Лекция 11

Различные виды сходимости в вероятностном пространстве

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ – последовательность СВ, определенных на одном и том же вероятностном пр-ве; X – ещё одна СВ на том же вероятн. пр-ве.

Определение 1. $X_1, X_2, \ldots$ сходится к X в среднеквадратичном, если

$$\lim_{n \to \infty} M\{(X_n - X)^2\} = 0.$$

Пишут $\text{l.i.m.}\, X_n = X$, или $X_n \xrightarrow{\text{ср.кв.}} X$.

Определение 2. $X_1, X_2, \ldots$ сходится к X с вероятностью 1 (почти наверное, почти всюду), если

$$P\{\omega : \lim_{n \to \infty} X_n(\omega) = X(\omega)\} = 1,$$

т.е. если вероятностная мера множества, состоящего из тех ω, для которых $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$, равна 1, где $x_1 = X_1(\omega), x_2 = X_2(\omega), \ldots$ – числовая последовательность, ~~$x_1, x_2, \ldots$, соответствующая реализ~~ состоящая из реализаций $x_1, x_2, \ldots$ случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ в эксперименте, определяемом элементарным событием ω.

Пишут $X_n \xrightarrow{\text{п.н.}} X$, или $X_n \xrightarrow{\text{п.в.}} X$.

Определение 3. $X_1, X_2, \ldots$ сходится к X по вероятности, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \to \infty} P\{|X_n - X| > \varepsilon\} = 0.$$

Пишут $X_n \xrightarrow{P} X$.

Определение 4 $X_1, X_2, \ldots$ сходится к X по распределению, если во всех точках непрерывности функции $F_X(x)$ (функции распределения СВ X)

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x),$$

где $F_{X_n}(x)$ – функция распределения СВ X_n. Пишут $X_n \xrightarrow{d} X$.

Теорема 1 Если $X_n \xrightarrow{\text{ср.кв.}} X$, то $X_n \xrightarrow{P} X$.

Док-во:

Согласно нер-ву Чебышева, если для СВ Y $\exists\, M\{|Y|^k\}$ (где $k>0$), то $\forall \varepsilon > 0$

$$P\{|Y| \geq \varepsilon\} \leq \frac{M\{|Y|^k\}}{\varepsilon^k}.$$

Положив $Y = X - X_n$, при $k=2$ получим

$$P\{|X_n - X| \geq \varepsilon\} \leq \frac{M\{(X_n - X)^2\}}{\varepsilon^2},$$

так что

$$P\{|X_n - X| > \varepsilon\} \leq P\{|X_n - X| \geq \varepsilon\} \leq \frac{M\{(X_n - X)^2\}}{\varepsilon^2}.$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} M\{(X_n - X)^2\} = 0$, то это влечёт и выполнение условия

$$\lim_{n\to\infty} P\{|X_n - X| > \varepsilon\} = 0,$$ что и т.д.

Теорема 2 Если $X_n \xrightarrow{P} X$, то $X_n \xrightarrow{d} X$.

Док-во:

Выберем любое $\varepsilon > 0$. По формуле полной вероятности

$$P\{X_n < x\} = P\{X_n < x, X < x+\varepsilon\} + P\{X_n < x, X \geq x+\varepsilon\} \leq$$

(*)

$$\leq P\{X < x+\varepsilon\} + P\{|X_n - X| > \varepsilon\}.$$

X_n x $X+\varepsilon$ $x+\varepsilon$

Аналогично,

$$P\{X < x-\varepsilon\} = P\{X < x-\varepsilon, X_n < x\} + P\{X < x-\varepsilon, X_n \geq x\} \leq$$

(**)

$$\leq P\{X_n < x\} + P\{|X_n - X| > \varepsilon\}.$$

X X_n $x-\varepsilon$ x

Вводя обозначение $\delta_n(\varepsilon) = P\{|X_n - X| > \varepsilon\}$ и объединяя (*) и (**), получим

$$P\{X < x-\varepsilon\} - \delta_n(\varepsilon) \leq P\{X_n < x\} \leq P\{X < x+\varepsilon\} + \delta_n(\varepsilon),$$

или

(1) $$F_X(x-\varepsilon) - \delta_n(\varepsilon) \leq F_{X_n}(x) \leq F_X(x+\varepsilon) + \delta_n(\varepsilon).$$

Возьмём любое сколь угодно малое Δ. По непрерывности $F_X(x)$ в точке x можно указать такое ε, что $|F_X(x+\varepsilon) - F_X(x-\varepsilon)| < \frac{\Delta}{2}$. Далее, поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n(\varepsilon) = 0$ (по условию), то $\exists N \ \forall n \geq N \quad \delta_n(\varepsilon) < \frac{\Delta}{4}$. Поэтому, в силу (1), $\forall n_1 \geq N$ и $\forall n_2 > N$ будет $|F_{X_{n_1}}(x) - F_{X_{n_2}}(x)| < \Delta$.

Значит, по критерию Коши существвование предела последовательности $\exists \lim\limits_{n\to\infty} F_{X_n}(x)$. При этом из (1) следует, что этот предел равен $F_X(x)$, что и т.д.

<u>Теорема 3</u> Если $X_n \xrightarrow{п.н.} X$, то $X_n \xrightarrow{P} X$.

Док-во:

По условию $\quad P\{\omega : \lim\limits_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\} = 1$.

Поэтому при любом фиксированном $\varepsilon > 0$ вероятность события

$$A_\varepsilon = \{\omega : \exists N = N(\omega)\ \forall n \geq N\ |X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon\}$$

равна единице: $P\{A_\varepsilon\} = 1$. Противоположное событию A_ε событие $\overline{A}_\varepsilon$ есть

$$\overline{A}_\varepsilon = \{\omega : \forall N\ \exists n \geq N\ |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\},$$

$P\{\overline{A}_\varepsilon\} = 0$. Введём событие

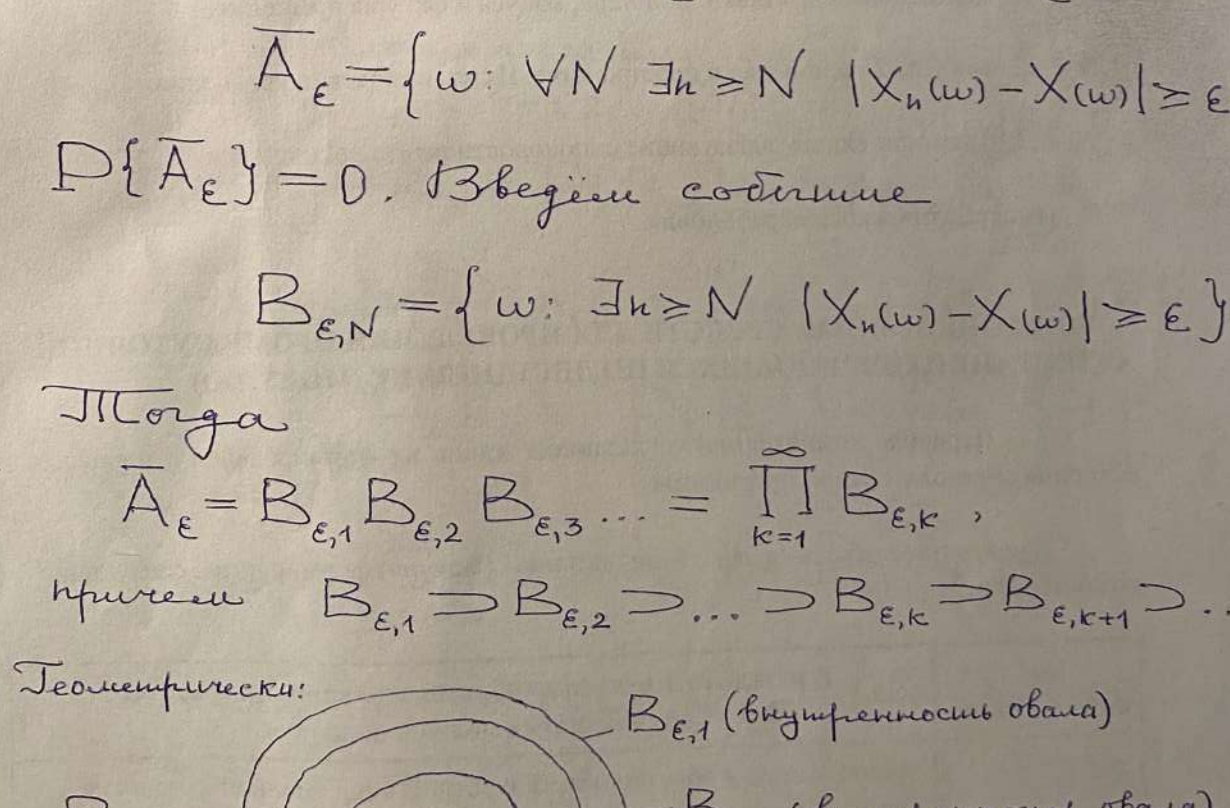
$$B_{\varepsilon,N} = \{\omega : \exists n \geq N\ |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\}.$$

Тогда

$$\overline{A}_\varepsilon = B_{\varepsilon,1} B_{\varepsilon,2} B_{\varepsilon,3} \ldots = \prod_{k=1}^{\infty} B_{\varepsilon,k},$$

причем $\quad B_{\varepsilon,1} \supset B_{\varepsilon,2} \supset \ldots \supset B_{\varepsilon,k} \supset B_{\varepsilon,k+1} \supset \ldots$.

Геометрически:



В этой ситуации, очевидно, имеет место представление

$$B_{\varepsilon,1} = \overline{A}_\varepsilon + B_{\varepsilon,1}\overline{B}_{\varepsilon,2} + B_{\varepsilon,2}\overline{B}_{\varepsilon,3} + \ldots + B_{\varepsilon,k}\overline{B}_{\varepsilon,k+1} + \ldots =$$
$$= \overline{A}_\varepsilon + \sum_{k=1}^{\infty} B_{\varepsilon,k}\overline{B}_{\varepsilon,k+1}.$$

В силу ~~несо~~ несовместности любых двух слагаемых в правой части, получим

$$P\{B_{\varepsilon,1}\} = P\{\overline{A}_\varepsilon\} + \sum_{k=1}^{\infty} P\{B_{\varepsilon,k}\overline{B}_{\varepsilon,k+1}\}.$$

Обозначим $S_N = \sum_{k=1}^{N-1} P\{B_{\varepsilon,k}\overline{B}_{\varepsilon,k+1}\}$, тогда

$$P\{B_{\varepsilon,1}\} = P\{\overline{A}_\varepsilon\} + \lim_{N\to\infty} S_N.$$

В силу вложенности событий $B_{\varepsilon,k}$ (см. рис на стр.4), $\forall\, k=1,2,\ldots$ $P\{B_{\varepsilon,k}\overline{B}_{\varepsilon,k+1}\} = P\{B_{\varepsilon,k}\} - P\{B_{\varepsilon,k+1}\}$. Поэтому $S_N = P\{B_{\varepsilon,1}\} - P\{B_{\varepsilon,N}\}$, так что

$$P\{B_{\varepsilon,1}\} = P\{\overline{A}_\varepsilon\} + \lim_{N\to\infty}\left(P\{B_{\varepsilon,1}\} - P\{B_{\varepsilon,N}\}\right) =$$
$$= P\{\overline{A}_\varepsilon\} + P\{B_{\varepsilon,1}\} - \lim_{N\to\infty} P\{B_{\varepsilon,N}\},$$

так что

$$\lim_{N\to\infty} P\{B_{\varepsilon,N}\} = P\{\overline{A}_\varepsilon\} = 0.$$

Введём теперь событие $C_{\varepsilon,N} = \{\omega : |X_N(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\}$. Тогда $C_{\varepsilon,N} \subset B_{\varepsilon,N}$, так что $0 \leq P\{C_{\varepsilon,N}\} \leq P\{B_{\varepsilon,N}\}$. Переходя к пределу при $N\to\infty$, получим $\lim_{N\to\infty} P\{C_{\varepsilon,N}\} = \lim_{N\to\infty} P\{|X_N - X| \geq \varepsilon\} = 0$, что и т.д.