Симонов Сергей Львович. 14 weeks =Простой курс= 09.09.25.

Теория вероятностей. Лекц. + семинар per week.

Формула оценки: I — Работа в семестре (50б); II — Экзамен (50б)

① Посещаемость (1б) за 1 семинар: Σ: max = 14 б

② 2 д.з. по 10-15 задач в каждом. 10б за 1 задание. $\Sigma_{max} = 20$б.

③ Аудиторная к.р. $\Sigma = 16$б.

Литература: 1) Б.В. Гнеденко "Курс теории вероятностей"

2) А.Н. Колмогоров "Основные понятия теории вероятностей". 1974г. М: Наука.

3) А.А. Боровков "Теория вероятностей" М: 1976г. Наука

4) В. Феллер "Введение в ТВ и её приложения. в 2х томах: М: Мир, 1984г. ! interesting

---

Лекция 1. Элементы комбинаторики.

Комбинаторное правило произведения:

$X = \{x\}$ → строки длины k. (2) $(x_1^* x_2^* x_3^* \dots x_k^*)$

(1) $(x_1 x_2 x_3 \dots x_k)$

Строки одинаковы (равны), если сост. из 1 и того же набора элементов

$x_i = x_i^*$ $\forall i = 1, 2, 3 \dots k$. В прот. случае строки разл.

Утв. Пусть эл-т x_1 в строку (1) м.б. выбран числом способов n_1

При выбр. эл-те x_1 эл-т x_2 м.б. выбран числ. способов n_2

При выбранных эл-тах x_1, x_2, x_{k-1} эл-т x_k м.б. выбран числом способов n_k.

Тогда число различных строк вида (1) $= N (n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k)$

P.S.: задачи на состав. нужно с джинсами и свитерами или шариками мороженого

Док-во: 1) $k = 1$ – очевидно

2) $k = 2$: (x_1, x_2)
стр. из 2х эл-тов

x_1: $A_{\cancel{k}}^1, A_{\cancel{k}}^2 \dots A_k$ – число способов, с помощью кот. м.б выбран эл-т x_1.

объект A или B = m+n способов

7 платных IDE и 8 бесплатн. => 15 вариантов

x_2: $B_{i1}, B_{i2} \dots B_{in_2}$
$i = 1, 2 \dots n_2$

$A_1 B_{11}$ $A_1 B_{12}$ ... $A_1 B_{1n_2}$

— — — — — — — — — — —

$A_{n_1} B_{n_1 1}$ $A_{n_1} B_{n_1 2}$ ... $A_{n_1} B_{n_1 n_2}$ => $n_1 \cdot n_2$

q. e. d. ■

1* Если объект A можно выбрать m способами, объект B можно выбрать n способами после каждого такого выбора объекта A, то для пары "A и B" есть m·n вариантов выбора. *1

2 шифр из 10 распр: сначала берём 1 из 10, потом 1 из ост. 9 => 10·9=90

3) $k=3$ $\underbrace{(x_1, x_2}_{z}, x_3) \longrightarrow (z, x_3) \Rightarrow (n_1 \cdot n_2 \cdot n_3)$

z — $n_1 \cdot n_2$, x_3 — n_3

$n! = \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n}$ — форм. Стирлинга.

Серийник А, В, Б, Г => 4!.
А - 4 поз; Б - 3 поз; В - 2 поз; Г - 1 поз => 4·3·2·1 = 4! ч. т. д.

Число перестановок из n эл-тов

$$\boxed{P_n = n!}$$

$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

$$\boxed{n! = n(n-1)!}$$

Без повторений

- число способов расположить n предметов (эл-тов) в ряд.

$P_1 = 1$
$P_2 = 2$
$P_3 = 6$
$P_n = n!$

Док-во: n людей с разными именами

Рукопож. рас → (имя чел 1 (n), имя чел. 2 $(n-1)$, имя чел n (1))

$N = n \cdot (n-1) \cdot 1 = n!$ Пароль из букв: qwerty => 6! способ пароля

4! = 24
5! = 120
6! = 720
7! = 5040
8! = 40 320
9! = 362880
10! = 3628800

Число сочетаний из n эл-тов по k эл-там

доп. сайт. в-ров вариации объектов

C_n^k число способов выбрать из n эл-тов k эл-тов без учёта порядка следования эл-тов в выборке. $(k = 1, 2, \ldots n)$

/* не важен порядок */

$$\boxed{C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}} = \frac{A_n^k}{k!}$$

Задаче про выбор, где не важен порядок, т.е. k из n без учёта

$n = 3$ $k = 2$

□△○

□△ □○ △○

$C_3^2 = 3$

Док-во: из n эл-тов выберем k эл-тов и расп. их в строку. Посчитаем число разл. строк.

$(x_1\, x_2 \ldots x_k)$
n $n-1$ $\underbrace{n-(k-1)}_{\text{окк}}$

$N = n(n-1)\ldots(n-(k-1))$ =>

fix набор выбр. эл-тов — $k!$

поменяю 1 эл-т — $k!$

меня какой-то эл-т поменяю — $k!$

C_n^k

$\underbrace{k! + k! + k!}$

ex: Чемпионат, надо подборку по фильмам в качестве рекомендации пользователям. Порядок важен, т.к. от этого зависит, в каком порядке сервис будет рекомендовать фильмы. 4 [illegible] 1ый шаг [illegible] и много фильмов 3 варианта $= 4 \cdot 3 = 12$

$$n(n-1)\ldots(n(k-1)) = k! \cdot C_n^k$$

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-(k-1))}{k!} \cdot \frac{(n-k)!}{(n-k)!}$$

7 путей, 4 поезда:

$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 42 \cdot 20 = 840$

2. т. д.

Число размещений из n эл-тов по k эл-там

A_n^k – число способов выбрать из n эл-тов k эл-тов с учётом порядка следования эл-тов в выборке.

Теперь важен не только набор выбр. эл-тов, но и их порядок.

$$\boxed{A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

/* без повтор. эл-тов */

$n = 3 \quad k = 2$

□, Δ, O

□Δ □O ΔO
Δ□ O□ OΔ $\Big\}\, 6$

$A_3^2 = 6$

Док-во:

$$(x_1, x_2, \ldots x_k)$$
$$n \quad n-1 \quad n-(k-1)$$

$$N = A_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1)$$

$$A_n^k = C_n^k \cdot P_k$$

Кол-во замков: 3 цифры без повтор. цифр в замке: $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$
1 разряд 2р. 3р.

$1000 = 10^3$ если может цифры повтор.

Упр: Сколькими 4 дальних др. $= 7 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$

спорт. победит. из 3х мест, где 10 претендентов: $\frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = \frac{7!\,8 \cdot 9 \cdot 10}{7!} = 8 \cdot 9 \cdot 10$

Свойства C_n^k

● $C_n^0 = 1 \quad C_n^1 = n \quad C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$

1. $C_n^k = C_n^{n-k}$
2. $C_n^{k+1} = C_{n}^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$ $\Big\}$ проверяются "в лоб"
3. $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$

$C_n^0 = C_n^n = 1$

$C_n^k = C_n^{n-k}$

● $C_n^{m+1} + C_n^m = C_{n+1}^m$ тождество Паскаля

$$C_n^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

перестановка с повт. эл-тами: $\boxed{P_{n_1 \dots n_k} = \dfrac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}}$

1) Сколько перестановок было бы, если бы все компоненты были ~~одинаковыми~~ разными: $n!$

2) Потом делим ~~на~~ это число на то, сколько раз можно переставить повторяющиеся эл-ты между собой (из или по-простому: сколько и есть повт. эл-тов). $\underline{Ex}$ password $= \dfrac{8!}{2! \cdot 1! \cdot 1! \dots 1!} = 20160$

---

④ $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$ Этому равенству можно дать следующее истолкование:

Найдем число подмнож-в множ-ва, сост. из n эл-тов

$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^k$

сумма этих чисел всех возможных подмножеств, которое можно составить из n различных элементов:

C_n^0 - пустое подмнож-во

$C_n^1 = n$ = число всех подмнож., сост. из 1 эл-та

C_n^2 = число $= \frac{n(n-1)}{2}$ всех подмн., сост. из 2х эл-тов

$1, 2 \dots n$

Строка: $(\underbrace{+}_{1n}, \underbrace{-}_{2n}, \dots, \underbrace{+}_{n_n})$

$(+, -, +, -, \dots, -)$

2 спос. 2 спос. 2 сп.

$(+$ или $-)$ " 2^n (как биты)

$N_{\text{число разл. строк}} = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \dots 2}_{n \text{ раз}} = 2^n$

C_n^{n-1} = число подмн., сост. из $(n-1)$ эл-та

$C_n^n = 1$ - ~~само~~ подмн., сост. с ися множеством.

$\underline{Ex}$

① Сколько способов разместить r шаров в n ящиков, если все шары и ящики различны OK✓

Решение: по правилу произв.: $r \cdot n$ $\Rightarrow N = n^2$ $\quad \underbrace{n \cdot n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_{r \text{ раз}}$

Конкр. размещение $\Leftrightarrow$ строка из r позиций

$\underbrace{\quad}_{1} \quad \underbrace{\quad}_{2} \dots \underbrace{\quad}_{n}$

для решения и мод-из уг. Феллера:

A B) шары $\leftarrow$ ящики м.б. строку

(1 2 3) ящики $3^2 = 9$

1 шар 2й шар r шар

n вар. ящиков $\quad$ n вар ящиков $\quad$ n вар ящиков

$A \to 1$ $B - 1$ $\quad$ $A \to 1$ $B \to 2$

$A \to 2$ $B - 2$ $\quad$ A_1 $B \to 3$

$A \to 3$ $B - 3$ $\quad$ $A_2 \to B_1$

$A_2 - B_2 \dots$

n^r ~~[illegible]~~ n $= 365$

~~[illegible]~~

Задача с днями

② ? способов можно r неразличимых шаров по n разл. ящикам.

Конкр. раскладка шаров по ящикам

$\underbrace{1\ldots1}_{}$ 0 $\underbrace{1\ldots1}_{}$ 0…0 $\underbrace{1\ldots1}_{}$

число единиц, совп. с числом шаров в 1 ящ. | …, совп. с числ. шаров во 2 ящ. | …, совп. с числ. шаров в n ящике

$0 : n-1$

единички: r

$\Rightarrow r+(n-1)$ r единиц и $(n-1)$ нулей

конкретн. пример: r-2 шара, $n=3$ ящ.

1100
1010
1001
0110
0101
0011

6 вар

$C_4^2 = 6 = C^r_{r+(n-1)}$

$$C^{n-1}_{r+(n-1)} = C^{r}_{r+(n-1)}$$

③ Аналогичная задача с др. предметной оболочкой.

Каким числом способов можно купить 10 акций из четырёх предприятий?

$\underbrace{1\,1\,1.\,1}_{}$ 0 $\underbrace{11.1111}_{}$ 0 111 0 1

число купл. акций I-го предприятия | II | III | IV

$$C^{10}_{10+3} = C^{3}_{10+3}$$