ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

БУЛЫЧЕВ АЛЕКСАНДР ВИКТОРОВИЧ, К.Т.Н.

МОСКВА, 2025

ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ

СЛОЖЕНИЕ И УМНОЖЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ. ТЕОРЕМА БАЙЕСА

БУЛЫЧЕВ АЛЕКСАНДР ВИКТОРОВИЧ, К.Т.Н.

МОСКВА, 2025

СЛОЖЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

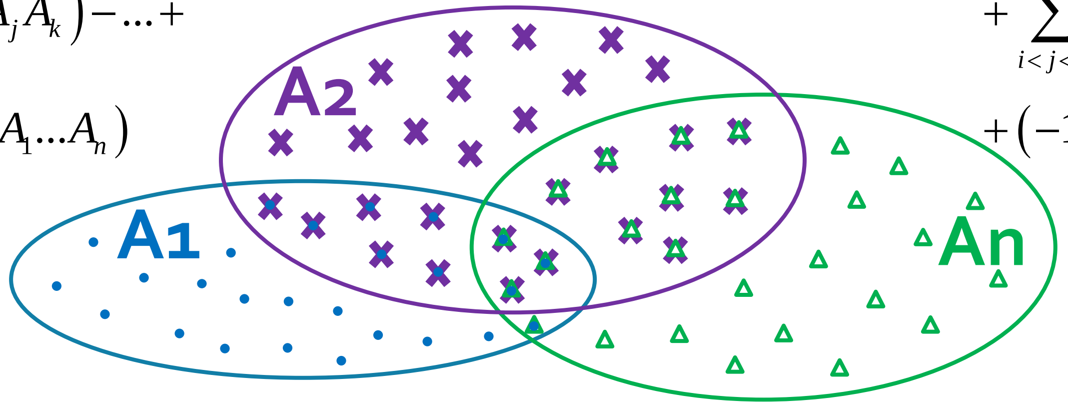
<u>ФОРМУЛА ВКЛЮЧЕНИЙ-ИСКЛЮЧЕНИЙ</u>, РАССМОТРЕННАЯ В ПЕРВОЙ ЛЕКЦИИ И ЕСТЬ ПО СУТИ <u>ФОРМУЛА СЛОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ</u>

$$N\left(\sum_{i=1,n} A_i\right) = \sum_{i=1,n} N(A_i) - \sum_{i<j} N(A_iA_j) + \sum_{i<j<k} N(A_iA_jA_k) - \ldots + (-1)^{n-1} N(A_1 \ldots A_n)$$

$\Leftarrow$ *Для количеств элементов*

Для площадей (мер) $\Rightarrow$

$$S\left(\sum_{i=1,n} A_i\right) = \sum_{i=1,n} S(A_i) - \sum_{i<j} S(A_iA_j) + \sum_{i<j<k} S(A_iA_jA_k) - \ldots + (-1)^{n-1} S(A_1 \ldots A_n)$$



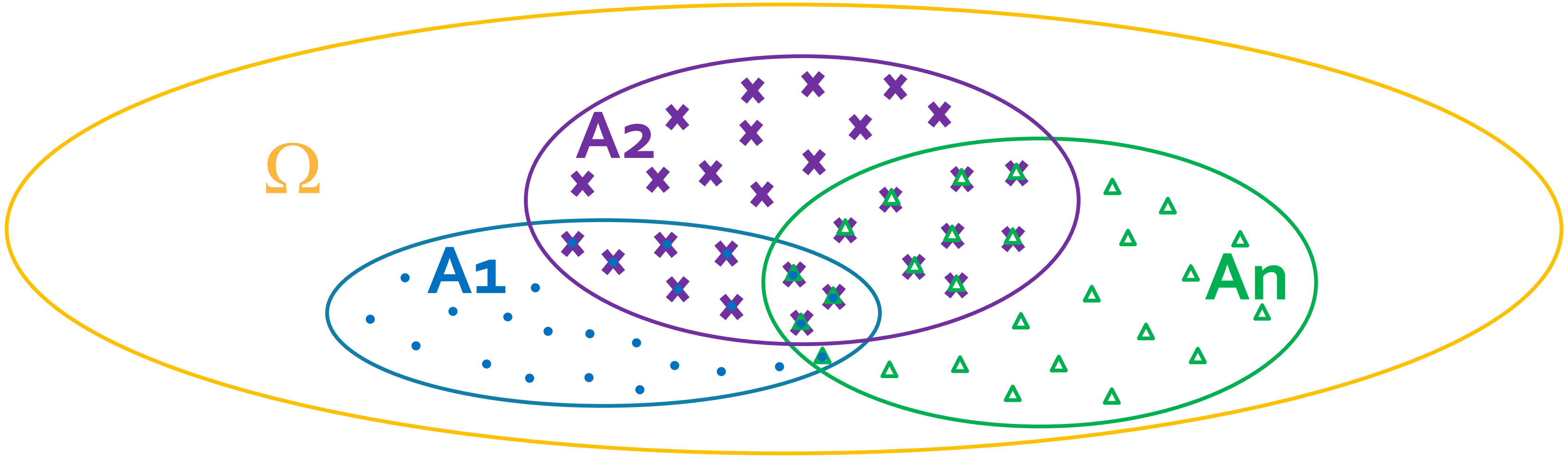
СЛОЖЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

<u>ФОРМУЛА СЛОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ</u> ЯВЛЯЕТСЯ СЛЕДСТВИЕМ ПРЕДЫДУЩИХ ДВУХ ФОРМУЛ

Ω *– конечное / счетное / несчетное множество всех элементарных исходов*

$$S\left(\sum_{i=1,n} A_i\right)\Big/S(\Omega)=\sum_{i=1,n} S(A_i)\Big/S(\Omega)-\sum_{i<j} S\left(A_iA_j\right)\Big/S(\Omega)+\sum_{i<j<k} S\left(A_iA_jA_k\right)\Big/S(\Omega)-\ldots+(-1)^{n-1}S(A_1\ldots A_n)/S(\Omega)$$

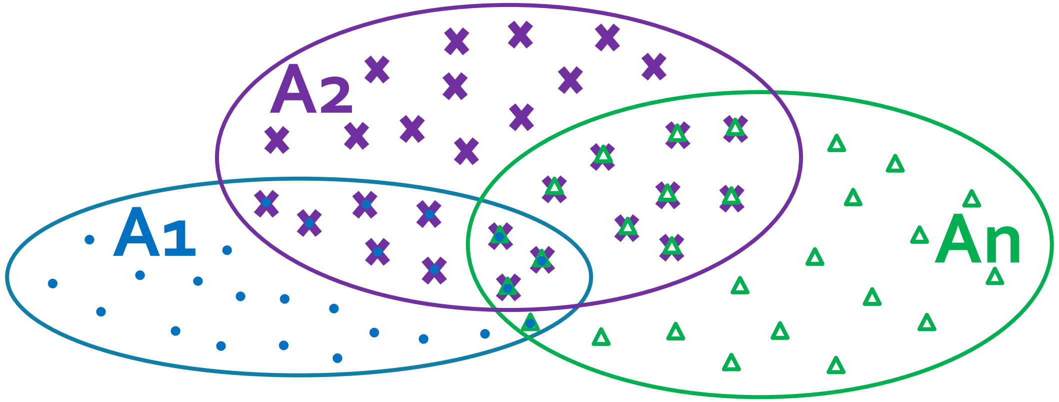
$$P\left(\sum_{i=1,n} A_i\right)=\sum_{i=1,n} P(A_i)-\sum_{i<j} P\left(A_iA_j\right)+\sum_{i<j<k} P\left(A_iA_jA_k\right)-\ldots+(-1)^{n-1}P(A_1\ldots A_n)$$



СЛОЖЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. ПРИМЕР

ПЯТЬ ОТКРЫТОК СЛУЧАЙНЫМ ОБРАЗОМ РАСКЛАДЫВАЮТСЯ ПО ТРЕМ КОНВЕРТАМ. КАКОВА ВЕРОЯТНОСТЬ ТОГО, ЧТО В КАЖДОМ КОНВЕРТЕ ОКАЖЕТСЯ ХОТЯ БЫ ОДНА ОТКРЫТКА?

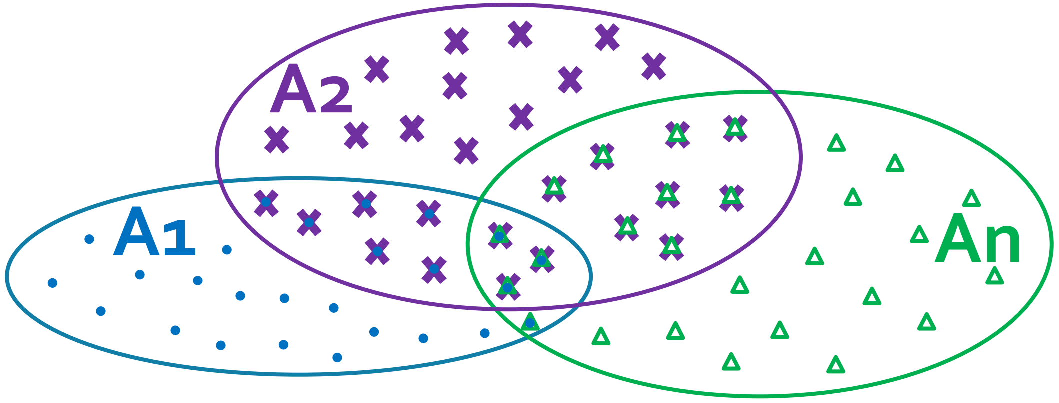
<u>Компактность решения зависит от удачной формализации задачи с помощью теоретико-множественных операций</u>



СЛОЖЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. ПРИМЕР

ФОРМАЛИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ НА ЯЗЫКЕ МНОЖЕСТВ

1. Обозначим через **A1,A2,A3** события «Ни одну открытку не вложили в i-й конверт»;
2. тогда **A1+A2+A3** эквивалентно событию «Хотя бы в одном конверте отсутствует открытка»;
3. при это искомое событие **A** – это противоположное событие для **A1+A2+A3**.



СЛОЖЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. ПРИМЕР

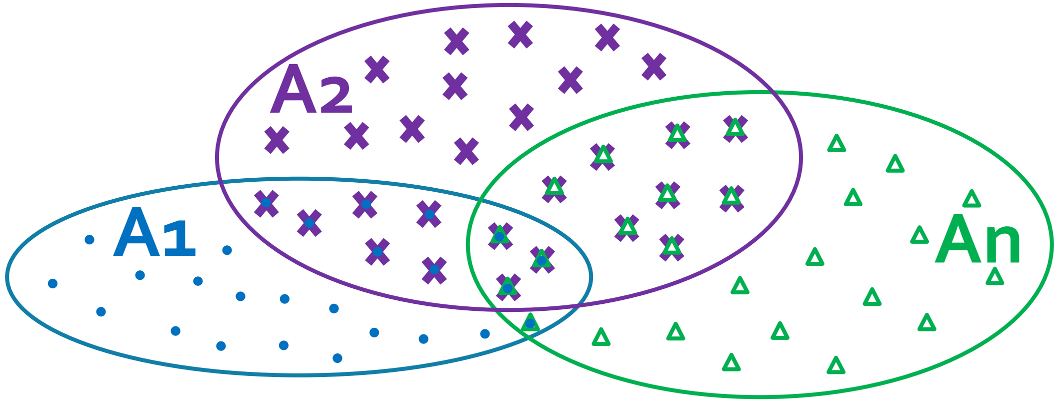
$$A=\overline{A_1+A_2+A_3},P(A)=1-P(A_1+A_2+A_3),$$

$$P(A_1+A_2+A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3),$$

$$P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=\frac{2^5}{3^5}=\frac{32}{243},P(A_1A_2)=P(A_1A_3)=P(A_2A_3)=\frac{1}{3^5}=\frac{1}{243},P(A_1A_2A_3)=0$$

$$P(A_1+A_2+A_3)=3\frac{2^5}{3^5}-3\frac{1}{3^5}=\frac{2^5}{3^4}-\frac{1}{3^4}=\frac{31}{81},$$

$$P(A)=1-\frac{31}{81}=\frac{50}{81}.$$



УМНОЖЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

НАХОЖДЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
ПРОИЗВЕДЕНИЯ И СУММЫ СОБЫТИЙ
ЯВЛЯЮТСЯ ВАЖНЫМИ ЗАДАЧАМИ В ТЕОРИИ
ВЕРОЯТНОСТЕЙ, ПОСКОЛЬКУ НА ИХ ОСНОВЕ
РЕШАЮТСЯ МНОГИЕ ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ

Для лучшего понимания постановки задачи о произведении событий и нахождении его вероятности используем геометрический подход

УМНОЖЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. ГЕОМЕТРИЯ

В ДВУХ ЯЩИКАХ РАСПОЛОЖЕНЫ ПРАВИЛЬНЫЕ И БРАКОВАННЫЕ ДЕТАЛИ:

- ящик №1 (I) выбирается с вероятностью P(I), в нем имеется N1 деталей, из них n1 бракованные (бр);
- ящик №2 (II) выбирается с вероятностью P(II), в нем имеется N2 деталей, из них n2 бракованные (бр);

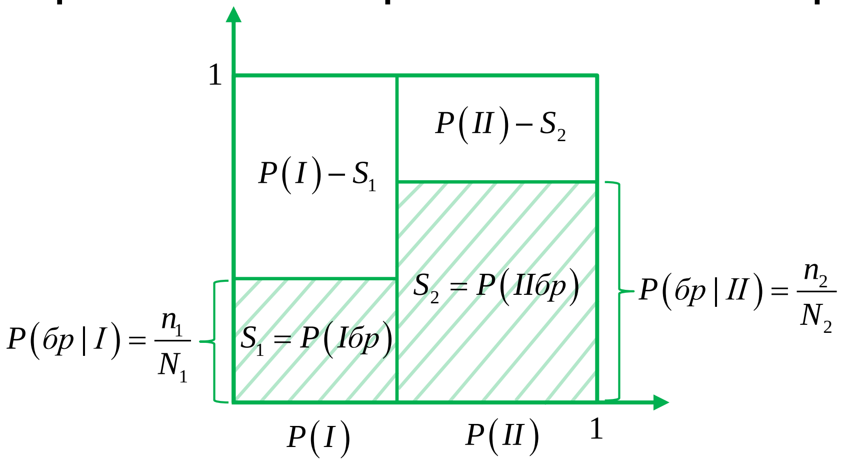
Каковы вероятности следующих событий:

$$P(I\text{бр}), P(II\text{бр}), P\left(I\,\overline{\text{бр}}\right), P\left(II\,\overline{\text{бр}}\right) - ?$$

УМНОЖЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. ГЕОМЕТРИЯ

СОГЛАСНО АКСИОМАТИКЕ А.Н. КОЛМОГОРОВА СТРОИМ ВЕРОЯТНОСТНОЕ ПРОСТРАНСТВО «КВАДРАТ»:

- событиям «<u>Номер ящика</u>» соответствуют элементарные исходы (точки отрезка) на горизонтальной стороне единичного квадрата;
- событию «<u>Брак</u>» соответствуют элементарные исходы (точки отрезка) на вертикальной стороне единичного квадрата.



$$P(Iбр)=P(I)P(бр\,|\,I)=P(I)\frac{n_1}{N_1}=S_1$$

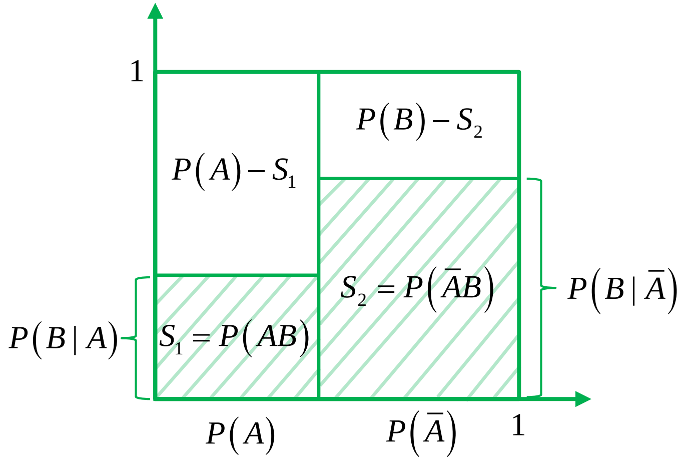
$$P(IIбр)=P(II)P(бр\,|\,II)=P(II)\frac{n_2}{N_2}=S_2$$

$$P\left(I\overline{бр}\right)=P(I)P\left(\overline{бр}\,|\,I\right)=P(I)-S_1,P\left(II\overline{бр}\right)=P(II)-S_2$$

$$Допустимо\,взять\,P(I)=\frac{N_1}{N_1+N_2},P(II)=\frac{N_2}{N_1+N_2}$$

УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ

УЧИТЫВАЯ, ЧТО СОБЫТИЯ ПО ПРИРОДЕ МОГУТ БЫТЬ ЛЮБЫМИ ЗАПИШЕМ ОБЩИЙ ВИД ФОРМУЛЫ:



$$P(AB)=P(A)P(B|A);$$

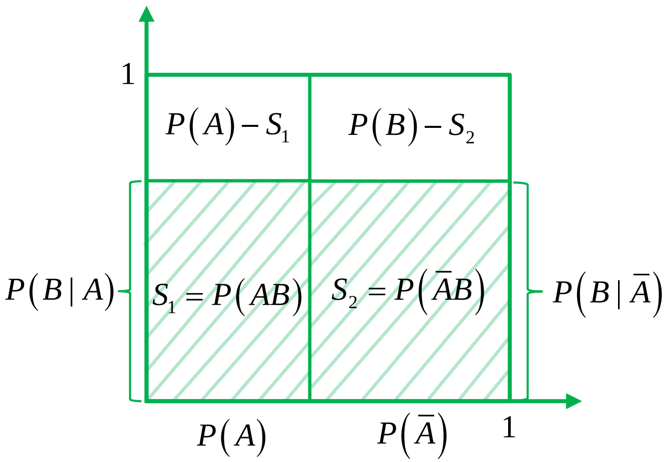
$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)} - \textit{условная вероятность.}$$

Если рассматривается несколько событий:

$$P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2A_3|A_1)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)$$

НЕЗАВИСИМЫЕ СОБЫТИЯ

ДЛЯ НЕЗАВИСИМЫХ СОБЫТИЙ ФОРМУЛА ПРИНИМАЕТ ВИД:



$$P(AB)=P(A)P(B|A)=P(A)P(B)$$

$$P(B|A)=P(B|\bar{A})$$

$$P(B)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

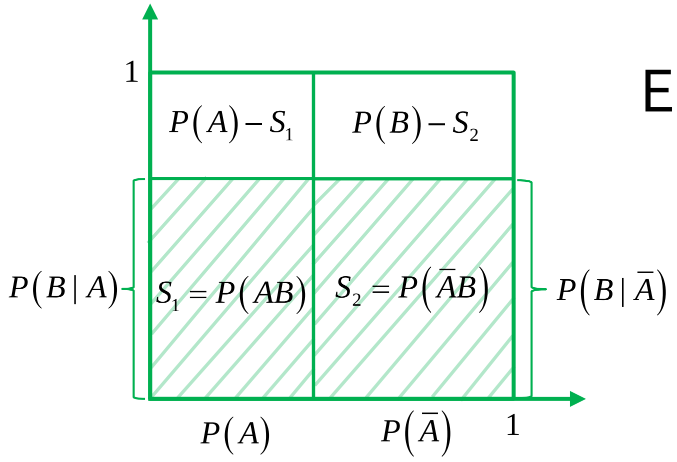
События независимы в совокупности, если вероятность любого из них не меняется при наступлении какого угодно числа событий из остальных.

Пример – одинаковый процент бракованных деталей

ТРИ НЕЗАВИСИМЫХ СОБЫТИЯ

ДЛЯ <u>НЕЗАВИСИМЫХ СОБЫТИЙ</u>

ФОРМУЛА ПРИНИМАЕТ ВИД:

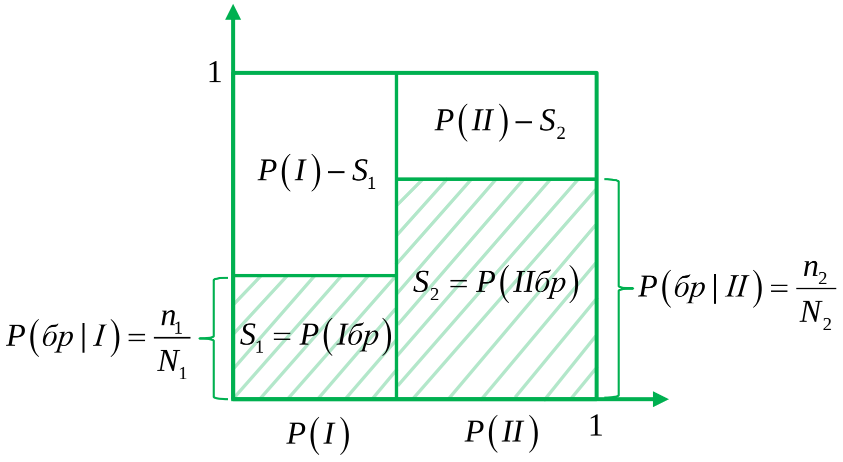


Если рассматриваются три события:

$$P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)$$
$$P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2)$$
$$P(A_1A_3)=P(A_1)P(A_3)$$
$$P(A_2A_3)=P(A_2)P(A_3)$$

ФОРМУЛЫ ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ И БАЙЕСА

ПРИ СЛУЧАЙНОЙ ВЫБОРКЕ ЯЩИКОВ И ДЕТАЛЕЙ ИЗ ЯЩИКА НАЙТИ ВЕРОЯТНОСТЬ БРАКА И ВЕРОЯТНОСТЬ ТОГО, ЧТО БРАК ВЫБРАН ИЗ ПЕРВОГО ЯЩИКА



Формула полной вероятности:

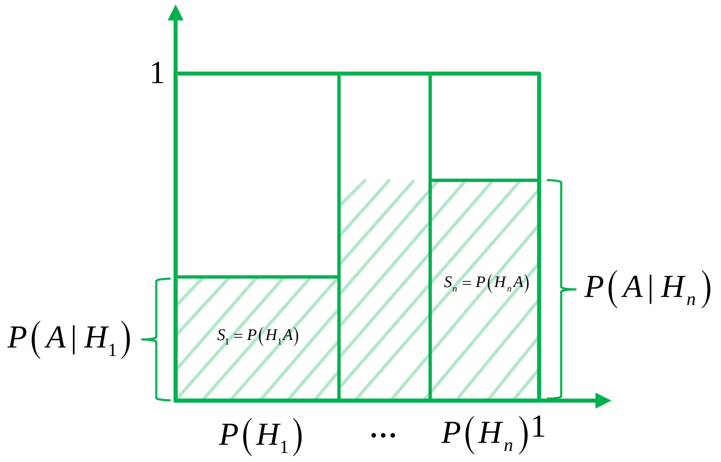
$$P(бр)=S_1+S_2=P(I)P(бр\,|\,I)+P(II)P(бр\,|\,II)$$

Формула Байеса:

$$P(I\,|\,бр)=\frac{S_1}{S_1+S_2}=\frac{P(Iбр)}{P(бр)}=\frac{P(I)P(бр\,|\,I)}{P(бр)}$$

ФОРМУЛЫ ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ И БАЙЕСА

НАЙТИ ВЕРОЯТНОСТЬ СОБЫТИЯ, СОВМЕСТНОГО С СОБЫТИЯМИ ИЗ ПОЛНОЙ ГРУППЫ, А ТАКЖЕ ВЕРОЯТНОСТЬ ТОГО, ЧТО СОБЫТИЕ ПРОИЗОШЛО С ЛЮБЫМ ЗАДАННЫМ СОБЫТИЕМ ИЗ ПОЛНОЙ ГРУППЫ



Формула полной вероятности:

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + \ldots + P(H_n)P(A|H_n)$$

Формула Байеса:

$$P(H_k|A) = \frac{S_k}{S_1 + \ldots + S_n} = \frac{P(H_k)P(A|H_k)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(H_k)P(A|H_k)}{P(H_1)P(A|H_1) + \ldots + P(H_n)P(A|H_n)}$$

УМНОЖЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. ПРИМЕР

БУКВЫ СЛОВА «КОРОБ» СЛУЧАЙНЫМ ОБРАЗОМ ПЕРЕМЕШИВАЮТСЯ В КОРОБКЕ И НАУГАД ИЗВЛЕКАЮТСЯ ОДНА ЗА ДРУГОЙ. КАКОВА ВЕРОЯТНОСТЬ, ЧТО ПРИ ЭТОМ СНОВА ПОЯВИТСЯ СЛОВО «КОРОБ»?

$$P\left("К""О""Р""О""Б"\right)=$$

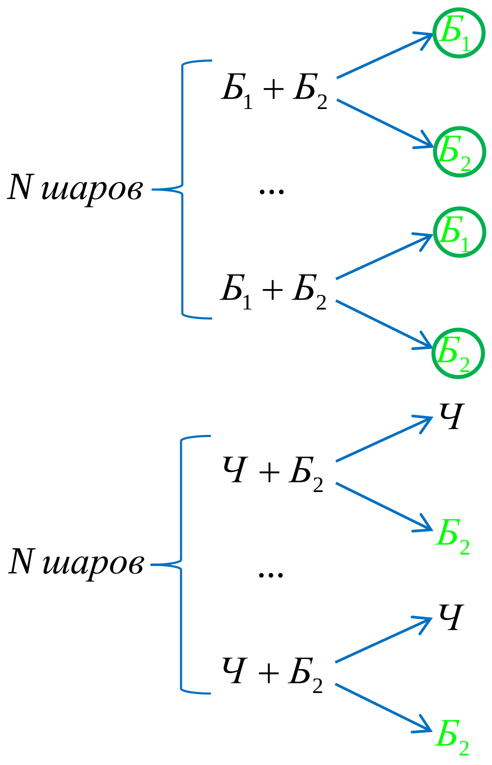
$$=P\left("К"\right)P\left("О"|"К"\right)P\left("Р"|"К""О"\right)P\left("О"|"К""О""Р"\right)P\left("Б"|"К""О""Р""О"\right)=$$

$$=\frac{1}{5}\frac{2}{4}\frac{1}{3}\frac{1}{2}1=\frac{1}{60}$$

УМНОЖЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. ПРИМЕР

ИЗ МЕШКА С ПОРОВНУ ПЕРЕМЕШАННЫМИ ЧЁРНЫМИ И БЕЛЫМИ ШАРАМИ ДОСТАЮТ, НЕ ГЛЯДЯ, ОДИН ШАР И КЛАДУТ ЕГО В ЯЩИК. ПОСЛЕ ЭТОГО В ЯЩИК ДОБАВЛЯЮТ БЕЛЫЙ ШАР, ПЕРЕМЕШИВАЮТ И НАУГАД ДОСТАЮТ ОДИН ИЗ НИХ. ОН ОКАЗЫВАЕТСЯ БЕЛЫМ. КАКОВА ВЕРОЯТНОСТЬ, ЧТО И ВТОРОЙ ШАР, КОТОРЫЙ ОСТАЛСЯ В ЯЩИКЕ, ТОЖЕ БЕЛЫЙ?

УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ. ПРИМЕР



Б1 – белый шар из первоначального мешка;
Б2 – добавленный белый шар;
Ч - черный шар из первоначального мешка;

Зеленые буквы Б1 и Б2 – согласно условию задачи все возможные равновероятные исходы для события «Выбран белый шар»

Зеленые буквы Б1 и Б2 в зеленой окружности – согласно условию задачи возможные равновероятные исходы для благоприятного события «Второй шар, который остался в ящике, тоже белый»

$$P(Б \mid Б) = \frac{2N}{2N + N} = \frac{2}{3}.$$

ФОРМУЛА БАЙЕСА. ПРИМЕР

35% ПРОДУКЦИИ ПРОИЗВОДИТСЯ ФАБРИКОЙ №1 (СОБЫТИЕ **H1**), 40% - ФАБРИКОЙ №2 (СОБЫТИЕ **H2**), 25% - ФАБРИКОЙ №3 (СОБЫТИЕ **H3**). БРАК (СОБЫТИЕ **A**) НА ФАБРИКАХ СОСТАВЛЯЕТ СООТВЕТСТВЕННО 1%, 1,5% И 2%. КАКОВА ВЕРОЯТНОСТЬ ТОГО, ЧТО БРАКОВАННАЯ ПРОДУКЦИЯ ПРОИЗВЕДЕНА НА ФАБРИКЕ №1?

ФОРМУЛА БАЙЕСА. ПРИМЕР

Формула полной вероятности:

$$P(A)=P(H_1)P(A|H_1)+P(H_2)P(A|H_2)+P(H_3)P(A|H_3)=$$
$$=0,35\cdot 0,01+0,40\cdot 0,015+0,25\cdot 0,02=0,0145$$

Формула Байеса:

$$P(H_1|A)=\frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(A)}=\frac{0,35\cdot 0,01}{0,0145}\approx 0,24$$

ФОРМУЛА БАЙЕСА. ПРИМЕР

КАКОЕ СОБЫТИЕ БОЛЕЕ ВЕРОЯТНО ПРИ БРОСАНИИ N РАЗ ПРАВИЛЬНОЙ ШЕСТИГРАННОЙ ИГРАЛЬНОЙ КОСТИ: «СУММА ВЫПАВШИХ ОЧКОВ ЧЕТНАЯ» ИЛИ «СУММА ВЫПАВШИХ ОЧКОВ НЕЧЕТНАЯ»?

Интуитивно может представляться, что вероятность события «сумма выпавших очков <u>четная</u>» больше

ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ. ПРИМЕР

Воспользуемся методом математической индукции:
докажем, что вероятность событий одинакова, т.е. равна 0,5.

База индукции выполняется,
т.к. утверждение очевидно справедливо при n=1:

$$P(\textit{четн\_за\_}1)=\frac{3}{6}=P(\textit{нечетн\_за\_}1)=\frac{3}{6}=0{,}5.$$

Пусть утверждение справедливо для всех k<=n, тогда докажем, что оно справедливо и для k=n+1. Воспользуемся формулой полной вероятности:

$$\begin{aligned}
&P(\textit{четн_за_}n+1)=\\
&\qquad=P(\textit{четн_за_}n)P(\textit{четн_за_}n+1\mid \textit{четн_за_}n)+\\
&\qquad+P(\textit{нечетн_за_}n)P(\textit{четн_за_}n+1\mid \textit{нечетн_за_}n)=\\
&\qquad=0{,}5\cdot 0{,}5+0{,}5\cdot 0{,}5=0{,}5\\
&P(\textit{нечетн_за_}n+1)=1-0{,}5=0{,}5
\end{aligned}$$

ПОЛНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ И БАЙЕС. ПРИМЕР

СТРАХОВАЯ КОМПАНИЯ ОКАЗЫВАЕТ УСЛУГИ ПО СТРАХОВАНИЮ АВТОМОБИЛЕЙ. КАКОВА ВЕРОЯТНОСТЬ ТОГО, ЧТО СО СЛУЧАЙНО ВЫБРАННЫМ ЧЕЛОВЕКОМ ПРОИЗОЙДЕТ СТРАХОВОЙ СЛУЧАЙ ВО ВТОРОЙ ГОД, ЕСЛИ С НИМ ПРОИЗОШЕЛ СТРАХОВОЙ СЛУЧАЙ В ПЕРВЫЙ ГОД?

Интуитивно может представляться, что вероятность не меняется, по крайне мере, основываясь лишь на одном испытании

ПОЛНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ И БАЙЕС. ПРИМЕР

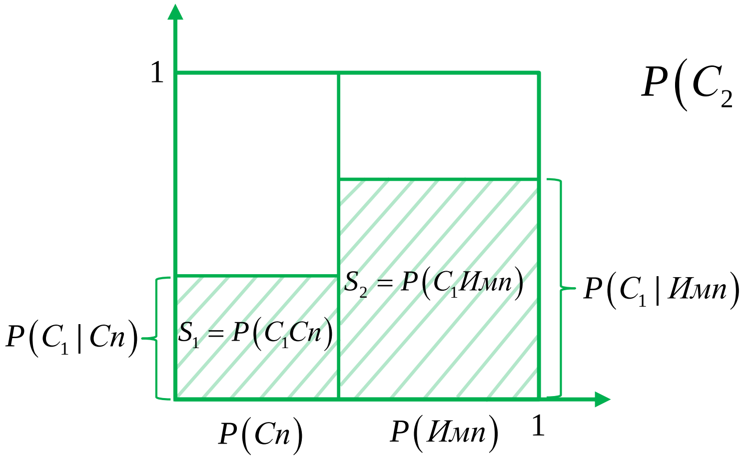
Предположим, что есть две категории водителей: спокойные (доля 2/3) (событие **Сп**) и импульсивные (событие **Имп**) (доля 1/3). Вероятности страховых случаев в первый и второй годы (**С1** и **С2**) для них равны соответственно 1/100 и 1/10 и не меняются за два года. Воспользуемся формулами Байеса и полной вероятности:

$$P(C_2 \mid C_1) = \frac{P(C_1 C_2)}{P(C_1)},$$

$$P(C_1) = P(Cп)P(C_1 \mid Cп) + P(Имп)P(C_1 \mid Имп).$$

ПОЛНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ И БАЙЕС. ПРИМЕР

Объединим формулы в одну:



$$P(C_2 \mid C_1) = \frac{P(Сп)P^2(C_1 \mid Сп) + P(Имп)P^2(C_1 \mid Имп)}{P(Сп)P(C_1 \mid Сп) + P(Имп)P(C_1 \mid Имп)} =$$

$$= \frac{\frac{2}{3}\left(\frac{1}{100}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{10}\right)^2}{\frac{2}{3}\frac{1}{100} + \frac{1}{3}\frac{1}{10}} \approx 0{,}085$$

$$\frac{P(C_2 \mid C_1)}{P(C_1)} \approx 2{,}125(!)$$

Вероятность выросла более чем в два раза при условии наличия прецендента

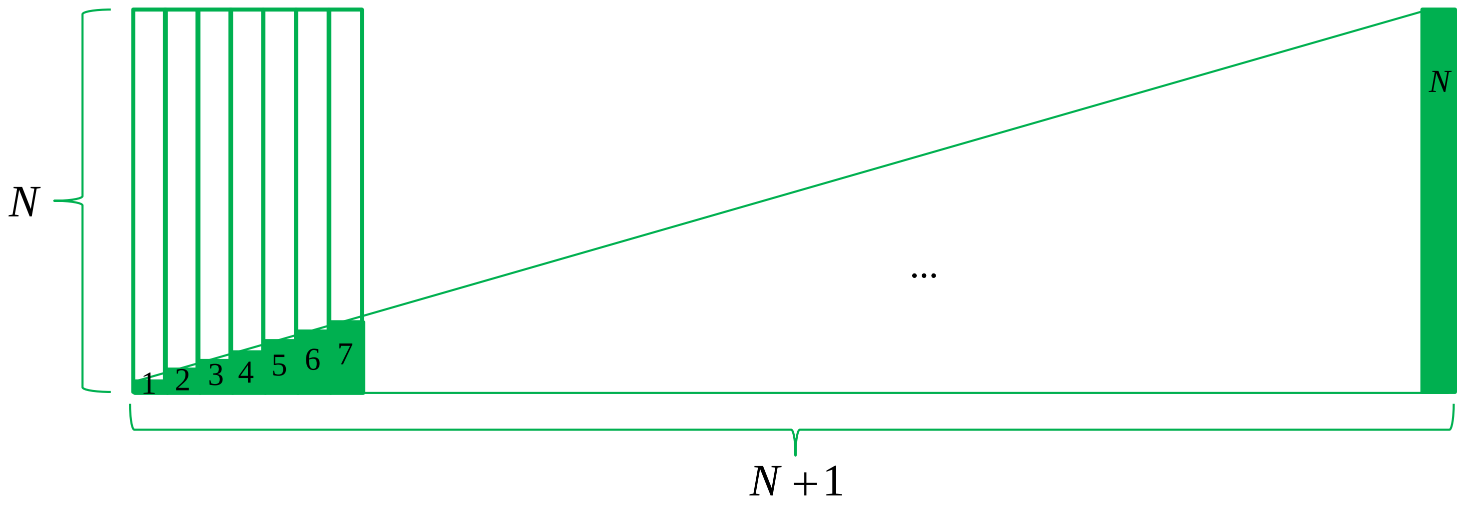
ПОЛНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ И БАЙЕС. ПРИМЕР

ЖИТЕЛЬ ЗЕМЛИ НАБЛЮДАЕТ ЗА ВОСХОДАМИ СОЛНЦА. ОН ЗАПОМНИЛ, ЧТО СОЛНЦЕ ВСХОДИЛО НЕКОТОРОЕ КОЛИЧЕСТВО РАЗ, ПРИ ЭТОМ У НЕГО ОТСУТСТВУЮТ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ О ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССАХ В ОКРУЖАЮЩЕМ МИРЕ. МОЖЕТ ЛИ ОН ОЦЕНИТЬ ВЕРОЯТНОСТЬ СЛЕДУЮЩЕГО ВОСХОДА СОЛНЦА?

Интуитивно может представляться, что нельзя, поскольку у нас отсутствует модель процесса

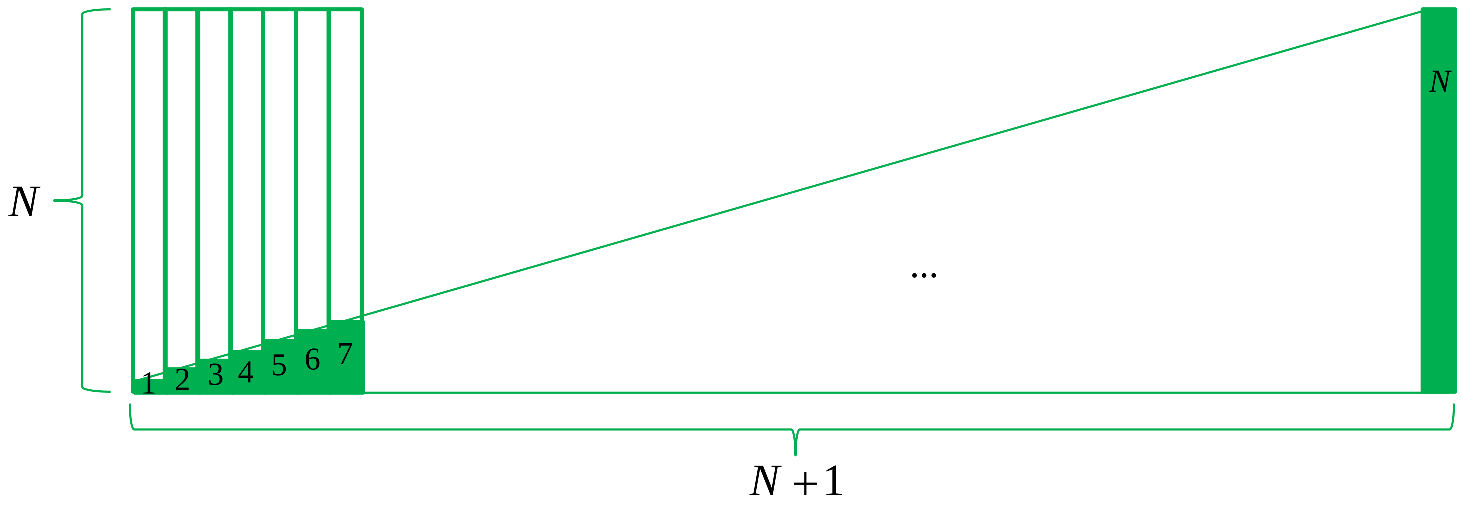
ПОЛНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ И БАЙЕС. ПРИМЕР

Предположим, что восходы наблюдались n раз. Считаем, что мы можем находится в любой из систем, в которых вероятности восхода варьируются от 0 до 1. Исходя из энтропийного принципа можно показать, что такие системы равновероятны при отсутствии априорных сведений и представляются как на рисунке ниже:



ПОЛНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ И БАЙЕС. ПРИМЕР

Вероятность восхода в каждой системе может быть представлена, например, как вероятность вытянуть случайным образом зеленый шар из множества N шаров в каждой корзине. Таким образом, мы имеем N+1 корзину с вероятностями целевого события от 0 до 1. Воспользуемся формулами Байеса и полной вероятности.



ПОЛНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ И БАЙЕС. ПРИМЕР

Найдем условную вероятность по формуле Байеса:

$$P(n+1|n)=\frac{P("n+1""n")}{P(n)}=\frac{P(n+1)}{P(n)}$$

Аналогично предыдущей задаче получаем:

$$P(n)=P("1")P(n|"1")+P("2")P(n|"2")+\ldots+P("N+1")P(n|"N+1")=$$

$$=\frac{1}{N+1}P^n(1|"1")+\frac{1}{N+1}P^n(1|"2")+\ldots+\frac{1}{N+1}P^n(1|"N+1")=$$

$$=\frac{1}{N+1}\left(\frac{0}{N}\right)^n+\frac{1}{N+1}\left(\frac{1}{N}\right)^n+\frac{1}{N+1}\left(\frac{2}{N}\right)^n+\ldots+\frac{1}{N+1}\left(\frac{N}{N}\right)^n=$$

$$\underset{N\to+\infty}{=}\int_0^1 x^n dx=\frac{t^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1=\frac{1}{n+1}$$

ПОЛНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ И БАЙЕС. ПРИМЕР

Итог:

$$P(n+1 \mid n) = \frac{P("n+1""n")}{P(n)} = \frac{P(n+1)}{P(n)} = \frac{n+1}{n+2}$$

Если n=0, то

$$P(n+1 \mid n) = \frac{0+1}{0+2} = \frac{1}{2}$$

Если n=8, то

$$P(n+1 \mid n) = \frac{8+1}{8+2} = \frac{9}{10}$$

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

БЛАГОДАРЮ ЗА ВНИМАНИЕ!