Задача 1

Дано совместное распределение дискретных случайных величин X и Y:

$X \setminus Y$	0	1
2	0,1	0,2
5	0,2	0,1
8	0,1	0,3

Требуется:

1. Составить совместную функцию распределения $F(x, y)$
2. Найти маргинальные распределения X и Y
3. Вычислить математические ожидания и дисперсии X, Y и $X + Y$

Решение

1. Совместная функция распределения

Совместная функция распределения определяется как:

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

Вычислим значения для всех комбинаций:

- При $x < 2$ или $y < 0$: $F(x, y) = 0$
- При $2 \leq x < 5$ и $0 \leq y < 1$: $F(x, y) = 0,1$
- При $2 \leq x < 5$ и $y \geq 1$: $F(x, y) = 0,1 + 0,2 = 0,3$
- При $5 \leq x < 8$ и $0 \leq y < 1$: $F(x, y) = 0,1 + 0,2 = 0,3$
- При $5 \leq x < 8$ и $y \geq 1$: $F(x, y) = 0,1 + 0,2 + 0,2 + 0,1 = 0,6$
- При $x \geq 8$ и $0 \leq y < 1$: $F(x, y) = 0,1 + 0,2 + 0,1 = 0,4$
- При $x \geq 8$ и $y \geq 1$: $F(x, y) = 0,1 + 0,2 + 0,2 + 0,1 + 0,1 + 0,3 = 1,0$

2. Маргинальные распределения

Найдём распределения X и Y:

X	2	5	8
$P(X)$	0,3	0,3	0,4

Y	0	1
$P(Y)$	0,4	0,6

Проверка: $0,3 + 0,3 + 0,4 = 1$; $0,4 + 0,6 = 1$

3. Математические ожидания и дисперсии

Для X:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= 2 \cdot 0,3 + 5 \cdot 0,3 + 8 \cdot 0,4 = 0,6 + 1,5 + 3,2 = 5,3 \\
\mathbb{E}[X^2] &= 4 \cdot 0,3 + 25 \cdot 0,3 + 64 \cdot 0,4 = 1,2 + 7,5 + 25,6 = 34,3 \\
\mathbb{D}[X] &= \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = 34,3 - (5,3)^2 = 34,3 - 28,09 = 6,21
\end{aligned}$$

Для Y:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y] &= 0 \cdot 0,4 + 1 \cdot 0,6 = 0,6 \\
\mathbb{E}[Y^2] &= 0^2 \cdot 0,4 + 1^2 \cdot 0,6 = 0,6 \\
\mathbb{D}[Y] &= \mathbb{E}[Y^2] - (\mathbb{E}[Y])^2 = 0,6 - 0,36 = 0,24
\end{aligned}$$

Для $X + Y$:

Сначала найдём распределение $X + Y$:

$X+Y$	2	3	5	6	8	9
P	0,1	0,2	0,2	0,1	0,1	0,3

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X+Y] &= 2 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,2 + 5 \cdot 0,2 + 6 \cdot 0,1 + 8 \cdot 0,1 + 9 \cdot 0,3 \\
&= 0,2 + 0,6 + 1,0 + 0,6 + 0,8 + 2,7 = 5,9 \\
\mathbb{E}[(X+Y)^2] &= 4 \cdot 0,1 + 9 \cdot 0,2 + 25 \cdot 0,2 + 36 \cdot 0,1 + 64 \cdot 0,1 + 81 \cdot 0,3 \\
&= 0,4 + 1,8 + 5,0 + 3,6 + 6,4 + 24,3 = 41,5 \\
\mathbb{D}[X+Y] &= \mathbb{E}[(X+Y)^2] - (\mathbb{E}[X+Y])^2 = 41,5 - (5,9)^2 = \\
&= 41,5 - 34,81 = 6,69
\end{aligned}$$

Проверка через ковариацию:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[XY] &= (2 \cdot 0) \cdot 0,1 + (2 \cdot 1) \cdot 0,2 + \\
&\quad + (5 \cdot 0) \cdot 0,2 + (5 \cdot 1) \cdot 0,1 + (8 \cdot 0) \cdot 0,1 + (8 \cdot 1) \cdot 0,3 \\
&= 0 + 0,4 + 0 + 0,5 + 0 + 2,4 = 3,3 \\
\operatorname{cov}(X, Y) &= \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = 3,3 - 5,3 \cdot 0,6 = 3,3 - 3,18 = 0,12 \\
\mathbb{D}[X + Y] &= \mathbb{D}[X] + \mathbb{D}[Y] + 2\operatorname{cov}(X, Y) = 6,21 + 0,24 + 2 \cdot 0,12 = 6,69
\end{aligned}$$

Результаты совпадают.

Ответ

- Совместная функция распределения $F(x, y)$ определена выше
- Маргинальные распределения:
$$P(X = 2) = 0,3, \;\; P(X = 5) = 0,3, \;\; P(X = 8) = 0,4$$
$$P(Y = 0) = 0,4, \;\; P(Y = 1) = 0,6$$
- Математические ожидания и дисперсии:
$$\mathbb{E}[X] = 5,3, \;\; \mathbb{D}[X] = 6,21$$
$$\mathbb{E}[Y] = 0,6, \;\; \mathbb{D}[Y] = 0,24$$
$$\mathbb{E}[X + Y] = 5,9, \;\; \mathbb{D}[X + Y] = 6,69$$

Задача 2

Пусть X равномерно распределена на отрезке $[-1, 3]$, а Y имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 2$. Случайные величины X и Y независимы.

Требуется:

1. Составить совместную функцию распределения $F(x, y)$
2. Найти маргинальные функции распределения $F_X(x)$ и $F_Y(y)$
3. Вычислить математические ожидания и дисперсии X, Y и $X + Y$

Решение

1. Совместная функция распределения

Так как X и Y независимы, то совместная функция распределения равна произведению маргинальных функций распределения:

$$F(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y).$$

Найдём $F_X(x)$ и $F_Y(y)$.

Распределение X: $X \sim U(-1, 3)$

Функция распределения:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \frac{x+1}{4}, & -1 \le x < 3 \\ 1, & x \ge 3 \end{cases}$$

Распределение Y: $Y \sim \text{Exp}(2)$

Функция распределения:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ 1 - e^{-2y}, & y \ge 0 \end{cases}$$

Тогда совместная функция распределения:

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, & x < -1 \text{ или } y < 0 \\ \frac{x+1}{4}(1 - e^{-2y}), & -1 \le x < 3,\ y \ge 0 \\ 1 - e^{-2y}, & x \ge 3,\ y \ge 0 \end{cases}$$

2. Математические ожидания и дисперсии

Для X:

$$\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2} = \frac{-1+3}{2} = 1$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_{-1}^{3} x^2 \cdot \frac{1}{4} dx = \frac{1}{4} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{3} = \frac{1}{4} \left(\frac{27}{3} - \frac{-1}{3} \right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{28}{3} = \frac{7}{3}$$

$$\mathbb{D}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \frac{7}{3} - 1^2 = \frac{4}{3}$$

Для Y:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y] &= \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2} \\
\mathbb{E}[Y^2] &= \int_0^\infty y^2 \cdot 2e^{-2y} dy = 2 \cdot \frac{2!}{(2)^3} = 2 \cdot \frac{2}{8} = \frac{1}{2} \\
\mathbb{D}[Y] &= \mathbb{E}[Y^2] - (\mathbb{E}[Y])^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Для $X + Y$: Так как X и Y независимы, то

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X+Y] &= \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\
\mathbb{D}[X+Y] &= \mathbb{D}[X] + \mathbb{D}[Y] = \frac{4}{3} + \frac{1}{4} = \frac{16}{12} + \frac{3}{12} = \frac{19}{12}
\end{aligned}$$

Ответ

- Совместная функция распределения:

$$F(x,y) = \begin{cases} 0, & x < -1 \text{ или } y < 0 \\ \frac{x+1}{4}(1 - e^{-2y}), & -1 \le x < 3,\ y \ge 0 \\ 1 - e^{-2y}, & x \ge 3,\ y \ge 0 \end{cases}$$

- Маргинальные функции распределения:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \frac{x+1}{4}, & -1 \le x < 3 \\ 1, & x \ge 3 \end{cases}, \quad F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ 1 - e^{-2y}, & y \ge 0 \end{cases}$$

- Математические ожидания и дисперсии:

$$\mathbb{E}[X] = 1, \quad \mathbb{D}[X] = \frac{4}{3};$$

$$\mathbb{E}[Y] = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{D}[Y] = \frac{1}{4};$$

$$\mathbb{E}[X+Y] = \frac{3}{2}, \quad \mathbb{D}[X+Y] = \frac{19}{12}.$$

Задача 3

Дана совместная плотность распределения случайных величин X и Y:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0.1 \cdot (1 + (x - 4.5)y), & x \in [2,7],\ y \in [-1,1] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Требуется:

1. Найти маргинальные функции распределения $F_X(x)$ и $F_Y(y)$
2. Вычислить математические ожидания и дисперсии X, Y и $X + Y$

Решение

1. Маргинальные функции распределения

Найдём сначала маргинальные плотности распределения.

Для X:

$$f_X(x) = \int_{-1}^{1} f(x,y)dy = \int_{-1}^{1} 0.1 \cdot (1 + (x - 4.5)y)dy$$

$$= 0.1 \cdot \left[y + (x - 4.5)\frac{y^2}{2} \right]_{-1}^{1} = 0.1 \cdot (2 + 0) = 0.2$$

Таким образом, X имеет равномерное распределение на $[2,7]$:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.2, & x \in [2,7] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Функция распределения X:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 2 \\ 0.2 \cdot (x - 2), & 2 \le x < 7 \\ 1, & x \ge 7 \end{cases}$$

Для Y:

$$f_Y(y) = \int_2^7 f(x,y)dx = \int_2^7 0.1 \cdot (1 + (x - 4.5)y)dx$$

$$= 0.1 \cdot \left[x + y\left(\frac{x^2}{2} - 4.5x\right)\right]_2^7 = 0.1 \cdot (5 + 0) = 0.5$$

Таким образом, Y имеет равномерное распределение на $[-1, 1]$:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0.5, & y \in [-1, 1] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Функция распределения Y:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < -1 \\ 0.5 \cdot (y + 1), & -1 \leq y < 1 \\ 1, & y \geq 1 \end{cases}$$

2. Математические ожидания и дисперсии

Для X:

$$\mathbb{E}[X] = \frac{2+7}{2} = 4.5$$
$$\mathbb{E}[X^2] = \int_2^7 x^2 \cdot 0.2dx = 0.2 \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]_2^7 = 0.2 \cdot \frac{343-8}{3} = 0.2 \cdot \frac{335}{3} = \frac{67}{3}$$
$$\mathbb{D}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \frac{67}{3} - (4.5)^2 = \frac{67}{3} - 20.25 = \frac{67}{3} - \frac{81}{4} = \frac{268-243}{12} = \frac{25}{12}$$

Для Y:

$$\mathbb{E}[Y] = \frac{-1+1}{2} = 0$$
$$\mathbb{E}[Y^2] = \int_{-1}^1 y^2 \cdot 0.5dy = 0.5 \cdot \left[\frac{y^3}{3}\right]_{-1}^1 = 0.5 \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$
$$\mathbb{D}[Y] = \mathbb{E}[Y^2] - (\mathbb{E}[Y])^2 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

Для $X+Y$:

$$\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] = 4.5 + 0 = 4.5$$

Для нахождения дисперсии $X+Y$ найдём ковариацию:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[XY] = &\iint\limits_{2\le x\le 7,\, -1\le y\le 1} xy \cdot 0.1 \cdot (1 + (x-4.5)y)dxdy \\
&= 0.1 \cdot \int_2^7 x \left(\int_{-1}^1 (y + (x-4.5)y^2)dy \right) dx \\
&= 0.1 \cdot \int_2^7 x \left(0 + (x-4.5) \cdot \frac{2}{3} \right) dx = \frac{0.2}{3} \cdot \int_2^7 x(x-4.5)dx \\
&= \frac{0.2}{3} \cdot \int_2^7 (x^2 - 4.5x)dx = \frac{0.2}{3} \cdot \left[\frac{x^3}{3} - \frac{4.5x^2}{2} \right]_2^7 \\
&= \frac{0.2}{3} \cdot \left(\frac{343}{3} - \frac{4.5 \cdot 49}{2} - \frac{8}{3} + \frac{4.5 \cdot 4}{2} \right) \\
&= \frac{0.2}{3} \cdot \frac{125}{12} = \frac{25}{36}
\end{aligned}$$

Ковариация:

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = \frac{25}{36} - 4.5 \cdot 0 = \frac{25}{36}$$

Дисперсия суммы:

$$\mathbb{D}[X+Y] = \mathbb{D}[X] + \mathbb{D}[Y] + 2\operatorname{cov}(X,Y) = \frac{25}{12} + \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{25}{36} = \frac{75}{36} + \frac{12}{36} + \frac{50}{36} = \frac{137}{36}$$

Ответ

- Маргинальные функции распределения:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 2 \\ 0.2 \cdot (x-2), & 2 \le x < 7 \\ 1, & x \ge 7 \end{cases}, \quad F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < -1 \\ 0.5 \cdot (y+1), & -1 \le y < 1 \\ 1, & y \ge 1 \end{cases}$$

- Математические ожидания и дисперсии:

$$\mathbb{E}[X] = 4.5, \quad \mathbb{D}[X] = \frac{25}{12};$$

$$\mathbb{E}[Y] = 0, \quad \mathbb{D}[Y] = \frac{1}{3};$$

$$\mathbb{E}[X + Y] = 4.5, \quad \mathbb{D}[X + Y] = \frac{137}{36}.$$