Домашнее задание №1

1. Для заданной выборки

   10, 10, 9, 8, 10, 9, 8, 7, 10, 9, 10, 9, 8, 8, 9, 7, 11, 8, 7, 7, 10, 7, 8, 9

   требуется:

   (a) составить вариационный ряд и статистическое распределение (таблицу частот и относительных частот);

   (b) построить полигон частот и полигон относительных частот;

   (c) найти реализацию эмпирической функции распределения и построить её график;

   (d) найти выборочное среднее, выборочную дисперсию, выборочное среднеквадратическое отклонение, исправленную дисперсию и исправленное среднеквадратическое отклонение.

2. Из генеральной совокупности извлечена выборка объёмом $n = 20$. Оказалось, что 2 выборочных значения принадлежат интервалу $(10; 12,5)$,
   3 значения — интервалу $(15; 17,5)$,
   1 значение — интервалу $(17,5; 20)$,
   3 значения — интервалу $(20; 22,5)$,
   5 значений — интервалу $(22,5; 25)$,
   2 значения — интервалу $(25; 27,5)$,
   2 значения — интервалу $(27,5; 30)$,
   2 значения — интервалу $(32,5; 35)$.
   Постройте гистограмму относительных частот, выбрав длину частичного интервала: а) $\Delta = 2{,}5$; б) $\Delta = 5$.

3. Пусть выборка $X_1, \ldots, X_n$ соответствует распределению $F(x)$. Найти функцию распределения k-й порядковой статистики $X_{(k)}$, $k = 1, \ldots, n$. Из общей формулы получить как частные случаи функции распределения $X_{(1)}$ и $X_{(n)}$.

4. Пусть выборка $X_1, \dots, X_n$ порождена случайной величиной X, имеющей равномерное распределение на отрезке $[0,1]$. Найти математическое ожидание $\mathrm{M}\big\{X_{(1)}\big\}$ и дисперсию $\mathrm{D}\big\{X_{(1)}\big\}$ порядковой статистики $X_{(1)}$.

5. Выборка объёма $n \gg 1$ порождена случайной величиной X, имеющей показательное распределение с параметром $\lambda = 1$. Оценить вероятность
$$P\Big(|F_n^*(1) - F(1)| \le \frac{1}{\sqrt{n}}\Big),$$
$F_n^*(x)$ — эмпирическая функция распределения, $F(x)$ — теоретическая функция распределения X.

6. Пусть выборка $X_1, \dots, X_n$ порождена нормальным распределением $N(\mu, \theta)$ с известным математическим ожиданием m и неизвестной дисперсией θ^2. Найти константу C, при которой оценка
$$\widehat{\theta}_n = \frac{C}{n} \sum_{k=1}^{n} |X_k - m|$$
параметра θ будет несмещённой и состоятельной.

7. Пусть выборка $X_1, \dots, X_n$ порождена случайной величиной X, имеющей биномиальное распределение $Bi(N, p)$, где p неизвестно (N известно). Обозначим $\theta = \mathrm{D}\{X\}$ — дисперсия X. Рассмотрим оценку
$$\widehat{\theta}_n = \frac{\overline{X}_n \, (N - \overline{X}_n)}{N}, \quad \text{где } \overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i.$$
Показать, что оценка $\widehat{\theta}_n$ является асимптотически несмещённой для $\theta = \mathrm{D}\{X\}$.

8. Пусть выборка $X_1, \dots, X_n$ порождена равномерным распределением на отрезке $[0, \theta]$, где $\theta > 0$ — неизвестный параметр. Показать, что оценка $\widehat{\theta}_n = X_{(n)}$ (где $X_{(n)}$ - соответствующая порядковая статистика) является состоятельной оценкой для θ.