Лекция 2

Эксперимент. События
Операции над событиями.
Понятие вероятности. Классическая формула подсчета вероятности
и общий аксиомат. подход Колмогорова

$\mathcal{E}$ — эксперимент

$\mathcal{E} \longrightarrow \underbrace{A, B, C, \ldots}_{\text{события}}$ — исходы эксперимента

Особые события: $\varnothing$ невозможное
Ω достоверное

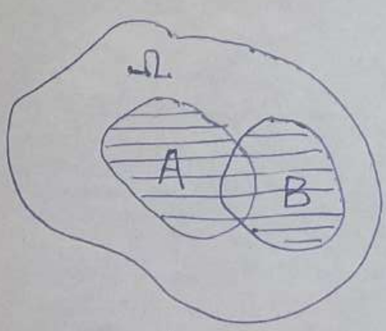
$A_1 + A_2 + \ldots + A_n$ — сумма событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$

$A_1 A_2 \ldots A_n$ — произведение событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$

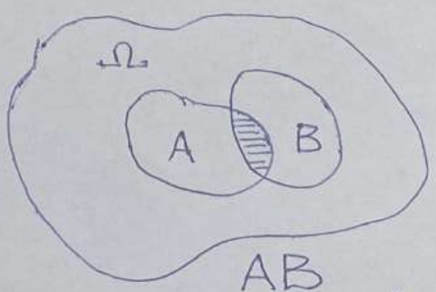
$\bar{A}$ — событие, противоположное событию A

Геометрическая интерпретация:

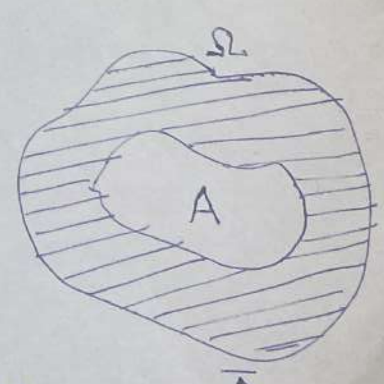
$\mathcal{E} \longleftrightarrow$ вбрасывание точки в область Ω



$A+B$
заштриховано



AB
заштриховано



$\bar{A}$
заштриховано

A и B несовместны, если не могут произойти одновременно в одном эксперименте.

События A и B называются эквивалентными, если из того факта, что произошло A, немедленно следует, что произошло B, и наоборот. В этом случае пишут

$$A=B.$$

Свойства операций над событиями

$$A+A=AA=A\ ,\ A+B=B+A\ ,\ AB=BA,$$

$$(A+B)+C=A+(B+C)\ ,\ (AB)C=A(BC),$$

$$A(B+C)=AB+AC,$$

$$A+\bar{A}=\Omega,\ AA=\varnothing,\ A+\Omega=\Omega,\ A+\varnothing=A,\ A\varnothing=\varnothing$$

Более содержательные свойства:

$$\overline{A+B}=\bar{A}\cdot\bar{B}\ ,\quad \overline{AB}=\bar{A}+\bar{B}$$

их обобщение

$$\overline{A_1+A_2+\ldots+A_n}=\bar{A}_1\cdot\bar{A}_2\cdot\ldots\cdot\bar{A}_n$$

$$\overline{A_1A_2\ldots A_n}=\bar{A}_1+\bar{A}_2+\ldots+\bar{A}_n$$

Приведённые равенства могут быть доказаны или опровергнуты с помощью следующих таблиц:

Пример:

$$A(B+C) = AB + AC \ ?$$

Доказательство:

A	B	C	B+C	AB	AC	A(B+C)	AB+AC
+	+	+	+	+	+	+	+
+	+	−	+	+	−	+	+
+	−	+	+	−	+	+	+
−	+	+	+	−	−	−	−
+	−	−	−	−	−	−	−
−	+	−	+	−	−	−	−
−	−	+	+	−	−	−	−
−	−	−	−	−	−	−	−

Знак „+" в ячейке таблицы означает, что соответствующее событие произошло, знак „−" — не произошло. В первых трёх столбцах перебираются все возможные варианты для тройки событий A, B, C, а последующие столбцы — производные от первых трёх. Совпадение столбцов под шапками A(B+C) и AB+AC и означает эквивалентность соответствующих событий.

Пример. Пусть $\mathcal{E}$ — бросание трёх монет. Пусть монеты пронумерованы и событие Γ_1 — выпадение герба на монете 1

Γ_2 — — " — на монете 2

Γ_3 — — " — на монете 3

Выразим через $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ следующие события:

A – выпадение одного герба и двух цифр;
B – выпадение не более одного герба;
C – число выпавших гербов меньше числа выпавших цифр.

Решение:

1) $A = \bar{Г}_1 \bar{Г}_2 Г_3 + \bar{Г}_1 Г_2 \bar{Г}_3 + Г_1 \bar{Г}_2 \bar{Г}_3$

2) $B = A + \bar{Г}_1 \bar{Г}_2 \bar{Г}_3 = \bar{Г}_1 \bar{Г}_2 Г_3 + \bar{Г}_1 Г_2 \bar{Г}_3 + Г_1 \bar{Г}_2 \bar{Г}_3 + \bar{Г}_1 \bar{Г}_2 \bar{Г}_3$

3) $C = B$, т.е. событие C эквивалентно событию B.

Вероятность $P\{A\}$

– количественная оценка степени ожидания того, что при проведении $\mathcal{E}$ интересующее нас событие A произойдёт.

Первоначально: статистический подход к $P\{A\}$

$$P\{A\} \approx \frac{N_A}{N} \text{ при больших } N,$$

или

$$P\{A\} = \lim_{N\to\infty} \frac{N_A}{N}, \qquad (*)$$

где N – общее число проведённых экспериментов, N_A – число экспериментов, в которых произошло A.

Недостаток подхода (*): на основе определения (*) не удаётся построить строгую матем. дисциплину.

Классическая формула подсчета вероятности

Рассмотрим эксперимент $\mathcal{E}$, все результаты которого м.б. описаны с помощью конечного числа равноожидаемых исходов

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n,$$

причём никакие два не могут произойти одновременно: $\omega_i \omega_j = \varnothing \ \forall i \neq j$.

Пусть к событию A приводят исходы $i_1, i_2, \ldots, i_m$, $m \leq n$, и только они. Тогда по определению положим

$$P\{A\} = \frac{m}{n}. \qquad (**)$$

n – общее число исходов; m – число благоприятных исходов

Пример $\mathcal{E}$ – бросание игрального кубика;

исходы $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$: ω_1 – выпало одно очко
. . . .
ω_6 – выпало шесть очков
$n = 6$

Событие A – выпало четное число очков. Тогда $m = 3$ $(\omega_2, \omega_4, \omega_6)$ и

$$P\{A\} = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Следствие из (**):

$$0 \le P\{A\} \le 1, \quad P\{\varnothing\} = 0, \quad P\{\Omega\} = 1,$$

$$P\{\bar{A}\} = 1 - P\{A\}, \quad P\{A+B\} = P\{A\} + P\{B\} - P\{AB\}$$

если A и B несовместны, то

$$P\{A+B\} = P\{A\} + P\{B\}.$$

Пример 2. В урне находятся N одинаковых по размеру и внешнему виду шаров; среди них M белых и $(N-M)$ черных. Из урны случайным образом вынимают n шаров. Чему равна вероятность того, что среди них будет m белых?

Решение:

эксперимент $\mathcal{E}$ — извлечение n шаров из урны

событие A — среди извлеченных n шаров белых оказалось m

$$\underbrace{\circ\circ\ldots\circ}_{M}\underbrace{\bullet\bullet\ldots\bullet}_{N-M} \qquad \begin{pmatrix} n \le N \\ n-m \le N-M \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\underbrace{\circ\circ\ldots\circ}_{m}\underbrace{\bullet\bullet\ldots\bullet}_{n-m}$$

$$P\{A\} = \frac{\{\text{Число благоприятных исходов}\}}{\{\text{Общее число исходов}\}} = \frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$$

Пример 3 Найти вероятность того, что из 50 студентов, присутствующих на лекции, хотя бы двое имеют одну и ту же дату рождения.

Решение: по комбинаторному правилу произведения:

$n = 365^{50}$ — общее число равновозможных вариантов распределения д.р. в году (пусть в году 365 дней)

$$\Big(\overset{365\text{ сп.}}{\underset{\text{1-й студ.}}{\downarrow}},\ \overset{365\text{ сп.}}{\underset{\text{2-й студ}}{\downarrow}},\ \overset{-\shortparallel-}{\underset{\text{3-й студ}}{\downarrow}},\ \ldots,\ \overset{-\shortparallel-}{\underset{\text{50-й студент}}{\downarrow}}\Big)$$

Пусть $\overline{m}$ — число неблагоприятных вариантов, т.е. когда все родились в разные дни.

Тогда

$$\overline{m} = 365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365-49) = A_{365}^{50}$$

Значит,

$$P\left\{\begin{array}{l}\text{хотя бы}\\ \text{двое имеют}\\ \text{одну и ту}\\ \text{же дату рожд.}\end{array}\right\} = \frac{m}{n} = \frac{n-\overline{m}}{n} =$$

$$= 1 - \frac{\overline{m}}{n} = 1 - \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \ldots \cdot \frac{365-49}{365} = 0{,}97\ldots$$

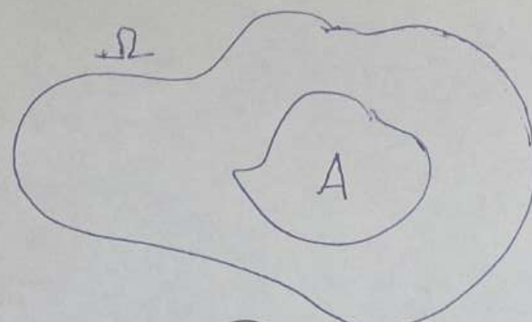
Геометрический подход к подсчёту вероятности (классическая формула в случае континуума числа исходов ω)

$\mathcal{E}$ ⟷ $\left\{\text{вбрасывание случайным образом точки в некоторую область } \Omega\right\}$

Эксперимент

Факт проведения эксперимента мы интерпретируем с вбрасыванием точки в область Ω: результат эксперимента однозначно определяет точку внутри Ω, а любая точка из Ω даёт исчерпывающую информацию, чем закончился эксп-т.

Событие A ⟷ $\left\{\text{попадание в подмножество } A \text{ из } \Omega\right\}$



По классической формуле

$$P\{A\} = \frac{m}{n},$$ но теперь m и n бесконечные

Условно $m \sim \operatorname{mes} A$, $n \sim \operatorname{mes} \Omega$. Поэтому можно принять

$$P\{A\} = \operatorname{mes} A / \operatorname{mes} \Omega$$

<u>Пример 4</u> (Задача о встрече)

Двое договорились встретиться в условленном месте между 00:00 и 01:00 (полночью и часом ночи). Пришедший первым ждёт 20 мин и уходит, если второй человек не приходит. Каждый обязательно приходит в условленное место, но момент прихода — любой и равноожидаемый из интервала от 00:00 до 01:00. Какова вероятность того, что встреча произойдёт?

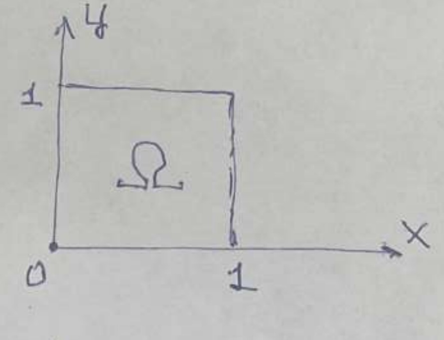
<u>Решение:</u>

Перенумеруем людей: I и II

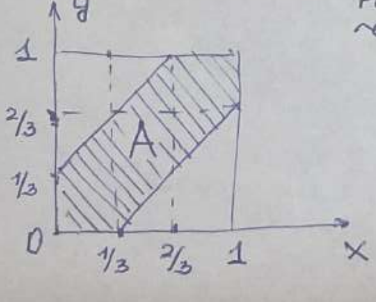
Пусть x — момент прихода человека I

y — момент прихода человека II

Тогда $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$.



Условие встречи: $|x-y| \le \frac{1}{3}$. Задача сводится к определению области $|x-y| \le \frac{1}{3}$ внутри Ω:



попадание в A означает, что встреча состоялась

$$P\{A\} = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{1-2\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\right)}{1} = \frac{5}{9}$$

Общий аксиоматический подход Колмогорова А.Н.

$\mathcal{E} \longrightarrow \Omega = \{\omega\}$ – множество элементарных исходов

$\mathcal{F}$ – б-алгебра подмножеств на Ω, т.е. система подмножеств такая, что

1) $\Omega \in \mathcal{F}$, $\varnothing \in \mathcal{F}$
2) если $A \in \mathcal{F}$, то $\overline{A} \in \mathcal{F}$
3) если $A_n \in \mathcal{F}$ $\forall n = 1, 2, \dots$, то

$$\bigcup_n A_n \in \mathcal{F}, \quad \bigcap_n A_n \in \mathcal{F}$$

Элементы б-алгебры $\mathcal{F}$ называются событиями.

<u>Акс. 1</u> Каждому событию A поставлено в соответствие неотрицательное число $P\{A\}$ (называемое вероятностью)

<u>Акс. 2</u> $P\{\Omega\} = 1$

<u>Акс. 3</u> Если события $A_1, A_2, \dots, A_k, \dots$ попарно несовместны, то

$$P\{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots\} = P\{A_1\} + P\{A_2\} + \dots + P\{A_n\} + \dots .$$

Тройка $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ называется вероятностным пространством.

Частный случай:

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$

$\mathfrak{S}$-алгебра включает все 2^n подмножеств множества Ω.

Если все исходы $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ равновозможны, ~~а~~ и для любого события $A \subset \mathfrak{S}$ определить

$$P\{A\} = \frac{m}{n},$$

где m – число тех исходов из $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, которые приводят к A, то утверждение аксиом 1, 2, 3 будут выполнены.