Задачи на математическое ожидание и дисперсию

Задачи с решениями

Дискретные распределения

Задача Д.1. **Условие:** Лето бывает засушливое с вероятностью 0.3. При этом вероятность хорошего урожая 0.2, среднего 0.4. В не засушливое лето вероятность хорошего урожая 0.7, среднего 0.2. Кроме хорошего и среднего бывает только плохой урожай. Случайная величина ξ равна 1 при хорошем урожае, 0 при среднем и -1 при плохом. Найдите математическое ожидание $M\xi$ и дисперсию $D\xi$.

Решение:

Вероятностное пространство: элементарные исходы — типы лета и урожая.

- A — засушливое лето, $P(A) = 0.3$
- $\overline{A}$ — не засушливое лето, $P(\overline{A}) = 0.7$

Условные вероятности урожая:

- В засушливое лето: $P(\text{хор}|A) = 0.2$, $P(\text{ср}|A) = 0.4$, $P(\text{пл}|A) = 1 - 0.2 - 0.4 = 0.4$
- В не засушливое лето: $P(\text{хор}|\overline{A}) = 0.7$, $P(\text{ср}|\overline{A}) = 0.2$, $P(\text{пл}|\overline{A}) = 1 - 0.7 - 0.2 = 0.1$

Найдём безусловные вероятности значений ξ:

- $P(\xi = 1) = P(A)P(\text{хор}|A) + P(\overline{A})P(\text{хор}|\overline{A}) = 0.3 \cdot 0.2 + 0.7 \cdot 0.7 = 0.06 + 0.49 = 0.55$
- $P(\xi = 0) = P(A)P(\text{ср}|A) + P(\overline{A})P(\text{ср}|\overline{A}) = 0.3 \cdot 0.4 + 0.7 \cdot 0.2 = 0.12 + 0.14 = 0.26$

- $P(\xi = -1) = P(A)P(\text{пл}|A) + P(\overline{A})P(\text{пл}|\overline{A}) = 0.3 \cdot 0.4 + 0.7 \cdot 0.1 = 0.12 + 0.07 = 0.19$

Проверка: $0.55 + 0.26 + 0.19 = 1$.

Функция распределения $F(x)$:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ 0.19, & -1 \le x < 0 \\ 0.45, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

Математическое ожидание:

$$M\xi = 1 \cdot 0.55 + 0 \cdot 0.26 + (-1) \cdot 0.19 = 0.55 - 0.19 = 0.36$$

Найдём $M\xi^2$:

$$M\xi^2 = 1^2 \cdot 0.55 + 0^2 \cdot 0.26 + (-1)^2 \cdot 0.19 = 0.55 + 0.19 = 0.74$$

Дисперсия:

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = 0.74 - (0.36)^2 = 0.74 - 0.1296 = 0.6104$$

Ответ: $M\xi = 0.36$, $D\xi = 0.6104$.

Задача Д.2. **Условие:** Проводятся три независимых эксперимента с разными вероятностями успеха: $p_1 = 0.4$, $p_2 = 0.6$, $p_3 = 0.8$. Случайная величина η — число успехов. Найдите математическое ожидание $M\eta$ и дисперсию $D\eta$.

Решение:

Вероятностное пространство: множество всех последовательностей из трёх исходов (У — успех, Н — неудача). Всего $2^3 = 8$ элементарных исходов.

Введём индикаторы успеха в каждом эксперименте:

- $\eta_1 \sim Bernoulli(p = 0.4)$, $M\eta_1 = 0.4$, $D\eta_1 = 0.4 \cdot 0.6 = 0.24$
- $\eta_2 \sim Bernoulli(p = 0.6)$, $M\eta_2 = 0.6$, $D\eta_2 = 0.6 \cdot 0.4 = 0.24$
- $\eta_3 \sim Bernoulli(p = 0.8)$, $M\eta_3 = 0.8$, $D\eta_3 = 0.8 \cdot 0.2 = 0.16$

Тогда $\eta = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3$.

В силу независимости экспериментов:

$$M\eta = M\eta_1 + M\eta_2 + M\eta_3 = 0.4 + 0.6 + 0.8 = 1.8$$

$$D\eta = D\eta_1 + D\eta_2 + D\eta_3 = 0.24 + 0.24 + 0.16 = 0.64$$

Функция распределения $F(x)$:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ q_1q_2q_3, & 0 \leq x < 1 \\ q_1q_2q_3 + p_1q_2q_3 + q_1p_2q_3 + q_1q_2p_3, & 1 \leq x < 2 \\ q_1q_2q_3 + p_1q_2q_3 + q_1p_2q_3 + q_1q_2p_3 + p_1p_2q_3 + p_1q_2p_3 + q_1p_2p_3, & 2 \leq x < 3 \\ 1, & x \geq 3 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, \\ 0.6 \cdot 0.4 \cdot 0.2 = 0.048, \\ 0.048 + 0.4 \cdot 0.4 \cdot 0.2 + 0.6 \cdot 0.6 \cdot 0.2 + 0.6 \cdot 0.4 \cdot 0.8 = 0.048 + 0.032 + 0.072 + 0.1 \\ 0.344 + 0.4 \cdot 0.6 \cdot 0.2 + 0.4 \cdot 0.4 \cdot 0.8 + 0.6 \cdot 0.6 \cdot 0.8 = 0.344 + 0.048 + 0.128 + 0.2 \\ 1, \end{cases}$$

Ответ: $M\eta = 1.8$, $D\eta = 0.64$.

Непрерывные распределения

Задача Н.1. **Условие:** Случайная величина ξ имеет плотность распределения $f(x) = C(4 - x^2)$ при $x \in [-2, 2]$ и $f(x) = 0$ иначе. Найдите постоянную C, математическое ожидание $M\xi$ и дисперсию $D\xi$.

Решение:

Найдём постоянную C из условия нормировки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-2}^{2} C(4 - x^2)dx = 1$$

$$C\left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} = C\left(\left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(-8 + \frac{8}{3}\right)\right) = C\left(\frac{16}{3} + \frac{16}{3}\right) = C \cdot \frac{32}{3} = 1$$

$$C = \frac{3}{32}$$

Плотность распределения:

$$f(x) = \frac{3}{32}(4 - x^2), \quad x \in [-2, 2]$$

$$f(x) = 0, \quad x \notin [-2, 2]$$

Функция распределения:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 0, & x < -2 \\ \frac{3}{32}\int_{-2}^{x}(4-t^2)dt = \frac{3}{32}\left[4t - \frac{t^3}{3}\right]_{-2}^{x} = \frac{3}{32}\left(4x - \frac{x^3}{3} + 8 - \frac{8}{3}\right), & -2 \leq x \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

Математическое ожидание (подынтегральная функция нечётная, пределы симметричны):

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{-2}^{2} x \cdot \frac{3}{32}(4 - x^2)dx = 0$$

Найдём $M\xi^2$:

$$M\xi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_{-2}^{2} x^2 \cdot \frac{3}{32}(4 - x^2)dx = \frac{3}{32}\int_{-2}^{2}(4x^2 - x^4)dx$$

$$= \frac{3}{32}\left[\frac{4x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_{-2}^{2} = \frac{3}{32} \cdot 2\left(\frac{32}{3} - \frac{32}{5}\right) = \frac{3}{32} \cdot 2 \cdot 32\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right)$$

$$= 6 \cdot \frac{5-3}{15} = 6 \cdot \frac{2}{15} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5} = 0.8$$

Дисперсия:

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = 0.8 - 0 = 0.8$$

Ответ: $C = \frac{3}{32}$, $M\xi = 0$, $D\xi = 0.8$.

Задача Н.2. **Условие:** Случайная величина η имеет плотность распределения $f(x) = Cxe^{-2x}$ при $x \geq 0$ и $f(x) = 0$ при $x < 0$. Найдите постоянную C, математическое ожидание $M\eta$ и дисперсию $D\eta$.

Решение:

Найдём постоянную C из условия нормировки:

$$\int_{0}^{\infty} Cxe^{-2x}dx = 1$$

Воспользуемся формулой: $\int_0^\infty x^n e^{-ax}dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$ при $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$.

$$C \cdot \frac{1!}{(2)^2} = C \cdot \frac{1}{4} = 1 \Rightarrow C = 4$$

Плотность распределения:

$$f(x) = 4xe^{-2x}, \quad x \geq 0$$

$$f(x) = 0, \quad x < 0$$

Функция распределения:

$$F(x) = \int_0^x 4te^{-2t}dt = 4\left[-\frac{t}{2}e^{-2t} - \frac{1}{4}e^{-2t}\right]_0^x = 1-(2x+1)e^{-2x}, \quad x \geq 0$$

$$F(x) = 0, \quad x < 0$$

Математическое ожидание:

$$M\eta = \int_0^\infty x \cdot 4xe^{-2x}dx = 4\int_0^\infty x^2e^{-2x}dx = 4 \cdot \frac{2!}{(2)^3} = 4 \cdot \frac{2}{8} = 1$$

Найдём $M\eta^2$:

$$M\eta^2 = \int_0^\infty x^2 \cdot 4xe^{-2x}dx = 4\int_0^\infty x^3e^{-2x}dx = 4 \cdot \frac{3!}{(2)^4} = 4 \cdot \frac{6}{16} = \frac{24}{16} = 1.5$$

Дисперсия:

$$D\eta = M\eta^2 - (M\eta)^2 = 1.5 - 1 = 0.5$$

Ответ: $C = 4$, $M\eta = 1$, $D\eta = 0.5$.

Задача Н.3. **Условие:** Случайная величина ζ имеет функцию распределения $F(x) = C(\operatorname{arctg} x + A)$ при $x \in [-1, 1]$, $F(x) = 0$ при $x < -1$ и $F(x) = 1$ при $x > 1$. Найдите постоянные C и A, плотность распределения, математическое ожидание $M\zeta$ и дисперсию $D\zeta$.

Решение:

Из условий на функцию распределения:

- $F(-1) = 0$: $C(\operatorname{arctg}(-1) + A) = C(-\frac{\pi}{4} + A) = 0$
- $F(1) = 1$: $C(\operatorname{arctg} 1 + A) = C(\frac{\pi}{4} + A) = 1$

Из первого уравнения: $A = \frac{\pi}{4}$

Подставим во второе уравнение: $C(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}) = C \cdot \frac{\pi}{2} = 1 \Rightarrow C = \frac{2}{\pi}$

Функция распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \frac{2}{\pi}(\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{4}), & -1 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

Плотность распределения (производная от $F(x)$):

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}, & -1 < x < 1 \\ 0, & x < -1 \text{ или } x > 1 \end{cases}$$

Проверка нормировки:

$$\int_{-1}^{1} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{2}{\pi} [\operatorname{arctg} x]_{-1}^{1} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{4} - (-\frac{\pi}{4}) \right) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 1$$

Математическое ожидание (подынтегральная функция нечётная, пределы симметричны):

$$M\zeta = \int_{-1}^{1} x \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2} dx = 0$$

Найдём $M\zeta^2$:

$$M\zeta^2 = \int_{-1}^{1} x^2 \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx$$

$$= \frac{2}{\pi} [x - \operatorname{arctg} x]_{-1}^{1} = \frac{2}{\pi} \left((1 - \frac{\pi}{4}) - (-1 - (-\frac{\pi}{4})) \right)$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{\pi}{4} + 1 - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{2}{\pi} \left(2 - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{4}{\pi} - 1$$

Дисперсия:

$$D\zeta = M\zeta^2 - (M\zeta)^2 = \frac{4}{\pi} - 1 - 0 = \frac{4}{\pi} - 1$$

Ответ: $C = \frac{2}{\pi}$, $A = \frac{\pi}{4}$, $M\zeta = 0$, $D\zeta = \frac{4}{\pi} - 1$.

Условия задач

Дискретные распределения

Задача Д.1. Лето бывает засушливое с вероятностью 0.3. При этом вероятность хорошего урожая 0.2, среднего 0.4. В не засушливое лето вероятность хорошего урожая 0.7, среднего 0.2. Кроме хорошего и среднего бывает только плохой урожай. Случайная величина ξ равна 1 при хорошем урожае, 0 при среднем и -1 при плохом. Найдите математическое ожидание $M\xi$ и дисперсию $D\xi$.

Задача Д.2. Проводятся три независимых эксперимента с разными вероятностями успеха: $p_1 = 0.4$, $p_2 = 0.6$, $p_3 = 0.8$. Случайная величина η — число успехов. Найдите математическое ожидание $M\eta$ и дисперсию $D\eta$.

Непрерывные распределения

Задача Н.1. Случайная величина ξ имеет плотность распределения $f(x) = C(4-x^2)$ при $x \in [-2, 2]$ и $f(x) = 0$ иначе. Найдите постоянную C, математическое ожидание $M\xi$ и дисперсию $D\xi$.

Задача Н.2. Случайная величина η имеет плотность распределения $f(x) = Cxe^{-2x}$ при $x \geq 0$ и $f(x) = 0$ при $x < 0$. Найдите постоянную C, математическое ожидание $M\eta$ и дисперсию $D\eta$.

Задача Н.3. Случайная величина ζ имеет функцию распределения $F(x) = C(\operatorname{arctg} x + A)$ при $x \in [-1, 1]$, $F(x) = 0$ при $x < -1$ и $F(x) = 1$ при $x > 1$. Найдите постоянные C и A, плотность распределения, математическое ожидание $M\zeta$ и дисперсию $D\zeta$.

Ответы ко всем задачам

Дискретные распределения

Задача Д.1. $M\xi = 0.36$, $D\xi = 0.6104$

Задача Д.2. $M\eta = 1.8$, $D\eta = 0.64$

Непрерывные распределения

Задача Н.1. $C = \frac{3}{32}$, $M\xi = 0$, $D\xi = 0.8$

Задача Н.2. $C = 4$, $M\eta = 1$, $D\eta = 0.5$

Задача Н.3. $C = \frac{2}{\pi}$, $A = \frac{\pi}{4}$, $M\zeta = 0$, $D\zeta = \frac{4}{\pi} - 1$