Полная вероятность и формула_Байеса

Задача 1

Дано:

- Отношение числа отечественных (О) к иномаркам (И): `О = 1.5 * И`.
- Вероятность нештатной ситуации с отечественным: в 2 раза выше, чем с иномаркой.
- Произошла нештатная ситуация. Найти `P(О | Нештатная)`.

Решение:

1. **Введем гипотезы:**
   - H_1 = автомобиль отечественный.
   - H_2 = автомобиль иномарка.
2. **Найдем априорные вероятности гипотез.** Пусть количество иномарок `И = x`, тогда отечественных `О = 1.5x`. Общее количество автомобилей: `x + 1.5x = 2.5x`.
   - $P(H_1) = (1.5x) / (2.5x) = 1.5 / 2.5 = 3/5 = 0.6$
   - $P(H_2) = x / (2.5x) = 1 / 2.5 = 2/5 = 0.4$
3. **Найдем условные вероятности нештатной ситуации (событие А).** Пусть вероятность нештатной ситуации с иномаркой равна p. Тогда с отечественной: $2p$.
   - $P(A|H_1) = 2p$
   - $P(A|H_2) = p$
4. **Применим формулу Байеса:** $P(H_1|A) = (P(H_1) * P(A|H_1)) / (P(H_1) * P(A|H_1) + P(H_2) * P(A|H_2))$ $P(H_1|A) = (0.6 * 2p) / (0.6 * 2p + 0.4 * p) = (1.2p) / (1.2p + 0.4p) = (1.2p) / (1.6p) = 1.2 / 1.6 = 3/4 = 0.75$

Ответ: Вероятность того, что это отечественный автомобиль, равна **0,75**.

Задача 2

Дано:

- Урна 1: 10 шаров, 8 белых.
- Урна 2: 20 шаров, 4 белых.
- Из каждой урны извлекли по 1 шару.
- Из этих двух шаров случайно выбрали один. Найти вероятность, что он белый.

Решение:

1. **Рассмотрим возможные исходы извлечения двух шаров:**
   - $Б_1Б_2$ — из обеих урн вынули белый шар. $P(Б_1) = 8/10 = 0.8$, $P(Б_2) = 4/20 = 0.2$. Так как извлечения независимы: $P(Б_1Б_2) = 0.8 * 0.2 = 0.16$.
   - $Б_1Ч_2$ — из 1-й урны белый, из 2-й черный. $P(Б_1) = 0.8$, $P(Ч_2) = 1 - 0.2 = 0.8$. $P(Б_1Ч_2) = 0.8 * 0.8 = 0.64$.
   - $Ч_1Б_2$ — из 1-й урны черный, из 2-й белый. $P(Ч_1) = 2/10 = 0.2$, $P(Б_2) = 0.2$. $P(Ч_1Б_2) = 0.2 * 0.2 = 0.04$.
   - $Ч_1Ч_2$ — оба черные. $P(Ч_1) = 0.2$, $P(Ч_2) = 0.8$. $P(Ч_1Ч_2) = 0.2 * 0.8 = 0.16$.
2. **Теперь рассмотрим событие C — "выбранный из двух шаров шар — белый".**
   - Если произошло $Б_1Б_2$ (два белых), то вероятность выбрать белого: $P(C|Б_1Б_2) = 1$.
   - Если произошло $Б_1Ч_2$ (один белый, один черный), то вероятность выбрать белого: $P(C|Б_1Ч_2) = 1/2$.
   - Если произошло $Ч_1Б_2$ (один черный, один белый), то вероятность выбрать белого: $P(C|Ч_1Б_2) = 1/2$.
   - Если произошло $Ч_1Ч_2$ (два черных), то вероятность выбрать белого: $P(C|Ч_1Ч_2) = 0$.
3. **По формуле полной вероятности:** $P(C) = P(Б_1Б_2)*P(C|Б_1Б_2) + P(Б_1Ч_2)*P(C|Б_1Ч_2) + P(Ч_1Б_2)*P(C|Ч_1Б_2) + P(Ч_1Ч_2)*P(C|Ч_1Ч_2)$ $P(C) = (0.16 * 1) + (0.64 * 1/2) + (0.04 * 1/2) + (0.16 * 0)$ $P(C) = 0.16 + 0.32 + 0.02 + 0 = 0.5$

Ответ: Вероятность того, что выбран белый шар, равна **0,5**.

Задача 3

Дано:

- $P(Обнаружить \mid Болен) = 1 - \beta$ (Вероятность правильного обнаружения болезни)
- $P(Обнаружить \mid Здоров) = \alpha$ (Вероятность ложной тревоги)
- $P(Болен) = \gamma$ (Доля больных в популяции)
- Событие A: человек признан больным при обследовании.
- Найти: $P(Здоров \mid A)$

Решение:

1. **Введем гипотезы:**
   - H_1 = человек болен. $P(H_1) = \gamma$
   - H_2 = человек здоров. $P(H_2) = 1 - \gamma$
2. **Условные вероятности события A (положительный результат):**
   - $P(A|H_1) = 1 - \beta$
   - $P(A|H_2) = \alpha$

3. **По формуле полной вероятности найдем $P(A)$:** $P(A) = P(H_1)*P(A|H_1) + P(H_2)*P(A|H_2) = \gamma*(1-\beta) + (1-\gamma)*\alpha$
4. **По формуле Байеса найдем искомую вероятность:** $P(H_2|A) = (P(H_2) * P(A|H_2)) / P(A) = ((1 - \gamma) * \alpha) / (\gamma*(1-\beta) + (1-\gamma)*\alpha)$

Ответ: Вероятность того, что признанный больным человек на самом деле здоров, равна $P = (\alpha(1 - \gamma)) / (\gamma(1 - \beta) + \alpha(1 - \gamma))$.

Задача 4

Дано:

- $P(\text{дефект}) = p$
- $P(\text{забракован} \mid \text{дефект}) = \alpha$ (вероятность обнаружить дефект)
- $P(\text{забракован} \mid \text{исправен}) = \beta$ (вероятность ложной браковки)
- Найти:
    - $q_0 = P(\text{дефект} \mid \text{не забракован})$
    - $q_1 = P(\text{дефект} \mid \text{забракован})$

Решение:

1. **Введем события:**
    - D = прибор имеет дефект. $P(D) = p$
    - $И$ = прибор исправен. $P(И) = 1 - p$
    - $З$ = прибор забракован.
2. **Найдем вероятности брака и небрака (формула полной вероятности):**
    - $P(З) = P(D)*P(З|D) + P(И)*P(З|И) = p*\alpha + (1-p)*\beta$
    - $P(\text{не } З) = 1 - P(З) = 1 - p\alpha - (1-p)\beta$
3. **Найдем $q_1 = P(D|З)$ по формуле Байеса:** $q_1 = P(D|З) = (P(D) * P(З|D)) / P(З) = (p * \alpha) / (p\alpha + (1-p)\beta)$
4. **Найдем $q_0 = P(D| \text{ не } З)$. Сначала найдем $P(\text{не } З|D)$ и $P(\text{не } З|И)$:**
    - $P(\text{не } З|D) = 1 - P(З|D) = 1 - \alpha$ (дефектный прибор могут не забраковать)
    - $P(\text{не } З|И) = 1 - P(З|И) = 1 - \beta$ (исправный прибор могут принять)
    - Теперь по формуле Байеса: $q_0 = P(D| \text{ не } З) = (P(D) * P(\text{не } З|D)) / P(\text{не } З) = (p * (1 - \alpha)) / (1 - p\alpha - (1-p)\beta)$

Ответ:

- $q_0 = (p(1 - \alpha)) / (1 - p\alpha - \beta(1-p))$

- $q_1 = (p\alpha) / (p\alpha + \beta(1-p))$

Задача 5

Дано:

- $P(N = n) = p * (1-p)^{(n-1)}$, для $n \geq 1$ (геометрическое распределение).
- Для семьи с n детьми все 2^n комбинаций полов равновероятны.
- Найти вероятность того, что в семье ровно k мальчиков.

Решение:

1. **Используем формулу полной вероятности.** Событие M_k = в семье ровно k мальчиков. Гипотезы H_n = в семье ровно n детей, $n \geq 1$.
2. **Найдем $P(M_k \mid H_n)$.** Если в семье n детей, то число мальчиков K подчиняется биномиальному распределению с параметрами n и $1/2$.
   - Если $k > n$, то $P(M_k \mid H_n) = 0$.
   - Если $k \leq n$, то $P(M_k \mid H_n) = C^n_k * (1/2)^k * (1/2)^{(n-k)} = C^n_k / 2^n$.
3. **По формуле полной вероятности:** $P(M_k) = \Sigma_{n=1}^{\infty} P(H_n) * P(M_k \mid H_n) = \Sigma_{n=k}^{\infty} [p(1-p)^{(n-1)} * (C^n_k / 2^n)]$ (Суммирование начинается с $n = k$, так как при $n < k$ вероятность равна 0).
4. **Упростим выражение:** $P(M_k) = p * \Sigma_{n=k}^{\infty} C^n_k * ((1-p)/2)^n / (1-p)$ (вынесем p и учтем $(1-p)^{(n-1)} = (1-p)^n / (1-p)$) $P(M_k) = p/(1-p) * \Sigma_{n=k}^{\infty} C^n_k * x^n$, где $x = (1-p)/2$.
5. **Воспользуемся известным разложением:** $\Sigma_{n=k}^{\infty} C^n_k * x^n = x^k / (1-x)^{(k+1)}$ для $|x| < 1$. (Это следует из биномиального ряда). Подставим: $P(M_k) = p/(1-p) * [x^k / (1-x)^{(k+1)}] = p/(1-p) * [((1-p)/2)^k / (1 - (1-p)/2)^{(k+1)}]$
6. **Упростим знаменатель:** $1 - (1-p)/2 = (2 - (1-p)) / 2 = (1+p)/2$ Подставим: $P(M_k) = p/(1-p) * [((1-p)^k / 2^k) / (((1+p)^{(k+1)}) / (2^{(k+1)}))] = p/(1-p) * [(1-p)^k / 2^k] * [2^{(k+1)} / (1+p)^{(k+1)}]$ $P(M_k) = p/(1-p) * (1-p)^k * 2 / (1+p)^{(k+1)}$ $P(M_k) = (2p) / (1+p)^{(k+1)} * (1-p)^{(k-1)}$

Ответ: Вероятность того, что в семье ровно k мальчиков, равна $P(M_k) = (2p(1-p)^{(k-1)}) / (1+p)^{(k+1)}$.