Лекция 5

Случайная величина (СВ). Функция распределения (ф.р.) СВ и её свойства. Непрерывные и дискретные СВ. Плотность распредел.

Пусть $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ – вероятностное пр-во, связанное с экспериментом $\mathcal{E}$. Пусть $X = X(\omega)$ — конечная вещественная функция, определенная для всех элементарных событий ω, составляющих множество $\Omega = \{\omega\}$. Говорят, что функция X измерима и называют её случайной величиной, если

$$\forall x \in R \quad \{\omega : X(\omega) < x\} \text{ есть элемент } \sigma\text{-алгебры } \mathcal{F}.$$

Функцией распределения (ф.р.) СВ X называется функция

$$F(x) = P\{\omega : X(\omega) < x\},$$

или, более кратко,

$$F(x) = P\{X < x\}.$$

Свойства ф.р. $F(x)$:

1) $F(x)$ – неубывающая функция;
2) $F(x)$ непрерывна слева;
3) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$;
4) $P\{x_1 \le X < x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$.

СВ X называется *дискретной*, если множество её возможных значений конечно или счётно: $x_1, x_2, \ldots$ В этом случае таблицу

x_1	x_2	$\ldots$
p_1	p_2	$\ldots$

,

где $p_i = P\{X = x_i\}$ называют *законом распределения* СВ X. При этом всегда

$$\sum_i p_i = 1.$$

Примеры дискретных распределений.

1. *Биномиальное распределение*. Определяется следующей таблицей:

0	1	$\ldots$	k		$\ldots$	n
$(1-p)^n$	$C_n^1 p(1-p)^{n-1}$	$\ldots$	$C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$		$\ldots$	p^n

,

где $n \in \mathbb{N}$ и $p \in (0,1)$ — параметры. Может рассматриваться как распределение СВ X, представляющей собой число успехов в серии из n независимых испытаний с вероятностью успеха p в каждом испытании.

2. *Геометрическое распределение*. Определяется таблицей

1	2	3	$\ldots$	k	$\ldots$
p	$(1-p)p$	$(1-p)^2 p$	$\ldots$	$(1-p)^{k-1} p$	$\ldots$

где $p \in (0,1)$ — параметр. Может рассматриваться как распределение СВ X, представляющей собой число испытаний до первого успеха в серии независимых испытаний с вероятностью успеха p в каждом испытании.

3. Распределение Пуассона. Определяется таблицей

0	1	2	$\ldots$	k	$\ldots$
$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}$	$\ldots$	$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	$\ldots$

где $\lambda > 0$ — параметр. Распределение Пуассона может рассматриваться как предельный случай биномиального при $n \to \infty$, $p \to 0$, $np \to \lambda$.

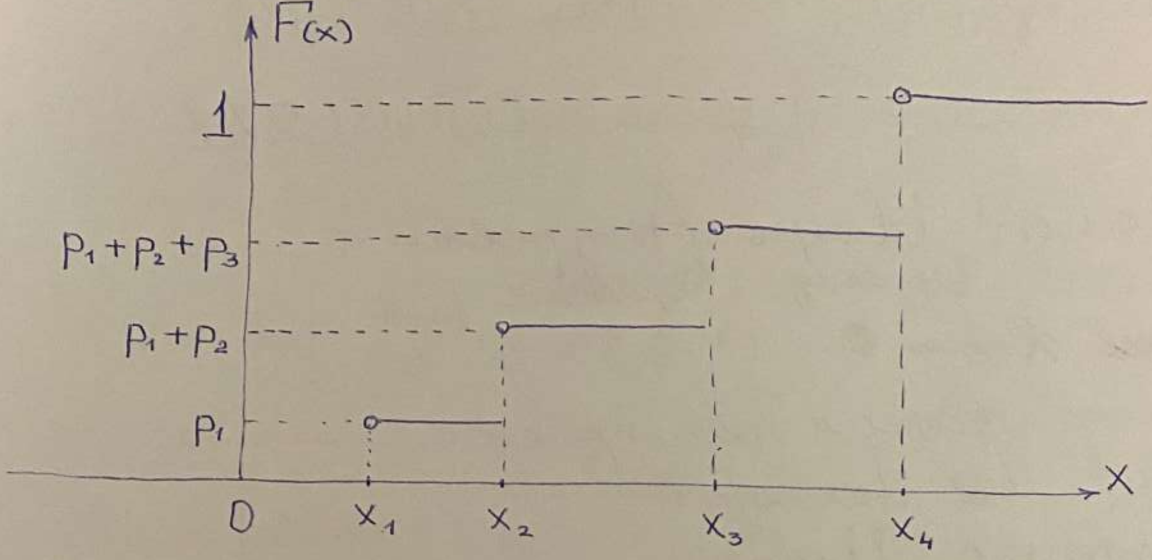
Функция распределения дискретной СВ имеет вид лесенки. Пусть, например, СВ X задана таблицей:

x_1	x_2	x_3	x_4
p_1	p_2	p_3	p_4

Тогда

$$F(x) = P\{X < x\} = \begin{cases} 0 & \text{при } x < x_1, \\ p_1 & \text{при } x_1 < x \leq x_2, \\ p_1 + p_2 & \text{при } x_2 < x \leq x_3, \\ p_1 + p_2 + p_3 & \text{при } x_3 < x \leq x_4, \\ p_1 + p_2 + p_3 + p_4 & \text{при } x > x_4. \end{cases}$$

График этой функции имеет вид:



Скачки ф.р. $F(x)$ происходят в точках, соответствующих возможным значениям СВ X, причём величины этих скачков равны вероятностям этих значений.

Непрерывные случайные величины

— так называются СВ, для которых существует неотрицательная функция $f(x)$, удовлетворяющая при любом x равенству

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt;$$

функция $f(x)$ называется плотностью распределения СВ X.

Свойства $f(x)$:

1) $f(x) \geq 0$;

2) при любых x_1 и x_2 $P\{x_1 \leq X < x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$;

3) если $f(x)$ непрерывна в т. x, то при малых Δx

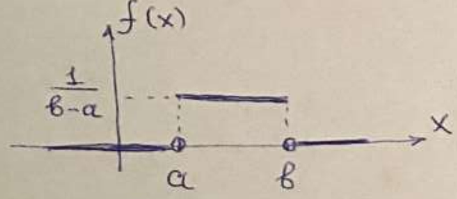
$$P\{x \leq X < x + \Delta x\} = f(x)\,\Delta x$$

с точностью до малых более высокого порядка.

Примеры непрерывных распределений

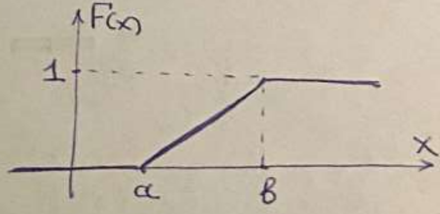
1. Равномерное распределение на отрезке $[a,b]$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & x\in[a,b]\\ 0, & x\notin[a,b]\end{cases}$$



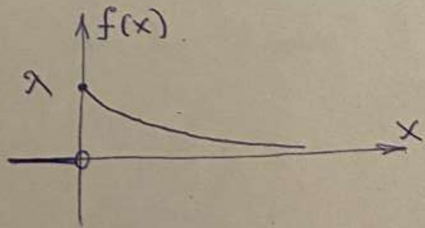
При этом

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\begin{cases}0, & x\le a;\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b;\\ 1, & x\ge b\end{cases}$$



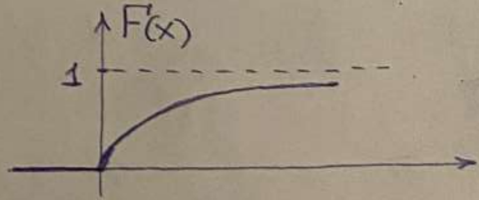
2. Показательное (экспоненциальное) распределение с параметром $\lambda>0$:

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$



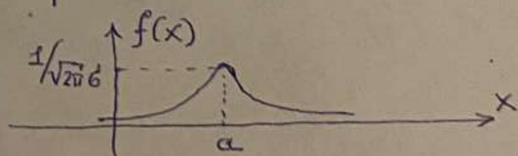
При этом

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 1-e^{-\lambda x}, & x>0\end{cases}$$



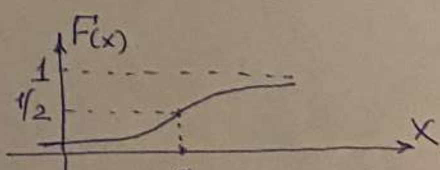
3. Нормальное (гауссовское) распределение с параметрами $\sigma>0$ и a:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$



При этом

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right),$$



где $\Phi(z)=\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}dt$ — функция Лапласа