Лекция 1

Элементы комбинаторики

1. Правило произведения

Пусть $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ - строка из k различных элементов

Строки $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ и $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_k)$ будем называть одинаковыми, если

$$x_i = \tilde{x}_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, k,$$

т.е. если строки

a) состоят из одного и того же набора элементов

b) порядок следования элементов один и тот же

В противном случае строки $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ и $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_k)$ будем называть различными.

Пусть элемент x_1 в строке $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ может быть выбран из некоторой совокупности различных элементов числом способов n_1; при выбранном элементе x_1 элемент x_2 может быть выбран числом способов n_2 (при этом число n_2 не зависит от того, какой именно элемент был выбран в качестве x_1); ...; при выбранных элементах $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}$ элемент x_k может быть выбран числом способов n_k (при этом число n_k не зависит от того, какие именно элементы были выбраны в качестве $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}$).

Тогда число различных строк вида $(x_1, x_2, \dots, x_k)$, которое при этом может быть составлено, равно

$$N = n_1 n_2 \dots n_k$$

Доказательство:

1. $k = 1$ – очевидно

2. $k = 2$: (x_1, x_2)

   Пусть $A_1, A_2, \dots, A_{n_1}$ – способы выбрать элемент x_1

   Пусть $B_{11}, B_{12}, \dots, B_{1n_2}$ – способы выбрать элемент x_2, если элемент x_1 выбран способом i $(i = 1, 2, \dots, n_1)$

   Тогда число всех возможных выборов строки (x_1, x_2) даётся таблицей:

$$\begin{array}{cccc}
(A_1, B_{11}) & (A_1, B_{12}) & \dots & (A_1, B_{1n_2}) \\
(A_2, B_{21}) & (A_2, B_{22}) & \dots & (A_2, B_{2n_2}) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
(A_{n_1}, B_{n_1 1}) & (A_{n_1}, B_{n_1 2}) & \dots & (A_{n_1}, B_{n_1 n_2})
\end{array}$$

$\Rightarrow$ общее число различных строк будет равно $n_1 n_2$.

3. $k = 3$: (x_1, x_2, x_3)

   рассуждения аналогичны, только таблица получится трёхмерная, а не двумерная

Можно рассуждать по-другому:

$$(x_1, x_2, x_3) \leftrightarrow (Z, x_3), \quad Z = x_1, x_2$$

Элемент Z может быть выбран числом способов $n_1 n_2$ по ранее доказанному, а элемент x_3 может быть выбран числом способов n_3 $\Rightarrow$ строка (Z, x_3) может быть выбрана числом $n_1 n_2 n_3$, так что строка (x_1, x_2, x_3) – в силу взаимно-однозначного соответствия тоже может быть выбрана числом способов $n_1 n_2 n_3$.

$k = 4$: $(x_1, x_2, x_3, x_4) \leftrightarrow (Z, x_4)$

и всё аналогично. И т.д. для $k = 5, 6, 7, \dots$

Утверждение доказано.

Пример 1. Сколько способов разместить r шаров в n ящиках, если все шары и ящики различны? В любом ящике может быть любое число шаров, в том числе нулевое.

Решение: перенумеруем все шары и все ящики

Конкретное размещение $\Leftrightarrow$ строка из r позиций

⊔	⊔	⊔	...	⊔
номер ящика,	номер ящика,	номер ящика,	...	номер ящика,
в котором	в котором	в котором	...	в котором
будет 1-й шар	будет 2-й шар	будет 3-й шар	...	будет r-й шар

Число различных размещений будет равно числу различных строк.

В первую позицию номер ящика можно вписать числом способов n; после того, как в первую позицию номер вписан, во вторую позицию номер ящика можно вписать тоже числом способов n, и т.д.

$\Rightarrow$ по правилу произведения общее число вариантов

$$\underbrace{n \cdot n \cdot n \cdots n}_{r \text{ раз}} \quad = \quad n^r$$

2. Число перестановок P_n

- число способов расположить n различных элементов в ряд.

- $n = 1$: $P_1 = 1$
- $n = 2$: $P_2 = 2$
- $n = 3$: $P_3 = 6$

В общем случае:

$$P_n = n!$$

Доказательство: пусть, для наглядности, элементы - это люди с разными именами.

расстановка в ряд $\Leftrightarrow$ последовательность-строка из n имён (n позиций)

число различных расстановок будет равно числу различных строк

$$\begin{array}{cccc}
1 & 2 & 3 & n \\
\uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
\text{можем} & \text{можем} & \text{можем} & \text{можем} \\
\text{вписать} & \text{вписать} & \text{вписать} & \text{вписать} \\
\text{любое} & \text{любое} & \text{любое} & \text{только} \\
\text{из } n \text{ имён} & \text{из } n-1 \text{ оставшихся} & \text{из } n-2 \text{ оставшихся} & \text{одно имя} \\
 & \text{имён} & \text{имён} & \text{- последнее} \\
\uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
n \text{ способов} & (n-1) \text{ способ} & (n-2) \text{ способа} & 1 \text{ способ}
\end{array}$$

Число различных строк:

$$N = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 1 = n!$$

3. Число сочетаний из n элементов по k элементов C_n^k

- число способов выбрать k элементов из n различных элементов без учёта порядка следования элементов в выборке.

Пример: $n = 3$, $k = 2$: $C_3^2 = 3$

Общий результат:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad \text{где } k \le n,\ 0! = 1$$

Доказательство: найдём число различных строк длины k, которые можно составить из n элементов.

Возьмём какие-либо k элементов и будем их переставлять, получим $k!$ различных строк; поменяем набор из k элементов, получим из них $k!$ новых строк. Но число различных наборов равно C_n^k, так что общее число различных строк будет равно $C_n^k \cdot k!$

С другой стороны, по правилу произведения из n элементов можно составить следующее число строк длины k

$$\begin{array}{cccc}
1 & 2 & 3 & k \\
\uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
n \text{ способов} & (n-1) \text{ способ} & (n-2) \text{ способа} & (n-k-1) \text{ способа}
\end{array}$$

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-(k-1))$$

Значит,

$$C_n^k \cdot k! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-(k-1))$$

$$C_n^k = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-(k-1))}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Пример 2. Каждая кость домино помечается двумя числами. Сколько различных костей домино можно образовать, если использовать натуральные числа $1, 2, \ldots, n$?

Решение: число различных костей без учета дублей $= C_n^2$

число дублей $= n$

искомое число различных костей $= C_n^2 + n$,

в частности при $n = 6$: $C_6^2 + 6 = 15 + 6 = 21$

Пример 3. Сколько существует способов разложить r неразличимых шаров по n различным ящикам?

Решение: перенумеруем ящики: $1, 2, \ldots, n$.

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & \text{Конкретная раскладка} & & & \\
 & & & \downarrow & & & \\
\text{ящик №1} & & & \text{ящик №2} & & & \text{ящик №}n \\
\underbrace{1\ldots1} & 0 & & \underbrace{1\ldots1} & 0 \;\ldots\; 0 & & \underbrace{1\ldots1} \\
\text{число единиц,} & & & \text{число единиц,} & & & \text{число единиц,} \\
\text{равное числу} & & & \text{равное числу} & & & \text{равное числу} \\
\text{шаров в ящике №1} & & & \text{шаров в ящике №2} & & & \text{шаров в ящике №}n
\end{array}
$$

Получим строку из $r + (n-1)$ позиций, состоящую из r единиц и $(n-1)$ нулей.

Каждая такая строка будет определять конкретную раскладку. Число возможных раскладок - это число различных строк из r единиц и $(n-1)$ нулей. Это число равно

$$C^r_{r+n-1} \quad \text{или} \quad C^{n-1}_{r+n-1}.$$

Конкретный пример:

$r = 2$ - два шара, $n = 3$ - три ящика

$$
\begin{array}{ccc|c}
[oo] & [\ ] & [\ ] & 1100 \\
N_1 & N_2 & N_3 & \\
[o\ ] & [o\ ] & [\ ] & 1010 \\
N_1 & N_2 & N_3 & \\
[o\ ] & [\ ] & [o\ ] & 1001 \\
N_1 & N_2 & N_3 & \\
[\ ] & [oo] & [\ ] & 0110 \\
N_1 & N_2 & N_3 & \\
[\ ] & [o\ ] & [o\ ] & 0101 \\
N_1 & N_2 & N_3 & \\
[\ ] & [\ ] & [oo] & 0011 \\
N_1 & N_2 & N_3 &
\end{array}
$$

Всего 6 вариантов:

$$C^r_{r+n-1} = C^2_4 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$$

4. Число размещений из n по k элементов A_n^k

- число способов выбрать k элементов из n различных элементов с учётом порядка следования элементов в выборке.

Пример:

$$n = 3, \quad k = 2$$

$$\square, \triangle, \circ$$

Возможные выборы:

$$\left.\begin{array}{c} \square\triangle, \triangle\square \\ \square\circ, \circ\square \\ \triangle\circ, \circ\triangle \end{array}\right\} \text{всего 6 вариантов: } A_3^2 = 6$$

Общий результат:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Доказательство:

Следует из правила произведения:

$$\Rightarrow N = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

или, ещё проще,

$$A_n^k = C_n^k \cdot P_k \Rightarrow A_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot k! = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Некоторые свойства чисел C_n^k

1. $C_n^k = C_n^{n-k}$ легко проверяются "в лоб"
2. $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$
3. $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$

Последняя формула доказывается по методу математической индукции:

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n+1-k}$$

Пусть $m = k + 1$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{m=1}^{n+1} C_n^{m-1} a^m b^{n+1-m} + \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^m b^{n+1-m} \\
&= \sum_{m=1}^{n} C_n^{m-1} a^m b^{n+1-m} + a^{n+1} + \sum_{m=1}^{n} C_n^m a^m b^{n+1-m} + b^{n+1} \\
&= \sum_{m=1}^{n} (C_n^{m-1} + C_n^m) a^m b^{n+1-m} + a^{n+1} + b^{n+1} \\
&= \sum_{m=1}^{n} C_{n+1}^m a^m b^{n+1-m} + a^{n+1} + b^{n+1} \\
&= \sum_{m=0}^{n+1} C_{n+1}^m a^m b^{n+1-m}, \quad \text{что и т.д.}
\end{aligned}
$$

4. Следствие из 3:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$$

Этому равенству можно дать следующее истолкование:
слева стоит число всех возможных подмножеств, которые можно составить из n различных элементов:

$C_n^0 = 1$ – пустое подмножество

$C_n^1 = n$ – число всех подмножеств, состоящих из 1-го элемента

$C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$ – число всех подмножеств, состоящих из 2-х элементов

...

$C_n^{n-1} = n$ – число всех подмножеств, состоящих из $(n-1)$-го элемента

$C_n^n = 1$ – подмножество, совпадающее с исходным множеством

Это же число всех возможных подмножеств можно подсчитать по правилу произведения:

строка из n позиций:

⊔	⊔	⊔	...	⊔
N1	N2	N3	...	Nn

Перенумеруем все элементы.

Установим взаимно-однозначное соответствие между подмножеством и строкой:

если элемент $N\,l$ входит в подмножество, то в позицию $N\,l$ пишем «+», а если не входит – пишем «$-$», $l = 1, 2, \ldots, n$.

Например, подмножество, состоящее из элементов $N2$ и $N5$, будет соответствовать строке

$$- + - - + - - \cdots -$$

Число различных подмножеств будет соответствовать числу различных строк, которое может быть найдено по правилу произведения:

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2}_{\substack{\uparrow \\ n \text{ сомножителей}}} \qquad = \quad 2^n$$