Лекция 7

Определение и свойства математического ожидания случайных величин

Пусть X - дискретная случайная величина:

X	x_1	x_2	$\dots$	x_k
P	p_1	p_2	$\dots$	p_k

Пусть проведено n экспериментов, в результате которых
значение x_1 «выпало» n_1 раз,
значение x_2 «выпало» n_2 раз,
$\dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots$
значение x_k «выпало» n_k раз,
так что $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$. Тогда среднее арифметическое случайной величины X в данной серии экспериментов есть

$$\bar{x}_n = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_k x_k}{n}$$

Найдём предел при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} \bar{x}_n = x_1 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n_1}{n}\right) + x_2 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n_2}{n}\right) + \dots + x_k \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n_k}{n}\right)$$

Но, в соответствии со статистическим восприятием вероятности,

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n_1}{n}\right) = p_1, \quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n_2}{n}\right) = p_2, \quad \dots, \quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n_k}{n}\right) = p_k.$$

Поэтому,

$$\lim_{n\to\infty} \bar{x}_n = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_k p_k$$

- среднее арифметическое случайной величины X в «длинных» ($n \to \infty$) сериях экспериментов

Определение Математическим ожиданием дискретной случайной величины X

X	x_1	x_2	$\dots$	x_k
P	p_1	p_2	$\dots$	p_k

называется число
$$\mathsf{M}\{X\} = \sum_i x_i p_i,$$
если ряд справа сходится абсолютно. (Если X - дискретная случайная величина с конечным спектром, то ряд превращается в конечную сумму.) В противном случае говорят, что X не имеет математического ожидания.

Пример 1. Пусть случайная величина X распределена по биномиальному закону:

X	0	1	$\dots$	k	$\dots$	n
P	q^n	npq^{n-1}	$\dots$	$C_n^k p^k q^{n-k}$	$\dots$	p^n

Тогда
$$\begin{aligned}
\mathsf{M}\{X\} &= \sum_{k=0}^{n} kC_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} kC_n^k p^k q^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n \cdot (n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} pp^{k-1} q^{n-1-(k-1)} \\
&= np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} p^{k-1} q^{n-1-(k-1)}
\end{aligned}$$
Проведем замену индекса суммирования $m = k - 1$
$$\mathsf{M}\{X\} = np \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{m!(n-1-m)!} p^m q^{n-1-m} = np \cdot (p+q)^{n-1} = np,$$
поскольку $p + q = 1$.

Пример 2. Пусть случайная величина X распределена по геометрическому закону:

X	1	2	$\dots$	k
P	p	qp	$\dots$	$q^{k-1}p$

$0 < p < 1$, $q = 1 - p$

Тогда
$$\begin{aligned}
\mathsf{M}\{X\} &= \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} p = p \sum_{k=1}^{\infty} (q^k)' = p \left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k \right)' \\
&= p(q + q^2 + \dots)' = p \left(\frac{q}{1-q} \right)' = p \left(\frac{1 \cdot (1-q) - q \cdot (-1)}{(1-q)^2} \right) = \frac{1}{p}.
\end{aligned}$$

Здесь $(...)'$ - производная по q.

Пример 3. Пусть случайная величина X распределена по закону Пуассона:

X	0	1	2	$\dots$	k
P	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2}e^{-\lambda}$	$\dots$	$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

Тогда

$$\begin{aligned}\mathsf{M}\{X\} &= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!}e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= \lambda e^{-\lambda}\left(1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \dots\right) = \lambda e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda.\end{aligned}$$

Пусть теперь X - непрерывная случайная величина с плотностью распределения $f(x)$. Будем сначала считать, что X может принимать значение только из промежутка от a до b. Введём разбиение

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

Обозначим

$$p_k = \mathsf{P}\{x_{k-1} < X < x_k\} = \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

По теореме о среднем $\exists \tilde{x}_k \in (x_{k-1}, x_k)$ такая, что $p_k = f(\tilde{x}_k)\Delta x_k$, где $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Рассмотрим дискретную случайную величину $\tilde{X}$, вводимую таблицей

$\tilde{X}$	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\dots$	$\tilde{x}_n$
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Случайную величину $\tilde{X}$ можно рассматривать как некоторую дискретную аппроксимацию непрерывной случайной величиной X, причём эта аппроксимация тем точнее и полнее, чем больше n и меньше Δx_k. Имеем

$$\mathsf{M}\{\tilde{X}\} = \sum_{k=1}^{n} \tilde{x}_k p_k = \sum_{k=1}^{n} \tilde{x}_k f(\tilde{x}_k)\Delta x_k$$

При $n \to \infty$, $\max\limits_k \Delta x_k \to 0$ сумма справа стремится к интегралу

$$\int_a^b x f(x)dx$$

Определение Математическое ожидание непрерывной случайной величиной X с плотностью распределения $f(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$, есть число

$$\mathsf{M}\{X\} = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx,$$

если интеграл сходится абсолютно. В противном случае говорим, что случайная величина X не имеет математического ожидания.

Пример 4. Пусть случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[a, b]$, т.е.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [a, b] \\ \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \end{cases}$$

Тогда

$$\mathsf{M}\{X\} = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \frac{a+b}{2}$$

Пример 5. Пусть случайная величина X имеет показательное распределение с параметром λ:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \Rightarrow \mathsf{M}\{X\} = \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda}$$

Пример 6. Пусть случайная величина X имеет нормальное распределение:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in (-\infty; +\infty)$$

Тогда

$$\mathsf{M}\{X\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx = a$$

.

Пример 7. Пусть случайная величина X задаётся плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2\lambda}{\pi} \cdot \frac{1}{\lambda^2 + x^2}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

где $\lambda > 0$ - параметр (распределение Коши).

Тогда

$$\mathsf{M}\{X\} = \int_0^\infty \frac{2\lambda x}{\pi(\lambda^2 + x^2)}\,dx$$

Но последний интеграл расходится, следовательно случайная величина, распределённая по Коши, не имеет математического ожидания.

Свойства математического ожидания

1. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:
$$\mathsf{M}\{c \cdot X\} = c \cdot \mathsf{M}\{X\}$$

2. Математическое ожидание суммы равно сумме математических ожиданий:
$$\mathsf{M}\{X_1 + X_2 + \dots + X_n\} = \mathsf{M}\{X_1\} + \mathsf{M}\{X_2\} + \dots + \mathsf{M}\{X_n\}$$

3. Математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий сомножителей:
$$\mathsf{M}\{X_1 X_2 \dots X_n\} = \mathsf{M}\{X_1\} \cdot \mathsf{M}\{X_2\} \cdot \dots \cdot \mathsf{M}\{X_n\}$$

4. Пусть X - дискретная случайная величина

$$\begin{array}{c|ccc} X & x_1 & x_2 & \dots \\ \hline \mathsf{P} & p_1 & p_2 & \dots \end{array}$$

Пусть $\varphi(x)$ - заданная функция, причём $x_1, x_2, \dots$ входят в область определения $\varphi(x)$.

Тогда определим случайную величину Y: $Y = \varphi(X)$.

$$\mathsf{M}\{Y\} = \sum_i p_i \cdot \varphi(x_i).$$

5. Если в предыдущем пункте X - непрерывная случайная величина с плотностью $f(x)$, то

$$\mathsf{M}\{Y\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f(x) dx.$$

Докажем свойство 3.
Пусть X и Y - дискретные случайные величины

$$\begin{array}{c|ccc} X & x_1 & x_2 & \dots \\ \hline \mathsf{P} & p_1 & p_2 & \dots \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} Y & y_1 & y_2 & \dots \\ \hline \mathsf{P} & q_1 & q_2 & \dots \end{array}$$

Пусть $Z = XY$. Тогда Z принимает значение $x_i y_j$ с вероятностями $\mathsf{P}\{X = x_i, Y = y_j\}$ и

$$\mathsf{M}\{Z\} = \sum_{i,j} x_i y_j \mathsf{P}\{X = x_i, Y = y_j\} =$$

$$\{\text{ Независимость случайных величин } X \text{ и } Y \text{ означает независимость событий } X = x_i \text{ и } Y = y_j\}$$

$$= \sum_{i,j} x_i y_j \mathsf{P}\{X = x_i\}\mathsf{P}\{Y = y_j\} =$$

$$= \sum_{i} x_i \mathsf{P}\{X = x_i\} \cdot \sum_{j} y_j \mathsf{P}\{Y = y_j\} = \mathsf{M}\{X\} \cdot \mathsf{M}\{Y\}$$

Пусть теперь X и Y - непрерывные случайные величины с плотностью совместного распределения $f(x, y)$. Пусть $Z = XY$. Тогда

$$\mathsf{M}\{Z\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x, y)dxdy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xyf_1(x)f_2(y)dxdy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} xf_1(x)dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} yf_2(y)dy = \mathsf{M}\{X\} \cdot \mathsf{M}\{Y\},$$

что и требовалось доказать
(если X и Y независимы, то $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$, где $f_1(x)$ и $f_2(y)$ - одномерные плотности случайных величин X и Y).