```
from scipy.stats import norm
```

Для вычисления $\Phi(x)$ можно использовать norm.cdf, но нужно учитывать, что это будет $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt$, интеграл с нижним пределом $-\infty$, что на 0.5 больше, чем $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-t^2/2} dt$.

```
print(2*norm.cdf(0.881)-1)
```

```
0.6216821800095524
```

Задача 1 (Аналогична задаче о картах без возвращения)

Условие: В отделе из 20 сотрудников 8 владеют английским языком. Для представления на выставку случайным образом выбирают 5 человек. Какова вероятность, что среди выбранных окажется ровно 2 сотрудника, владеющих английским?

Решение:

Это классическая задача на гипергеометрическое распределение.

· Общее число исходов: число способов выбрать 5 человек из 20 $C_{20}^{5} = 15504$

· Число благоприятных исходов: нужно выбрать 2 человек из 8 владеющих английским и 3 человек из 12 не владеющих $C_8^2 C_{12}^3 = 28 \cdot 220 = 6160$

· Вероятность: $P = 6160/15504 \approx 0.397$

Ответ: Вероятность составляет ≈ 0.397 или 39.7%.

Задача 2 (Аналогична задаче о днях рождения и месяцах)

Семь писем случайным образом раскладывают по восьми пронумерованным ящикам. Какова вероятность того, что ровно два ящика окажутся пустыми?

Решение:

Это задача на комбинаторику и принцип включения-исключения.

1. Общее число исходов: Каждое из 7 писем можно независимо положить в любой из 8 ящиков $8^7 = 2097152$ способов
2. Число благоприятных исходов:

   Шаг 1: Выберем 2 ящика, которые останутся пустыми $C_8^2 = 28$ способов.

   Шаг 2: Распределим 7 писем по оставшимся 6 ящикам (8 - 2 = 6) так, чтобы ни один из этих 6 ящиков не был пустым. Это число сюръекций (накрывающих отображений) из 7-элементного множества (писем) на 6-элементное множество (ящиков). Число сюръекций вычисляется по формуле включения-исключения: $S(7,6) = 6^7 - C_6^1 5^7 + C_6^2 4^7 - C_6^3 3^7 + C_6^4 2^7 - C_6^5 1^7$

Вычислим:

$\cdot\, 6^7 = 279936$

$\cdot\, C(6,1) \cdot 5^7 = 6 \cdot 78125 = 468750$

$\cdot\, C(6,2) \cdot 4^7 = 15 \cdot 16384 = 245760$

$\cdot\, C(6,3) \cdot 3^7 = 20 \cdot 2187 = 43740$

$\cdot\, C(6,4) \cdot 2^7 = 15 \cdot 128 = 1920$

$\cdot\, C(6,5) \cdot 1^7 = 6 \cdot 1 = 6$

$S(7,6) = 279936 - 468750 + 245760 - 43740 + 1920 - 6 = 12120$

Шаг 3: По правилу произведения, число благоприятных исходов: $28 \cdot 12120 = 339360$.

3. Вероятность: P = 339360 / 2097152 ≈ 0.1618

Ответ: Вероятность составляет ≈ 0.162 или 16.2%.

Задача 3 (Аналогична задаче об опечатках)

Условие: На телефонную станцию в течение часа в среднем поступает 180 вызовов. Какова вероятность того, что за данную минуту поступит ровно 4 вызова?

Решение:

Эта задача решается с помощью распределения Пуассона, которое моделирует число редких событий на фиксированном интервале времени.

· Среднее число событий за интервал: Если в час (60 минут) поступает 180 вызовов, то среднее число вызовов в минуту составляет: λ = 180 / 60 = 3 вызова в минуту.

· Пусть случайная величина k — число вызовов за минуту.

· Вероятность того, что за минуту поступит ровно 4 вызова: $P(k=4) = (\lambda^4 \cdot e^{-\lambda})/(4!) = (3^4 \cdot e^{-3})/24$

· Вычисляем: $3^4 = 81$

$e^{-3} \approx 0.049787$

$P(X=4) = (81 * 0.049787)/24 \approx 4.033/24 \approx 0.168$

Ответ: Вероятность того, что за данную минуту поступит ровно 4 вызова, составляет ≈ 0.168 или 16.8%.

Задача, аналогичная задаче 4

Каждое утро хозяин собаки Бобика Алексей кладёт по N лакомств в каждый из двух карманов.
Когда Бобик правильно выполняет команду, Алексей случайным образом выбирает левый или правый карман (с вероятностью $\frac{1}{2}$ каждый), достаёт оттуда одно лакомство и дает Бобику.

Однажды вечером Алексей обнаружил, что левый карман пуст.
Требуется найти вероятность того, что в этот момент в правом кармане осталось ровно K лакомств, где $1 \le K \le N$.

Анализ процесса

- Начальное состояние: (N, N) — по N лакомств в каждом кармане.
- Каждый шаг уменьшает количество лакомств в одном из карманов на 1.
- Процесс останавливается, когда левый карман становится пустым.
- В момент остановки в правом кармане остаётся K лакомств.

Чтобы левый карман опустел, должно быть произведено ровно N извлечений лакомства из него.
Чтобы в правом кармане осталось K лакомств, нужно, чтобы из него было извлечено $N - K$ лакомств. Тогда:

Общее число шагов до остановки $T = 2N - K$

Подсчёт вероятности

Рассмотрим последовательность из $T = 2N - K$ шагов, где:

- N шагов — извлечения из левого кармана,
- $N - K$ шагов — извлечения из правого кармана.

Последовательностей длины T имеется 2^T.

Однако, необходимо учесть, что левый карман становится пустым впервые именно на последнем шаге.
Это означает, что во всех предыдущих $T - 1$ шагах левый карман ещё не был пуст.

Количество способов выбрать позиции для $N - 1$ извлечений из левого кармана среди первых $T - 1$ шагов:

$C_{T-1}^{N-1} = C_{2N-K-1}^{N-1}$

Таким образом, вероятность того, что левый карман опустеет первым и в правом останется ровно K лакомств, равна:

$$P(\text{левый пуст}, \text{правый} = K) = \frac{C_{2N-K-1}^{N-1}}{2^{2N-K}}$$

Учитывая симметрию, вероятность того, что левый карман опустеет первым, равна $\frac{1}{2}$.
Следовательно, условная вероятность:

$$P(K) = \frac{P(\text{левый пуст}, \text{правый} = K)}{P(\text{левый пуст})} = \frac{C_{2N-K-1}^{N-1}}{2^{2N-K-1}}$$

Ответ

$$\boxed{\frac{C_{2N-K-1}^{N-1}}{2^{2N-K-1}}}$$

Интегральная теорема Муавра-Лапласа

может быть сформулирована двумя эквивалентными способами:

Способ 1: Через нормированную сумму случайных величин

Пусть проводится n независимых испытаний Бернулли с вероятностью успеха p в каждом испытании. Пусть μ_n — число успехов в этих n испытаниях.

Тогда для любых вещественных a < b при $n \to \infty$ справедливо:

$$P\left(a \leq \frac{\mu_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq b\right) \to \Phi(b) - \Phi(a)$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt$ — функция стандартного нормального распределения.

Способ 2: Через нормированную частоту успехов

Пусть $\nu_n = \frac{\mu_n}{n}$ — частота успехов в n испытаниях.

Тогда для любых вещественных a < b при $n \to \infty$ справедливо:

$$P\left(a \leq \frac{\nu_n - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \leq b\right) \to \Phi(b) - \Phi(a)$$

Или в эквивалентной форме для симметричного отклонения:

$$P\left(|\nu_n - p| \leq \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right) - 1 = 2\Phi_0\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right)$$

Примечание: Оба способа эквивалентны, поскольку

$$\frac{\nu_n - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} = \frac{\mu_n/n - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} = \frac{\mu_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

Задача, аналогичная задаче 5.

Вероятность аварийного завершения программы при одном запуске из-за редкой ошибки равна 0.01. Компания "СтабильныйКод" провела 1000 тестовых запусков программы и зафиксировала 12 аварийных завершений.

Найти вероятность того, что при следующей серии из 1000 запусков частота аварийных завершений отклонится от вероятности 0.01 не более, чем в проведённом эксперименте.

Решение

1. Определяем параметры эксперимента:

· Число испытаний (запусков программы): n = 1000

· Теоретическая вероятность "успеха" (аварийного завершения): p = 0.01

· Наблюдаемая частота "успеха":

$$\nu_n = 12/1000 = 0.012$$

· Наблюдаемое отклонение частоты от теоретической вероятности:

$$\varepsilon_{\text{набл}} = |0.012 - 0.01| = 0.002$$

2. Смысл задачи: Найти вероятность,что в новой серии из n=1000 запусков отклонение частоты аварий

$$|\nu_n - p|$$

   будет не больше, чем наблюдаемое отклонение в эксперименте, т.е. ≤ 0.002.

3. Проверяем применимость теоремы Муавра-Лапласа:

· n \cdot p = 1000 \cdot 0.01 = 10

· n \cdot p(1 - p) = 1000 \cdot 0.01 * 0.99 = 9.9

Условие $npq = 9.9 \geq 10$ не выполняется, но 9.9 - на грани выполнения, приближение будем использовать.

4. Применяем интегральную теорему Муавра-Лапласа: Искомая вероятность P приближенно равна:

$$P(|\nu_n - p| \leq \varepsilon_{\text{набл}}) \approx 2\Phi_0((\varepsilon_{\text{набл}} \cdot \sqrt{n})/\sqrt{(}p(1-p)))$$

5. Вычисляем аргумент функции Лапласа:

$$x = (\varepsilon_{\text{набл}} * \sqrt{n})/\sqrt{(}p(1-p)) = (0.002 \cdot \sqrt{1}000)/\sqrt{(}0.01 \cdot 0.99)$$

$$\sqrt{1}000 \approx 31.62$$

$$\sqrt{(}0.01 \cdot 0.99) = \sqrt{0}.0099 \approx 0.0995$$

$$x = (0.002 \cdot 31.62)/0.0995 \approx 0.06324/0.0995 \approx 0.6356$$

6. Находим значение по таблице функции Лапласа: $\Phi_0(0.6356) \approx 0.237$

7. Рассчитываем итоговую вероятность: P ≈ 2 \cdot 0.237 = 0.474

Ответ: Вероятность того, что при следующей серии из 1000 запусков частота аварийных завершений отклонится от вероятности 0.01 не более чем на 0.002, составляет приблизительно 0.474 или 47.4%.