Задачи на построение вероятностных пространств

Часть 1: Дискретные вероятностные пространства

1. **Подбрасывание двух монет**

   Описание: Эксперимент состоит в подбрасывании двух различных монет.

   (a) **Пространство элементарных исходов** (Ω)**:**
   $\Omega = \{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$,
   где H - «орёл», T - «решка».

   (b) **Сигма-алгебра** $(\mathcal{F})$**:** $\mathcal{F} = 2^\Omega$ - множество всех подмножеств Ω.

   (c) **Вероятностная мера** (P)**:** $P(\{(H,H)\}) = \frac{1}{4}$, $P(\{(H,T)\}) = \frac{1}{4}$, $P(\{(T,H)\}) = \frac{1}{4}$, $P(\{(T,T)\}) = \frac{1}{4}$.

   (d) **Случайная величина** X**:** «Число выпавших орлов».

$$
\begin{aligned}
X((H,H)) &= 2\\
X((H,T)) &= 1\\
X((T,H)) &= 1\\
X((T,T)) &= 0
\end{aligned}
$$

   (e) **Функция распределения** $F_X(x)$**:**

$$
F_X(x) = P(X < x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{1}{4}, & 0 < x \le 1 \\ \frac{3}{4}, & 1 < x \le 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}
$$

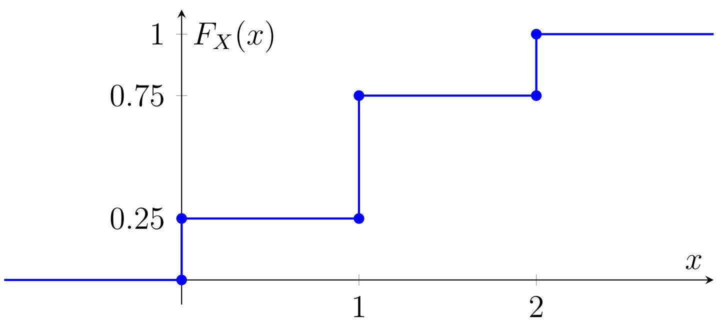


Рис. 1: Функция распределения $F_X(x)$ для числа выпавших орлов

2. **Выбор шаров из урны**

   Описание: В урне 2 белых (W) и 2 чёрных (B) шара. Извлекаются два шара подряд без возвращения.

   (a) **Пространство элементарных исходов** (Ω)**:**
   $\Omega = \{(W_1, W_2), (W_1, B_1), (W_1, B_2), (W_2, W_1), (W_2, B_1), (W_2, B_2), (B_1, W_1), (B_1, W_2), (B_1, B_2), (B_2, W_1), (B_2, W_2), (B_2, B_1)\}$.

   (b) **Сигма-алгебра** $(\mathcal{F})$**:** $\mathcal{F} = 2^\Omega$.

   (c) **Вероятностная мера** (P)**:** $P(\omega) = \frac{1}{12}$ для каждого $\omega \in \Omega$.

   (d) **Случайная величина** Y**:** «Количество чёрных шаров после двух извлечений».

$$
\begin{aligned}
Y((W_1, W_2)) = 0, &\quad Y((W_2, W_1)) = 0 \\
Y((W_1, B_1)) = 1, &\quad Y((W_1, B_2)) = 1 \\
Y((W_2, B_1)) = 1, &\quad Y((W_2, B_2)) = 1 \\
Y((B_1, W_1)) = 1, &\quad Y((B_1, W_2)) = 1 \\
Y((B_2, W_1)) = 1, &\quad Y((B_2, W_2)) = 1 \\
Y((B_1, B_2)) = 2, &\quad Y((B_2, B_1)) = 2
\end{aligned}
$$

   (e) **Функция распределения** $F_Y(y)$**:**

$$
F_Y(y) = P(Y < y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0 \\ \frac{2}{12} = \frac{1}{6}, & 0 < y \leq 1 \\ \frac{2}{12} + \frac{8}{12} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}, & 1 < y \leq 2 \\ 1, & y > 2 \end{cases}
$$

3. **Бросок игральной кости**

   Описание: Бросается одна стандартная игральная кость (кубик).

   (a) **Пространство элементарных исходов** (Ω)**:** $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

   (b) **Сигма-алгебра** $(\mathcal{F})$**:** $\mathcal{F} = 2^\Omega$.

   (c) **Вероятностная мера** (P)**:** $P(\{i\}) = \frac{1}{6}$ для $i = 1, \ldots, 6$.

   (d) **Случайная величина** U**:** «Квадрат числа выпавших очков».

$$
\begin{gathered}
U(1) = 1, \quad U(2) = 4, \quad U(3) = 9, \\
U(4) = 16, \quad U(5) = 25, \quad U(6) = 36.
\end{gathered}
$$

(e) **Функция распределения $F_U(u)$:**

$$F_U(u) = P(U < u) = \begin{cases} 0, & u \leq 1 \\ \frac{1}{6}, & 1 < u \leq 4 \\ \frac{2}{6}, & 4 < u \leq 9 \\ \frac{3}{6}, & 9 < u \leq 16 \\ \frac{4}{6}, & 16 < u \leq 25 \\ \frac{5}{6}, & 25 < u \leq 36 \\ 1, & u > 36 \end{cases}$$

4. **Стрельба по мишени (до первого попадания)**

Описание: Стрелок стреляет по мишени до первого попадания. Вероятность попадания при каждом выстреле $p = 0.6$, вероятность промаха $q = 0.4$. Выстрелы независимы.

(a) **Пространство элементарных исходов (Ω):** $\Omega = \{H, MH, MMH, MMMH, \dots\}$ - счётное множество, где Н - попадание, М - промах.

(b) **Сигма-алгебра ($\mathcal{F}$):** Множество всех подмножеств счётного пространства Ω.

(c) **Вероятностная мера (P):**

$$\begin{aligned} P(\text{«Н»}) &= p = 0.6 \\ P(\text{«МН»}) &= q \cdot p = 0.4 \cdot 0.6 = 0.24 \\ P(\text{«ММН»}) &= q^2 \cdot p = (0.4)^2 \cdot 0.6 = 0.096 \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$P(\text{«n-1 промахов и затем попадание»}) = q^{n-1} \cdot p$$

(d) **Случайная величина Z:** «Количество произведенных выстрелов».

$$\begin{aligned} Z(\text{«Н»}) &= 1 \\ Z(\text{«МН»}) &= 2 \\ Z(\text{«ММН»}) &= 3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

(e) **Функция распределения $F_Z(z)$:**

Для целых $k = 1, 2, 3, \dots$:

$$\begin{aligned} F_Z(k) = P(Z < k) = 1 - P(Z \geq k) = \\ = 1 - P(\text{первые k-1 выстрелов - промахи}) = \\ = 1 - q^{k-1} = 1 - (0.4)^{k-1} \end{aligned}$$

5. **Игра в трёхстороннюю дуэль**

Условие: Три стрелка A, B и C поочерёдно стреляют друг в друга по кругу. Вероятности попадания: $p_A = 0.8$, $p_B = 0.6$, $p_C = 0.4$. Стреляют в самого меткого из оставшихся противников. Дуэль заканчивается, когда остаётся один стрелок.

Решение:

(a) **Пространство элементарных исходов (Ω):**

Обозначим последовательность выстрелов и их результаты. Пусть H - попадание, M - промах. Пространство слишком велико для полного перечисления, но мы можем выделить основные сценарии:

$\Omega =${все возможные последовательности выстрелов до окончания дуэли}

(b) **Сигма-алгебра ($\mathcal{F}$):** $\mathcal{F} = 2^\Omega$

(c) **Вероятностная мера (P):**

Рассмотрим вероятности некоторых ключевых исходов:

- A попадает в B, затем C попадает в A: $P = 0.8 \times 0.4 = 0.32$
- A попадает в B, затем C промахивается, A попадает в C: $P = 0.8 \times 0.6 \times 0.8 = 0.384$
- A промахивается, B попадает в A, затем C попадает в B: $P = 0.2 \times 0.6 \times 0.4 = 0.048$

(d) **Случайная величина W:** "Номер победителя".

$W = 1$ если победил A, $W = 2$ если победил B, $W = 3$ если победил C.

(e) **Функция распределения $F_W(w)$:**

Вычислим вероятности победы каждого стрелка:

Вероятность победы A: $P_A \approx 0.8 \times 0.8 + 0.2 \times 0.4 \times 0.8 + \dots = 0.64$

Вероятность победы B: $P_B \approx 0.2 \times 0.6 \times 0.6 + \dots = 0.24$

Вероятность победы C: $P_C = 1 - P_A - P_B = 0.12$

$$F_W(w) = \begin{cases} 0, & w \leq 1 \\ 0.64, & 1 < w \leq 2 \\ 0.88, & 2 < w \leq 3 \\ 1, & w > 3 \end{cases}$$

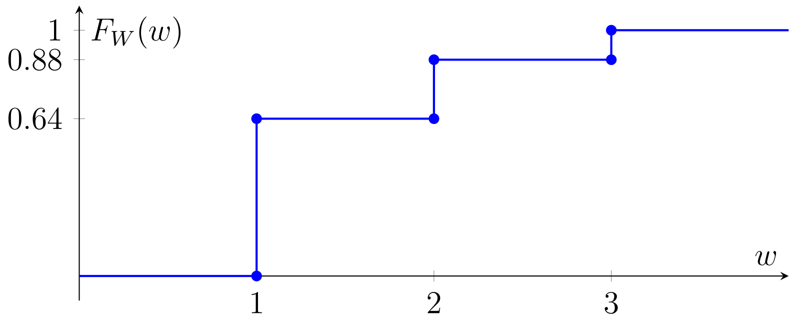


Рис. 2: Функция распределения $F_W(w)$ для номера победителя

6. **Схема Бернулли с изменяющейся вероятностью**

   Условие: Проводятся 3 независимых испытания. Вероятность успеха в первом испытании $p_1 = 0.7$, во втором $p_2 = 0.5$, в третьем $p_3 = 0.3$.

   Решение:

   (a) **Пространство элементарных исходов (Ω):**
   $\Omega = \{SSS, SSF, SFS, SFF, FSS, FSF, FFS, FFF\}$,
   где S - успех, F - неудача.

   (b) **Сигма-алгебра ($\mathcal{F}$):** $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$

   (c) **Вероятностная мера (P):**

$$
\begin{aligned}
P(SSS) &= 0.7 \times 0.5 \times 0.3 = 0.105 \\
P(SSF) &= 0.7 \times 0.5 \times 0.7 = 0.245 \\
P(SFS) &= 0.7 \times 0.5 \times 0.3 = 0.105 \\
P(SFF) &= 0.7 \times 0.5 \times 0.7 = 0.245 \\
P(FSS) &= 0.3 \times 0.5 \times 0.3 = 0.045 \\
P(FSF) &= 0.3 \times 0.5 \times 0.7 = 0.105 \\
P(FFS) &= 0.3 \times 0.5 \times 0.3 = 0.045 \\
P(FFF) &= 0.3 \times 0.5 \times 0.7 = 0.105
\end{aligned}
$$

(d) **Случайная величина X:** "Общее число успехов".

$$
\begin{aligned}
X(SSS) &= 3 \\
X(SSF) &= 2 \\
X(SFS) &= 2 \\
X(SFF) &= 1 \\
X(FSS) &= 2 \\
X(FSF) &= 1 \\
X(FFS) &= 1 \\
X(FFF) &= 0
\end{aligned}
$$

(e) **Функция распределения $F_X(x)$:**
Вероятности значений:

$P(X = 0) = P(FFF) = 0.105$
$P(X = 1) = P(SFF) + P(FSF) + P(FFS) = 0.245 + 0.105 + 0.045 = 0.395$
$P(X = 2) = P(SSF) + P(SFS) + P(FSS) = 0.245 + 0.105 + 0.045 = 0.395$
$P(X = 3) = P(SSS) = 0.105$

$$
F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 0.105, & 0 < x \le 1 \\ 0.500, & 1 < x \le 2 \\ 0.895, & 2 < x \le 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}
$$

Остаток от деления

Бросается одна стандартная игральная кость (кубик). Случайная величина R определяется как остаток от деления числа выпавших очков на 4.

1. Постройте вероятностное пространство для эксперимента
2. Определите случайную величину - остаток от деления на 4
3. Найдите функцию распределения остатка
4. Постройте график функции распределения
5. Найдите математическое ожидание и дисперсию

Решение

1. **Построение вероятностного пространства**

   (a) **Пространство элементарных исходов** (Ω)**:**
   $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ - все возможные результаты броска кубика.

   (b) **Сигма-алгебра** $(\mathcal{F})$**:**
   $\mathcal{F} = 2^\Omega$ - множество всех подмножеств Ω.

   (c) **Вероятностная мера** (P)**:**
   Так как кубик стандартный и честный:

$$P(\{i\}) = \frac{1}{6} \quad \text{для } i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

2. **Определение случайной величины**

   Случайная величина R - остаток от деления числа очков на 4:

$$\begin{aligned}
R(1) &= 1 \mod 4 = 1 \\
R(2) &= 2 \mod 4 = 2 \\
R(3) &= 3 \mod 4 = 3 \\
R(4) &= 4 \mod 4 = 0 \\
R(5) &= 5 \mod 4 = 1 \\
R(6) &= 6 \mod 4 = 2
\end{aligned}$$

3. **Распределение случайной величины**

   Найдём вероятности каждого значения остатка:

$$P(R=0) = P(\{4\}) = \frac{1}{6}$$
$$P(R=1) = P(\{1,5\}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$
$$P(R=2) = P(\{2,6\}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$
$$P(R=3) = P(\{3\}) = \frac{1}{6}$$

4. **Функция распределения $F_R(r)$:**

   Функция распределения определяется как:

$$F_R(r) = P(R \le r)$$

   Вычислим для различных значений r:

$$F_R(r) = \begin{cases} 0, & r \le 0 \\ \frac{1}{6}, & 0 < r \le 1 \\ \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, & 1 < r \le 2 \\ \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}, & 2 < r \le 3 \\ 1, & r > 3 \end{cases}$$

5. **График функции распределения**

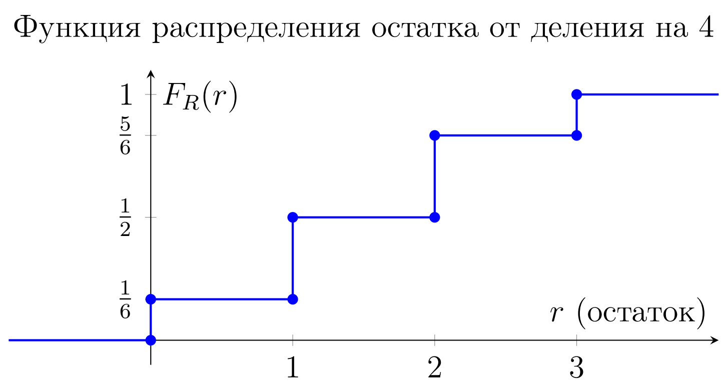


Рис. 3: Функция распределения остатка от деления на 4

Вычисление числовых характеристик

1. **Математическое ожидание:**

$$E[R] = \sum_{r=0}^{3} r \cdot P(R = r) = 0 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{2}{6} + 2 \cdot \frac{2}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6}$$

$$E[R] = 0 + \frac{2}{6} + \frac{4}{6} + \frac{3}{6} = \frac{9}{6} = 1.5$$

2. **Математическое ожидание квадрата:**

$$E[R^2] = \sum_{r=0}^{3} r^2 \cdot P(R = r) = 0^2 \cdot \frac{1}{6} + 1^2 \cdot \frac{2}{6} + 2^2 \cdot \frac{2}{6} + 3^2 \cdot \frac{1}{6}$$

$$E[R^2] = 0 + \frac{2}{6} + \frac{8}{6} + \frac{9}{6} = \frac{19}{6} \approx 3.1667$$

3. **Дисперсия:**

$$D[R] = E[R^2] - (E[R])^2 = \frac{19}{6} - \left(\frac{9}{6}\right)^2 = \frac{19}{6} - \frac{81}{36} = \frac{114}{36} - \frac{81}{36} = \frac{33}{36} = \frac{11}{12} \approx 0.9167$$

4. **Среднее квадратическое отклонение:**

$$\sigma_R = \sqrt{D[R]} = \sqrt{\frac{11}{12}} \approx \sqrt{0.9167} \approx 0.9574$$

Проверка распределения

- **Сумма вероятностей:**

$$\sum_{r=0}^{3} P(R = r) = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = 1$$

- **Вероятность того, что остаток чётный:**

$$P(R \text{ чётный}) = P(R = 0) + P(R = 2) = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3}{6} = 0.5$$

- **Вероятность того, что остаток нечётный:**

$$P(R \text{ нечётный}) = P(R = 1) + P(R = 3) = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = 0.5$$

Таблица распределения

Остаток r	Исходы	Вероятность $P(R = r)$	$F_R(r)$
0	$\{4\}$	$\frac{1}{6} \approx 0.1667$	$\frac{1}{6}$
1	$\{1, 5\}$	$\frac{2}{6} = \frac{1}{3} \approx 0.3333$	$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
2	$\{2, 6\}$	$\frac{2}{6} = \frac{1}{3} \approx 0.3333$	$\frac{5}{6} \approx 0.8333$
3	$\{3\}$	$\frac{1}{6} \approx 0.1667$	1

Сравнение с равномерным распределением

Если бы остатки были распределены равномерно, то:

- Каждый остаток имел бы вероятность $\frac{1}{4} = 0.25$
- Математическое ожидание было бы $E[R] = 1.5$
- Дисперсия была бы $D[R] = \frac{4^2-1}{12} = \frac{15}{12} = 1.25$

В нашем случае:

- Распределение не равномерное
- Математическое ожидание совпадает с равномерным случаем
- Дисперсия меньше ($0.9167 < 1.25$), что означает более сконцентрированное распределение

Ответ

- Функция распределения:

$$F_R(r) = \begin{cases} 0, & r \leq 0 \\ \dfrac{1}{6}, & 0 < r \leq 1 \\ \dfrac{1}{2}, & 1 < r \leq 2 \\ \dfrac{5}{6}, & 2 < r \leq 3 \\ 1, & r > 3 \end{cases}$$

- Распределение вероятностей:

$$P(R = 0) = \frac{1}{6}, \qquad P(R = 1) = \frac{1}{3},$$
$$P(R = 2) = \frac{1}{3}, \qquad P(R = 3) = \frac{1}{6}$$

- Математическое ожидание: $E[R] = 1.5$
- Дисперсия: $D[R] = \frac{11}{12} \approx 0.9167$
- Среднее квадратическое отклонение: $\sigma_R \approx 0.9574$

Тетраэдр с неравномерными вероятностями

Бросается тетраэдр с гранями, пронумерованными числами 1, 2, 3, 4. Вероятность выпадения k-й грани в два раза больше вероятности $(k-1)$-й грани. Случайная величина R определяется как остаток от деления числа на выпавшей грани на 3.

1. Постройте вероятностное пространство для эксперимента
2. Определите случайную величину - остаток от деления на 3
3. Найдите функцию распределения остатка
4. Постройте график функции распределения
5. Найдите математическое ожидание и дисперсию

Решение

1. **Построение вероятностного пространства**

   (a) **Пространство элементарных исходов** (Ω)**:**
   $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ - все возможные результаты броска тетраэдра.

   (b) **Сигма-алгебра** $(\mathcal{F})$**:**
   $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$ - множество всех подмножеств Ω.

   (c) **Вероятностная мера** (P)**:**
   Пусть $P(1) = p$, тогда по условию:

   $$P(2) = 2p$$
   $$P(3) = 2 \cdot P(2) = 4p$$
   $$P(4) = 2 \cdot P(3) = 8p$$

   Сумма вероятностей должна равняться 1:

   $$p + 2p + 4p + 8p = 15p = 1 \quad \Rightarrow \quad p = \frac{1}{15}$$

   Таким образом:

   $$P(1) = \frac{1}{15}$$
   $$P(2) = \frac{2}{15}$$
   $$P(3) = \frac{4}{15}$$
   $$P(4) = \frac{8}{15}$$

2. **Определение случайной величины**

   Случайная величина R - остаток от деления числа на грани на 3:

$$\begin{aligned} R(1) &= 1 \mod 3 = 1 \\ R(2) &= 2 \mod 3 = 2 \\ R(3) &= 3 \mod 3 = 0 \\ R(4) &= 4 \mod 3 = 1 \end{aligned}$$

3. **Распределение случайной величины**

   Найдём вероятности каждого значения остатка:

$$\begin{aligned} P(R = 0) &= P(\{3\}) = \frac{4}{15} \\ P(R = 1) &= P(\{1, 4\}) = \frac{1}{15} + \frac{8}{15} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} \\ P(R = 2) &= P(\{2\}) = \frac{2}{15} \end{aligned}$$

4. **Функция распределения $F_R(r)$:**

   Функция распределения определяется как:

$$F_R(r) = P(R < r)$$

   Вычислим для различных значений r:

$$F_R(r) = \begin{cases} 0, & r \leq 0 \\ \frac{4}{15}, & 0 < r \leq 1 \\ \frac{4}{15} + \frac{9}{15} = \frac{13}{15}, & 1 < r \leq 2 \\ 1, & r > 2 \end{cases}$$

5. **График функции распределения**

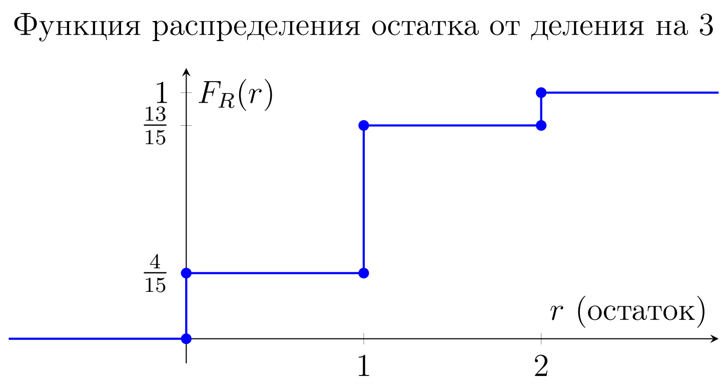


Рис. 4: Функция распределения остатка от деления на 3

Вычисление числовых характеристик

1. **Математическое ожидание:**

$$E[R] = \sum_{r=0}^{2} r \cdot P(R = r) = 0 \cdot \frac{4}{15} + 1 \cdot \frac{9}{15} + 2 \cdot \frac{2}{15}$$

$$E[R] = 0 + \frac{9}{15} + \frac{4}{15} = \frac{13}{15} \approx 0.8667$$

2. **Математическое ожидание квадрата:**

$$E[R^2] = \sum_{r=0}^{2} r^2 \cdot P(R = r) = 0^2 \cdot \frac{4}{15} + 1^2 \cdot \frac{9}{15} + 2^2 \cdot \frac{2}{15}$$

$$E[R^2] = 0 + \frac{9}{15} + \frac{8}{15} = \frac{17}{15} \approx 1.1333$$

3. **Дисперсия:**

$$D[R] = E[R^2] - (E[R])^2 = \frac{17}{15} - \left(\frac{13}{15}\right)^2 = \frac{17}{15} - \frac{169}{225} = \frac{255}{225} - \frac{169}{225} = \frac{86}{225} \approx 0.3822$$

4. **Среднее квадратическое отклонение:**

$$\sigma_R = \sqrt{D[R]} = \sqrt{\frac{86}{225}} = \frac{\sqrt{86}}{15} \approx \frac{9.2736}{15} \approx 0.6182$$

Проверка распределения

- **Сумма вероятностей:**

$$\sum_{r=0}^{2} P(R = r) = \frac{4}{15} + \frac{9}{15} + \frac{2}{15} = 1$$

- **Вероятность того, что остаток чётный:**

$$P(R \text{ чётный}) = P(R = 0) + P(R = 2) = \frac{4}{15} + \frac{2}{15} = \frac{6}{15} = 0.4$$

- **Вероятность того, что остаток нечётный:**

$$P(R \text{ нечётный}) = P(R = 1) = \frac{9}{15} = 0.6$$

Таблица распределения

Остаток r	Исходы	Вероятность $P(R = r)$	$F_R(r)$
0	$\{3\}$	$\frac{4}{15} \approx 0.2667$	$\frac{4}{15}$
1	$\{1, 4\}$	$\frac{9}{15} = \frac{3}{5} = 0.6$	$\frac{13}{15} \approx 0.8667$
2	$\{2\}$	$\frac{2}{15} \approx 0.1333$	1

Сравнение с равномерным распределением

Если бы остатки были распределены равномерно на множестве $\{0, 1, 2\}$, то:

- Каждый остаток имел бы вероятность $\frac{1}{3} \approx 0.3333$
- Математическое ожидание было бы $E[R] = 1$
- Дисперсия была бы $D[R] = \frac{3^2-1}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \approx 0.6667$

В нашем случае:

- Распределение сильно неравномерное
- Вероятность остатка 1 в 4.5 раза больше вероятности остатка 2
- Математическое ожидание меньше $(0.8667 < 1)$
- Дисперсия меньше $(0.3822 < 0.6667)$, что означает более сконцентрированное распределение

Анализ влияния неравномерности

Исходные вероятности граней тетраэдра:

$$P(1) = \frac{1}{15} \approx 0.0667$$
$$P(2) = \frac{2}{15} \approx 0.1333$$
$$P(3) = \frac{4}{15} \approx 0.2667$$
$$P(4) = \frac{8}{15} \approx 0.5333$$

После преобразования остатком от деления на 3:

- Остаток 1 получается из граней 1 и 4 с суммарной вероятностью $0.0667 + 0.5333 = 0.6$
- Остаток 0 получается только из грани 3 с вероятностью 0.2667
- Остаток 2 получается только из грани 2 с вероятностью 0.1333

Ответ

- Функция распределения:

$$F_R(r) = \begin{cases} 0, & r \leq 0 \\ \frac{4}{15}, & 0 < r \leq 1 \\ \frac{13}{15}, & 1 < r \leq 2 \\ 1, & r > 2 \end{cases}$$

- Распределение вероятностей:

$$P(R = 0) = \frac{4}{15} \approx 0.2667$$
$$P(R = 1) = \frac{3}{5} = 0.6$$
$$P(R = 2) = \frac{2}{15} \approx 0.1333$$

- Математическое ожидание: $E[R] = \frac{13}{15} \approx 0.8667$
- Дисперсия: $D[R] = \frac{86}{225} \approx 0.3822$
- Среднее квадратическое отклонение: $\sigma_R \approx 0.6182$

Часть 2: Непрерывные вероятностные пространства

1. **Равномерное распределение на отрезке**

   Описание: Наудачу выбирается точка из отрезка $[2, 5]$.

   (a) **Пространство элементарных исходов** (Ω)**:** $[2, 5]$

   (b) **Сигма-алгебра** $(\mathcal{F})$**:** Борелевская σ-алгебра на $[2, 5]$

   (c) **Вероятностная мера** (P)**:** $P(A) = \dfrac{\mu(A)}{3}$, где μ - мера Лебега (длина)

   (d) **Случайная величина** X**:** «Координата выбранной точки». $X(\omega) = \omega$

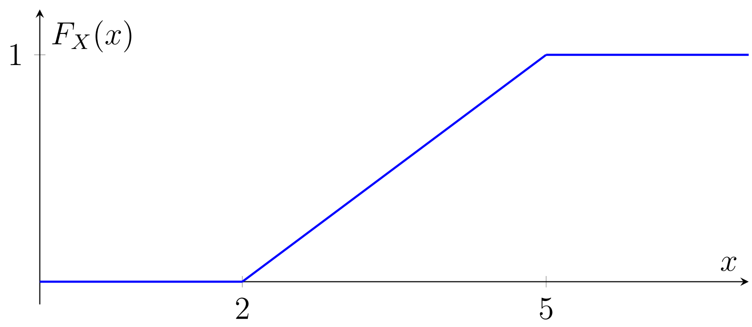
   (e) **Функция распределения** $F_X(x)$**:**

   $$F_X(x) = P(X < x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2 \\ \dfrac{x-2}{3}, & 2 < x \leq 5 \\ 1, & x > 5 \end{cases}$$

   (f) **Плотность распределения** $f_X(x)$**:**

   $$f_X(x) = F'_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3}, & x \in [2, 5] \\ 0, & x \notin [2, 5] \end{cases}$$

Функция распределения



Плотность распределения

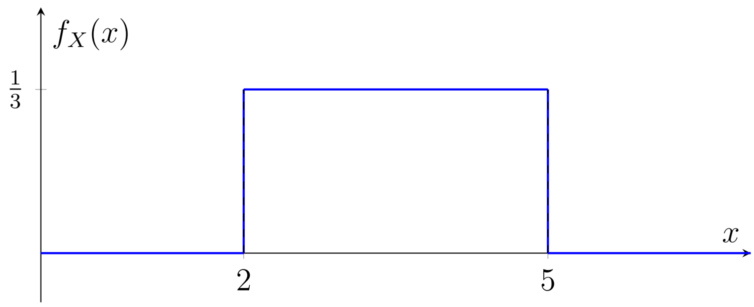


Рис. 5: Равномерное распределение на отрезке $[2, 5]$

2. **Показательное распределение (время ожидания)**

   Описание: Время ожидания автобуса (в минутах) моделируется случайной величиной с параметром $\lambda = 0.2$.

   (a) **Пространство элементарных исходов** (Ω)**:** $[0, +\infty)$

   (b) **Сигма-алгебра** $(\mathcal{F})$**:** Борелевская σ-алгебра на $[0, +\infty)$

   (c) **Вероятностная мера** (P)**:** $P([a, b]) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda t} dt = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$ для $0 \le a \le b$

   (d) **Случайная величина** T**:** «Время ожидания». $T(\omega) = \omega$

   (e) **Функция распределения** $F_T(t)$**:**

   $$F_T(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} = 1 - e^{-0.2t}, & t \ge 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

   (f) **Плотность распределения** $f_T(t)$**:**

   $$f_T(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} = 0.2 \cdot e^{-0.2t}, & t \ge 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

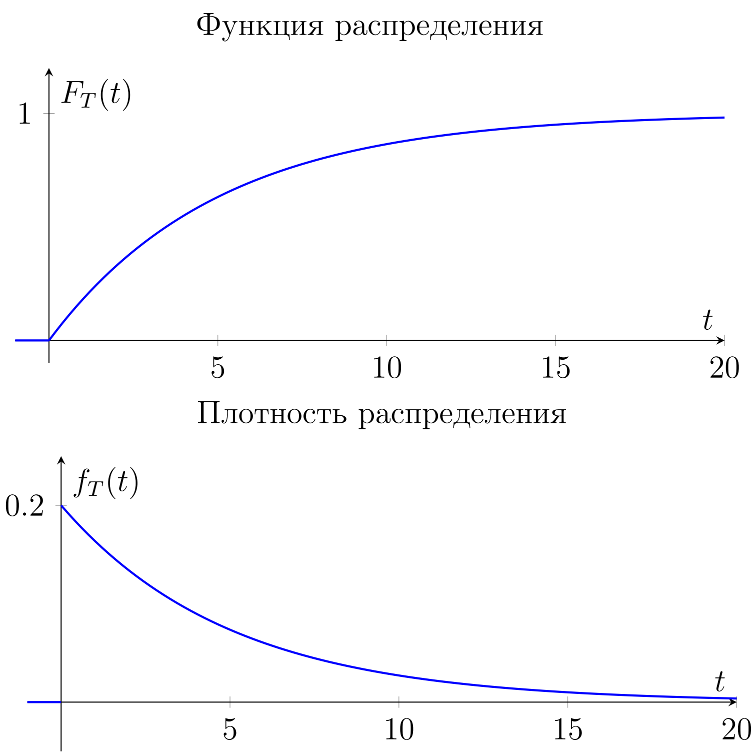


Рис. 6: Показательное распределение с $\lambda = 0.2$

3. **Нормальное распределение**

   Описание: Ошибка измерения некоторой физической величины распределена нормально с математическим ожиданием $m = 10$ и стандартным отклонением $\sigma = 0.5$.

   (a) **Пространство элементарных исходов** (Ω)**:** $\mathbb{R}$

   (b) **Сигма-алгебра** ($\mathcal{F}$)**:** Борелевская σ-алгебра на $\mathbb{R}$

   (c) **Вероятностная мера** (P)**:** $P((a,b]) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx$

   (d) **Случайная величина** E**:** «Ошибка измерения». $E(\omega) = \omega$

   (e) **Функция распределения** $F_E(x)$**:**

   $$F_E(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x-10}{0.5}\right)$$

   где Φ - функция стандартного нормального распределения.

(f) **Плотность распределения $f_E(x)$:**

$$f_E(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{0.5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-10)^2}{2\cdot 0.25}}$$

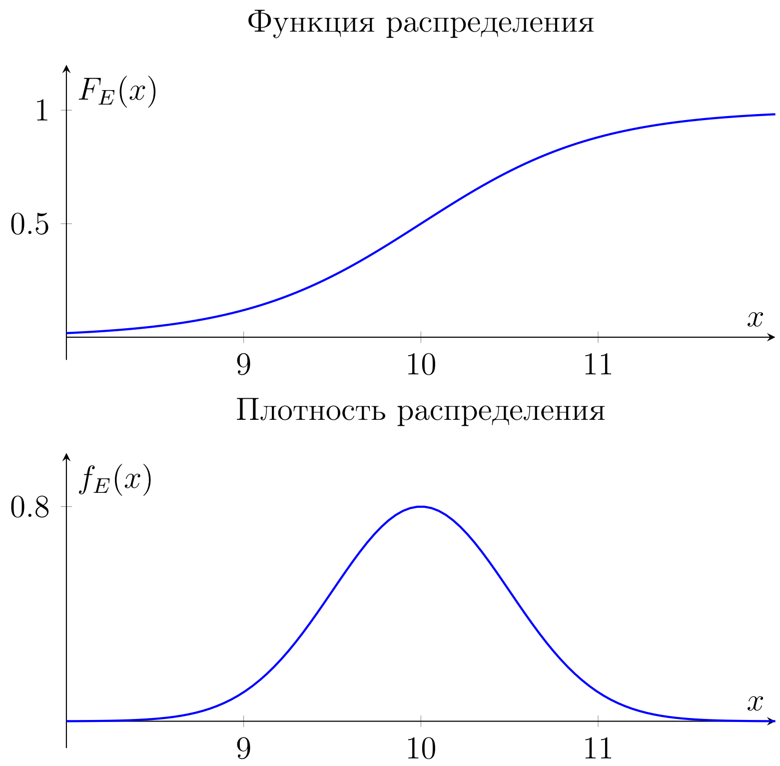


Рис. 7: Нормальное распределение с $m = 10$, $\sigma = 0.5$

4. **Распределение Коши**

   Описание: Отношение двух независимых стандартных нормальных величин имеет распределение Коши.

   (a) **Пространство элементарных исходов (Ω):** $\mathbb{R}$

   (b) **Сигма-алгебра ($\mathcal{F}$):** Борелевская σ-алгебра на $\mathbb{R}$

   (c) **Вероятностная мера (P):** $P((a,b]) = \frac{1}{\pi}\int_a^b \frac{1}{1+x^2}dx$

   (d) **Случайная величина C:** «Случайная величина с распределением Коши». $C(\omega) = \omega$

(e) **Функция распределения $F_C(x)$:**

$$F_C(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \arctan(x) + \frac{1}{2}$$

(f) **Плотность распределения $f_C(x)$:**

$$f_C(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}$$

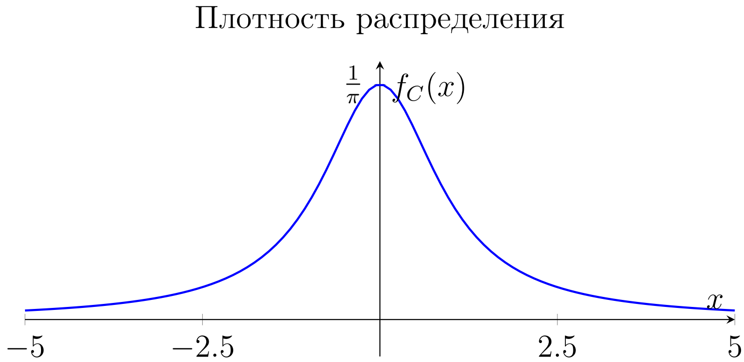


Рис. 8: Стандартное распределение Коши