Теоремы для решения задач

Неравенство Чебышёва

Для любой случайной величины X с математическим ожиданием $M[X]$ и дисперсией $D[X]$, и для любого $\varepsilon > 0$ выполняется:

$$P(|X - M[X]| \geq \varepsilon) \leq \frac{D[X]}{\varepsilon^2}$$

Центральная предельная теорема

Если $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с $M[X_i] = \mu$ и $D[X_i] = \sigma^2$, то при $n \to \infty$ распределение суммы $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ стремится к нормальному распределению $N(n\mu, n\sigma^2)$.

Аналогичные задачи

К задаче 1

Задача 1.1 (простая): Проводится 400 независимых испытаний с вероятностью успеха 0.3. Используя неравенство Чебышёва, оценить вероятность того, что число успехов отклонится от математического ожидания не более чем на 20.

Решение:

$$M[X] = np = 400 \cdot 0.3 = 120, \quad D[X] = npq = 400 \cdot 0.3 \cdot 0.7 = 84$$

$$P(|X - 120| \leq 20) \geq 1 - \frac{84}{20^2} = 1 - \frac{84}{400} = 0.79$$

Ответ: $P(|X - 120| \leq 20) \geq 0.79$

Задача 1.2 (сложная): Случайная величина X имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda = 100$. Используя неравенство Чебышёва, оценить вероятность $P(80 \leq X \leq 120)$ и сравнить с точным значением.

Решение: Для распределения Пуассона: $M[X] = \lambda = 100$, $D[X] = \lambda = 100$

$$P(80 \leq X \leq 120) = P(|X - 100| \leq 20) \geq 1 - \frac{100}{20^2} = 1 - 0.25 = 0.75$$

Точное значение (используя таблицы или приближение):

$$P(80 \le X \le 120) \approx 0.943$$

Ответ: Оценка Чебышёва: ≥ 0.75, точное значение ≈ 0.943

К задаче 2

Задача 2.1 (простая): Сколько нужно бросить правильных монет, чтобы с вероятностью не менее 0.9 число выпавших орлов отличалось от математического ожидания не более чем на 10?

Решение: Для одного броска: $M[X_i] = 0.5,\ D[X_i] = 0.25$

$$P(|S_n - 0.5n| \le 10) \approx 2\Phi\left(\frac{10}{\sqrt{0.25n}}\right) - 1 \ge 0.9$$

$$\Phi\left(\frac{20}{\sqrt{n}}\right) \ge 0.95 \Rightarrow \frac{20}{\sqrt{n}} \ge 1.645$$

$$n \le \left(\frac{20}{1.645}\right)^2 \approx 147.8$$

Ответ: $n \le 147$

Задача 2.2 (сложная): Производится n измерений физической величины. Каждое измерение имеет нормальную ошибку с $M[\varepsilon] = 0$, $\sigma = 2$. Сколько измерений нужно произвести, чтобы с вероятностью 0.99 среднее арифметическое отличалось от истинного значения не более чем на 0.5?

Решение:

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\right| \le 0.5\right) = 2\Phi\left(\frac{0.5\sqrt{n}}{2}\right) - 1 \ge 0.99$$

$$\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{4}\right) \ge 0.995 \Rightarrow \frac{\sqrt{n}}{4} \ge 2.576$$

$$n \ge (4 \cdot 2.576)^2 \approx 106.2$$

Ответ: $n \ge 107$

К задаче 3

Задача 3.1 (простая): Суммируется 10000 чисел, каждое округлено с точностью до 0.01. Ошибки округления независимы и равномерно распределены на $[-0.005, 0.005]$. Найти интервал для суммарной ошибки с вероятностью 0.9.

Решение:

$$a = 0.005, \quad M[X_i] = 0, \quad D[X_i] = \frac{(2a)^2}{12} = \frac{0.0001}{12}$$

$$P(|S| \le \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{10000 \cdot \frac{0.0001}{12}}}\right) - 1 = 0.9$$

$$\Phi\left(\frac{\varepsilon}{0.2887}\right) = 0.95 \Rightarrow \frac{\varepsilon}{0.2887} = 1.645$$

$$\varepsilon \approx 0.475$$

Ответ: $[-0.475; 0.475]$

Задача 3.2 (сложная): Производится 500000 измерений, каждое с независимой ошибкой, имеющей треугольное распределение на $[-1, 1]$ с плотностью $f(x) = 1 - |x|$. Найти вероятность того, что суммарная ошибка превысит 200.

Решение:

$$M[X_i] = 0, \quad D[X_i] = 2\int_0^1 x^2(1-x)dx = 2\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

$$P(S > 200) \approx 1 - \Phi\left(\frac{200}{\sqrt{500000 \cdot \frac{1}{6}}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{200}{288.675}\right)$$

$$= 1 - \Phi(0.693) \approx 1 - 0.755 = 0.245$$

Ответ: $P(S > 200) \approx 0.245$