Лекция 8

Дисперсия случайной величины и её свойства. Условное математическое ожидание.

Дисперсией случайной величины X называется число

$$DX = M\{(X - MX)^2\}, \qquad (*)$$

если математическое ожидание справа существует.

Если X – дискретная СВ

X	x_1	x_2	...
P	p_1	p_2	...

,

то из $(*)$ получаем $DX = \sum\limits_i (x_i - MX)^2 p_i$.

Если X – непрерывная СВ с плотностью $f(x)$, то из $(*)$ получаем $DX = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - MX)^2 f(x)\,dx$.

Свойства дисперсии

1) Прибавление константы к случайной величине не меняет её дисперсии:

$$D\{X + \mathrm{const}\} = D\{X\}.$$

2) Постоянный множитель выносится из-под знака дисперсии в квадрате:

$$D\{\mathrm{const} \cdot X\} = (\mathrm{const})^2 \cdot D\{X\}.$$

3) Если $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – независимые СВ, имеющие дисперсии $DX_1, DX_2, \ldots, DX_n$, то

$$D\{X_1 + X_2 + \ldots + X_n\} = DX_1 + DX_2 + \ldots + DX_n.$$

4) $DX = M\{X^2\} - (MX)^2$.

Дисперсии основных дискретных распределений

1) Пусть X имеет биномиальное распр. с параметрами n и p:

X	0	1	$\ldots$	k	$\ldots$	n
P	q^n	npq^{n-1}	$\ldots$	$C_n^k p^k q^{n-k}$	$\ldots$	p^n

,

тогда

$$DX = npq, \text{ где } q = 1-p$$

2) Пусть X имеет геометрическое распределение с параметром p:

X	1	2	$\ldots$	k	$\ldots$
P	p	qp	$\ldots$	$q^{k-1}p$	$\ldots$

,

тогда

$$DX = \frac{q}{p^2}, \text{ где } q = 1-p.$$

3) Пусть X имеет распределение Пуассона с параметром λ:

X	0	1	$\ldots$	k	$\ldots$
P	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\ldots$	$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	$\ldots$

,

тогда

$$DX = \lambda.$$

Дисперсии основных непрерывных распределений

4) Если X определяется плотностью

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 0, & x \notin [a,b] \end{cases}$$ (равномерное распределение на отрезке),

то
$$DX = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

5) Если X определяется плотностью
$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$
(~~то~~ показательное распределение),

то
$$DX = \frac{1}{\lambda^2}.$$

6) Если X определяется плотностью
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in (-\infty; +\infty)$$
(нормальное распределение),

то
$$DX = \sigma^2.$$

Условное математическое ожидание

Пусть X - дискретная СВ, определяемая таблицей

X	x_1	x_2	...
P	p_1	p_2	...

Пусть A - некоторое событие (относящееся к тому же вероятностному пространству, что и СВ X). Условным математическим ожиданием случайной величины X при условии, что произошло событие A, называется число
$$M\{X|A\} = \sum_i x_i \cdot P\{X = x_i | A\},$$
если ряд справа сходится абсолютно (если X - СВ с конечным спектром, то справа будет конечная сумма и вопрос о сходимости отпадает).

Пусть $H_1, H_2, \ldots, H_n$ — полная группа событий. Тогда по формуле полной вероятности

$$P\{X=x_i\} = \sum_{j=1}^{n} P\{X=x_i \mid H_j\} \cdot P\{H_j\}.$$

Имеем

$$MX = \sum_i x_i P\{X=x_i\} = \sum_i x_i \sum_{j=1}^{n} P\{X=x_i \mid H_j\} \cdot P\{H_j\} =$$

$$= \sum_i \sum_{j=1}^{n} x_i P\{X=x_i \mid H_j\} P\{H_j\} = \sum_{j=1}^{n} \sum_i x_i P\{X=x_i \mid H_j\} \cdot P\{H_j\} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} P\{H_j\} \sum_i x_i P\{X=x_i \mid H_j\} = \sum_{j=1}^{n} P\{H_j\} \cdot M\{X \mid H_j\}.$$

Таким образом,

$$MX = \sum_{j=1}^{n} M\{X \mid H_j\} \cdot P\{H_j\} \qquad (**)$$

— результат, который можно рассматривать как аналог формулы полной вероятности для математического ожидания.

Если X - непрерывная случайная величина с плотностью $f(x)$, то по аналогии с формулой

$$MX = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

условное математическое ожидание $M\{X \mid A\}$ определим по формуле

$$M\{X \mid A\} = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x \mid A) dx,$$

где условная плотность $f(x \mid A)$ определяется как

$$f(x \mid A) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P\{x \le X < x + \Delta x \mid A\}}{\Delta x}.$$

При этом результат (**) сохранит свою силу.

<u>Пример</u>. Пусть $X_1, X_2, \dots$ – последовательность независимых одинаково распределённых СВ, $MX_i = m$, $DX_i = \sigma^2$. Случайная величина Y не зависит от $X_1, X_2, \dots$ и принимает только натуральные значения, $MY = b$, $DY = d$. Пусть

$$Z = \sum_{i=1}^{Y} X_i$$

Найти MZ и DZ.

Решение. События $H_j = \{Y = j\}$, $j = 1, 2, \dots$, образуют полную группу событий. Поэтому по формуле (**)

$$MZ = \sum_j M\{Z / H_j\} \cdot P\{H_j\}.$$

Найдём

$$M\{Z | H_j\} = M\Big\{\sum_{i=1}^{j} X_i\Big\} = MX_1 + MX_2 + \dots + MX_j = mj,$$

поэтому

$$MZ = \sum_{j=1}^{\infty} m \cdot j \cdot P\{H_j\} = m \sum_{j=1}^{\infty} j P\{Y = j\} = m \cdot b.$$

Далее,
$$DZ = M\{Z^2\} - (MZ)^2 = M\{Z^2\} - m^2 b^2.$$

Найдём

$$M\{Z^2\} = \sum_{j=1}^{\infty} M\{Z^2 | Y = j\} \cdot P\{Y = j\} =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} M\Big\{\Big(\sum_{i=1}^{j} X_i\Big)^2\Big\} \cdot P\{Y=j\} =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} M\Big\{ X_1^2 + \ldots + X_j^2 + 2 \sum_{\substack{k,\ell=1 \\ k<\ell}}^{j} X_k X_\ell \Big\} \cdot P\{Y=j\} =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \Big(j \cdot M\{X_1^2\} + 2\, MX_1 \cdot MX_2 \cdot \frac{j^2-j}{2} \Big) \cdot P\{Y=j\} =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \Big(j\,(m^2+\sigma^2) + m^2 (j^2-j) \Big) \cdot P\{Y=j\} =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \big(j\sigma^2 + m^2 j^2 \big) \cdot P\{Y=j\} =$$

$$= \sigma^2 \sum_{j=1}^{\infty} j\, P\{Y=j\} + m^2 \sum_{j=1}^{\infty} j^2 P\{Y=j\} =$$

$$= \sigma^2 \cdot MY + m^2 \cdot M\{Y^2\} = \sigma^2 \cdot b + m^2 (d + b^2) .$$

Значит,

$$DZ = \sigma^2 b + m^2 (d + b^2) - m^2 b^2 =$$

$$= b \cdot \sigma^2 + m^2 \cdot d .$$