Ответы на вопросы к экзамену (с дополнениями)

1. **Комбинаторное правило произведения.**

   Пусть $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ - строка из k различных элементов.

   Строки $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ и $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_k)$ будем называть одинаковыми, если

   $$x_i = \tilde{x}_i \quad \forall i = 1, 2, \ldots, k,$$

   т.е. если строки состоят из одного и того же набора элементов и порядок следования элементов один и тот же. В противном случае строки будем называть различными.

   Пусть элемент x_1 может быть выбран n_1 способами; при выбранном x_1 элемент x_2 может быть выбран n_2 способами (не зависящими от выбора x_1); $\ldots$; при выбранных $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$ элемент x_k может быть выбран n_k способами (не зависящими от предыдущих выборов). Тогда число различных строк вида $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ равно

   $$N = n_1 n_2 \ldots n_k.$$

   *

   Пример. Сколько существует трёхзначных чисел, все цифры которых различны? Первая цифра (сотни) может быть выбрана 9 способами (1–9), вторая (десятки) — 9 способами (0–9, кроме уже выбранной), третья (единицы) — 8 способами. По правилу произведения получаем $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$ чисел.

2. **Число перестановок, число сочетаний и число размещений.**

   Число перестановок P_n — число способов расположить n различных элементов в ряд:

   $$P_n = n!.$$

   Число сочетаний из n по k — число способов выбрать k элементов из n различных без учёта порядка:

   $$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

   Число размещений из n по k — число способов выбрать k элементов из n различных с учётом порядка:

   $$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

   *

   Дополнение. Часто используются свойства: $C_n^k = C_n^{n-k}$ и $A_n^k = C_n^k \cdot k!$. Например, в комитет из 10 человек нужно выбрать 3 делегатов. Число способов: $C_{10}^3 = 120$. Если же этих трёх человек нужно распределить на должности председателя, секретаря и казначея, то число способов: $A_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$.

3. **Равенство $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$.**

   Из бинома Ньютона:

   $$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}.$$

   Подставляя $a = b = 1$, получаем:

   $$2^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k.$$

*

Интерпретация. Число всех подмножеств множества из n элементов равно 2^n. Действительно, каждому элементу можно поставить в соответствие два состояния: входит в подмножество или нет. По правилу произведения получаем 2^n. С другой стороны, число подмножеств мощности k равно C_n^k, суммируя по всем k от 0 до n, получаем общее число подмножеств.

4. **Операции над событиями. Их геометрическая интерпретация. Эквивалентные события.**

   Определение: События A и B называются эквивалентными ($A = B$), если из наступления A следует наступление B и наоборот.

   Сумма событий $A + B$ — событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из A или B.

   Произведение событий AB — событие, состоящее в одновременном наступлении A и B.

   Противоположное событие $\overline{A}$ — событие, состоящее в ненаступлении A.

   Геометрическая интерпретация: событиям соответствуют подмножества некоторой области Ω. Сумме соответствует объединение, произведению — пересечение, противоположному событию — дополнение.

   *

   Пример. Бросание игральной кости. Событие A — выпадение чётного числа, B — выпадение числа, большего 3. Тогда $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{4, 5, 6\}$, $A+B = \{2, 4, 5, 6\}$, $AB = \{4, 6\}$, $\overline{A} = \{1, 3, 5\}$. События A и B не эквивалентны, так как, например, выпадение 2 приводит к A, но не к B.

5. **Классическая формула подсчёта вероятности. Геометрический подход к подсчёту вероятности.**

   Определение: Классическая формула: если все исходы эксперимента равновозможны и несовместны, то вероятность события A равна

   $$\mathsf{P}\{A\} = \frac{m}{n},$$

   где n — общее число исходов, m — число благоприятных исходов.

   Геометрический подход: если эксперимент состоит в случайном выборе точки из области Ω, то вероятность попадания в подобласть A равна

   $$\mathsf{P}\{A\} = \frac{\text{мера } A}{\text{мера } \Omega},$$

   где мера может быть длиной, площадью, объёмом и т.д.

   *

   Пример (геометрический). На отрезок [0,1] наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что расстояние от точки до левого конца отрезка меньше 0.3. Здесь $\Omega = [0, 1]$, мера — длина. Благоприятное множество $A = [0, 0.3)$. Тогда $\mathsf{P}\{A\} = 0.3/1 = 0.3$.

6. **Общий аксиоматический подход к определению вероятности, предложенный А. Н. Колмогоровым.**

   Определение: Вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ состоит из множества элементарных исходов Ω, σ-алгебры событий $\mathcal{F}$ и вероятностной меры P, удовлетворяющей аксиомам:

(a) $\mathsf{P}\{A\} \geq 0$ для любого $A \in \mathcal{F}$.
(b) $\mathsf{P}\{\Omega\} = 1$.
(c) Если события $A_1, A_2, \ldots$ попарно несовместны, то

$$\mathsf{P}\left\{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right\} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}\{A_i\}.$$

*

Замечание. Аксиоматический подход позволяет строить теорию на строгой математической основе, охватывая как классические, так и более сложные модели (например, с бесконечным числом исходов). Из аксиом выводятся все известные свойства вероятности, такие как $\mathsf{P}\{\varnothing\} = 0$, $\mathsf{P}\{\overline{A}\} = 1 - \mathsf{P}\{A\}$, $\mathsf{P}\{A \cup B\} = \mathsf{P}\{A\} + \mathsf{P}\{B\} - \mathsf{P}\{AB\}$ и др.

Подбрасывание одной монеты (дискретный случай)

Рассмотрим эксперимент — однократное подбрасывание симметричной монеты.

(a) **Множество элементарных исходов:**

$$\Omega = \{\text{Г}, \text{Р}\},$$

где Г — выпадение герба, Р — выпадение решки.

(b) **σ-алгебра событий $\mathcal{F}$:** Поскольку Ω конечно, в качестве σ-алгебры можно взять множество всех подмножеств:

$$\mathcal{F} = \big\{\varnothing, \{\text{Г}\}, \{\text{Р}\}, \{\text{Г}, \text{Р}\}\big\}.$$

Проверим свойства σ-алгебры:

- $\varnothing \in \mathcal{F}$, $\Omega = \{\text{Г}, \text{Р}\} \in \mathcal{F}$.
- Для любого $A \in \mathcal{F}$ дополнение $\overline{A} \in \mathcal{F}$:

$$\overline{\varnothing} = \Omega, \quad \overline{\{\text{Г}\}} = \{\text{Р}\}, \quad \overline{\{\text{Р}\}} = \{\text{Г}\}, \quad \overline{\Omega} = \varnothing.$$

- Объединение счётного числа элементов из $\mathcal{F}$ принадлежит $\mathcal{F}$ (здесь все объединения конечны и попадают в $\mathcal{F}$).

(c) **Вероятностная мера P:** Для симметричной монеты определим:

$$\mathsf{P}\{\varnothing\} = 0, \quad \mathsf{P}\{\text{Г}\} = \frac{1}{2}, \quad \mathsf{P}\{\text{Р}\} = \frac{1}{2}, \quad \mathsf{P}\{\text{Г}, \text{Р}\} = 1.$$

Проверим аксиомы Колмогорова:

i. $\mathsf{P}\{A\} \geq 0$ для всех $A \in \mathcal{F}$.
ii. $\mathsf{P}\{\Omega\} = \mathsf{P}\{\text{Г}, \text{Р}\} = 1$.
iii. Для несовместных событий: например, $\{\text{Г}\}$ и $\{\text{Р}\}$ несовместны, и

$$\mathsf{P}\{\{\text{Г}\} \cup \{\text{Р}\}\} = \mathsf{P}\{\text{Г}, \text{Р}\} = 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \mathsf{P}\{\text{Г}\} + \mathsf{P}\{\text{Р}\}.$$

Таким образом, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — корректно определённое вероятностное пространство.

Равномерное распределение на отрезке [0,1] (непрерывный случай)

Рассмотрим эксперимент — случайный выбор точки из отрезка $[0, 1]$.

(a) **Множество элементарных исходов:**

$$\Omega = [0, 1].$$

(b) **σ-алгебра событий $\mathcal{F}$:** В качестве σ-алгебры берём **борелевскую σ-алгебру** $\mathcal{B}([0, 1])$ на отрезке $[0, 1]$, которая порождается всеми интервалами $(a, b) \subseteq [0, 1]$. Она включает:

- Все интервалы, полуинтервалы, отрезки внутри $[0, 1]$.
- Счётные объединения и пересечения таких множеств.
- В частности, $\varnothing$ и $[0, 1]$ принадлежат $\mathcal{B}([0, 1])$.

(c) **Вероятностная мера P:** Для любого борелевского множества $A \subseteq [0, 1]$ определим вероятность как его длину (меру Лебега):

$$\mathsf{P}\{A\} = \lambda(A),$$

где λ — мера Лебега на прямой. Например:

$$\mathsf{P}\{(a, b)\} = b - a, \quad \mathsf{P}\{[a, b]\} = b - a, \quad \mathsf{P}\{[0, 1]\} = 1.$$

Проверим аксиомы:

i. Для любого $A \in \mathcal{B}([0, 1])$ мера Лебега неотрицательна: $\mathsf{P}\{A\} \geq 0$.

ii. $\mathsf{P}\{\Omega\} = \lambda([0, 1]) = 1$.

iii. Если $A_1, A_2, \ldots$ — попарно несовместные борелевские множества, то

$$\mathsf{P}\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right\} = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}\{A_n\},$$

что следует из счётной аддитивности меры Лебега.

Таким образом, $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$ — вероятностное пространство, моделирующее равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$.

7. **Условная вероятность. Определение независимости событий. Формулы полной вероятности и Байеса.**

Определение: Условная вероятность события A при условии B ($\mathsf{P}\{B\} > 0$):

$$\mathsf{P}\{A|B\} = \frac{\mathsf{P}\{AB\}}{\mathsf{P}\{B\}}.$$

Определение: События A и B независимы, если $\mathsf{P}\{AB\} = \mathsf{P}\{A\} \cdot \mathsf{P}\{B\}$.

Формула полной вероятности: если $H_1, \ldots, H_n$ — полная группа несовместных событий, то

$$\mathsf{P}\{A\} = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}\{A|H_i\}\mathsf{P}\{H_i\}.$$

Формула Байеса:

$$\mathsf{P}\{H_i|A\} = \frac{\mathsf{P}\{A|H_i\}\mathsf{P}\{H_i\}}{\sum_{j=1}^{n} \mathsf{P}\{A|H_j\}\mathsf{P}\{H_j\}}.$$

*

Пример. Имеются две урны: в первой 3 белых и 2 чёрных шара, во второй — 1 белый и 4 чёрных. Наудачу выбирается урна, причём первая урна выбирается с вероятностью 0.3, а вторая — с вероятностью 0.7. Из выбранной урны вынимается шар.

(a) Найти вероятность того, что вынут чёрный шар.

(b) Шар оказался белым. Найти вероятность того, что он вынут из первой урны.

Гипотезы: H_1 — выбрана первая урна, H_2 — выбрана вторая.

$$\mathsf{P}\{H_1\} = 0.3, \quad \mathsf{P}\{H_2\} = 0.7.$$

Условные вероятности:

$$\mathsf{P}\{\text{чёрный}|H_1\} = \frac{2}{5}, \quad \mathsf{P}\{\text{чёрный}|H_2\} = \frac{4}{5}.$$

По формуле полной вероятности:

$$\mathsf{P}\{\text{чёрный}\} = \frac{2}{5} \cdot 0.3 + \frac{4}{5} \cdot 0.7 = 0.12 + 0.56 = 0.68.$$

Для второго пункта:

$$\mathsf{P}\{\text{белый}|H_1\} = \frac{3}{5}, \quad \mathsf{P}\{\text{белый}|H_2\} = \frac{1}{5}.$$

По формуле Байеса:

$$\mathsf{P}\{H_1|\text{белый}\} = \frac{\frac{3}{5} \cdot 0.3}{\frac{3}{5} \cdot 0.3 + \frac{1}{5} \cdot 0.7} = \frac{0.18}{0.18 + 0.14} = \frac{0.18}{0.32} = 0.5625.$$

8. **Схема независимых испытаний. Формула Бернулли. Обобщённая формула Бернулли.**

Определение: Схема Бернулли — последовательность n независимых испытаний, в каждом из которых событие A происходит с вероятностью p, а событие $\overline{A}$ — с вероятностью $q = 1 - p$.

Формула Бернулли: вероятность того, что в n независимых испытаниях событие A с вероятностью p произойдёт ровно k раз:

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

Обобщённая формула Бернулли: если в каждом испытании возможны исходы $A_1, \ldots, A_k$ с вероятностями $p_1, \ldots, p_k$, то вероятность того, что в n испытаниях A_1 произойдёт m_1 раз, ..., A_k произойдёт m_k раз ($m_1 + \cdots + m_k = n$):

$$P_n(m_1, \ldots, m_k) = \frac{n!}{m_1! \ldots m_k!} p_1^{m_1} \ldots p_k^{m_k}.$$

*

Пример. Игральная кость бросается 5 раз. Найти вероятность того, что 2 раза выпадет число меньше 3 и 3 раза выпадет число больше 3.

Рассматриваем полную группу несовместных исходов одного броска:

- A_1: число меньше 3 (1 или 2) — вероятность $p_1 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
- A_2: число равно 3 — вероятность $p_2 = \frac{1}{6}$.
- A_3: число больше 3 (4, 5, 6) — вероятность $p_3 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Нас интересует событие: $m_1 = 2$ (два раза число меньше 3), $m_3 = 3$ (три раза число больше 3), а значит $m_2 = 0$ (ни разу не выпало 3), так как $m_1 + m_2 + m_3 = 5$.

По обобщённой формуле Бернулли:

$$P = \frac{5!}{2! \cdot 0! \cdot 3!} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^3.$$

Вычислим:

$$\frac{5!}{2! \cdot 0! \cdot 3!} = \frac{120}{2 \cdot 1 \cdot 6} = 10,$$
$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}.$$

Таким образом,

$$P = 10 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{10}{72} = \frac{5}{36} \approx 0.1389.$$

Ответ: вероятность равна $\frac{5}{36}$.

9. **Наиболее вероятное число успехов в серии независимых испытаний.**

Схема Бернулли — это последовательность n независимых одинаковых испытаний, в каждом из которых может произойти одно из двух событий: "успех"с вероятностью p или "неудача"с вероятностью $q = 1 - p$. Вероятность того, что в n испытаниях произойдёт ровно k успехов, задаётся **формулой Бернулли**:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

При фиксированных n и p вероятности $P_n(k)$ образуют распределение вероятностей на множестве $\{0, 1, \ldots, n\}$. Нас интересует, при каком k вероятность $P_n(k)$ максимальна. Такое значение k называется **наиболее вероятным числом успехов** и обозначается $k_{\text{н.в.}}$.

Для исследования поведения $P_n(k)$ рассмотрим отношение:

$$\frac{P_n(k)}{P_n(k-1)} = \frac{C_n^k p^k q^{n-k}}{C_n^{k-1} p^{k-1} q^{n-k+1}} = \frac{(n-k+1)p}{kq}.$$

Отсюда:

$$P_n(k) > P_n(k-1) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(n-k+1)p}{kq} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad (n-k+1)p > kq \quad \Leftrightarrow \quad k < (n+1)p.$$

Аналогично,

$$P_n(k) = P_n(k-1) \quad \Leftrightarrow \quad k = (n+1)p,$$
$$P_n(k) < P_n(k-1) \quad \Leftrightarrow \quad k > (n+1)p.$$

Таким образом, последовательность $P_n(k)$ возрастает при $k < (n+1)p$ и убывает при $k > (n+1)p$. Максимум достигается при наибольшем целом k, не превосходящем $(n+1)p$.

Если $(n+1)p$ целое, то $P_n(k) = P_n(k-1)$ при $k = (n+1)p$, и тогда два значения $k = (n+1)p$ и $k = (n+1)p - 1$ являются наиболее вероятными.

В терминах np и $q = 1 - p$ условие $k < (n+1)p$ можно переписать как $k < np + p$, а условие $k > (n+1)p$ эквивалентно $k > np - q$. Поэтому наиболее вероятное число успехов $k_{\text{н.в.}}$ удовлетворяет двойному неравенству:

$$np - q \leq k_{\text{н.в.}} \leq np + p.$$

Если $np - q$ целое, то $k_{\text{н.в.}}$ может принимать два значения: $k = np - q$ и $k = np + p$ (последнее равно $np - q + 1$, так как $p + q = 1$). В противном случае существует единственное целое k, удовлетворяющее неравенству.

*

Пример. В партии из 100 деталей вероятность брака 0.1. Найти наиболее вероятное число бракованных деталей. $n = 100$, $p = 0.1$, $q = 0.9$. $np - q = 10 - 0.9 = 9.1$ — не целое. Тогда $k_{\text{н.в.}} = [9.1] + 1 = 10$. Проверим: $np + p = 10.1$, так что целое число внутри интервала $(9.1; 10.1)$ равно 10.

10. **Приближённые локальная и интегральная формулы Муавра–Лапласа и приближённая формула Пуассона.**

Локальная теорема Муавра–Лапласа: если n велико, p не слишком близко к 0 или 1 (обычно $npq > 9$), то

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x), \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}},$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$.

Интегральная теорема Муавра–Лапласа:

$$\mathsf{P}\{k_1 \leq k \leq k_2\} \approx \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right),$$

где $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt$.

Теорема Пуассона: если n велико, а p мало, причём $np = \lambda \approx \text{const}$ (обычно $n \geq 50$, $p \leq 0.1$, $\lambda \leq 10$), то

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

*

Пример. Вероятность рождения мальчика 0.515. Найти вероятность того, что среди 100 новорождённых будет ровно 50 мальчиков. Здесь $n = 100$, $p = 0.515$, $q = 0.485$, $np = 51.5$, $npq = 100 \cdot 0.515 \cdot 0.485 \approx 24.9775$, $\sqrt{npq} \approx 4.998$. Так как p не мало, используем Муавра–Лапласа:

$$x = \frac{50 - 51.5}{4.998} \approx -0.3001, \quad \varphi(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-0.3001^2/2} \approx 0.3814.$$

Тогда $P_{100}(50) \approx \frac{0.3814}{4.998} \approx 0.0763$.

Пример сравнения. Пусть $n = 1000$, $p = 0.01$, тогда $\lambda = np = 10$. Найдём $P_{1000}(5)$. По Пуассону: $P \approx \frac{10^5}{5!}e^{-10} \approx \frac{100000}{120} \cdot 0.0000454 \approx 0.0378$. По Муавра-Лапласа: $np = 10$, $npq = 1000 \cdot 0.01 \cdot 0.99 = 9.9$, $\sqrt{npq} = 3.1464$, $x = \frac{5-10}{3.1464} \approx -1.589$, $\varphi(x) \approx 0.114$, тогда $P \approx \frac{0.114}{3.1464} \approx 0.0362$. Результаты близки.

11. **Понятие случайной величины (СВ) и её функции распределения. Свойства функции распределения.**

Определение: Случайная величина X — измеримая функция на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, т.е. для любого $x \in \mathbb{R}$ множество $\{\omega : X(\omega) < x\} \in \mathcal{F}$.

Определение: Функция распределения $F(x) = \mathsf{P}\{X < x\}$.

Свойства:

(a) $0 \leq F(x) \leq 1$.

(b) $F(x)$ неубывает.

(c) $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

(d) $F(x)$ непрерывна слева.

(e) $\mathsf{P}\{a \leq X < b\} = F(b) - F(a)$.

*

Особенности функции распределения для дискретных и непрерывных случайных величин.

- **Дискретная случайная величина:** принимает конечное или счётное число значений. Её функция распределения $F(x)$ является ступенчатой функцией со скачками в точках возможных значений случайной величины. Величина скачка в точке x_i равна вероятности $\mathsf{P}\{X = x_i\}$.
- **Непрерывная случайная величина:** принимает континуум значений. Её функция распределения $F(x)$ непрерывна и дифференцируема почти всюду (за исключением, возможно, конечного числа точек). Для такой величины вероятность принять конкретное значение равна нулю: $\mathsf{P}\{X = x\} = 0$.

Плотность распределения и её связь с функцией распределения.

Для непрерывной случайной величины X функция распределения может быть представлена как интеграл от некоторой неотрицательной функции $f(x)$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Функция $f(x)$ называется **плотностью распределения** случайной величины X и обладает свойствами:

(a) $f(x) \geq 0$ для всех x.

(b) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

(c) В точках непрерывности плотности выполняется $f(x) = F'(x)$.

(d) Вероятность попадания в интервал: $\mathsf{P}\{a \leq X < b\} = \int_a^b f(x)dx$.

Пример. Бросание монеты: $X = 1$ если герб, $X = 0$ если решка. Тогда

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{1}{2}, & 0 < x \leq 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

График $F(x)$ — ступенчатая функция со скачком в точках 0 и 1.

Пример непрерывной случайной величины. Пусть X равномерно распределена на отрезке $[0,1]$. Тогда плотность:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Функция распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x, & 0 < x \le 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

12. **Основные дискретные распределения (биномиальное, геометрическое и Пуассона).**

Определение: Биномиальное распределение: $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$,

$$\mathsf{P}\{X = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Определение: Геометрическое распределение: X — номер первого успеха в схеме Бернулли,

$$\mathsf{P}\{X = k\} = (1-p)^{k-1} p, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Определение: Распределение Пуассона: $X \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$,

$$\mathsf{P}\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

*

Пример (геометрическое). Монету подбрасывают до первого появления герба. Вероятность герба $p = 0.5$. Тогда вероятность того, что герб выпадет впервые на 3-м подбрасывании: $\mathsf{P}\{X = 3\} = (0.5)^2 \cdot 0.5 = 0.125$.

13. **Понятие плотности распределения для непрерывной случайной величины. Основные непрерывные распределения (равномерное на отрезке, показательное, нормальное).**

Определение: Плотность распределения $f(x)$ непрерывной СВ X:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt, \quad f(x) \ge 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

Определение: Равномерное распределение на $[a,b]$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a,b], \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Определение: Показательное распределение с параметром $\lambda > 0$:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Определение: Нормальное распределение с параметрами a и σ^2:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

*

Пример (показательное). Время безотказной работы прибора распределено показательно со средним 100 часов ($\mathsf{M}X = 1/\lambda = 100$, значит $\lambda = 0.01$). Тогда вероятность проработать более 200 часов: $\mathsf{P}\{X > 200\} = e^{-0.01\cdot 200} = e^{-2} \approx 0.135$.

14. **Функция распределения системы двух случайных величин. Плотность совместного распределения двух непрерывных СВ. Общие свойства. Условие независимости случайных величин.**

Определение: Функция распределения системы двух СВ:

$$F(x, y) = \mathsf{P}\{X < x, Y < y\}.$$

Свойства: неубывание по каждому аргументу, непрерывность слева, предельные соотношения.

Определение: Плотность совместного распределения (если существует):

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}, \quad f(x, y) \geq 0, \quad \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = 1.$$

Определение: СВ X и Y независимы, если

$$F(x, y) = F_X(x) F_Y(y) \quad \text{или} \quad f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$$

(для непрерывных).

*

Пример. Пусть совместная плотность $f(x, y) = \begin{cases} c \cdot xy, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$ Найдём константу c из условия нормировки:

$$\int_0^1 \int_0^1 cxy \, dx dy = c \int_0^1 x dx \int_0^1 y dy = c \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{c}{4} = 1 \Rightarrow c = 4.$$

Найдём маргинальные плотности:

$$f_X(x) = \int_0^1 4xy \, dy = 4x \cdot \frac{1}{2} = 2x, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Аналогично $f_Y(y) = 2y$, $0 \leq y \leq 1$. Так как $f(x, y) = 4xy = (2x)(2y) = f_X(x) f_Y(y)$, то X и Y независимы.

15. **Определение и свойства математического ожидания СВ. Математическое ожидание СВ, определяемых основными дискретными и непрерывными распределениями.**

Определение: Для дискретной СВ: $\mathsf{M}X = \sum x_i p_i$. Для непрерывной СВ: $\mathsf{M}X = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$.

Свойства:

(a) $\mathsf{M}(c) = c$.

(b) $\mathsf{M}(cX) = c\mathsf{M}X$.

(c) $\mathsf{M}(X+Y) = \mathsf{M}X + \mathsf{M}Y$.

(d) Если X и Y независимы, то $\mathsf{M}(XY) = \mathsf{M}X \cdot \mathsf{M}Y$.

Матожидания основных распределений:

- Биномиальное: $\mathsf{M}X = np$.
- Геометрическое: $\mathsf{M}X = 1/p$.
- Пуассона: $\mathsf{M}X = \lambda$.
- Равномерное на $[a,b]$: $\mathsf{M}X = \frac{a+b}{2}$.
- Показательное: $\mathsf{M}X = 1/\lambda$.
- Нормальное: $\mathsf{M}X = a$.

*

Пример. Пусть X_1, X_2, X_3 — независимые показательные СВ с параметрами $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Найти $\mathsf{M}(X_1+X_2X_3)$. По свойствам: $\mathsf{M}(X_1+X_2X_3) = \mathsf{M}X_1+\mathsf{M}(X_2X_3) = \frac{1}{\lambda_1}+\mathsf{M}X_2\cdot\mathsf{M}X_3 = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2\lambda_3}$.

16. **Определение и свойства дисперсии СВ. Дисперсии для основных дискретных и непрерывных распределений.**

Определение: Дисперсия: $\mathsf{D}X = \mathsf{M}[(X - \mathsf{M}X)^2] = \mathsf{M}(X^2) - (\mathsf{M}X)^2$.

Свойства:

(a) $\mathsf{D}(c) = 0$.

(b) $\mathsf{D}(cX) = c^2\mathsf{D}X$.

(c) $\mathsf{D}(X+Y) = \mathsf{D}X + \mathsf{D}Y$ для независимых X и Y.

Дисперсии основных распределений:

- Биномиальное: $\mathsf{D}X = npq$.
- Геометрическое: $\mathsf{D}X = q/p^2$.
- Пуассона: $\mathsf{D}X = \lambda$.
- Равномерное на $[a,b]$: $\mathsf{D}X = \frac{(b-a)^2}{12}$.
- Показательное: $\mathsf{D}X = 1/\lambda^2$.
- Нормальное: $\mathsf{D}X = \sigma^2$.

*

Пример. Пусть X и Y независимы, $\mathsf{D}X = 4$, $\mathsf{D}Y = 9$. Найти $\mathsf{D}(2X - 3Y + 1)$.

$$\mathsf{D}(2X - 3Y + 1) = \mathsf{D}(2X - 3Y) = 4\mathsf{D}X + 9\mathsf{D}Y = 4 \cdot 4 + 9 \cdot 9 = 16 + 81 = 97.$$

17. **Понятие условного математического ожидания. Разложение безусловного математического ожидания по условным (аналог формулы полной вероятности).**

Определение: Условное матожидание дискретной СВ X при условии события A:

$$\mathsf{M}[X|A] = \sum x_i \mathsf{P}\{X = x_i|A\}.$$

Для непрерывной СВ с условной плотностью $f(x|A)$:

$$\mathsf{M}[X|A] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x|A) dx.$$

Теорема: Если $H_1, \dots, H_n$ — полная группа событий, то

$$\mathsf{M}X = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{M}[X|H_i]\mathsf{P}\{H_i\}.$$

*

Пример. Пусть X — число очков при бросании игральной кости. Событие A — выпадение чётного числа. Тогда условное распределение X при условии A: значения 2,4,6 с вероятностями по $1/3$. $\mathsf{M}[X|A] = (2 + 4 + 6)/3 = 4$. Если A_1 — чётное, A_2 — нечётное, то $\mathsf{P}\{A_1\} = \mathsf{P}\{A_2\} = 0.5$, $\mathsf{M}[X|A_1] = 4$, $\mathsf{M}[X|A_2] = (1 + 3 + 5)/3 = 3$. Тогда $\mathsf{M}X = 4 \cdot 0.5 + 3 \cdot 0.5 = 3.5$, что совпадает с непосредственным вычислением.

18. **Ковариация и коэффициент корреляции случайных величин. Их свойства.**

Определение: Ковариация:

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathsf{M}[(X - \mathsf{M}X)(Y - \mathsf{M}Y)] = \mathsf{M}(XY) - \mathsf{M}X \cdot \mathsf{M}Y.$$

Определение: Коэффициент корреляции:

$$\rho_{XY} = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathsf{D}X \cdot \mathsf{D}Y}}.$$

Свойства:

(a) $-1 \le \rho_{XY} \le 1$.

(b) Если X и Y независимы, то $\rho_{XY} = 0$ (обратное неверно).

(c) $\rho_{XY} = 1$ тогда и только тогда, когда $Y = aX + b$ с $a > 0$; $\rho_{XY} = -1$ при $a < 0$.

*

Пример дискретной случайной величины

Рассмотрим случайные величины X и Y, принимающие значения 0 и 1 с совместным распределением:

$Y \backslash X$	0	1
0	a	b
1	c	d

где $a + b + c + d = 1$, $a, b, c, d \ge 0$.

Положительная ковариация: Пусть $a = 0.2$, $b = 0.1$, $c = 0.1$, $d = 0.6$.

Маргинальные распределения:

$$\mathsf{P}\{X=0\}=a+c=0.3,\quad \mathsf{P}\{X=1\}=b+d=0.7$$

$$\mathsf{P}\{Y=0\}=a+b=0.3,\quad \mathsf{P}\{Y=1\}=c+d=0.7$$

Математические ожидания:

$$\mathsf{M}X=0\cdot 0.3+1\cdot 0.7=0.7$$

$$\mathsf{M}Y=0\cdot 0.3+1\cdot 0.7=0.7$$

$$\mathsf{M}(XY)=0\cdot 0\cdot 0.2+1\cdot 0\cdot 0.1+0\cdot 1\cdot 0.1+1\cdot 1\cdot 0.6=0.6$$

$$\mathsf{cov}(X,Y)=\mathsf{M}(XY)-\mathsf{M}X\cdot\mathsf{M}Y=0.6-0.7\cdot 0.7=0.6-0.49=0.11>0$$

Отрицательная ковариация: Пусть $a=0.1$, $b=0.4$, $c=0.4$, $d=0.1$.

$$\mathsf{M}X=0\cdot 0.5+1\cdot 0.5=0.5$$
$$\mathsf{M}Y=0\cdot 0.5+1\cdot 0.5=0.5$$

$$\mathsf{M}(XY)=0.1$$

$$\mathsf{cov}(X,Y)=0.1-0.5\cdot 0.5=0.1-0.25=-0.15<0$$

Непрерывные случайные величины

Рассмотрим совместную плотность распределения $f(x,y)$ на единичном квадрате $[0,1]\times[0,1]$:

Положительная ковариация: Рассмотрим плотность $f(x,y)=2(1-x-y+2xy)$ для $0\le x,y\le 1$.

Маргинальные плотности:

$$f_X(x)=\int_0^1 2(1-x-y+2xy)dy=2\left[y-xy-\frac{y^2}{2}+xy^2\right]_0^1=2\left(1-x-\frac{1}{2}+x\right)=1$$

$$f_Y(y)=1$$

Опять X и Y равномерны на $[0,1]$.

$$\begin{aligned}\mathsf{M}(XY)&=\int_0^1\int_0^1 xy\cdot 2(1-x-y+2xy)dxdy\\&=2\int_0^1\int_0^1(xy-x^2y-xy^2+2x^2y^2)dxdy\\&=2\int_0^1\left[\frac{x^2}{2}y-\frac{x^3}{3}y-\frac{x^2}{2}y^2+\frac{2x^3}{3}y^2\right]_0^1dy\end{aligned}$$

$$= 2\int_0^1 \left(\frac{y}{2} - \frac{y}{3} - \frac{y^2}{2} + \frac{2y^2}{3}\right) dy$$

$$= 2\int_0^1 \left(\frac{y}{6} + \frac{y^2}{6}\right) dy = 2\left[\frac{y^2}{12} + \frac{y^3}{18}\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{18}\right) = 2 \cdot \frac{5}{36} = \frac{5}{18}$$

$$\mathsf{cov}(X,Y) = \frac{5}{18} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{18} - \frac{1}{4} = \frac{10}{36} - \frac{9}{36} = \frac{1}{36} > 0$$

Отрицательная ковариация: Пусть $f(x,y) = 2(x + y - 2xy)$ для $0 \le x, y \le 1$.

Маргинальные плотности:

$$f_X(x) = \int_0^1 2(x + y - 2xy)dy = 2\left[xy + \frac{y^2}{2} - xy^2\right]_0^1 = 2\left(x + \frac{1}{2} - x\right) = 1$$

$$f_Y(y) = 1$$

Таким образом, X и Y равномерны на $[0,1]$, $\mathsf{M}X = \mathsf{M}Y = \frac{1}{2}$.

$$\mathsf{M}(XY) = \int_0^1 \int_0^1 xy \cdot 2(x + y - 2xy)dxdy$$

$$= 2\int_0^1 \int_0^1 (x^2y + xy^2 - 2x^2y^2)dxdy$$

$$= 2\int_0^1 \left[\frac{x^3}{3}y + \frac{x^2}{2}y^2 - \frac{2x^3}{3}y^2\right]_0^1 dy$$

$$= 2\int_0^1 \left(\frac{y}{3} + \frac{y^2}{2} - \frac{2y^2}{3}\right) dy$$

$$= 2\int_0^1 \left(\frac{y}{3} - \frac{y^2}{6}\right) dy = 2\left[\frac{y^2}{6} - \frac{y^3}{18}\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{18}\right) = 2 \cdot \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$$

$$\mathsf{cov}(X,Y) = \frac{2}{9} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{9} - \frac{1}{4} = \frac{8}{36} - \frac{9}{36} = -\frac{1}{36} < 0$$

19. **Неравенство Чебышёва. Закон больших чисел: теорема Чебышёва и теорема Бернулли.**

Теорема (Неравенство Чебышёва): для СВ X с конечной дисперсией и любого $\varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}\{|X - \mathsf{M}X| \ge \varepsilon\} \le \frac{\mathsf{D}X}{\varepsilon^2}.$$

Правило трёх сигм: для любой СВ с конечной дисперсией

$$\mathsf{P}\{|X - \mathsf{M}X| < 3\sigma\} \ge \frac{8}{9}, \quad \sigma = \sqrt{\mathsf{D}X}.$$

Теорема Чебышёва (ЗБЧ): для последовательности независимых СВ $X_1, X_2, \ldots$ с одинаковым матожиданием m и ограниченными дисперсиями ($\mathsf{D}X_i \le C$) выполняется

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - m\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

Теорема Бернулли: частота успеха в схеме Бернулли сходится по вероятности к вероятности успеха.

*

Пример. Оценка вероятности отклонения. Пусть $\mathsf{D}X = 4$. Тогда вероятность того, что X отклонится от своего матожидания более чем на 3, не превосходит $4/9 \approx 0.444$. Более точные оценки даются, если известно распределение.

20. **Центральная предельная теорема (ЦПТ) в форме Ляпунова. Интегральная теорема Муавра–Лапласа как следствие из ЦПТ.**

ЦПТ Ляпунова: если $X_1, X_2, \ldots$ независимы, имеют конечные матожидания a_i и дисперсии σ_i^2, и выполняется условие Ляпунова:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{B_n^3} \sum_{i=1}^{n} \mathsf{M}[|X_i - a_i|^3] = 0,$$

где $B_n^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$, то распределение нормированной суммы

$$Z_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^n a_i}{B_n}$$

сходится к стандартному нормальному распределению. Формально:

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\{Z_n < z\} = \Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-t^2/2} dt.$$

Интегральная теорема Муавра–Лапласа: в схеме Бернулли: пусть S_n — число успехов в n независимых испытаниях с вероятностью успеха p, $q = 1 - p$. Тогда при больших n:

$$\mathsf{P}\{a \le S_n \le b\} \approx \Phi\left(\frac{b - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a - np}{\sqrt{npq}}\right).$$

Функция Лапласа: $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt$.

*

Пример. Сумма 100 независимых равномерных на $[0, 1]$ СВ. По ЦПТ её распределение приближённо нормально с параметрами: $\mathsf{M}\sum X_i = 100 \cdot 0.5 = 50$, $\mathsf{D}\sum X_i = 100 \cdot \frac{1}{12} = 8.333$. Тогда вероятность того, что сумма будет между 49 и 51, приближённо равна $\Phi\left(\frac{51-50}{\sqrt{8.333}}\right) - \Phi\left(\frac{49-50}{\sqrt{8.333}}\right) \approx 2\Phi(0.346) - 1 \approx 2 \cdot 0.635 - 1 = 0.27$.

21. **Различные виды сходимости в вероятностном пространстве: почти наверное, в среднеквадратичном, по вероятности, по распределению. Теорема о соотношении между сходимостью в ср. кв. и по вероятности.**

Определения:

- Сходимость почти наверное (п.н.): $\mathsf{P}\{\omega : X_n(\omega) \to X(\omega)\} = 1$.
- Сходимость в среднеквадратичном (ср.кв.): $\mathsf{M}[(X_n - X)^2] \to 0$.
- Сходимость по вероятности: $\forall \varepsilon > 0\ \mathsf{P}\{|X_n - X| > \varepsilon\} \to 0$.
- Сходимость по распределению: $F_{X_n}(x) \to F_X(x)$ во всех точках непрерывности F_X.

Соотношения: сходимость п.н. $\Rightarrow$ сходимость по вероятности $\Rightarrow$ сходимость по распределению. Сходимость в ср. кв. $\Rightarrow$ сходимость по вероятности.

Лемма Бореля-Кантелли: если $\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}\{A_n\} < \infty$, то с вероятностью 1 происходит лишь конечное число событий A_n. Если события независимы и $\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}\{A_n\} = \infty$, то с вероятностью 1 происходит бесконечно много событий A_n.

*

Пример сходимости. Пусть X_n независимы, $\mathsf{P}\{X_n = 1\} = 1/n$, $\mathsf{P}\{X_n = 0\} = 1 - 1/n$. Тогда $X_n \xrightarrow{P} 0$, так как $\mathsf{P}\{|X_n| > \varepsilon\} = 1/n \to 0$. Но по лемме Бореля-Кантелли $\sum 1/n = \infty$, и так как события независимы, то с вероятностью 1 бесконечно много X_n равны 1, значит, X_n не сходится к 0 почти наверное.

22. **Теорема о соотношении между сходимостью по вероятности и по распределению.**

Определения:

- Сходимость по вероятности: $\forall \varepsilon > 0$ $\mathsf{P}\{|X_n - X| > \varepsilon\} \to 0$.
- Сходимость по распределению: $F_{X_n}(x) \to F_X(x)$ во всех точках непрерывности F_X.

Теорема: если $X_n \xrightarrow{P} X$, то $X_n \xrightarrow{d} X$. Обратное неверно.

*

Доказательство (основные моменты). Пусть $X_n \xrightarrow{P} X$. Нужно показать, что для любой точки непрерывности x функции F_X имеем $F_{X_n}(x) \to F_X(x)$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Запишем:

$$\mathsf{P}\{X_n < x\} = \mathsf{P}\{X_n < x, X < x + \varepsilon\} + \mathsf{P}\{X_n < x, X \geq x + \varepsilon\}.$$

Первое слагаемое $\leq \mathsf{P}\{X < x + \varepsilon\} = F_X(x + \varepsilon)$. Второе слагаемое $\leq \mathsf{P}\{|X_n - X| \geq \varepsilon\}$. Таким образом,

$$F_{X_n}(x) \leq F_X(x + \varepsilon) + \mathsf{P}\{|X_n - X| \geq \varepsilon\}.$$

Аналогично, рассматривая $\mathsf{P}\{X < x - \varepsilon\}$, получим

$$F_X(x - \varepsilon) \leq F_{X_n}(x) + \mathsf{P}\{|X_n - X| \geq \varepsilon\}.$$

Объединяя, имеем

$$F_X(x - \varepsilon) - \mathsf{P}\{|X_n - X| \geq \varepsilon\} \leq F_{X_n}(x) \leq F_X(x + \varepsilon) + \mathsf{P}\{|X_n - X| \geq \varepsilon\}.$$

Устремляя $n \to \infty$, получаем для любого $\varepsilon > 0$:

$$F_X(x - \varepsilon) \leq \liminf_{n\to\infty} F_{X_n}(x) \leq \limsup_{n\to\infty} F_{X_n}(x) \leq F_X(x + \varepsilon).$$

Так как x — точка непрерывности, то при $\varepsilon \to 0$ $F_X(x - \varepsilon)$ и $F_X(x + \varepsilon)$ стремятся к $F_X(x)$. Отсюда следует, что $\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$.

Пример. Пусть X — стандартная нормальная СВ, и $X_n = (-1)^n X$. Тогда $X_n \xrightarrow{d} X$, так как распределение X_n такое же, как у X. Но X_n не сходится по вероятности к X (например, при чётных n разность $X_n - X = 0$, при нечётных $X_n - X = -2X$, что не стремится к 0 по вероятности).