ВШЭ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

БУЛЫЧЕВ АЛЕКСАНДР ВИКТОРОВИЧ, К.Т.Н.

МОСКВА, 2025

ВШЭ

ПОНЯТИЕ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ, ДИСПЕРСИЯ, МОМЕНТЫ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

БУЛЫЧЕВ АЛЕКСАНДР ВИКТОРОВИЧ, К.Т.Н.

МОСКВА, 2025

ПОНЯТИЕ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

ЗАЧАСТУЮ НА ПРАКТИКЕ МЫ НАБЛЮДАЕМ НЕ СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ, А СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

1. динамику котировок и цен на акции ;
2. изменение концентрации лекарственных веществ;
3. загруженность линий передачи данных сети интернет;
4. дорожный трафик;
5. количество звонков в сервисные службы компаний;
6. время до выхода прибора из строя и т.д.

ПОНЯТИЕ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

МЫ ИНТУИТИВНО ПОНИМАЕМ, ЧТО СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА ТЕСНО СВЯЗАНА С НЕКОТОРЫМИ СЛУЧАЙНЫМИ СОБЫТИЯМИ;

СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА – ЭТО ФУНКЦИЯ ОТ СЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЙ ИЛИ ТОЧНЕЕ – ФУНКЦИЯ НА ПРОСТРАНСТВЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ИСХОДОВ.

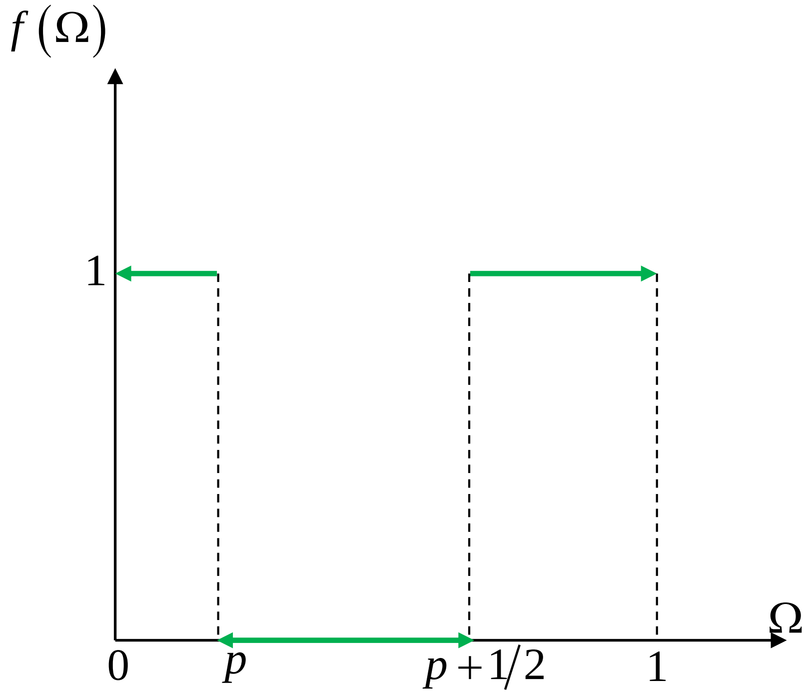
ПОНЯТИЕ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ. ПРИМЕР

ТИПИЧНА СИТУАЦИЯ ПРИ КОТОРОЙ ПОЛУЧИТЬ ИНФОРМАЦИЮ О ПРИРОДЕ СЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЙ И ВИДЕ ФУНКЦИИ НЕОТКУДА;

ИНОГДА О НЕЙ МОЖНО ДОГАДАТЬСЯ, НАПРИМЕР, В БИНАРНОМ СЛУЧАЕ.

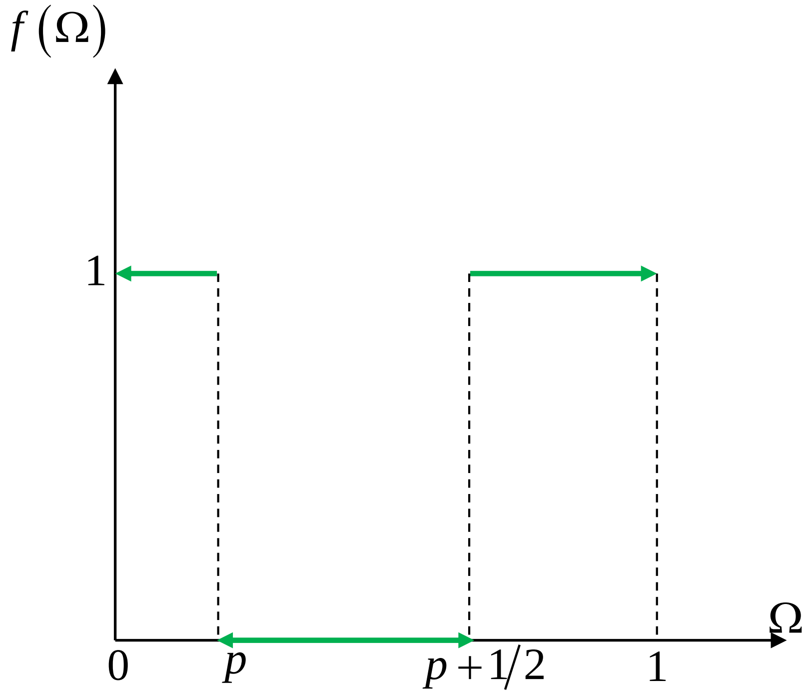
ПОНЯТИЕ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ. ПРИМЕР

ОДИН ИЗ ВОЗМОЖНЫХ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ, МОДЕЛИРУЮЩИХ БИНАРНУЮ ВЕЛИЧИНУ – СИММЕТРИЧНУЮ МОНЕТУ (ОРЕЛ – **1**, РЕШКА – **0**):



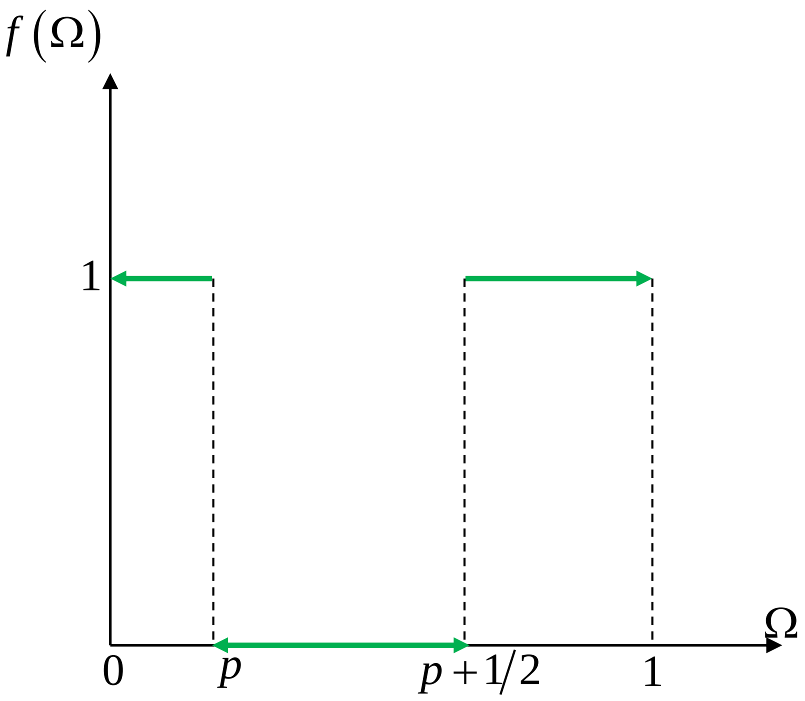
ПОНЯТИЕ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ. ПРИМЕР

В действительности почти любая случайная величина – это смеси и комбинации других случайных величин (зависимых или независимых) и каждая из них связана со своими случайными событиями.



РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Представим функцию значений дискретной величины f (используются прописные латинские буквы) для симметричной монеты в виде таблицы – <u>функции распределения случайной величины:</u>



X	0	1
P	0,5	0,5

НЕЗАВИСИМОСТЬ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Поскольку случайные величины связаны со случайными событиями, а для случайных событий ранее мы определили понятие независимости, то становится очевидным, что случайные величины X и Y независимы, если для любых множеств A и B выполняется равенство:

$$\boxed{P\big((X \in A)(Y \in B)\big) = P(X \in A)P(Y \in B)}$$

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Одной из главных задач при анализе данных является построение функции распределения случайной величины. Какова функция распределения числа выпавших орлов при подбрасывании двух симметричных монет?

X	РР	ОР	РО	ОО
P	0,25	0,25	0,25	0,25

X	РР	ОР+РО	ОО
P	0,25	0,25+0,25	0,25

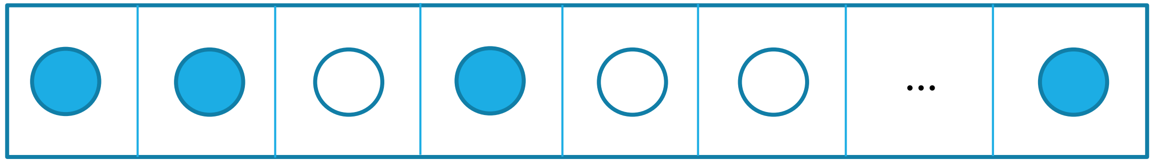
X	0	1	2
P	0,25	0,5	0,25

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

БИНОМИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

КАКОВА ВЕРОЯТНОСТЬ ТОГО, ЧТО СРЕДИ **N** СОБЫТИЙ РОВНО **K** ОКАЖУТСЯ УСПЕШНЫМИ?

Какова вероятность того, что среди **n** потенциальных покупателей окажется ровно **k** фактических покупателей?



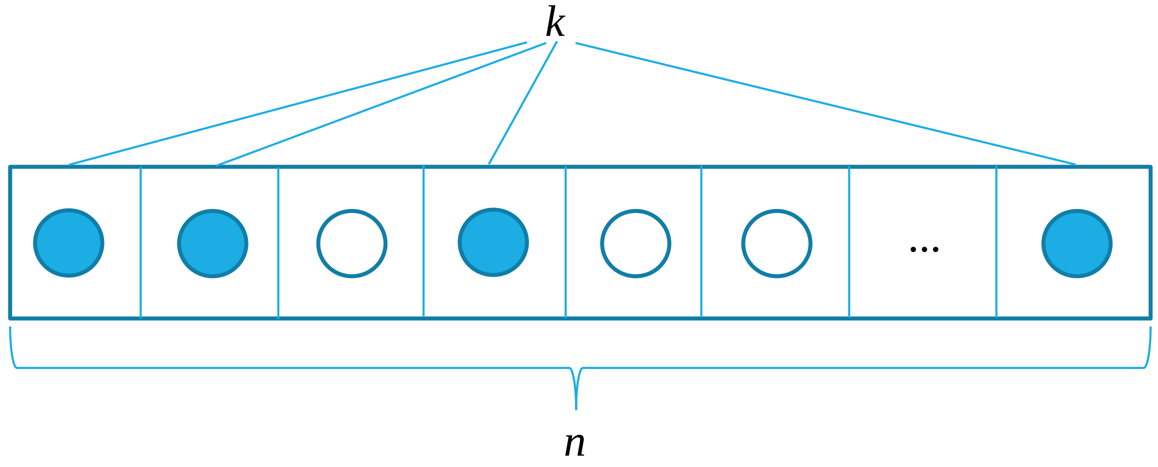
РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

БИНОМИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

КАКОВА ВЕРОЯТНОСТЬ ТОГО, ЧТО СРЕДИ **N** СОБЫТИЙ РОВНО **К** ОКАЖУТСЯ УСПЕШНЫМИ?

Вероятность конкретно данной последовательности:

$$P_n(k) = pp(1-p)\,p(1-p)(1-p)\ldots p$$



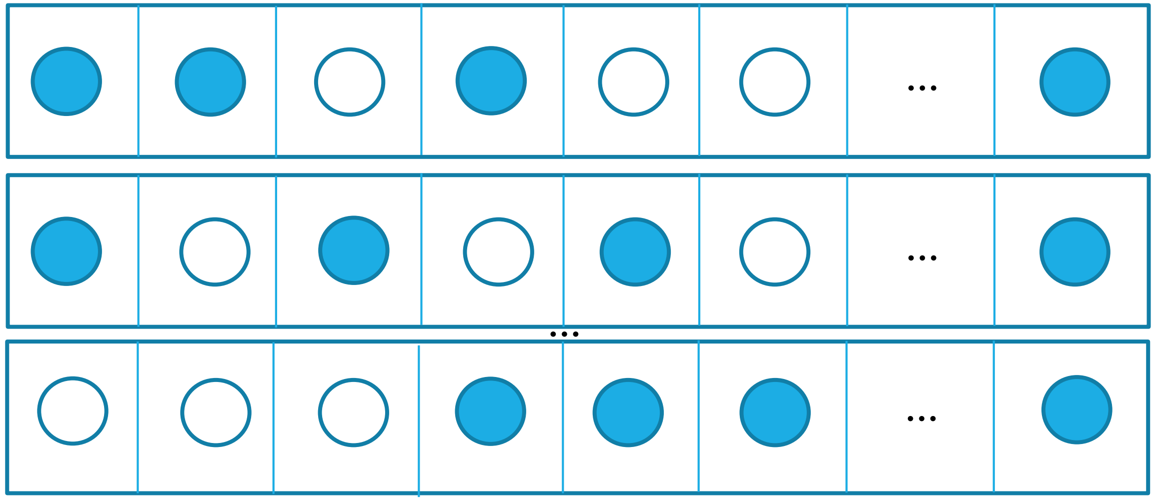
РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

БИНОМИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

КАКОВА ВЕРОЯТНОСТЬ ТОГО, ЧТО СРЕДИ **N** СОБЫТИЙ РОВНО **K** ОКАЖУТСЯ УСПЕШНЫМИ?

Итоговая вероятность всех последовательностей:

$$P_n(k) = pp(1-p)p(1-p)(1-p)\ldots p + p(1-p)p(1-p)p(1-p)\ldots p + \ldots + (1-p)(1-p)(1-p)ppp\ldots p = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$



$$\boxed{P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}}$$

БИНОМИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ. ПРИМЕР

КАКОЕ СОБЫТИЕ БОЛЕЕ ВЕРОЯТНО ПРИ БРОСАНИИ N РАЗ ПРАВИЛЬНОЙ ШЕСТИГРАННОЙ ИГРАЛЬНОЙ КОСТИ: «СУММА ВЫПАВШИХ ОЧКОВ ЧЕТНАЯ» ИЛИ «СУММА ВЫПАВШИХ ОЧКОВ НЕЧЕТНАЯ»?

Интуитивно может представляться, что вероятность события «сумма выпавших очков <u>четная</u>» больше

БИНОМИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ. ПРИМЕР

Рассмотрим случай, когда n чётно; в противоположном случае доказательство аналогично:

$$P\left(\sum \text{нечётная}\right) = P(\text{нечёт}=1) + P(\text{нечёт}=3) + \ldots + P(\text{нечёт}=n-1) =$$

$$= C_n^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + C_n^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} + \ldots + C_n^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(C_n^1 + C_n^3 + \ldots + C_n^{n-1}\right),$$

$$P\left(\sum \text{чётная}\right) = P(\text{нечёт}=0) + P(\text{нечёт}=2) + \ldots + P(\text{нечёт}=n) =$$

$$= C_n^0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^n + C_n^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \ldots + C_n^n \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(C_n^0 + C_n^2 + \ldots + C_n^n\right),$$

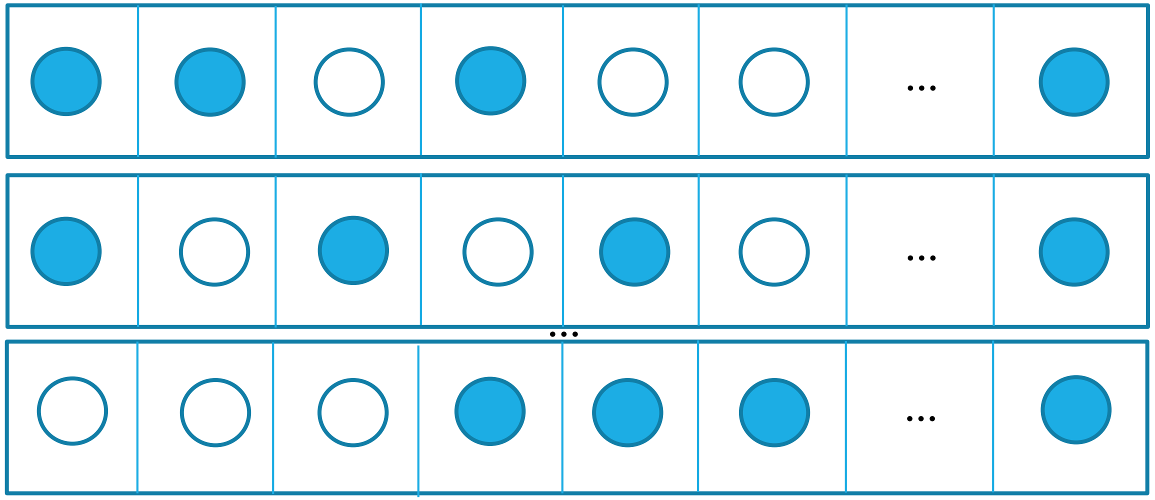
$$(a+b)^n = \sum_{k=0,n} C_n^k a^k b^{n-k} \Rightarrow 0 = (-1+1)^n = \sum_{k=0,n} C_n^k (-1)^k 1^{n-k} = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots + C_n^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_n^1 + C_n^3 + \ldots + C_n^{n-1} = C_n^0 + C_n^2 + \ldots + C_n^n,$$

$$\boxed{P\left(\sum \text{нечётная}\right) = P\left(\sum \text{чётная}\right)}$$

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

<u>РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПУАССОНА –</u> БИНОМИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В ПРЕДЕЛЕ, КОГДА **N** ВЕЛИКО, А ВЕРОЯТНОСТЬ В ОДНОМ ИСПЫТАНИИ P МАЛА



$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(n \to \infty, p \to 0, np^2 << 1\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПУАССОНА. ПРИМЕР

Страховая компания заключила 1000 независимых договоров: страховой взнос – K руб., страховая выплата – 100K руб., вероятность страхового события – 0,002. Найти вероятность того, что прибыль будет больше 400K.

$$\textit{Пусть } \Pi - \textit{прибыль и } X - \textit{количество выплаченных страховок} \left(\textit{случайная величина}\right)$$

$$\Pi = 1000K - 100KX > 400K \Rightarrow X < 6 \Rightarrow$$

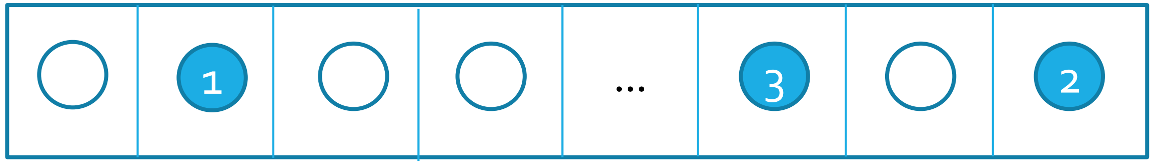
$$\Rightarrow P\left(X<6\right) = P\left(X=0\right) + P\left(X=1\right) + P\left(X=2\right) + P\left(X=3\right) + P\left(X=4\right) + P\left(X=5\right),$$

$$np^2 = 0{,}004 << 1 \Rightarrow P\left(X=m\right) = \frac{2^m}{m!}e^{-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(\Pi > 400K\right) = e^{-2}\left(\frac{2^0}{0!}+\frac{2^1}{1!}+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}+\frac{2^4}{4!}+\frac{2^5}{5!}\right) \approx 0{,}983.$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ. ПРИМЕР

Производится игра в лотерею, в которой игрок каждый день может выиграть один из трех призов. Вероятность выигрыша каждого из призов – p_1, p_2, p_3 ($p_1+p_2+p_3<1$), она не меняется от начала игры до выигрыша соответствующего приза. Если игрок выиграл какой-либо из трех призов, он не может выиграть его вновь. Игра происходит до тех пор, пока не будут выиграны все призы. Найти вероятность того, что за n шагов будут выиграны все три приза.



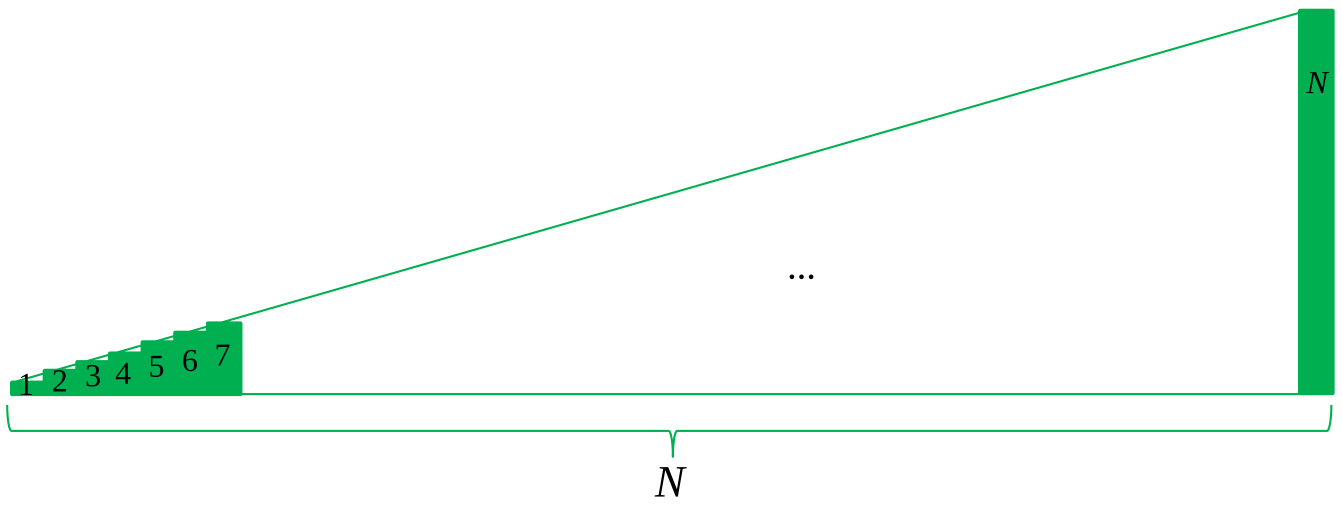
ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ. ПРИМЕР

СОГЛАСНО ФОРМУЛЕ ВКЛЮЧЕНИЙ-ИСКЛЮЧЕНИЙ ИЛИ СЛОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ПОЛУЧАЕМ ОТВЕТ:

$$\begin{aligned}
P(\text{выиг}) = P(n) = \\
&= \left\{ (1-p_1)^{n-1} p_1 + (1-p_2)^{n-1} p_2 + (1-p_3)^{n-1} p_3 \right\} - \\
&- \left\{ (1-(p_1+p_2))^{n-1} (p_1+p_2) + (1-(p_2+p_3))^{n-1} (p_2+p_3) + (1-(p_1+p_3))^{n-1} (p_1+p_3) \right\} + \\
&+ (1-(p_1+p_2+p_3))^{n-1} (p_1+p_2+p_3).
\end{aligned}$$

ЗАДАЧА О СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИНАХ

N человек выстраиваются по росту в шеренгу (рост у всех разный) и случайным образом перемешиваются. Затем производится фотосъемка шеренги в профиль. Найти вероятность того, что на фотографии будет виден i-й по росту человек. Также найти вероятность того, что будут видны i-й и j-й по росту люди.



ЗАДАЧА О СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИНАХ

Решение. Пусть фотографирование производится слева. Очевидно, что любые (i-1)-е по росту люди могут быть размещены на любых местах, i-й по росту человек лишь на одном месте (первом свободном месте слева), оставшиеся могут быть размещены на любых оставшихся местах. Аналогичны рассуждения для двух людей:

$$P(i)=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(i-2))\cdot 1\cdot(n-i)!}{n!}=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(i-2))\cdot(n-(i-1))(n-i)!}{(n-(i-1))n!}=\frac{n!}{(n-i+1)n!}=\boxed{\frac{1}{n-i+1}}$$

$$P(i,j)=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(i-2))\cdot 1\cdot(n-i)(n-(i+1))\ldots(n-(j-2))\cdot 1\cdot(n-j)!}{n!}=$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(i-2))(n-i)(n-(i+1))\ldots(n-(j-2))(n-(j-1))(n-j)!}{(n-(i-1))(n-(j-1))n!}=$$

$$=\frac{n!}{(n-i+1)(n-j+1)n!}=\boxed{\frac{1}{(n-i+1)(n-j+1)}=P(i)P(j)}$$

ЗАДАЧА О СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИНАХ

Двадцать независимых одинаково распределенных случайных величин принимают только значения 2 и 3, при этом значение 3 принимается с вероятностью 0,2. Найти вероятность того, что сумма данных величин будет равна 46.

Решение. Допустим в общей сумме n величин принимают значение 2 и m величин принимает значение 3, тогда получаем:

$$\begin{cases} 2n+3m=46 \\ n+m=20 \\ n\geq 0, m\geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} n=14 \\ m=6 \end{cases}$$

Полученное выражение позволяет найти ответ на вопрос задачи с помощью формулы биномиального распределения:

$$\boxed{P_n(k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \Rightarrow P_{20}(14)=C_{20}^{14}0,8^{14}0,2^6 \approx 0,109.}$$

ЗАДАЧА О СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИНАХ

Независимые случайные величины X,Y и Z принимают только целые значения: X от 1 до 15 с вероятностью 1/15, Y от 1 до 10 с вероятностью 1/10, Z от 1 до 8 с вероятностью 1/8. Найти вероятность того, что все три переменные примут разные значения.

Решение. Исходя из определения полной группы событий и с учетом того, что:

$$P(X=Y, Y=Z, X\neq Z)=P(X\neq Y, Y=Z, X=Z)=P(X=Y, Y\neq Z, X=Z)=0,$$

получаем решение:

$$P(X\neq Y, Y\neq Z, X\neq Z)=$$
$$=1-P(X=Y=Z)-P(X=Y, Y\neq Z)-P(Y=Z, X\neq Z)-P(Y\neq Z, X=Z).$$

$$P(X=Y=Z)=\frac{8}{8\cdot 10\cdot 15}, P(X=Y, Y\neq Z)=\frac{8\cdot 9}{8\cdot 10\cdot 15}, P(Y=Z, X\neq Z)=\frac{8\cdot 14}{8\cdot 10\cdot 15}, P(Y\neq Z, X=Z)=\frac{8\cdot 9}{8\cdot 10\cdot 15},$$

$$\boxed{P(X\neq Y, Y\neq Z, X\neq Z)=1-\frac{8}{8\cdot 10\cdot 15}-\frac{8\cdot 9}{8\cdot 10\cdot 15}-\frac{8\cdot 14}{8\cdot 10\cdot 15}-\frac{8\cdot 9}{8\cdot 10\cdot 15}=\frac{117}{150}=\mathbf{\frac{39}{50}}}$$

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ – ЭТО СРЕДНЕЕ ЗНАЧЕНИЕ ПО ВЫБОРКЕ, КОГДА КОЛИЧЕСТВО ЭЛЕМЕНТОВ В ВЫБОРКЕ СТРЕМИТСЯ К БЕСКОНЕЧНОСТИ:

$$\boxed{\overline{x} = \frac{\sum\limits_{i=1,n} x_i}{n} = \frac{\sum\limits_{i=1,k} n_i x_i}{n} = \sum_{i=1,k} \frac{n_i}{n} x_i \xrightarrow[n\to\infty]{} E(X) \sum_{i=1,k} p_i x_i .}$$

Среднее по выборке рассматривается на основании того, что определяется величина, которая минимизирует сумму квадратов отклонений (функция потерь) от наблюдаемых величин – это и есть среднее значение.

ДИСПЕРСИЯ

<u>ДИСПЕРСИЯ – ЭТО СРЕДНЕЕ ЗНАЧЕНИЕ</u> ФУНКЦИИ ПОТЕРЬ ПО ВЫБОРКЕ, КОГДА КОЛИЧЕСТВО ЭЛЕМЕНТОВ В ВЫБОРКЕ СТРЕМИТСЯ К БЕСКОНЕЧНОСТИ:

$$\boxed{\hat{D}(X)=\frac{\sum\limits_{i=1,n}(x_i-\bar{x})^2}{n}=\frac{\sum\limits_{i=1,k}n_i(x_i-\bar{x})^2}{n}=\sum_{i=1,k}\frac{n_i}{n}(x_i-\bar{x})^2\xrightarrow[n\to\infty]{}D(X)=E\left[\left(X-E(X)\right)^2\right].}$$

МОМЕНТЫ БОЛЕЕ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

ИСПОЛЬЗУЮТСЯ ДЛЯ БОЛЕЕ ТОНКОГО АНАЛИЗА РАСПРЕДЕЛЕНИЙ:

$$\nu_n = \sum_{i=1,k} p_i x_i^n - \text{начальный момент } n - \text{го порядка};$$

$$\mu_n = E\left[\left(X - E(X)\right)^n\right] - \text{центральный момент } n - \text{го порядка};$$

$$As(X) = \frac{\mu_3}{\left(\sqrt{\mu_2}\right)^3} - \text{скошенность};$$

$$Ex(X) = \frac{\mu_4}{\left(\sqrt{\mu_2}\right)^4} - 3 = \left[\frac{\mu_4}{\mu_2^{\,2}} - 3\right] - \text{островершинность}.$$

СВОЙСТВА МАТ. ОЖИДАНИЯ И ДИСПЕРСИИ

$E(a)=a;$

$E(aX)=aE(X);$

$E(X_1+X_2+\ldots+X_n)=E(X_1)+E(X_2)+\ldots+E(X_n)-$ *для любых случайных величин*;

$E(X_1X_2\ldots X_n)=E(X_1)E(X_2)\ldots E(X_n)-$ *для независимых случайных величин*;

$E\left[\varphi(X)\right]=\sum\limits_{i=1,k} p_i\varphi(x_i);$

$D(a)=0;$

$D(X)=E(X^2)-E^2(X);$

$D(aX)=a^2D(X);$

$D(X_1+X_2+\ldots+X_n)=D(X_1)+D(X_2)+\ldots+D(X_n)-$ *для независимых случайных величин.*

СВОЙСТВА МАТ. ОЖИДАНИЯ И ДИСПЕРСИИ

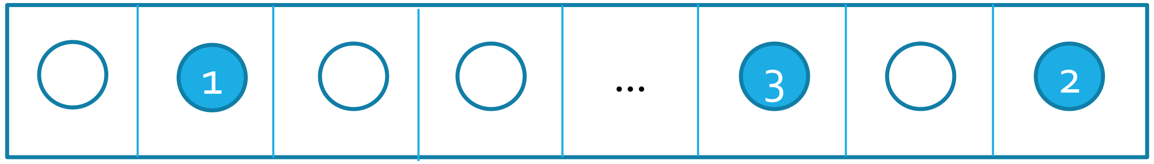
$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \Rightarrow E(k) = np, D(k) = npq - \textit{Биномиальное распределение}$$

$$P(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \Rightarrow E(k) = \lambda, D(k) = \lambda - \textit{Распределение Пуассона}$$

$$P(k) = (1-p)^{k-1} p \Rightarrow E(k) = \frac{1}{p}, D(k) = \frac{q}{p^2} - \textit{Геометрическое Распределение}$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ. ПРИМЕР

Производится игра в лотерею, в которой игрок каждый день может выиграть один из трех призов. Вероятность выигрыша каждого из призов – p1, p2, p3 (p1+p2+p3<1), она не меняется от начала игры до выигрыша соответствующего приза. Если игрок выиграл какой-либо из трех призов, он не может выиграть его вновь. Игра происходит до тех пор, пока не будут выиграны все призы. Найти математическое ожидание и дисперсию времени игры.



ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ. ПРИМЕР

СОГЛАСНО ОПРЕДЕЛЕНИЮ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ И ДИСПЕРСИИ, А ТАКЖЕ СВОЙСТВАМ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛУЧАЕМ:

$$\boxed{\begin{aligned} E(n) &= \sum_{n=1,\infty} P(n)n = \sum_{n=1,\infty} \left\{ (1-p_1)^{n-1} p_1 + (1-p_2)^{n-1} p_2 + (1-p_3)^{n-1} p_3 \right\} n \\ &- \sum_{n=1,\infty} \left\{ (1-(p_1+p_2))^{n-1}(p_1+p_2) + (1-(p_2+p_3))^{n-1}(p_2+p_3) + (1-(p_1+p_3))^{n-1}(p_1+p_3) \right\} n \\ &+ \sum_{n=1,\infty} (1-(p_1+p_2+p_3))^{n-1}(p_1+p_2+p_3)n = \frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3}-\frac{1}{p_1+p_2}-\frac{1}{p_2+p_3}-\frac{1}{p_1+p_3}+\frac{1}{p_1+p_2+p_3} \end{aligned}}$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ. ПРИМЕР

СОГЛАСНО ОПРЕДЕЛЕНИЮ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ И ДИСПЕРСИИ, А ТАКЖЕ СВОЙСТВАМ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛУЧАЕМ:

$$E\left(n^2\right)=\frac{2-p_1}{p_1^2}+\frac{2-p_2}{p_2^2}+\frac{2-p_3}{p_3^2}-\frac{2-\left(p_1+p_2\right)}{\left(p_1+p_2\right)^2}-\frac{2-\left(p_2+p_3\right)}{\left(p_2+p_3\right)^2}-\frac{2-\left(p_1+p_3\right)}{\left(p_1+p_3\right)^2}+\frac{2-\left(p_1+p_2+p_3\right)}{\left(p_1+p_2+p_3\right)^2}$$

$$D(n)=E\left(n^2\right)-E^2(n)=\frac{2-p_1}{p_1^2}+\frac{2-p_2}{p_2^2}+\frac{2-p_3}{p_3^2}-\frac{2-\left(p_1+p_2\right)}{\left(p_1+p_2\right)^2}-\frac{2-\left(p_2+p_3\right)}{\left(p_2+p_3\right)^2}-\frac{2-\left(p_1+p_3\right)}{\left(p_1+p_3\right)^2}+\frac{2-\left(p_1+p_2+p_3\right)}{\left(p_1+p_2+p_3\right)^2}$$
$$-\left(\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3}-\frac{1}{p_1+p_2}-\frac{1}{p_2+p_3}-\frac{1}{p_1+p_3}+\frac{1}{p_1+p_2+p_3}\right)^2$$

$$E(n)=\frac{3}{p}-\frac{3}{2p}+\frac{1}{3p}=\frac{11}{6}\frac{1}{p};D(n)=\frac{1}{p^2}\left(\frac{49}{36}-\frac{11}{6}p\right)-\text{для случая } p_1=p_2=p_3=p$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ. ПРИМЕР

ТОЖЕ САМОЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СВОЙСТВ МОМЕНТОВ И СВОЙСТВ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ:

$$n = n_1 + n_2 + n_3;$$

$$E(n_1 + n_2 + n_3) = E(n_1) + E(n_2) + E(n_3) = \frac{1}{3p} + \frac{1}{2p} + \frac{1}{p} = \frac{11}{6}\frac{1}{p};$$

$$D(n_1 + n_2 + n_3) = D(n_1) + D(n_2) + D(n_3) = \frac{1-3p}{9p^2} + \frac{1-2p}{4p^2} + \frac{1-p}{p^2} = \frac{1}{p^2}\left(\frac{49}{36} - \frac{11}{6}p\right);$$

X_i – *случайное время до выиграша следующих призов после выигрыша предыдущих*;

Все X_i *являются независимыми величинами в случае* $p_1 = p_2 = p_3 = p$;

$E(n_1) = \frac{1}{3p}$ – *время до выиграша любого первого приза* $(3p = p + p + p)$;

$E(n_2) = \frac{1}{2p}$ – *время до выиграша второго приза* $(2p = p + p)$;

$E(n_3) = \frac{1}{p}$ – *время до выиграша третьего приза* $(p = p)$.

ЗАДАЧА О СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИНАХ

N человек выстраиваются по росту в шеренгу (рост у всех разный) и случайным образом перемешиваются. Затем производится фотосъемка шеренги в профиль. Найти математическое ожидание и дисперсию числа увиденных людей. Для этого составим функции распределения и с учетом независимости всех величин получаем:

$$X_i = \begin{bmatrix} 0 \sim 1 - P(i) \\ 1 \sim P(i) = \dfrac{1}{n-i+1} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} E(X_i) = \dfrac{1}{n-i+1} \\ D(X_i) = \dfrac{1}{n-i+1} - \left(\dfrac{1}{n-i+1}\right)^2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow E(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_n) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \ldots + 1 = \sum_{i=1,n} \frac{1}{i}$$

$$\Rightarrow D(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = D(X_1) + D(X_2) + \ldots + D(X_n) = \sum_{i=1,n} \frac{1}{i} - \sum_{i=1,n} \frac{1}{i^2}$$

ЗАДАЧА О ПЛАНИРОВАНИИ ЭКСПЕРИМЕНТА

Задача о полете космического корабля. Известно, что поверхность целевой для космического корабля планеты более чем наполовину состоит из суши. У корабля имеется 2025 ножки и он может приземлиться на планету, если хотя бы 1013 ножек окажутся на суше. Сможет ли корабль приземлиться, когда окажется рядом с планетой?

$\varepsilon_i > 0, X_i -$ *отражает приземлилась ли* $i-$ *я ножка*

$Y_j = X_1 + X_2 + \ldots + X_{2024} -$ *количество приземлившихся ножек*

$$X_i = \begin{cases} 0 \sim 0,5-\varepsilon \\ 1 \sim 0,5+\varepsilon \end{cases} \Rightarrow E\left(X_i\right) = 0,5+\varepsilon_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E\left(X_1 + X_2 + \ldots + X_{2024}\right) = E\left(X_1\right) + E\left(X_2\right) + \ldots + E\left(X_{2024}\right) = 0,5 \cdot 2024 + \varepsilon = 1012 + \varepsilon,$$

$$E\left(Y\right) = \sum_{j=1,2024} jP_j = 1012 + \varepsilon \Rightarrow \text{если корабль не сможет приземлиться, тогда} \Rightarrow P_{1013} = P_{1014} = \ldots = P_{2024} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_1 + 2P_2 + \ldots + 1012P_{1012} = P_1 + 2P_2 + \ldots + 1011P_{1011} + 1012\left(1 - P_1 - P_2 - \ldots - P_{1011}\right) < 1012 \Rightarrow \text{противоречие!}$$

Корабль сможет приземлиться!

БЛАГОДАРЮ ЗА ВНИМАНИЕ!