

Задачи на равномерное распределение

Объём параллелепипеда

На отрезке $[1, 3]$ наудачу выбирается точка. Случайная величина V определяется как объём куба со стороной, равной координате выбранной точки.

1. Постройте вероятностное пространство для координаты выбранной точки
2. Определите случайную величину - объём куба
3. Найдите функцию распределения и плотность распределения объёма
4. Постройте графики функции распределения и плотности
5. Найдите математическое ожидание и дисперсию объёма

Решение

1. Построение вероятностного пространства

(a) **Пространство элементарных исходов (Ω):**

$\Omega = [1, 3]$ - все возможные координаты выбранной точки.

(b) **Сигма-алгебра (\mathcal{F}):**

Борелевская σ -алгебра на отрезке $[1, 3]$.

(c) **Вероятностная мера (P):**

Так как точка выбирается равномерно:

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{2}, \quad \text{где } \mu(A) - \text{длина множества } A$$

Например, вероятность того, что точка попадёт в $[1, 2]$:

$$P([1, 2]) = \frac{2 - 1}{3 - 1} = \frac{1}{2}$$

2. Определение случайной величины

Пусть X - координата выбранной точки, $X \in [1, 3]$.

Случайная величина V - объём куба со стороной X :

$$V = X^3$$

3. Функция распределения и плотность

(a) **Функция распределения** $F_V(v)$:

Найдём вероятность того, что объём не превышает v :

$$F_V(v) = P(V \leq v) = P(X^3 \leq v) = P(X \leq v^{1/3})$$

Так как X равномерно распределена на $[1, 3]$, то:

$$P(X \leq x) = \frac{x - 1}{2}, \quad 1 \leq x \leq 3$$

Подставляя $x = v^{1/3}$, получаем:

$$F_V(v) = \frac{v^{1/3} - 1}{2}, \quad 1 \leq v^{1/3} \leq 3$$

То есть для $1^3 \leq v \leq 3^3$, или $1 \leq v \leq 27$.

Таким образом:

$$F_V(v) = \begin{cases} 0, & v < 1 \\ \frac{v^{1/3} - 1}{2}, & 1 \leq v \leq 27 \\ 1, & v > 27 \end{cases}$$

(b) **Плотность распределения** $f_V(v)$:

Плотность - производная функции распределения:

$$f_V(v) = F'_V(v) = \frac{d}{dv} \left(\frac{v^{1/3} - 1}{2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} v^{-2/3} = \frac{1}{6} v^{-2/3}$$

Таким образом:

$$f_V(v) = \begin{cases} \frac{1}{6} v^{-2/3}, & 1 \leq v \leq 27 \\ 0, & v < 1 \text{ или } v > 27 \end{cases}$$

4. Графики

Функция распределения объёма

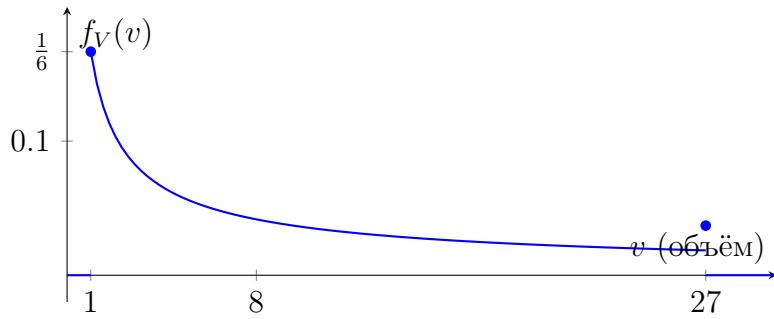
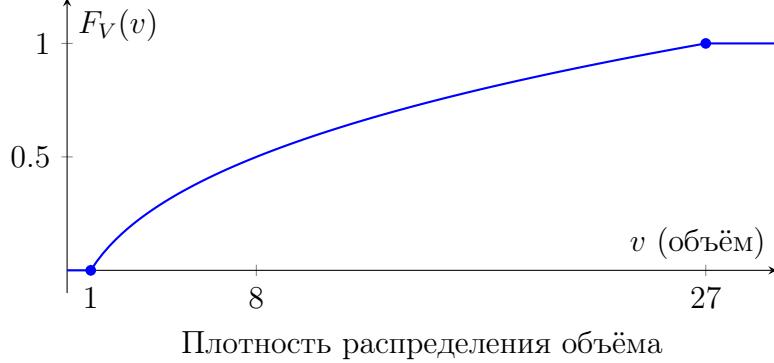


Рис. 1: Распределение объёма куба

Проверка и вычисление характеристик

1. Проверка нормировки плотности:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_V(v)dv = \int_1^{27} \frac{1}{6}v^{-2/3}dv = \frac{1}{6} \cdot 3v^{1/3} \Big|_1^{27} = \frac{1}{2}(27^{1/3} - 1^{1/3}) = \frac{1}{2}(3 - 1) = 1$$

2. Математическое ожидание:

$$E[V] = \int_{-\infty}^{\infty} v f_V(v)dv = \int_1^{27} v \cdot \frac{1}{6}v^{-2/3}dv = \frac{1}{6} \int_1^{27} v^{1/3}dv$$

$$E[V] = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4}v^{4/3} \Big|_1^{27} = \frac{1}{8}(27^{4/3} - 1^{4/3}) = \frac{1}{8}(81 - 1) = \frac{80}{8} = 10$$

3. Математическое ожидание квадрата:

$$E[V^2] = \int_{-\infty}^{\infty} v^2 f_V(v)dv = \int_1^{27} v^2 \cdot \frac{1}{6}v^{-2/3}dv = \frac{1}{6} \int_1^{27} v^{4/3}dv$$

$$E[V^2] = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{7}v^{7/3} \Big|_1^{27} = \frac{1}{14}(27^{7/3} - 1^{7/3}) = \frac{1}{14}(2187 - 1) = \frac{2186}{14} = 156.1429$$

4. Дисперсия:

$$D[V] = E[V^2] - (E[V])^2 = 156.1429 - 100 = 56.1429$$

5. Среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma_V = \sqrt{D[V]} = \sqrt{56.1429} \approx 7.49$$

Конкретные вероятности

- Вероятность того, что объём меньше 8:

$$P(V < 8) = F_V(8) = \frac{8^{1/3} - 1}{2} = \frac{2 - 1}{2} = 0.5$$

- Вероятность того, что объём между 1 и 8:

$$P(1 \leq V \leq 8) = F_V(8) - F_V(1) = 0.5 - 0 = 0.5$$

- Вероятность того, что объём больше 15:

$$P(V > 15) = 1 - F_V(15) = 1 - \frac{15^{1/3} - 1}{2} = 1 - \frac{2.466 - 1}{2} = 1 - 0.733 = 0.267$$

Ответ

- Функция распределения:

$$F_V(v) = \begin{cases} 0, & v < 1 \\ \frac{v^{1/3} - 1}{2}, & 1 \leq v \leq 27 \\ 1, & v > 27 \end{cases}$$

- Плотность распределения:

$$f_V(v) = \begin{cases} \frac{1}{6}v^{-2/3}, & 1 \leq v \leq 27 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

- Математическое ожидание: $E[V] = 10$
- Дисперсия: $D[V] \approx 56.14$
- Среднее квадратическое отклонение: $\sigma_V \approx 7.49$

Сторона квадрата

На отрезке $[4, 9]$ наудачу выбирается точка. Случайная величина a определяется как длина стороны квадрата площади, равной координате выбранной точки.

1. Постройте вероятностное пространство для координаты выбранной точки
2. Определите случайную величину - длину стороны квадрата
3. Найдите функцию распределения и плотность распределения длины стороны
4. Постройте графики функции распределения и плотности
5. Найдите математическое ожидание и дисперсию длины стороны

Решение

1. Построение вероятностного пространства

(a) **Пространство элементарных исходов (Ω):**

$\Omega = [4, 9]$ - все возможные координаты выбранной точки.

(b) **Сигма-алгебра (\mathcal{F}):**

Борелевская σ -алгебра на отрезке $[4, 9]$.

(c) **Вероятностная мера (P):**

Так как точка выбирается равномерно:

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{5}, \quad \text{где } \mu(A) \text{ - длина множества } A$$

Длина отрезка: $9 - 4 = 5$.

Например, вероятность того, что точка попадёт в $[4, 6]$:

$$P([4, 6]) = \frac{6 - 4}{5} = \frac{2}{5} = 0.4$$

2. Определение случайной величины

Пусть X - координата выбранной точки, $X \in [4, 9]$.

Площадь квадрата равна X , поэтому сторона квадрата:

$$a = \sqrt{X}$$

3. Функция распределения и плотность

(a) **Функция распределения** $F_a(t)$:

Найдём вероятность того, что длина стороны не превышает t :

$$F_a(t) = P(a \leq t) = P(\sqrt{X} \leq t) = P(X \leq t^2)$$

Так как X равномерно распределена на $[4, 9]$, то:

$$P(X \leq x) = \frac{x - 4}{5}, \quad 4 \leq x \leq 9$$

Подставляя $x = t^2$, получаем:

$$F_a(t) = \frac{t^2 - 4}{5}, \quad 2 \leq t \leq 3$$

Таким образом:

$$F_a(t) = \begin{cases} 0, & t < 2 \\ \frac{t^2 - 4}{5}, & 2 \leq t \leq 3 \\ 1, & t > 3 \end{cases}$$

(b) **Плотность распределения** $f_a(t)$:

Плотность - производная функции распределения:

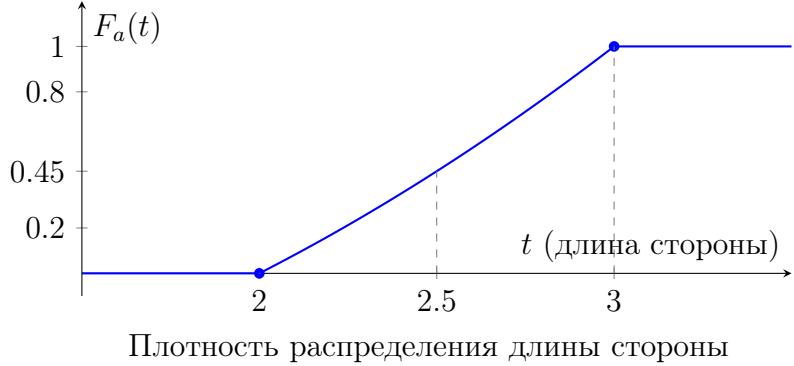
$$f_a(t) = F'_a(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{t^2 - 4}{5} \right) = \frac{2t}{5}$$

Таким образом:

$$f_a(t) = \begin{cases} \frac{2t}{5}, & 2 \leq t \leq 3 \\ 0, & t < 2 \text{ или } t > 3 \end{cases}$$

4. Графики

Функция распределения длины стороны



Плотность распределения длины стороны

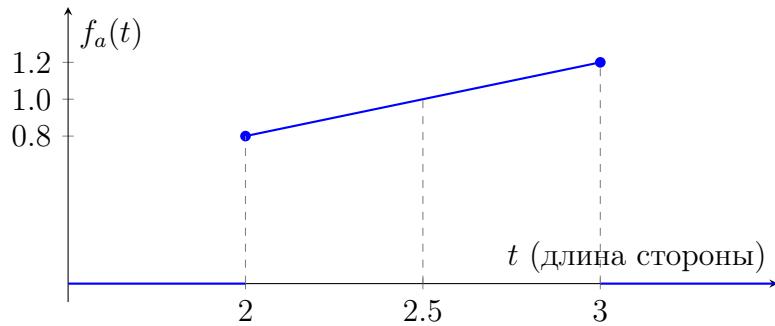


Рис. 2: Распределение длины стороны квадрата

Проверка и вычисление характеристик

1. Проверка нормировки плотности:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_a(t) dt = \int_2^3 \frac{2t}{5} dt = \frac{2}{5} \cdot \frac{t^2}{2} \Big|_2^3 = \frac{1}{5} (9 - 4) = \frac{5}{5} = 1$$

2. Математическое ожидание:

$$E[a] = \int_{-\infty}^{\infty} t f_a(t) dt = \int_2^3 t \cdot \frac{2t}{5} dt = \frac{2}{5} \int_2^3 t^2 dt$$

$$E[a] = \frac{2}{5} \cdot \frac{t^3}{3} \Big|_2^3 = \frac{2}{15} (27 - 8) = \frac{2}{15} \cdot 19 = \frac{38}{15} \approx 2.533$$

3. Математическое ожидание квадрата:

$$E[a^2] = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 f_a(t) dt = \int_2^3 t^2 \cdot \frac{2t}{5} dt = \frac{2}{5} \int_2^3 t^3 dt$$

$$E[a^2] = \frac{2}{5} \cdot \frac{t^4}{4} \Big|_2^3 = \frac{1}{10}(81 - 16) = \frac{65}{10} = 6.5$$

4. **Дисперсия:**

$$D[a] = E[a^2] - (E[a])^2 = 6.5 - \left(\frac{38}{15}\right)^2 = 6.5 - \frac{1444}{225} = \frac{1462.5}{225} - \frac{1444}{225} = \frac{18.5}{225} \approx 0.0822$$

5. **Среднее квадратическое отклонение:**

$$\sigma_a = \sqrt{D[a]} = \sqrt{0.0822} \approx 0.2868$$

Конкретные вероятности

- Вероятность того, что сторона меньше 2.5:

$$P(a < 2.5) = F_a(2.5) = \frac{2.5^2 - 4}{5} = \frac{6.25 - 4}{5} = \frac{2.25}{5} = 0.45$$

- Вероятность того, что сторона между 2.2 и 2.8:

$$P(2.2 \leq a \leq 2.8) = F_a(2.8) - F_a(2.2) = \frac{7.84 - 4}{5} - \frac{4.84 - 4}{5} = \frac{3.84}{5} - \frac{0.84}{5} = \frac{3.0}{5} = 0.6$$

- Вероятность того, что сторона больше 2.7:

$$P(a > 2.7) = 1 - F_a(2.7) = 1 - \frac{7.29 - 4}{5} = 1 - \frac{3.29}{5} = 1 - 0.658 = 0.342$$

Интерпретация результатов

- Длина стороны изменяется от 2 до 3
- Плотность распределения линейно возрастает от $\frac{4}{5} = 0.8$ до $\frac{6}{5} = 1.2$
- Средняя длина стороны составляет $\frac{38}{15} \approx 2.533$
- Вероятность получить сторону меньше средней (2.533) равна:

$$P(a < 2.533) = \frac{2.533^2 - 4}{5} = \frac{6.416 - 4}{5} = \frac{2.416}{5} = 0.4832$$

Ответ

- Функция распределения:

$$F_a(t) = \begin{cases} 0, & t < 2 \\ \frac{t^2 - 4}{5}, & 2 \leq t \leq 3 \\ 1, & t > 3 \end{cases}$$

- Плотность распределения:

$$f_a(t) = \begin{cases} \frac{2t}{5}, & 2 \leq t \leq 3 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

- Математическое ожидание: $E[a] = \frac{38}{15} \approx 2.533$
- Дисперсия: $D[a] \approx 0.0822$
- Среднее квадратическое отклонение: $\sigma_a \approx 0.2868$