Примеры возможных задач к семинару по лекции 4

1. Пусть $\{X_1,\dots,X_n\}$ — выборка, порождённая случайной величиной X. Доказать, что оценка

$$S_n^{\text{исп.}} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X}_n)^2,$$

где $\overline{X}_n=\frac{1}{n}(X_1+\dots+X_n)$, будет состоятельной оценкой для дисперсии DX (в предположении, что DX существует)

2. Пусть выборка $\{X_1,\dots,X_n\}$ соответствует показательному распределению с параметром λ, $\lambda>0$. Показать, что оценка

$$\hat{\lambda}_n = \sqrt{\frac{2n}{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2}}$$

является состоятельной оценкой для параметра λ.

3. Выборка $\{X_1,\dots,X_n\}$ порождена СВ X, имеющей ~~нет~~ равномерное распределение на отрезке $[0,\theta]$, $\theta>0$. Показать, что $\hat{\theta}_n = 2\overline{X}_n$, где

$$\overline{X}_n=\frac{1}{n}(X_1+\dots+X_n)$$

— выборочное среднее, будет несмещённой и состоятельной оценкой для θ.

4. Пусть выборка $\{X_1, \dots, X_n\}$ порождена случайной величиной X, имеющей равномерное распределение на $[a, b]$, где a и b неизвестны. Рассмотрим оценки

$$\hat{a}_n = X_{(1)}, \quad \hat{b}_n = X_{(n)},$$

где $X_{(1)}$ и $X_{(n)}$ – соответствующие порядковые статистики. Найти $M\{\hat{a}_n\}$, $D\{\hat{a}_n\}$, $M\{\hat{b}_n\}$, $D\{\hat{b}_n\}$ и показать, что оценки $\hat{a}_n$ и $\hat{b}_n$ будут асимптотически несмещенными и состоятельными.