Лекция 7
Определение и свойства математического ожидания СВ.

Пусть X – дискретная СВ:

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_k
P	p_1	p_2	$\ldots$	p_k

Пусть проведено n экспериментов, в результате которых

значение x_1 „выпало" n_1 раз,
—"— x_2 —"— n_2 раз,
. . . .
—"— x_k —"— n_k раз,

так что $n_1+n_2+\ldots+n_k=n$. Тогда среднее арифметическое СВ X в данной серии экспериментов есть

$$\overline{x_n}=\frac{n_1x_1+n_2x_2+\ldots+n_kx_k}{n}$$

Найдём предел при $n\to\infty$:

$$\lim_{n\to\infty}\overline{x_n}=x_1\lim_{n\to\infty}\frac{n_1}{n}+x_2\lim_{n\to\infty}\frac{n_2}{n}+\ldots+x_k\lim_{n\to\infty}\frac{n_k}{n}$$

Но, в соответствии со статистическим восприятием вероятности,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n_1}{n}=p_1,\ \lim_{n\to\infty}\frac{n_2}{n}=p_2,\ \ldots,\ \lim_{n\to\infty}\frac{n_k}{n}=p_k.$$

Поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\overline{x}=x_1p_1+x_2p_2+\ldots+x_kp_k$$

– среднее арифметическое СВ X в „длинных" ($n\to\infty$) сериях экспериментов

Опред. Математическим ожиданием дискретной СВ X

X	x_1	x_2	$\dots$	x_k	$\dots$
P	p_1	p_2	$\dots$	p_k	$\dots$

называется число

$$M\{X\} = \sum_i x_i p_i ,$$

если ряд справа сходится абсолютно. (Если X — дискретная СВ с конечным спектром, то ряд превращается в конечную сумму.) В противном случае говорят, что X не имеет математического ожидания.

Пример 1 Пусть СВ X распределена по биномиальному закону:

X	0	1	$\dots$	k	$\dots$	n
P	q^n	npq^{n-1}	$\dots$	$C_n^k p^k q^{n-k}$	$\dots$	p^n

Тогда

$$M\{X\} = \sum_{k=0}^{n} k C_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k C_n^k p^k q^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n\cdot(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} p p^{k-1} q^{n-1-(k-1)} =$$

$$= np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} p^{k-1} q^{n-1-(k-1)} = \left\{ \begin{array}{c} \text{замена} \\ \text{индекса} \\ \text{суммирования} \\ m = k-1 \end{array} \right\} =$$

$$= np \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{m!(n-1-m)!} p^m q^{n-1-m} = np\cdot(p+q)^{n-1} = np,$$

ибо $p+q=1$.

Пример 2 Пусть СВ X распределена по геометрическому закону:

X	1	2	$\ldots$	k	$\ldots$
P	p	qp	$\ldots$	$q^{k-1}p$	$\ldots$

$0<p<1$, $q=1-p$

Тогда

$$M\{X\}=\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}p = p\cdot\sum_{k=1}^{\infty}(q^k)' = p\left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k\right)' =$$

здесь $(\ldots)'$ – производная по q

$$= p\,(q+q^2+\ldots)' = p\left(\frac{q}{1-q}\right)' = p\,\frac{1\cdot(1-q)-q(-1)}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}.$$

Пример 3 Пусть СВ X распределена по закону Пуассона:

X	0	1	2	$\ldots$	k	$\ldots$
P	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2}e^{-\lambda}$	$\ldots$	$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	$\ldots$

Тогда

$$M\{X\}=\sum_{k=0}^{\infty} k\cdot\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!}e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} =$$

$$= \lambda e^{-\lambda}\left(1+\frac{\lambda}{1!}+\frac{\lambda^2}{2!}+\frac{\lambda^3}{3!}+\ldots\right) = \lambda e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda} = \lambda.$$

Пусть теперь X – непрерывная случайная величина с плотностью распределение $f(x)$. Будем сначала считать, что X может принимать значение только из промежутка от a до b. Введём разбиение

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

Обозначим $p_k = P\{x_{k-1} < X < x_k\} = \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx$, $k = 1, 2, \ldots, n$. По теореме о среднем $\exists\, \tilde{x}_k \in (x_{k-1}, x_k)$ такая, что $p_k = f(\tilde{x}_k)\Delta x_k$, где $\Delta x_k = \cancel{x_{k-1}}\, x_k - x_{k-1}$. Рассмотрим дискретную СВ $\tilde{X}$, вводимую таблицей

$\tilde{X}$	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\ldots$	$\tilde{x}_n$
P	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

СВ $\tilde{X}$ можно рассматривать как некоторую дискретную аппроксимацию непрерывной СВ X, причём эта аппроксимация тем точнее и полнее, чем больше n и меньше Δx_k. Имеем

$$M\{\tilde{X}\} = \sum_{k=1}^{n} \tilde{x}_k p_k = \sum_{k=1}^{n} \tilde{x}_k f(\tilde{x}_k)\Delta x_k$$

При $n \to \infty$, $\max\limits_k \Delta x_k \to 0$ сумма справа стремится к интегралу $\int\limits_a^b x f(x)dx$

<u>Опред</u>. Математическое ожидание непрерывной СВ X с плотностью распределения $f(x)$, $x \in (-\infty; +\infty)$, есть число

$$M\{X\} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx,$$

если интеграл сходится абсолютно. В противном случае говорят, что СВ X не имеет математического ожидания.

<u>Пример 4</u> Пусть СВ X равномерно распределена на отрезке $[a, b]$, т.е. $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \notin [a,b] \\ 1/(b-a),\ x \in [a,b] \end{cases}$

Тогда

$$M\{X\}=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx=\int_a^b \frac{1}{b-a}x\,dx=\frac{a+b}{2}.$$

Пример 5 Пусть СВ X имеет показательное распределение с параметром λ:

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases} \Rightarrow M\{X\}=\int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx=\frac{1}{\lambda},$$

Пример 6 Пусть СВ X имеет нормальное распределение:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},\quad x\in(-\infty;+\infty).$$

Тогда

$$M\{X\}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=a.$$

Пример 7 Пусть СВ X задаётся плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases}\frac{2\lambda}{\pi}\cdot\frac{1}{\lambda^2+x^2} & \text{при } x\geq 0,\\ 0 & \text{при } x<0.\end{cases}$$

где $\lambda>0$ – параметр (распределение Коши)

Тогда

$$M\{X\}=\int_0^{+\infty}\frac{2\lambda x}{\pi(\lambda^2+x^2)}dx.$$

Но последний интеграл расходится.

$\Rightarrow$ СВ, распределенная по Коши, не имеет математического ожидания.

Свойства математического ожидания

1. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:

$$M\{const\cdot X\} = const\cdot M\{X\}.$$

2. Математическое ожидание суммы равно сумме математических ожиданий:

$$M\{X_1+X_2+\ldots+X_n\} = M\{X_1\}+M\{X_2\}+\ldots+M\{X_n\}.$$

3. Математическое ожидание произведения независимых СВ равно произведению матем. ожиданий сомножителей:

$$M\{X_1X_2\ldots X_n\} = M\{X_1\}\cdot M\{X_2\}\ldots M\{X_n\}.$$

4. Пусть X - дискретная СВ:

X	x_1	x_2	$\ldots$
P	p_1	p_2	$\ldots$

Пусть $\varphi(x)$ - заданная функция, причем $x_1, x_2, \ldots$ входят в область определения $\varphi(x)$. Определим СВ Y: $Y=\varphi(X)$. Тогда

$$M\{Y\} = \sum_i p_i\varphi(x_i).$$

5. Если в предыдущем пункте X — непрерывная СВ с плотностью $f(x)$, то

$$M\{Y\} = \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)f(x)dx.$$

Докажем свойство 3.

Пусть X и Y - дискретные СВ

X	x_1	x_2	...
P	p_1	p_2	...

Y	y_1	y_2	...
P	q_1	q_2	...

Пусть $Z=XY$. Тогда Z принимает значение $x_i y_j$ с вероятностями $P\{X=x_i, Y=y_j\}$ и

$$M\{Z\} = \sum_{i,j} x_i y_j P\{X=x_i, Y=y_j\} = \left\{ \begin{matrix} \text{независимость} \\ \text{СВ X и Y означает} \\ \text{независимость} \\ \text{событий } X=x_i \text{ и } Y=y_j \end{matrix} \right\}$$

$$= \sum_{i,j} x_i y_j P\{X=x_i\} \cdot P\{Y=y_j\} =$$

$$= \sum_i x_i P\{X=x_i\} \cdot \sum_j y_j P\{Y=y_j\} = M\{X\} \cdot M\{Y\}$$

Пусть теперь X и Y - непрерывные СВ с плотностью совместного распределения $f(x,y)$. Пусть $Z = XY$. Тогда

$$M\{Z\} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy f(x,y)\,dx\,dy = \left\{ \begin{matrix} \text{если X и Y} \\ \text{независимы, то} \\ f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y) \\ \text{где } f_1(x) \text{ и } f_2(y) - \\ \text{одномерные} \\ \text{плотности} \\ \text{СВ X и Y} \end{matrix} \right\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy f_1(x) f_2(y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_1(x)\,dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} y f_2(y)\,dy = M\{X\} \cdot M\{Y\}, \text{ что и т.д.}$$