Задачи на математическое ожидание и дисперсию

Задачи с решениями

Дискретные распределения

Задача Д.1. **Условие:** Из урны, содержащей 2 белых и 3 чёрных шара, наудачу и без возвращения извлекают два шара. Случайная величина ξ — число чёрных шаров среди извлечённых. Найдите математическое ожидание $M\xi$ и дисперсию $D\xi$.

Решение:

Случайная величина ξ может принимать значения 0, 1, 2. Найдём соответствующие вероятности, используя классическое определение.

Общее число исходов: $C_5^2 = 10$.

- $\xi = 0$ (оба шара белые): $P(\xi = 0) = \frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{1}{10}$.
- $\xi = 1$ (один чёрный, один белый): $P(\xi = 1) = \frac{C_3^1 \cdot C_2^1}{C_5^2} = \frac{3 \cdot 2}{10} = \frac{6}{10}$.
- $\xi = 2$ (оба шара чёрные): $P(\xi = 2) = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10}$.

Закон распределения ξ:

ξ	0	1	2
P	0.1	0.6	0.3

Математическое ожидание:

$$M\xi = 0 \cdot 0.1 + 1 \cdot 0.6 + 2 \cdot 0.3 = 0 + 0.6 + 0.6 = 1.2$$

Найдём $M\xi^2$:

$$M\xi^2 = 0^2 \cdot 0.1 + 1^2 \cdot 0.6 + 2^2 \cdot 0.3 = 0 + 0.6 + 1.2 = 1.8$$

Дисперсия:

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = 1.8 - (1.2)^2 = 1.8 - 1.44 = 0.36$$

Ответ: $M\xi = 1.2$, $D\xi = 0.36$.

Задача Д.2. **Условие:** Производится 3 независимых эксперимента по схеме Бернулли. Вероятность успеха в каждом эксперименте равна 0.7. Случайная величина η — число успехов. Найдите математическое ожидание $M\eta$ и дисперсию $D\eta$.

Решение:

Величина η имеет биномиальное распределение с параметрами $n = 3$, $p = 0.7$: $\eta \sim Bin(n = 3, p = 0.7)$.

Для биномиального распределения:

$$M\eta = n \cdot p = 3 \cdot 0.7 = 2.1$$

$$D\eta = n \cdot p \cdot (1 - p) = 3 \cdot 0.7 \cdot 0.3 = 0.63$$

Ответ: $M\eta = 2.1$, $D\eta = 0.63$.

Задача Д.3. **Условие:** Монету подбрасывают два раза. После первого подбрасывания она попадает в лужу глицерина, в результате чего вероятность выпадения стороны, выпавшей в первый раз, становится равна 0.6. Случайная величина ζ определяется так: $\zeta = -1$, если выпало два орла; $\zeta = 0$, если выпали орёл и решка; $\zeta = 1$, если выпало две решки. Найдите математическое ожидание $M\zeta$ и дисперсию $D\zeta$.

Решение:

Введём события для первого броска: O_1 — выпал орёл, P_1 — выпала решка. $P(O_1) = P(P_1) = 0.5$.

Второй бросок зависит от первого:

- Если первый — орёл, то $P(O_2|O_1) = 0.6$, $P(P_2|O_1) = 0.4$.
- Если первый — решка, то $P(P_2|P_1) = 0.6$, $P(O_2|P_1) = 0.4$.

Найдём вероятности значений ζ:

- $\zeta = -1$ (два орла): $P(O_1, O_2) = P(O_1) \cdot P(O_2|O_1) = 0.5 \cdot 0.6 = 0.3$.
- $\zeta = 1$ (две решки): $P(P_1, P_2) = P(P_1) \cdot P(P_2|P_1) = 0.5 \cdot 0.6 = 0.3$.
- $\zeta = 0$ (орёл и решка): $1 - 0.3 - 0.3 = 0.4$.

Закон распределения ζ:

ζ	-1	0	1
P	0.3	0.4	0.3

Математическое ожидание:

$$M\zeta = (-1) \cdot 0.3 + 0 \cdot 0.4 + 1 \cdot 0.3 = -0.3 + 0 + 0.3 = 0$$

Найдём $M\zeta^2$:

$$M\zeta^2 = (-1)^2 \cdot 0.3 + 0^2 \cdot 0.4 + 1^2 \cdot 0.3 = 0.3 + 0 + 0.3 = 0.6$$

Дисперсия:

$$D\zeta = M\zeta^2 - (M\zeta)^2 = 0.6 - 0^2 = 0.6$$

Ответ: $M\zeta = 0$, $D\zeta = 0.6$.

Задача Д.4. **Условие:** Число посетителей торгового центра в час пик распределено по закону Пуассона с параметром $\lambda = 8$. Случайная величина ξ — число посетителей. Найдите $M\xi$ и $D\xi$.

Решение:

Для пуассоновского распределения $\xi \sim Poisson(\lambda)$ математическое ожидание и дисперсия равны параметру λ.

$$M\xi = \lambda = 8$$

$$D\xi = \lambda = 8$$

Ответ: $M\xi = 8$, $D\xi = 8$.

Задача Д.5. **Условие:** В магазин вошел покупатель с вероятностью 0.4 совершит покупку. Пусть случайная величина ν — номер первого покупателя, совершившего покупку (считая с вошедшего). Найдите математическое ожидание и дисперсию ν.

Решение:

Данная случайная величина имеет геометрическое распределение с параметром $p = 0.4$: $\nu \sim Geom(p = 0.4)$. Она описывает число испытаний до первого успеха (включительно).

Для геометрического распределения:

$$M\nu = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.4} = 2.5$$

$$D\nu = \frac{1-p}{p^2} = \frac{0.6}{(0.4)^2} = \frac{0.6}{0.16} = 3.75$$

Ответ: $M\nu = 2.5$, $D\nu = 3.75$.

Непрерывные распределения

Задача Н.1. **Условие:** Случайная величина ξ распределена равномерно на отрезке $[-2, 3]$. Найдите $M\xi$ и $D\xi$.

Решение:

Для равномерного распределения $\xi \sim U(a, b)$:

$$M\xi = \frac{a+b}{2} = \frac{-2+3}{2} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$D\xi = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(3-(-2))^2}{12} = \frac{25}{12} \approx 2.08(3)$$

Ответ: $M\xi = 0.5$, $D\xi = \frac{25}{12}$.

Задача Н.2. **Условие:** Случайная величина η имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 2$. Найдите $M\eta$ и $D\eta$.

Решение:

Для показательного распределения $\eta \sim Exp(\lambda)$:

$$M\eta = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$D\eta = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = 0.25$$

Ответ: $M\eta = 0.5$, $D\eta = 0.25$.

Задача Н.3. **Условие:** Случайная величина ζ имеет стандартное нормальное распределение: $\zeta \sim N(0, 1)$. Найдите $M\zeta$ и $D\zeta$.

Решение:

По определению стандартного нормального распределения:

$$M\zeta = 0$$

$$D\zeta = 1$$

Ответ: $M\zeta = 0$, $D\zeta = 1$.

Задача Н.4. **Условие:** Случайная величина ξ распределена нормально с математическим ожиданием $a = -3$ и дисперсией $\sigma^2 = 4$. Найдите $M\xi$ и $D\xi$.

Решение:

По условию даны параметры распределения $\xi \sim N(a = -3, \sigma^2 = 4)$.

$$M\xi = a = -3$$

$$D\xi = \sigma^2 = 4$$

Ответ: $M\xi = -3$, $D\xi = 4$.

Задача Н.5. **Условие:** Случайная величина η имеет функцию распределения $F(x) = 1 - e^{-x^2}$ при $x \geq 0$ (распределение Рэлея). Найдите её математическое ожидание и дисперсию.

Решение:

Плотность распределения: $f(x) = F'(x) = 2xe^{-x^2}$, $x \geq 0$.

Математическое ожидание:

$$M\eta = \int_0^\infty x \cdot f(x)\,dx = \int_0^\infty x \cdot 2xe^{-x^2}\,dx = 2\int_0^\infty x^2 e^{-x^2}\,dx$$

Воспользуемся табличным интегралом: $\int_0^\infty x^{2n} e^{-ax^2} dx = \frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2^{n+1}a^n}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$.
При $n = 1$, $a = 1$: $\int_0^\infty x^2 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2^2\cdot 1}\sqrt{\pi} = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$.

$$M\eta = 2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{4} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Найдём $M\eta^2$:

$$M\eta^2 = \int_0^\infty x^2 \cdot f(x)\,dx = \int_0^\infty x^2 \cdot 2xe^{-x^2}\,dx = 2\int_0^\infty x^3 e^{-x^2}\,dx$$

Сделаем замену $t = x^2$, $dt = 2xdx$, $x^3dx = \frac{t}{2}dt$.

$$M\eta^2 = 2\int_0^\infty \frac{t}{2}e^{-t}dt = \int_0^\infty te^{-t}dt = \Gamma(2) = 1! = 1$$

Дисперсия:

$$D\eta = M\eta^2 - (M\eta)^2 = 1 - \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2 = 1 - \frac{\pi}{4}$$

Ответ: $M\eta = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $D\eta = 1 - \frac{\pi}{4}$.

Условия задач

Дискретные распределения

Задача Д.1. Из урны, содержащей 2 белых и 3 чёрных шара, наудачу и без возвращения извлекают два шара. Случайная величина ξ — число чёрных шаров среди извлечённых. Найдите математическое ожидание $M\xi$ и дисперсию $D\xi$.

Задача Д.2. Производится 3 независимых эксперимента по схеме Бернулли. Вероятность успеха в каждом эксперименте равна 0.7. Случайная величина η — число успехов. Найдите математическое ожидание $M\eta$ и дисперсию $D\eta$.

Задача Д.3. Монету подбрасывают два раза. После первого подбрасывания она попадает в лужу глицерина, в результате чего вероятность выпадения стороны, выпавшей в первый раз, становится равна 0.6. Случайная величина ζ определяется так: $\zeta = -1$, если выпало два орла; $\zeta = 0$, если выпали орёл и решка; $\zeta = 1$, если выпало две решки. Найдите математическое ожидание $M\zeta$ и дисперсию $D\zeta$.

Задача Д.4. Число посетителей торгового центра в час пик распределено по закону Пуассона с параметром $\lambda = 8$. Случайная величина ξ — число посетителей. Найдите $M\xi$ и $D\xi$.

Задача Д.5. В магазин вошел покупатель с вероятностью 0.4 совершит покупку. Пусть случайная величина ν — номер первого покупателя, совершившего покупку (считая с вошедшего). Найдите математическое ожидание и дисперсию ν.

Непрерывные распределения

Задача Н.1. Случайная величина ξ распределена равномерно на отрезке $[-2, 3]$. Найдите $M\xi$ и $D\xi$.

Задача Н.2. Случайная величина η имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 2$. Найдите $M\eta$ и $D\eta$.

Задача Н.3. Случайная величина ζ имеет стандартное нормальное распределение: $\zeta \sim N(0, 1)$. Найдите $M\zeta$ и $D\zeta$.

Задача Н.4. Случайная величина ξ распределена нормально с математическим ожиданием $a = -3$ и дисперсией $\sigma^2 = 4$. Найдите $M\xi$ и $D\xi$.

Задача Н.5. Случайная величина η имеет функцию распределения $F(x) = 1 - e^{-x^2}$ при $x \geq 0$ (распределение Рэлея). Найдите её математическое ожидание и дисперсию.

Ответы ко всем задачам

Дискретные распределения

Задача Д.1. $M\xi = 1.2$, $D\xi = 0.36$

Задача Д.2. $M\eta = 2.1$, $D\eta = 0.63$

Задача Д.3. $M\zeta = 0$, $D\zeta = 0.6$

Задача Д.4. $M\xi = 8$, $D\xi = 8$

Задача Д.5. $M\nu = 2.5$, $D\nu = 3.75$

Непрерывные распределения

Задача Н.1. $M\xi = 0.5$, $D\xi = \frac{25}{12}$

Задача Н.2. $M\eta = 0.5$, $D\eta = 0.25$

Задача Н.3. $M\zeta = 0$, $D\zeta = 1$

Задача Н.4. $M\xi = -3$, $D\xi = 4$

Задача Н.5. $M\eta = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $D\eta = 1 - \frac{\pi}{4}$