

Задачи на нахождение плотности преобразованных случайных величин

Задача 1 (Простая) Случайная величина X имеет плотность распределения $f_X(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$ (распределение Лапласа). Найти плотность распределения случайной величины $Y = X^3$.

Решение 1 Функция $y = x^3$ строго возрастает на всей числовой прямой, так как её производная $3x^2 \geq 0$ и равна нулю только в одной точке.

Найдем обратную функцию:

$$y = x^3 \quad \Rightarrow \quad x = y^{1/3}$$

Производная обратной функции:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{3}y^{-2/3}$$

Используем формулу для плотности преобразованной случайной величины:

$$f_Y(y) = f_X(x(y)) \cdot \left| \frac{dx}{dy} \right| = f_X(y^{1/3}) \cdot \frac{1}{3}|y|^{-2/3}$$

Подставляем выражение для плотности распределения Лапласа:

$$f_Y(y) = \frac{1}{2}e^{-|y^{1/3}|} \cdot \frac{1}{3}|y|^{-2/3} = \frac{1}{6}|y|^{-2/3}e^{-|y|^{1/3}}$$

Область значений y совпадает с областью значений функции x^3 , то есть $y \in (-\infty, +\infty)$.

Окончательно:

$$f_Y(y) = \frac{1}{6}|y|^{-2/3}e^{-|y|^{1/3}}, \quad -\infty < y < \infty$$

Ответ: $f_Y(y) = \frac{1}{6}|y|^{-2/3}e^{-|y|^{1/3}}$ при $-\infty < y < \infty$.

Задача 2 (Простая) Случайная величина X имеет показательное распределение с параметром $\lambda > 0$, т.е. $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ при $x \geq 0$. Найти плотность распределения случайной величины $Y = 2X - 1$.

Решение 2 Функция $y = 2x - 1$ строго возрастает. Найдем обратную функцию:

$$y = 2x - 1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{y + 1}{2}$$

Производная обратной функции:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2}$$

Используем формулу для плотности преобразованной случайной величины:

$$f_Y(y) = f_X(x(y)) \cdot \left| \frac{dx}{dy} \right| = f_X\left(\frac{y+1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}$$

Подставляем выражение для плотности показательного распределения:

$$f_Y(y) = \frac{1}{2} \cdot \lambda e^{-\lambda \cdot \frac{y+1}{2}} = \frac{\lambda}{2} e^{-\frac{\lambda(y+1)}{2}}$$

Определим область значений y . Так как $x \geq 0$, то:

$$\frac{y+1}{2} \geq 0 \Rightarrow y \geq -1$$

Окончательно:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{\lambda}{2} e^{-\frac{\lambda(y+1)}{2}}, & \text{если } y \geq -1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Ответ: $f_Y(y) = \frac{\lambda}{2} e^{-\frac{\lambda(y+1)}{2}}$ при $y \geq -1$, и $f_Y(y) = 0$ иначе.

Задача 3 (Средней сложности) Случайная величина X имеет стандартное нормальное распределение $N(0, 1)$ с плотностью $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$. Найти плотность распределения случайной величины $Y = X^2$.

Решение 3 Функция $y = x^2$ не является монотонной на всей числовой прямой, поэтому разобьем на два интервала.

Для $y > 0$ функция $y = x^2$ имеет два обратных преобразования:

$$x_1 = -\sqrt{y}, \quad x_2 = \sqrt{y}$$

Функция распределения Y :

$$F_Y(y) = P(Y < y) = P(X^2 < y)$$

При $y \leq 0$: $F_Y(y) = 0$, следовательно $f_Y(y) = 0$.

При $y > 0$:

$$F_Y(y) = P(-\sqrt{y} < X < \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$$

Дифференцируем для нахождения плотности:

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = f_X(\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} - f_X(-\sqrt{y}) \cdot \left(-\frac{1}{2\sqrt{y}}\right)$$

Учитывая четность нормального распределения $f_X(-x) = f_X(x)$, получаем:

$$f_Y(y) = f_X(\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} + f_X(\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{f_X(\sqrt{y})}{\sqrt{y}}$$

Подставляем выражение для плотности нормального распределения:

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-y/2}, \quad y > 0$$

Это плотность распределения хи-квадрат с одной степенью свободы.

Ответ: $f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-y/2}$ при $y > 0$, и $f_Y(y) = 0$ при $y \leq 0$.

Задача 4 (Сложная) Случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$ с плотностью $f_X(x) = 1$ при $0 \leq x \leq 1$. Найти плотность распределения случайной величины $Y = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - X)$, где $\lambda > 0$.

Решение 4 Функция $y = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - x)$ строго возрастает на $[0, 1)$.

Найдем обратную функцию:

$$y = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - x) \Rightarrow -\lambda y = \ln(1 - x) \Rightarrow 1 - x = e^{-\lambda y} \Rightarrow x = 1 - e^{-\lambda y}$$

Производная обратной функции:

$$\frac{dx}{dy} = \lambda e^{-\lambda y}$$

Используем формулу для плотности преобразованной случайной величины:

$$f_Y(y) = f_X(x(y)) \cdot \left| \frac{dx}{dy} \right|$$

Подставляем:

$$f_Y(y) = 1 \cdot \lambda e^{-\lambda y} = \lambda e^{-\lambda y}$$

Определим область значений y . При $x = 0$: $y = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - 0) = 0$. При $x \rightarrow 1^-$: $y \rightarrow -\frac{1}{\lambda} \ln(0^+) \rightarrow +\infty$.

Таким образом, $y \geq 0$.

Получаем:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y}, & y \geq 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases}$$

Это плотность экспоненциального распределения с параметром λ .

Ответ: $f_Y(y) = \lambda e^{-\lambda y}$ при $y \geq 0$, и $f_Y(y) = 0$ при $y < 0$.

Задача 5 (Сложная) Случайная величина X имеет распределение Коши с плотностью $f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$. Найти плотность распределения случайной величины $Y = \arctan X$.

Решение 5 Функция $y = \arctan x$ строго возрастает на всей числовой прямой. Ее обратная функция:

$$x = \tan y$$

Производная обратной функции:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \tan^2 y$$

Используем формулу для плотности преобразованной случайной величины:

$$f_Y(y) = f_X(x(y)) \cdot \left| \frac{dx}{dy} \right| = f_X(\tan y) \cdot (1 + \tan^2 y)$$

Подставляем выражение для плотности распределения Коши:

$$f_Y(y) = \frac{1}{\pi(1 + \tan^2 y)} \cdot (1 + \tan^2 y) = \frac{1}{\pi}$$

Определим область значений y . Так как $\arctan x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, то $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Таким образом:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & \text{если } -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Это плотность равномерного распределения на интервале $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Ответ: $f_Y(y) = \frac{1}{\pi}$ при $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, и $f_Y(y) = 0$ иначе.

Условия задач и ответы

- Условие:** Случайная величина X имеет распределение Лапласа с плотностью $f_X(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$. Найти плотность $Y = X^3$.

Ответ: $f_Y(y) = \frac{1}{6}|y|^{-2/3}e^{-|y|^{1/3}}$ при $-\infty < y < \infty$
- Условие:** Случайная величина X имеет показательное распределение с параметром λ . Найти плотность $Y = 2X - 1$.

Ответ: $f_Y(y) = \frac{\lambda}{2}e^{-\frac{\lambda(y+1)}{2}}$ при $y \geq -1$
- Условие:** Случайная величина $X \sim N(0, 1)$. Найти плотность $Y = X^2$.

Ответ: $f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-y/2}$ при $y > 0$
- Условие:** Случайная величина $X \sim U[0, 1]$. Найти плотность $Y = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - X)$, $\lambda > 0$.

Ответ: $f_Y(y) = \lambda e^{-\lambda y}$ при $y \geq 0$
- Условие:** Случайная величина X имеет распределение Коши. Найти плотность $Y = \arctan X$.

Ответ: $f_Y(y) = \frac{1}{\pi}$ при $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$