```python
from scipy.stats import norm
```

```python
print(2*norm.cdf(0.881)-1)
```

```
0.6216821800095524
```

Задача 1 (Аналогична задаче о картах без возвращения)

Условие: В отделе из 20 сотрудников 8 владеют английским языком. Для представления на выставку случайным образом выбирают 5 человек. Какова вероятность, что среди выбранных окажется ровно 2 сотрудника, владеющих английским?

Решение:

Это классическая задача на гипергеометрическое распределение.

· Общее число исходов: число способов выбрать 5 человек из 20 $C_{20}^{5} = 15504$

· Число благоприятных исходов: нужно выбрать 2 человек из 8 владеющих английским и 3 человек из 12 не владеющих $C_{8}^{2}C_{12}^{3} = 28 * 220 = 6160$

· Вероятность: $P = 6160/15504 \approx 0.397$

Ответ: Вероятность составляет $\approx 0.397$ или 39.7%.

---

Задача 2 (Аналогична задаче о днях рождения и месяцах)

Семь писем случайным образом раскладывают по восьми пронумерованным ящикам. Какова вероятность того, что ровно два ящика окажутся пустыми?

Решение:

Это задача на комбинаторику и принцип включения-исключения.

1. Общее число исходов: Каждое из 7 писем можно независимо положить в любой из 8 ящиков $8^7 = 2097152$ способов
2. Число благоприятных исходов:

   Шаг 1: Выберем 2 ящика, которые останутся пустыми $C_{8}^{2} = 28$ способов.

   Шаг 2: Распределим 7 писем по оставшимся 6 ящикам (8 - 2 = 6) так, чтобы ни один из этих 6 ящиков не был пустым. Это число сюръекций (накрывающих отображений) из 7-элементного множества (писем) на 6-элементное множество (ящиков). Число сюръекций вычисляется по формуле включения-исключения: $S(7,6) = 6^7 - C_{6}^{1}5^7 + C_{6}^{2}4^7 - C_{6}^{3}3^7 + C_{6}^{4}2^7 - C_{6}^{5}1^7$

   Вычислим:

   · $6^7 = 279936$

$\cdot\ C(6,1) * 5^7 = 6 * 78125 = 468750$

$\cdot\ C(6,2) * 4^7 = 15 * 16384 = 245760$

$\cdot\ C(6,3) * 3^7 = 20 * 2187 = 43740$

$\cdot\ C(6,4) * 2^7 = 15 * 128 = 1920$

$\cdot\ C(6,5) * 1^7 = 6 * 1 = 6$

$S(7,6) = 279936 - 468750 + 245760 - 43740 + 1920 - 6 = 12120$

Шаг 3: По правилу произведения, число благоприятных исходов: $28 * 12120 = 339360$.

3. Вероятность: P = 339360 / 2097152 ≈ 0.1618

Ответ: Вероятность составляет $\approx 0.162$ или 16.2%.

---

Задача 3 (Аналогична задаче об опечатках)

Условие: На телефонную станцию в течение часа в среднем поступает 180 вызовов. Какова вероятность того, что за данную минуту поступит ровно 4 вызова?

Решение:

Эта задача решается с помощью распределения Пуассона, которое моделирует число редких событий на фиксированном интервале времени.

· Среднее число событий за интервал: Если в час (60 минут) поступает 180 вызовов, то среднее число вызовов в минуту составляет: λ = 180 / 60 = 3 вызова в минуту.

· Пусть случайная величина X — число вызовов за минуту. Тогда X ~ Poi(λ = 3).

· Вероятность того, что за минуту поступит ровно 4 вызова: $P(X=4) = (\lambda^4 * e^{-\lambda})/(4!) = (3^4 * e^{-3})/24$

· Вычисляем: $3^4 = 81$

$e^{-3} \approx 0.049787$

$P(X=4) = (81 * 0.049787)/24 \approx 4.033/24 \approx 0.168$

Ответ: Вероятность того, что за данную минуту поступит ровно 4 вызова, составляет $\approx 0.168$ или 16.8%.

1. Задача о картах

Найти вероятность того, что среди 13 карт, наугад выбранных из колоды в 52 карты, имеется ровно две карты красной масти. Сравнить с вероятностью для испытаний Бернулли (с возвращением).

Решение:

Случай 1: Без возвращения (Гипергеометрическое распределение)

В колоде 26 красных карт (черви + бубны) и 26 чёрных карт. Нас интересует вероятность вытащить ровно 2 красные карты и, следовательно, 11 чёрных карт.

Общее число способов выбрать 13 карт из 52:

$C_{52}^{13}$

Число благоприятных исходов:выбрать 2 красные из 26 и 11 чёрных из 26.

$C_{26}^{2}C_{26}^{11}$

Искомая вероятность:

$P_{\text{гипер}} = C_{26}^{2}C_{26}^{11}/C_{52}^{13}$

Случай 2: С возвращением (Биномиальное распределение)

В этом случае вероятность вытащить красную карту при каждом извлечении постоянна и равна $p = 26/52 = 0.5$. Проводится $n = 13$ независимых испытаний Бернулли.

Вероятность получить ровно 2 успеха (красная карта) в 13 испытаниях: $P_{\text{бином}} = C_{26}^{2}(0.5)^{2}(1-0.5)^{(13-2)} = C_{26}^{2}(0.5)^{13}$

Сравнение:

Численные значения:

$C_{26}^{2} = 325 \; C_{26}^{11} = 7726160$

$C_{52}^{13} \approx 635013559600$

P_гипер = (325 * 7726160) / 635013559600 ≈ 0.003954 ≈ 0.395%

$C_{13}^{2} = 78$

$P_{\text{бином}} = 78 * (1/8192) \approx 0.009521 \approx 0.952$

Вывод: Вероятность в схеме Бернулли ( $0.95$ более чем в два раза выше, чем в гипергеометрической схеме ( $0.40$.

---

2. Задача о днях рождения и месяцах

Найти вероятность того, что дни рождения шести случайных людей приходятся на какие-либо два месяца, оставляя ровно десять месяцев свободными.

Решение:

1. Выберем 2 месяца, которые будут "занятыми". Это можно сделать C(12, 2) способами.
2. Теперь нужно распределить 6 дней рождений по этим 2 выбранным месяцам так, чтобы ни один из этих двух месяцев не был пустым. Это задача о числе сюръективных (т.е. накрывающих все элементы области значений) отображений 6-элементного множества на 2-элементное множество. Общее количество способов распределить 6 дней рождений по 2 месяцам (без ограничений): $2^{6} = 64$. Из них нужно вычесть 2 неблагоприятных варианта, когда все дни рождения приходятся только на

один из этих двух месяцев (т.е. когда второй месяц остаётся пустым). Таким образом, количество способов, где оба выбранных месяца заняты: $2^6 - 2 = 64 - 2 = 62$.
3. Общее количество всех возможных распределений 6 дней рождений по 12 месяцам (без ограничений): $12^6$.

Вероятность равна:

$P = [C_{12}^2(2^6 - 2)]/(12^6) = [66 \cdot 62]/(12^6) = 4092/2985984 \approx 0.00137$

Ответ: $P \approx 0.00137$

---

3. Задача об опечатках

Книга в 300 страниц содержит 100 опечаток. Найти вероятность того, что на заданной странице окажется не менее трёх опечаток.

## Решение

1. **Находим среднее число опечаток на одной странице (λ)** Всего в книге 100 опечаток, разбросанных по 300 страницам. Если предположить, что опечатки распределяются равномерно и независимо, то среднее количество опечаток на одной странице равно: $\lambda = \frac{100}{300} = \frac{1}{3} \approx 0.3333$
2. **Применяем формулу Пуассона** Формула Пуассона позволяет найти вероятность того, что на заданной странице будет ровно `k` опечаток, если в среднем их происходит `λ`: $P(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ где `e` — основание натурального логарифма (e ≈ 2.71828).
3. **Анализируем нужное нам событие** Нас интересует вероятность события «на заданной странице окажется **не менее трёх** опечаток». Это событие состоит из всех исходов, где опечаток 3, 4, 5 и так далее. Обозначим это событие как `A`: $P(A) = P(3) + P(4) + P(5) + \ \ldots$
4. **Используем противоположное событие** Вычислять бесконечную сумму неудобно. Гораздо проще найти вероятность противоположного события «на странице **меньше трёх** опечаток», то есть 0, 1 или 2 опечатки, и вычесть её из 1. $P(A) = 1 - [P(0) + P(1) + P(2)]$
5. **Вычисляем вероятности P(0), P(1) и P(2)** Подставим в формулу Пуассона значение `λ = 1/3`.
   - **Вероятность 0 опечаток:** $P(0) = \frac{(1/3)^0 \cdot e^{-1/3}}{0!} = \frac{1 \cdot e^{-1/3}}{1} \approx 0.7165$
   - **Вероятность 1 опечатки:** $P(1) = \frac{(1/3)^1 \cdot e^{-1/3}}{1!} = \frac{1/3 \cdot e^{-1/3}}{1} \approx 0.2388$
   - **Вероятность 2 опечаток:** $P(2) = \frac{(1/3)^2 \cdot e^{-1/3}}{2!} = \frac{1/9 \cdot e^{-1/3}}{2} \approx 0.0398$
6. **Находим итоговую вероятность** Сначала найдем вероятность того, что опечаток меньше трёх: $P(0) + P(1) + P(2) \approx 0.7165 + 0.2388 + 0.0398 = 0.9951$ Теперь найдем искомую вероятность: $P(A) = 1 - 0.9951 = 0.0049$

Ответ: Вероятность того, что на заданной странице окажется не менее трёх опечаток, приблизительно равна **0,0049**.

4. Задача о спичках Банаха

Найти вероятность того, что когда математик первый раз вынет пустую коробку, в другой коробке окажется $r$ спичек.

Решение:

Процесс заканчивается, когда математик в (N+1)-й раз пытается взять спичку из одной из коробок (которая к этому моменту уже пуста). На момент окончания в другой коробке осталось r спичек (r = 0, 1, ..., N). Это означает, что всего было извлечено (N - r) спичек из этой коробки.

Обозначим коробки A и B. Событие "коробка A опустела, а в коробке B осталось r спичек" симметрично событию "коробка B опустела, а в коробке A осталось r спичек". Достаточно найти вероятность одного из них и умножить на 2.

Рассмотрим случай, когда первой опустела коробка A. Это произошло на (N + 1) + (N - r) = 2N - r + 1-м шаге (из коробки A взяли N+1 раз – последний раз уже пустую, а из коробки B – (N - r) раз).

Чтобы такой исход реализовался, на последнем, (2N - r + 1)-м шаге математик должен был обратиться к пустой коробке A. До этого момента он должен был N раз взять спичку из A и (N - r) раз из B, причём порядок этих обращений может быть любым, лишь бы последним обращением к коробке A был тот самый (N+1)-й раз, когда она уже пуста.

Количество последовательностей, в которых коробка A выбирается N раз, а коробка B – (N - r) раз на первых 2N - r шагах, равно числу способов разместить N выборов коробки A на 2N - r позициях: C(2N - r, N).

Каждая конкретная последовательность из (2N - r + 1) шага имеет вероятность (1/2)^(2N - r + 1), так как выбор коробки на каждом шаге равновероятен.

Таким образом, вероятность того, что первой опустеет коробка A и в коробке B останется r спичек, равна: P_A = C(2N - r, N) * (1/2)^(2N - r + 1)

Из соображений симметрии, вероятность того, что первой опустеет коробка B и в коробке A останется r спичек, точно такая же: P_B = P_A.

Искомая полная вероятность (безразлично, какая именно коробка опустела первой) равна: P(r) = 2 * C(2N - r, N) * (1/2)^(2N - r + 1) = C(2N - r, N) * (1/2)^(2N - r)

Ответ: P(r) = C(2N - r, N) / 2^(2N - r), где r = 0, 1, 2, ..., N.

---

5. Опыт Бюффона

Найти вероятность того, что при повторении опыта частота появления герба отклонится от 0.5 не более, чем в опыте Бюффона (4040 бросаний, 2048 гербов).

Решение:

Фактически, нас просят найти вероятность того, что частость $\mu_n$ попадет в тот же диапазон, что и у Бюффона.

В опыте Бюффона:

· Число испытаний $n = 4040$ · Число успехов $m = 2048$ · Наблюдаемая частота: $\mu_n * = 2048/4040 \approx 0.50693$ · Отклонение от теоретической вероятности $p = 0.5 : \varepsilon * = |0.50693 - 0.5| = 0.00693$

Нас интересует вероятность: $P(|\mu_n - 0.5| <= \varepsilon *)$

Для такого большого $n$ используем Интегральную теорему Муавра-Лапласа.
$P(|\mu_n - p| <= \varepsilon) \approx 2 * \Phi(\varepsilon * \sqrt{}n/\sqrt{}(p(1-p))) - 1$

Подставим наши значения: $\varepsilon * \sqrt{}n/\sqrt{}(p(1-p)) = 0.00693 * \sqrt{}4040/\sqrt{}(0.5 * 0.5)$

$\sqrt{}4040 \approx 63.56$

$\sqrt{}(0.5 * 0.5) = 0.5$

$0.00693 * 63.56 \approx 0.4405$

$0.4405/0.5 = 0.881$

Таким образом, аргумент функции Лапласа $x \approx 0.881$. $P \approx 2 * \Phi(0.881) - 1$

По таблице значений функции Лапласа $\Phi(x)$ находим: $\Phi(0.88) \approx 0.3106$. (Для $x = 0.88$ значение примерно $0.3106$, для $x = 0.89 - 0.3133$, для нашего $x = 0.881$ можно взять $0.311$).

$P \approx 2 * 0.311 - 1 = 0.622$

Ответ: Вероятность того, что отклонение частоты от 0.5 не превысит отклонение у Бюффона, составляет примерно 0.622 или 62.2%. Это вполне типичная ситуация.

Интегральная теорема Муавра-Лапласа может быть сформулирована двумя эквивалентными способами:

---

Способ 1: Через нормированную сумму случайных величин

Пусть проводится n независимых испытаний Бернулли с вероятностью успеха p в каждом испытании. Пусть $\mu_n$ — число успехов в этих n испытаниях.

Тогда для любых вещественных a < b при $n \to \infty$ справедливо:

$$P\left(a \leq \frac{\mu_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq b\right) \to \Phi(b) - \Phi(a)$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt$ — функция стандартного нормального распределения.

---

Способ 2: Через нормированную частоту успехов

Пусть $\nu_n = \frac{\mu_n}{n}$ — частота успехов в n испытаниях.

Тогда для любых вещественных a < b при $n \to \infty$ справедливо:

$$P\left(a \leq \frac{\nu_n - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \leq b\right) \to \Phi(b) - \Phi(a)$$

Или в эквивалентной форме для симметричного отклонения:

$$P\left(|\nu_n - p| \leq \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right) - 1$$

---

Примечание: Оба способа эквивалентны, поскольку

$$\frac{\nu_n - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} = \frac{\mu_n/n - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} = \frac{\mu_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

Решение задачи о Бюффоне первым способом (через нормированную сумму случайных величин)

---

Условие:

· Число испытаний: n = 4040

· Наблюдаемое число успехов (гербов): m = 2048

· Теоретическая вероятность успеха: p = 0.5

· Наблюдаемая частота: $\nu_n^* = \frac{2048}{4040} \approx 0.50693$

· Наблюдаемое отклонение: $\varepsilon^* = |0.50693 - 0.5| = 0.00693$

Требуется найти вероятность:

$$P\left(\left|\frac{\mu_n}{n} - 0.5\right| \leq \varepsilon^*\right)$$

где $\mu_n$ — число успехов в повторном эксперименте.

---

Решение по первому способу интегральной теоремы Муавра-Лапласа:

Первый способ теоремы утверждает, что для любых a < b :

$$P\left(a \leq \frac{\mu_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq b\right) \to \Phi(b) - \Phi(a)$$

где $\Phi(x)$ — функция стандартного нормального распределения.

Преобразуем искомую вероятность:

$$P\left(\left|\frac{\mu_n}{n} - 0.5\right| \leq \varepsilon^*\right) = P\left(-\varepsilon^* \leq \frac{\mu_n}{n} - 0.5 \leq \varepsilon^*\right)$$

Умножим все части неравенства на $\sqrt{n}$:

$$P\left(-\varepsilon^*\sqrt{n} \le \frac{\mu_n - np}{\sqrt{n}} \le \varepsilon^*\sqrt{n}\right)$$

Разделим на $\sqrt{p(1-p)} = \sqrt{0.5 \cdot 0.5} = 0.5$:

$$P\left(-\frac{\varepsilon^*\sqrt{n}}{0.5} \le \frac{\mu_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le \frac{\varepsilon^*\sqrt{n}}{0.5}\right)$$

Вычислим границы:

· $\sqrt{n} = \sqrt{4040} \approx 63.56$

· $\varepsilon^*\sqrt{n} \approx 0.00693 \cdot 63.56 \approx 0.4405$

· $\frac{\varepsilon^*\sqrt{n}}{0.5} \approx \frac{0.4405}{0.5} = 0.881$

Таким образом:

$$P\left(\left|\frac{\mu_n}{n} - 0.5\right| \le \varepsilon^*\right) \approx P\left(-0.881 \le \frac{\mu_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le 0.881\right)$$

По интегральной теореме Муавра-Лапласа:

$$P \approx \Phi(0.881) - \Phi(-0.881) = 2\Phi(0.881) - 1$$

По таблице значений функции Лапласа:

$$\Phi(0.881) \approx 0.311$$

$$P \approx 2 \cdot 0.311 - 1 = 0.622$$

---

Ответ:

Вероятность того, что при повторении опыта частота появления герба отклонится от 0.5 не более, чем в опыте Бюффона, составляет $\approx 0.622$ или 62.2%.

Этот результат совпадает с полученным ранее решением через второй способ формулировки теоремы.

## Решение

Изначально в каждом кармане находится по ( N ) лакомств. Алексей случайным образом выбирает карман для извлечения лакомства до тех пор, пока один из карманов не опустеет. В этот момент процесс останавливается.

Вечером Алексей проверяет только левый карман и обнаруживает в нём ( K ) лакомств. Поскольку процесс остановился из-за опустошения одного из карманов, возможны два случая:

- Если ( K > 0 ), то левый карман не пуст. Следовательно, процесс остановился из-за опустошения правого кармана. Поэтому правый карман пуст с вероятностью ( 1 ).

- Если ( $K = 0$ ), то левый карман пуст. Это означает, что процесс остановился из-за опустошения левого кармана, поэтому правый карман не пуст. Вероятность того, что правый карман пуст, равна ( $0$ ).

Таким образом, вероятность того, что правый карман пуст, given that в левом кармане ( $K$ ) лакомств, равна:

[ \boxed{1} \text{ при } K > 0, \quad \boxed{0} \text{ при } K = 0. ]