Лекция 6

Функция распределения системы случайных величин. Независимость случайных величин.

Пусть на вероятностном пр-ве $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ определены n случайных величин

$$X_1 = X_1(\omega), \ldots, X_n = X_n(\omega).$$

Для любых чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (-\infty; +\infty)$ определена вероятность

$$P\{X_1 < x_1, X_2 < x_2, \ldots, X_n < x_n\},$$

которая называется функцией распределения системы СВ $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ и обозначается $F(x_1, x_2, \ldots x_n)$:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P\{X_1 < x_1, X_2 < x_2, \ldots, X_n < x_n\}.$$

<u>Пример 1</u> Система $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ называется равномерно распределённой в параллелепипеде $a_i \le x_i \le b_i$ $(1 \le i \le n)$, если вероятность попадания точки $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ в любую внутреннюю область этого параллелепипеда пропорциональна её объёму и ~~вероятность~~ попадание внутрь параллелепипеда есть достоверное событие.

Функция распределения такой системы имеет вид:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} 0, & \text{если } x_i \le a_i \text{ хотя бы при одном } i \\ \prod\limits_{i=1}^{n} \dfrac{c_i - a_i}{b_i - a_i}, & \text{где } c_i = \begin{cases} x_i, & \text{если } a_i \le x_i \le b_i \\ b_i, & \text{если } x_i > b_i \end{cases} \end{cases}$$

Пример 2. Система (X_1, X_2) имеет (двумерное) нормальное распределение, если

$$F(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left(\frac{(u_1-a_1)^2}{\sigma_1^2}-2r\frac{(u_1-a_1)(u_2-a_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{(u_2-a_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right\}du_1du_2,$$

где $\sigma_1>0, \sigma_2>0$, ~~0<~~ $-1<r<1$, a_1, a_2 – произвольные действительные числа.

Функция $F(x_1,x_2,\dots,x_n)$ удовлетворяет следующим свойствам:

1) есть неубывающая функция по каждому аргументу;

2) непрерывна слева по каждому аргументу;

3) $$\lim_{x_1\to+\infty,\dots,x_n\to+\infty} F(x_1,x_2,\dots,x_n)=1;$$

$$\forall k\ (1\le k\le n)\quad \lim_{x_k\to-\infty} F(x_1,\dots,x_k,\dots,x_n)=0.$$

Плотность распределения

Если существует функция $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ такая, что $\forall\ x_1,x_2,\dots,x_n$

$$F(x_1,x_2,\dots,x_n)=\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\dots\int_{-\infty}^{x_n} f(t_1,t_2,\dots,t_n)\,dt_1dt_2\dots dt_n,$$

то эта функция называется плотностью распределения системы СВ $(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

Её свойства:

1) $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$;

2) вероятность попадания случайной n-мерной точки $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ в какую-либо область $G \subset \mathbb{R}^n$ равна

$$\int\limits_{G}\!\dots\!\int f(x_1, x_2, \dots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \dots dx_n;$$

3) в частности, если f непрерывна в точке $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, то при малых $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$

$$P\left\{\begin{array}{l} x_1 \leq X_1 < x_1 + \Delta x_1 \\ x_2 \leq X_2 < x_2 + \Delta x_2 \\ \vdots \\ x_n \leq X_n < x_n + \Delta x_n \end{array}\right\} = f(x_1, x_2, \dots, x_n)\, \Delta x_1\, \Delta x_2 \dots \Delta x_n$$

с точностью до малых высшего порядка.

<u>Пример 3</u> Пусть $(X_1, \dots, X_n)$ равномерно распределена в n-мерной области G. Если V — n-мерный объём области G, то

$$f(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 0, & \text{если } (x_1, \dots, x_n) \in G; \\ 1/V, & \text{если } (x_1, \dots, x_n) \notin G. \end{cases}$$

<u>Пример 4</u>. Плотность двумерного нормального распределения

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{1 - r^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1 - r^2)} \left(\frac{(x_1 - a_1)^2}{\sigma_1^2} - 2r \frac{(x_1 - a_1)(x_2 - a_2)}{\sigma_1 \sigma_2} + \frac{(x_2 - a_2)^2}{\sigma_2^2} \right)\right\}.$$

Независимость СВ

СВ $X_1, X_2, \dots, X_n$ независимы, если для любой группы $X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_k}$ этих величин

$$P\{X_{i_1} < x_{i_1}, X_{i_2} < x_{i_2}, \dots, X_{i_k} < x_{i_k}\} =$$
$$= P\{X_{i_1} < x_{i_1}\} \cdot P\{X_{i_2} < x_{i_2}\} \dots P\{X_{i_k} < x_{i_k}\}$$

для произвольных $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$ и любом k $(1 \le k \le n)$. В частности, при $k = n$ в терминах ф.р. это равенство принимает вид:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_1(x_1) F_2(x_2) \dots F_n(x_n),$$

где $F_k(x_k) = P\{X_k < x_k\}$ – функция распределения СВ X_k.

Из определения плотности $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ следует, что в точках непрерывности функции f

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}.$$

В дальнейшем пусть для определённости $n = 2$. Итак, если X_1 и X_2 – независимые СВ, то

$$F(x_1, x_2) = F_1(x_1) F_2(x_2);$$

если при этом существуют плотности распределения $f_1(x_1)$ и $f_2(x_2)$ случайных величин X_1 и X_2, то

$$f(x_1, x_2) = f_1(x_1) f(x_2).$$

Одно свойство нормального распределения

Пусть X_1 и X_2 – независимые нормально-распределенные СВ, т.е.

$$f_1(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1} e^{-\frac{(x_1-a_1)^2}{2\sigma_1^2}}, \quad f_2(x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_2} e^{-\frac{(x_2-a_2)^2}{2\sigma_2^2}}.$$

Тогда плотность совместного распределения системы (X_1, X_2) будет иметь вид

$$f(x_1,x_2) = f_1(x_1) f_2(x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-\frac{(x_1-a_1)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(x_2-a_2)^2}{2\sigma_2^2}}.$$

Полученная функция $f(x_1,x_2)$ в соответствии с примером 4 определяет плотность двумерного нормального распределения при $r=0$.

Итак, если каждая компонента системы (X_1, X_2) имеет нормальное распределение и компоненты независимы, то совместное распределение системы (X_1,X_2) тоже будет нормальным.

Поставим вопрос: а если не требовать независимости компонент X_1 и X_2, то можно ли утверждать, что совместное распределение системы (X_1, X_2) будет нормальным?

Оказывается, нет. Это иллюстрирует следующий пример.

Пример 5. Пусть плотность $f(x_1,x_2)$ совместного распределения системы X_1 и X_2 имеет вид (не является нормальным)

$$f(x_1,x_2)=\begin{cases}\frac{1}{\pi\sigma^2}e^{-\frac{x_1^2+x_2^2}{2\sigma^2}} & \text{при } x_1x_2\geq 0;\\ 0 & \text{при } x_1x_2<0\end{cases}.$$

Проверим условие нормировки:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x_1,x_2)dx_1dx_2=\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0}f(x_1,x_2)dx_1dx_2+\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}f(x_1,x_2)dx_1dx_2=$$

$$=2\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}f(x_1,x_2)dx_1d_2=\frac{2}{\pi\sigma^2}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{x_1^2+x_2^2}{2\sigma^2}}dx_1dx_2=\frac{2}{\pi\sigma^2}\left(\int_0^{+\infty}e^{-\frac{x_1^2}{2\sigma^2}}dx_1\right)^2=$$

$$=\frac{2}{\pi\sigma^2}\left(\int_0^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\sigma dt\right)^2=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right)^2=\frac{2}{\pi}\left(\sqrt{2\pi}\cdot\frac{1}{2}\right)^2=1.$$

Воспользуемся следующими общими формулами, связывающими двумерную и одномерные плотности:

$$f_1(x_1)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x_1,x_2)dx_2\,,\quad f_2(x_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x_1,x_2)dx_1.\ (*)$$

Действительно,

$$f_1(x_1)=\frac{d}{dx_1}F_1(x_1)=\frac{d}{dx_1}\lim_{x_2\to+\infty}F(x_1,x_2)=$$

$$=\frac{d}{dx_1}\lim_{x_2\to+\infty}\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}f(t_1,t_2)dt_1dt_2=\frac{d}{dx_1}\int_{-\infty}^{x_1}dt_1\int_{-\infty}^{+\infty}f(t_1,t_2)dt_2=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x_1,t_2)dt_2$$ – получили первую из формул (*); вторая получается аналогично.

Вернёмся к примеру и найдём $f_1(x_1)$:

$$f_1(x_1)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x_1,x_2)\,dx_2=\begin{cases} e^{-\frac{x_1^2}{2\sigma^2}}\cdot\frac{1}{\pi\sigma^2}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{x_2^2}{2\sigma^2}}dx_2 & \text{при } x\geq 0\\ e^{-\frac{x_1^2}{2\sigma^2}}\cdot\frac{1}{\pi\sigma^2}\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\frac{x_2^2}{2\sigma^2}}dx_2 & \text{при } x_1<0\end{cases}$$

$$=e^{-\frac{x_1^2}{2\sigma^2}}\cdot\frac{1}{\pi\sigma^2}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{x_2^2}{2\sigma^2}}dx_2=e^{-\frac{x_1^2}{2\sigma^2}}\cdot\frac{1}{\pi\sigma^2}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\sigma\,dt=$$

$$=e^{-\frac{x_1^2}{2\sigma^2}}\frac{1}{\pi\sigma}\sqrt{2\pi}\cdot\underbrace{\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt}_{\text{равен } 1/2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{x_1^2}{2\sigma^2}} \quad \forall x_1\in(-\infty;+\infty)$$

Аналогично устанавливается, что

$$f_2(x_2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{x_2^2}{2\sigma^2}} \quad \forall x_2\in(-\infty;+\infty).$$

Таким образом, мы видим, что каждая СВ X_1 и X_2 имеет по отдельности нормальное распределение, но совместное распределение системы (X_1,X_2) не является нормальным.