. Множество $\{0\}$ имеет меру 0. Значит, $X_n \to 0$ п.н.

(b) **По вероятности:** Из сходимости п.н. следует сходимость по вероятности.

(c) **В L^1:** $M[|X_n|] = \int_0^1 n \cdot I_{[0, \frac{1}{n}]}(\omega) d\omega = n \cdot \frac{1}{n} = 1$. Предел $M[|X_n|] = 1 \neq 0 = M[|0|]$. Следовательно, X_n не сходится к 0 в L^1.

Вывод: Сходимость п.н. не влечет сходимость в L^1.

Пример 4 Сходимость в L^2 для нормальных величин

Пусть $X_n \sim N(\mu_n, \sigma_n^2)$, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Найдем необходимые и достаточные условия на μ_n и σ_n^2, при которых $X_n \to X$ в L^2.

Сходимость в L^2 означает: $\lim_{n \to \infty} M[|X_n - X|^2] = 0$.

$M\left[|X_n - X|^2\right] = D\left[X_n - X\right] + \left[M\left[X_n - X\right]\right]^2$.

Если X_n и X независимы, то $D\left[X_n - X\right] = \sigma_n^2 + \sigma^2$.

$M\left[X_n - X\right] = \mu_n - \mu$.

Тогда $M\left[|X_n - X|^2\right] = (\sigma_n^2 + \sigma^2) + (\mu_n - \mu)^2$.

Для сходимости к 0 необходимо и достаточно:

(a) $\mu_n \to \mu$

(b) $\sigma_n^2 \to 0$

Вывод: Для сходимости в L^2 последовательности нормальных с.в. к нормальной с.в. X необходимо, чтобы их матожидания сходились к матожиданию X, а дисперсии "схлопывались"к 0.