Характеристические функции вероятностных распределений

Общее определение и основные свойства

Характеристическая функция (х.ф.) $\varphi_X(t)$ случайной величины X — это математическое ожидание от e^{itX}, где i — мнимая единица.

$$\varphi_X(t) = M\left[e^{itX}\right]$$

Это преобразование Фурье распределения вероятностей, которое полностью его определяет.

Ключевые свойства:

1. **Всегда существует:** $|\varphi_X(t)| \leq 1$ и $\varphi_X(0) = 1$ для любого распределения.
2. **Непрерывность:** Х.ф. всегда является непрерывной функцией от t.
3. **Единственность:** Распределение случайной величины однозначно восстанавливается по её характеристической функции.
4. **Сложение независимых величин:** Если X и Y независимы, то $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t) \cdot \varphi_Y(t)$.
5. **Моменты:** Если у X существует момент k-го порядка, то х.ф. k раз дифференцируема и $M\left[X^k\right] = i^{-k} \cdot \varphi_X^{(k)}(0)$.

Характеристические функции для дискретных распределений

Для дискретной величины X, принимающей значения x_k с вероятностями p_k, х.ф. вычисляется как сумма ряда:

$$\varphi_X(t) = \sum_k (p_k \cdot e^{itx_k})$$

Примеры:

- **Распределение Бернулли** ($X \sim \mathrm{Bern}(p)$):

$$\varphi(t) = q + p \cdot e^{it}, \quad q = 1 - p$$

- **Биномиальное распределение** ($X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$):

$$\varphi(t) = (q + p \cdot e^{it})^n$$

- **Распределение Пуассона** ($X \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$):

$$\varphi(t) = \exp(\lambda(e^{it} - 1))$$

Характеристические функции для непрерывных распределений

Для абсолютно непрерывной величины X с плотностью распределения $f(x)$, х.ф. является преобразованием Фурье этой плотности:

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx$$

Примеры:

- **Равномерное распределение** ($X \sim U(a,b)$):

$$\varphi(t) = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$$

- **Показательное распределение** ($X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$):

$$\varphi(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}$$

- **Стандартное нормальное распределение** ($X \sim N(0,1)$):

$$\varphi(t) = e^{-t^2/2}$$

- **Нормальное распределение** ($X \sim N(\mu, \sigma^2)$):

$$\varphi(t) = e^{i\mu t - \sigma^2 t^2/2}$$

Задачи на дискретные распределения

Задача 1. *Случайная величина X имеет биномиальное распределение $Bin(n = 4, p = 0.5)$.*

a) *Найдите характеристическую функцию для X.*

b) *Используя х.ф., вычислите математическое ожидание $M[X]$ и дисперсию $D[X]$.*

Решение:

a) $\varphi(t) = (0.5 + 0.5 \cdot e^{it})^4$

b) Находим первую производную:

$$\varphi'(t) = 4(0.5 + 0.5e^{it})^3 \cdot (0.5ie^{it}) = 2i(0.5 + 0.5e^{it})^3 e^{it}$$

$$\varphi'(0) = 2i(1)^3 \cdot 1 = 2i$$

$$M[X] = \frac{1}{i}\varphi'(0) = \frac{1}{i} \cdot 2i = 2$$

Вторая производная:

$$\varphi''(t) = 2i[3(0.5 + 0.5e^{it})^2 \cdot (0.5ie^{it}) \cdot e^{it} + (0.5 + 0.5e^{it})^3 \cdot ie^{it}]$$

$$\varphi''(0) = 2i[3 \cdot 1 \cdot (0.5i) \cdot 1 + 1 \cdot i \cdot 1] = 2i[1.5i + i] = 2i \cdot 2.5i = -5$$

$$M\left[X^2\right] = -\varphi''(0) = 5$$

$$D[X] = M\left[X^2\right] - (M[X])^2 = 5 - 4 = 1$$

Задача 2. *Случайная величина Y распределена по закону Пуассона с параметром $\lambda = 3$.*

a) *Запишите характеристическую функцию $\varphi_Y(t)$.*

b) *Пусть Y_1 и Y_2 — независимые случайные величины, также распределенные по закону Пуассона с параметром $\lambda = 3$. Покажите с помощью характеристических функций, что их сумма $S = Y_1 + Y_2$ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda = 6$.*

Решение:

a) $\varphi_Y(t) = \exp(3(e^{it} - 1))$

b)
$$\varphi_S(t) = \varphi_{Y_1}(t) \cdot \varphi_{Y_2}(t) = [\exp(3(e^{it} - 1))] \cdot [\exp(3(e^{it} - 1))] = \exp(6(e^{it} - 1))$$

Это характеристическая функция распределения Пуассона с параметром 6.

Задача 3. *Дана характеристическая функция случайной величины X:*

$$\varphi(t) = \frac{1}{6} \cdot e^{-it} + \frac{1}{3} \cdot e^{2it} + \frac{1}{2} \cdot e^{5it}$$

Найдите закон распределения величины X.

Решение:
Сравнивая с общей формулой для дискретной величины $\varphi(t) = \sum p_k e^{itx_k}$, получаем:

- $p_1 = \frac{1}{6}$, $x_1 = -1$
- $p_2 = \frac{1}{3}$, $x_2 = 2$
- $p_3 = \frac{1}{2}$, $x_3 = 5$

Таким образом, X принимает значения $-1, 2, 5$ с вероятностями $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ соответственно.
Проверка: $\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = 1$ — условие нормировки выполняется.

Задачи на непрерывные распределения

Задача 4. *Пусть $X \sim Exp(\lambda)$.*

a) *Найдите характеристическую функцию $\varphi_X(t)$.*

b) *С помощью х.ф. вычислите третий начальный момент $M[X^3]$.*

Решение:

a) $\varphi(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}$

b) Находим производные:

$$\varphi'(t) = \frac{i\lambda}{(\lambda - it)^2}, \quad \varphi''(t) = -\frac{2\lambda}{(\lambda - it)^3}, \quad \varphi'''(t) = -\frac{6i\lambda}{(\lambda - it)^4}$$

$$\varphi'''(0) = -\frac{6i\lambda}{\lambda^4} = -\frac{6i}{\lambda^3}$$

$$M\left[X^3\right] = i^{-3}\varphi'''(0) = (-i) \cdot \left(-\frac{6i}{\lambda^3}\right) = (-i)(-i) \cdot \frac{6}{\lambda^3} = (-1) \cdot \frac{6}{\lambda^3} = \frac{6}{\lambda^3}$$

Задача 5. *Случайная величина Z имеет стандартное нормальное распределение $N(0,1)$.*

a) *Покажите, что её характеристическая функция равна $\varphi_Z(t) = e^{-t^2/2}$.*

b) *Пусть $X = \mu + \sigma Z$. Найдите характеристическую функцию для X и убедитесь, что она соответствует распределению $N(\mu, \sigma^2)$.*

Решение:

a)

$$\varphi_Z(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itz} e^{-z^2/2} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(z^2-2itz)/2} dz$$

Дополняя до полного квадрата: $z^2 - 2itz = (z - it)^2 + t^2$, получаем:

$$\varphi_Z(t) = e^{-t^2/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(z-it)^2/2} dz = e^{-t^2/2}$$

b)

$$\varphi_X(t) = M\left[e^{it(\mu+\sigma Z)}\right] = e^{it\mu} M\left[e^{i(t\sigma)Z}\right] = e^{it\mu}\varphi_Z(\sigma t) = e^{it\mu} e^{-(\sigma t)^2/2} = e^{i\mu t - \sigma^2 t^2/2}$$

Это характеристическая функция нормального распределения $N(\mu, \sigma^2)$.

Задача 6. *Докажите с помощью характеристических функций, что сумма двух независимых нормально распределенных случайных величин $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ и $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ также имеет нормальное распределение. Найдите параметры этого распределения.*

Решение:

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t) \cdot \varphi_Y(t) = \left[e^{i\mu_X t - \sigma_X^2 t^2/2}\right] \cdot \left[e^{i\mu_Y t - \sigma_Y^2 t^2/2}\right] = e^{i(\mu_X+\mu_Y)t - (\sigma_X^2+\sigma_Y^2)t^2/2}$$

Это характеристическая функция нормального распределения с математическим ожиданием $\mu_X + \mu_Y$ и дисперсией $\sigma_X^2 + \sigma_Y^2$.

Применение характеристических функций

Задача 7. *Число частиц, падающих на единицу поверхности тела за время T, имеет распределение Пуассона с параметром λT, где λ — постоянная. Каждая частица независимо от других сообщает телу энергию U, равномерно распределённую на отрезке $[0; C]$, C — постоянная.*

Найти математическое ожидание и дисперсию энергии, получаемой единицей поверхности тела за время T.

Краткие сведения о производящей и кумулянтной функциях:
Для случайной величины N её **производящая функция** определяется как:

$$G_N(z) = M\left[z^N\right] = \sum_{k=0}^{\infty} P(N = k) z^k$$

Для распределения Пуассона $N \sim \text{Pois}(\lambda T)$ производящая функция имеет вид:

$$G_N(z) = e^{\lambda T(z-1)}$$

Кумулянтная функция (функция кумулянтов) определяется как логарифм характеристической функции:

$$\psi_X(t) = \ln \varphi_X(t)$$

Кумулянтная функция связана с моментами случайной величины:

- Первый кумулянт: $\psi'_X(0) = iM\left[X\right]$
- Второй кумулянт: $\psi''_X(0) = -D\left[X\right]$

Характеристическая функция суммы случайного числа независимых одинаково распределённых случайных величин $S = \sum_{i=1}^{N} U_i$ выражается через производящую функцию:

$$\varphi_S(t) = G_N(\varphi_U(t))$$

Решение:

Пусть $N \sim \mathrm{Pois}(\lambda T)$ — число частиц, $U_i \sim U[0, C]$ — энергия от i-й частицы. Полная энергия: $S = \sum_{i=1}^{N} U_i$.

Характеристическая функция равномерного распределения:

$$\varphi_U(t) = \frac{e^{itC} - 1}{itC}, \quad \varphi_U(0) = 1$$

Используя формулу для характеристической функции суммы случайного числа слагаемых, получаем:

$$\varphi_S(t) = G_N(\varphi_U(t)) = \exp\left(\lambda T\left(\varphi_U(t) - 1\right)\right)$$

Кумулянтная функция:

$$\psi_S(t) = \ln \varphi_S(t) = \lambda T(\varphi_U(t) - 1)$$

Математическое ожидание:

$$M\left[S\right] = \frac{1}{i}\psi'_S(0) = \frac{1}{i}\lambda T \varphi'_U(0)$$

$$\varphi'_U(0) = iM\left[U\right] = i \cdot \frac{C}{2} \Rightarrow M\left[S\right] = \frac{1}{i}\lambda T \cdot i\frac{C}{2} = \frac{\lambda T C}{2}$$

Дисперсия:

$$D\left[S\right] = -\psi''_S(0) = -\lambda T \varphi''_U(0)$$

$$\varphi''_U(0) = -M\left[U^2\right] = -\frac{C^2}{3} \Rightarrow D\left[S\right] = -\lambda T \cdot \left(-\frac{C^2}{3}\right) = \frac{\lambda T C^2}{3}$$

Ответ:

$$\boxed{M\left[S\right] = \frac{\lambda T C}{2}, \quad D\left[S\right] = \frac{\lambda T C^2}{3}}$$