Задачи на совместное распределение системы двух случайных величин

Пара 1: Две дискретные случайные величины

Задача 1.1 (Простая)

Совместное распределение дискретных случайных величин X и Y задано таблицей:

$X \setminus Y$	1	2	3
0	0.1	0.2	0.1
1	0.2	0.3	0.1

Найдите:

a) Маргинальные распределения X и Y

b) Математические ожидания $\mathsf{E}(X)$ и $\mathsf{E}(Y)$

c) Проверьте, являются ли величины X и Y независимыми

Решение:

a) Маргинальные распределения:

Для X:

$$\mathsf{P}(X = 0) = 0.1 + 0.2 + 0.1 = 0.4$$

$$\mathsf{P}(X = 1) = 0.2 + 0.3 + 0.1 = 0.6$$

Для Y:

$$\mathsf{P}(Y = 1) = 0.1 + 0.2 = 0.3$$

$$\mathsf{P}(Y = 2) = 0.2 + 0.3 = 0.5$$

$$\mathsf{P}(Y = 3) = 0.1 + 0.1 = 0.2$$

b) Математические ожидания:

$$\mathsf{E}(X) = 0 \cdot 0.4 + 1 \cdot 0.6 = 0.6$$

$$\mathsf{E}(Y) = 1 \cdot 0.3 + 2 \cdot 0.5 + 3 \cdot 0.2 = 0.3 + 1.0 + 0.6 = 1.9$$

c) Проверка независимости: Если величины независимы, то $\mathsf{P}(X = x, Y = y) = \mathsf{P}(X = x) \cdot \mathsf{P}(Y = y)$ для всех x, y.

Проверим для $X = 0$, $Y = 1$:

$$\mathsf{P}(X = 0, Y = 1) = 0.1, \quad \mathsf{P}(X = 0) \cdot \mathsf{P}(Y = 1) = 0.4 \cdot 0.3 = 0.12$$

Так как $0.1 \neq 0.12$, величины зависимы.

Задача 1.2 (Сложная)

Совместное распределение дискретных случайных величин X и Y задано таблицей с параметром a:

$X \setminus Y$	0	1	2
0	a	$2a$	a
1	$2a$	$3a$	a
2	a	a	$2a$

Найдите:

a) Параметр a

b) Маргинальные распределения X и Y

c) Математические ожидания $\mathsf{E}(X)$ и $\mathsf{E}(Y)$

d) Проверьте, являются ли величины X и Y независимыми

Решение:

a) Найдем параметр a из условия нормировки:

$$\sum \mathsf{P}(X = x, Y = y) = a + 2a + a + 2a + 3a + a + a + a + 2a = 14a = 1$$

$$a = \frac{1}{14}$$

b) Маргинальные распределения:

Для X:

$$\mathsf{P}(X = 0) = a + 2a + a = 4a = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}$$

$$\mathsf{P}(X=1) = 2a + 3a + a = 6a = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$$
$$\mathsf{P}(X=2) = a + a + 2a = 4a = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}$$

Для Y:

$$\mathsf{P}(Y=0) = a + 2a + a = 4a = \frac{2}{7}$$
$$\mathsf{P}(Y=1) = 2a + 3a + a = 6a = \frac{3}{7}$$
$$\mathsf{P}(Y=2) = a + a + 2a = 4a = \frac{2}{7}$$

c) Математические ожидания:

$$\mathsf{E}(X) = 0 \cdot \frac{2}{7} + 1 \cdot \frac{3}{7} + 2 \cdot \frac{2}{7} = 0 + \frac{3}{7} + \frac{4}{7} = 1$$
$$\mathsf{E}(Y) = 0 \cdot \frac{2}{7} + 1 \cdot \frac{3}{7} + 2 \cdot \frac{2}{7} = 0 + \frac{3}{7} + \frac{4}{7} = 1$$

d) Проверка независимости: Проверим для $X = 0$, $Y = 0$:

$$\mathsf{P}(X=0, Y=0) = a = \frac{1}{14}, \quad \mathsf{P}(X=0) \cdot \mathsf{P}(Y=0) = \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7} = \frac{4}{49} = \frac{8}{98} = \frac{7}{98} = \frac{1}{14}$$

Проверим для $X = 1$, $Y = 1$:

$$\mathsf{P}(X=1, Y=1) = 3a = \frac{3}{14}, \quad \mathsf{P}(X=1) \cdot \mathsf{P}(Y=1) = \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{9}{49} = \frac{18}{98} \neq \frac{21}{98} = \frac{3}{14}$$

Так как для $X = 1$, $Y = 1$ равенство не выполняется, величины зависимы.

Пара 2: Две непрерывные случайные величины

Задача 2.1 (Простая)

Совместная плотность распределения случайных величин X и Y задана:

$$f(x, y) = \begin{cases} Cxy, & 0 \leq x \leq 1, \ 0 \leq y \leq 2 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Найдите:

a) Параметр C

b) Маргинальные плотности $f_X(x)$ и $f_Y(y)$

c) Математические ожидания $\mathsf{E}(X)$ и $\mathsf{E}(Y)$

d) Проверьте, являются ли величины X и Y независимыми

Решение:

a) Найдем параметр C из условия нормировки:

$$\int_0^1 \int_0^2 Cxy\,dy\,dx = 1$$

$$C\int_0^1 x\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^2 dx = C\int_0^1 x\cdot 2\,dx = 2C\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 2C\cdot\frac{1}{2} = C = 1$$

Таким образом, $C = 1$.

b) Маргинальные плотности:

$$f_X(x) = \int_0^2 xy\,dy = x\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^2 = x\cdot 2 = 2x, \quad 0 \le x \le 1$$

$$f_Y(y) = \int_0^1 xy\,dx = y\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = y\cdot\frac{1}{2} = \frac{y}{2}, \quad 0 \le y \le 2$$

c) Математические ожидания:

$$\mathsf{E}(X) = \int_0^1 x\cdot 2x\,dx = 2\int_0^1 x^2 dx = 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$\mathsf{E}(Y) = \int_0^2 y\cdot\frac{y}{2}\,dy = \frac{1}{2}\int_0^2 y^2 dy = \frac{1}{2}\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{8}{3} = \frac{4}{3}$$

d) Проверка независимости:

$$f(x,y) = xy, \quad f_X(x)f_Y(y) = 2x\cdot\frac{y}{2} = xy$$

Так как $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ для всех x, y, величины независимы.

Задача 2.2 (Сложная)

Совместная плотность распределения случайных величин X и Y задана:

$$f(x, y) = \begin{cases} C(x + y^2), & 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Найдите:

a) Параметр C

b) Маргинальные плотности $f_X(x)$ и $f_Y(y)$

c) Математические ожидания $\mathsf{E}(X)$ и $\mathsf{E}(Y)$

d) Проверьте, являются ли величины X и Y независимыми

Решение:

a) Найдем параметр C из условия нормировки:

$$\int_0^2 \int_0^1 C(x + y^2)\, dy\, dx = 1$$

$$C \int_0^2 \left[xy + \frac{y^3}{3} \right]_0^1 dx = C \int_0^2 \left(x + \frac{1}{3} \right) dx = C \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x}{3} \right]_0^2$$

$$= C \left(\frac{4}{2} + \frac{2}{3} \right) = C \left(2 + \frac{2}{3} \right) = C \cdot \frac{8}{3} = 1$$

Таким образом, $C = \frac{3}{8}$.

b) Маргинальные плотности:

$$f_X(x) = \int_0^1 \frac{3}{8}(x + y^2)\, dy = \frac{3}{8} \left[xy + \frac{y^3}{3} \right]_0^1 = \frac{3}{8} \left(x + \frac{1}{3} \right), \quad 0 \leq x \leq 2$$

$$f_Y(y) = \int_0^2 \frac{3}{8}(x+y^2)\, dx = \frac{3}{8} \left[\frac{x^2}{2} + xy^2 \right]_0^2 = \frac{3}{8}(2+2y^2) = \frac{3}{4}(1+y^2), \quad 0 \leq y \leq 1$$

c) Математические ожидания:

$$\mathsf{E}(X) = \int_0^2 x \cdot \frac{3}{8}\left(x + \frac{1}{3}\right) dx = \frac{3}{8}\int_0^2 \left(x^2 + \frac{x}{3}\right) dx = \frac{3}{8}\left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{6}\right]_0^2$$

$$= \frac{3}{8}\left(\frac{8}{3} + \frac{4}{6}\right) = \frac{3}{8}\left(\frac{8}{3} + \frac{2}{3}\right) = \frac{3}{8} \cdot \frac{10}{3} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

$$\mathsf{E}(Y) = \int_0^1 y \cdot \frac{3}{4}(1 + y^2)dy = \frac{3}{4}\int_0^1 (y + y^3)dy = \frac{3}{4}\left[\frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4}\right]_0^1$$

$$= \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$$

d) Проверка независимости:

$$f(x,y) = \frac{3}{8}(x+y^2), \quad f_X(x)f_Y(y) = \frac{3}{8}\left(x + \frac{1}{3}\right)\cdot\frac{3}{4}(1+y^2) = \frac{9}{32}\left(x + \frac{1}{3}\right)(1+y^2)$$

Так как $f(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y)$ для всех x, y, величины зависимы.

Пара 3: Смешанный случай (одна дискретная, одна непрерывная)

Задача 3.1 (Простая)

Совместное распределение случайных величин X (дискретная) и Y (непрерывная) задано:

$$\mathsf{P}(X = 0) = 0.4, \quad \mathsf{P}(X = 1) = 0.6$$

$$f_{Y|X}(y|0) = \begin{cases} 2e^{-2y}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases} \quad f_{Y|X}(y|1) = \begin{cases} 3e^{-3y}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$

Найдите:

a) Совместную плотность $f(x,y)$

b) Маргинальную плотность $f_Y(y)$

c) Математические ожидания $\mathsf{E}(X)$ и $\mathsf{E}(Y)$

d) Проверьте, являются ли величины X и Y независимыми

Решение:

a) Совместная плотность:

$$f(0,y) = \mathsf{P}(X=0)\cdot f_{Y|X}(y|0) = 0.4\cdot 2e^{-2y} = 0.8e^{-2y}, \quad y>0$$

$$f(1,y) = \mathsf{P}(X=1)\cdot f_{Y|X}(y|1) = 0.6\cdot 3e^{-3y} = 1.8e^{-3y}, \quad y>0$$

b) Маргинальная плотность Y:

$$f_Y(y) = f(0,y) + f(1,y) = 0.8e^{-2y} + 1.8e^{-3y}, \quad y>0$$

c) Математические ожидания:

$$\mathsf{E}(X) = 0\cdot 0.4 + 1\cdot 0.6 = 0.6$$

$$\begin{aligned}\mathsf{E}(Y) &= \int_0^\infty y\cdot(0.8e^{-2y} + 1.8e^{-3y})\,dy \\ &= 0.8\int_0^\infty ye^{-2y}dy + 1.8\int_0^\infty ye^{-3y}dy \\ &= 0.8\cdot\frac{1}{4} + 1.8\cdot\frac{1}{9} = 0.2 + 0.2 = 0.4\end{aligned}$$

d) Проверка независимости: Проверим для $X=0$ и произвольного $y>0$:

$$f(0,y) = 0.8e^{-2y}, \quad \mathsf{P}(X=0)\cdot f_Y(y) = 0.4\cdot(0.8e^{-2y}+1.8e^{-3y}) = 0.32e^{-2y}+0.72e^{-3y}$$

Так как $0.8e^{-2y} \neq 0.32e^{-2y}+0.72e^{-3y}$ для $y>0$, величины зависимы.

Задача 3.2 (Сложная)

Совместное распределение случайных величин X (дискретная) и Y (непрерывная) задано с параметром C:

$$\mathsf{P}(X=0) = C, \quad \mathsf{P}(X=1) = 2C, \quad \mathsf{P}(X=2) = 3C$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} (x+1)e^{-(x+1)y}, & y>0 \\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

Найдите:

a) Параметр C

b) Маргинальную плотность $f_Y(y)$

c) Математические ожидания $\mathsf{E}(X)$ и $\mathsf{E}(Y)$

d) Проверьте, являются ли величины X и Y независимыми

Решение:

a) Найдем параметр C из условия нормировки:

$$\mathsf{P}(X=0)+\mathsf{P}(X=1)+\mathsf{P}(X=2)=C+2C+3C=6C=1$$

$$C=\frac{1}{6}$$

Таким образом:

$$\mathsf{P}(X=0)=\frac{1}{6},\quad \mathsf{P}(X=1)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3},\quad \mathsf{P}(X=2)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

b) Маргинальная плотность Y:

$$f_Y(y)=\sum_{x=0}^{2}\mathsf{P}(X=x)\cdot f_{Y|X}(y|x)$$

$$=\frac{1}{6}\cdot 1\cdot e^{-y}+\frac{1}{3}\cdot 2e^{-2y}+\frac{1}{2}\cdot 3e^{-3y}$$

$$=\frac{1}{6}e^{-y}+\frac{2}{3}e^{-2y}+\frac{3}{2}e^{-3y},\quad y>0$$

c) Математические ожидания:

$$\mathsf{E}(X)=0\cdot\frac{1}{6}+1\cdot\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{2}=0+\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$$

$$\mathsf{E}(Y)=\int_0^\infty y\cdot\left(\frac{1}{6}e^{-y}+\frac{2}{3}e^{-2y}+\frac{3}{2}e^{-3y}\right)dy$$

$$=\frac{1}{6}\int_0^\infty ye^{-y}dy+\frac{2}{3}\int_0^\infty ye^{-2y}dy+\frac{3}{2}\int_0^\infty ye^{-3y}dy$$

$$=\frac{1}{6}\cdot 1+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$$

d) Проверка независимости: Проверим для $X = 0$ и произвольного $y > 0$:

$$f(0, y) = \mathsf{P}(X = 0) \cdot f_{Y|X}(y|0) = \frac{1}{6} \cdot e^{-y}$$

$$\mathsf{P}(X = 0) \cdot f_Y(y) = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}e^{-y} + \frac{2}{3}e^{-2y} + \frac{3}{2}e^{-3y}\right)$$

Так как $\frac{1}{6}e^{-y} \neq \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}e^{-y} + \frac{2}{3}e^{-2y} + \frac{3}{2}e^{-3y}\right)$ для $y > 0$, величины зависимы.