Задача 1

Дано: Отношение числа отечественных (О) к иномаркам (И): $= 1.5$. Вероятность нештатной ситуации с отечественным: в 2 раза выше, чем с иномаркой. Произошла нештатная ситуация. Найти $P(\text{О} \mid \text{Нештатная})$.

Решение:

1. Введем гипотезы: H_1 = автомобиль отечественный. H_2 = автомобиль иномарка.

2. Найдем априорные вероятности гипотез. Пусть количество иномарок $= x$, тогда отечественных $= 1.5x$. Общее количество автомобилей: $x + 1.5x = 2.5x$. $P(H_1) = (1.5x)/(2.5x) = 1.5/2.5 = 3/5 = 0.6$ $P(H_2) = x/(2.5x) = 1/2.5 = 2/5 = 0.4$

3. Найдем условные вероятности нештатной ситуации (событие A). Пусть вероятность нештатной ситуации с иномаркой равна p. Тогда с отечественной: $2p$. $P(A|H_1) = 2p$ $P(A|H_2) = p$

4. Применим формулу Байеса:

$$P(H_1|A) = (P(H_1)P(A|H_1))/(P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2))$$

$$P(H_1|A) = (0.62p)/(0.62p + 0.4p) = (1.2p)/(1.2p + 0.4p) =$$
$$= (1.2p)/(1.6p) = 1.2/1.6 = 3/4 = 0.75$$

Ответ: Вероятность того, что это отечественный автомобиль, равна 0,75.
—

Задача 2

Дано: Урна 1: 10 шаров, 8 белых. Урна 2: 20 шаров, 4 белых. Из каждой урны извлекли по 1 шару. Из этих двух шаров случайно выбрали один. Найти вероятность, что он белый.

Решение:

1. Рассмотрим возможные исходы извлечения двух шаров: W_1W_2 — из обеих урн вынули белый шар. $P(W_1) = 8/10 = 0.8$, $P(W_2) = 4/20 = 0.2$. Так как извлечения независимы: $P(W_1W_2) = 0.80.2 = 0.16$. W_{12} — из 1-й урны белый, из 2-й черный. $P(W_1) = 0.8$, $P(_2) = 1 - 0.2 = 0.8$. $P(W_1B_2) = 0.80.8 = 0.64$. $_1W_2$ — из 1-й урны черный, из 2-й белый. $P(_1) = 2/10 = 0.2$, $P(W_2) = 0.2$. $P(B_1W_2) = 0.20.2 = 0.04$. B_1B_2 — оба черные. $P(B_1) = 0.2$, $P(B_2) = 0.8$. $P(B_1B_2) = 0.20.8 = 0.16$.

2. Теперь рассмотрим событие C — "выбранный из двух шаров шар — белый". Если произошло W_1W_2 (два белых), то вероятность выбрать белого: $P(C|W_1W_2) = 1$. Если произошло W_1B_2 (один белый, один черный),

то вероятность выбрать белого: $P(C|W_1B_2) = 1/2$. Если произошло B_1W_2 (один черный, один белый), то вероятность выбрать белого: $P(C|B_1W_2) = 1/2$. Если произошло B_1B_2 (два черных), то вероятность выбрать белого: $P(C|B_1B_2) = 0$.

3. По формуле полной вероятности: $P(C) = P(W_1W_2)P(C|W_1W_2) + P(W_1B_2)P(C|W_1B_2) + P(B_1W_2)P(C|B_1W_2) + P(B_1B_2)P(C|B_1B_2)$ $P(C) = (0.161) + (0.641/2) + (0.041/2) + (0.160)$ $P(C) = 0.16 + 0.32 + 0.02 + 0 = 0.5$

Ответ: Вероятность того, что выбран белый шар, равна 0,5.

—

Задача 3

Дано:

$P($Обнаружить | Болен$) = 1 - \beta$

(Вероятность правильного обнаружения болезни)

$P($Обнаружить | Здоров$) = \alpha$ (Вероятность ложной тревоги)

$P($Болен$) = \gamma$ (Доля больных в популяции)

Событие A: человек признан больным при обследовании.

Найти: $P($Здоров | A$)$

Решение:

1. Введем гипотезы:

H_1 = человек болен. $P(\mathrm{H}_1) = \gamma$

H_2 = человек здоров. $P(\mathrm{H}_2) = 1 - \gamma$

2. Условные вероятности события A (положительный результат):

$P(\mathrm{A}|\mathrm{H}_1) = 1 - \beta$

$P(\mathrm{A}|\mathrm{H}_2) = \alpha$

3. По формуле полной вероятности найдем $P(\mathrm{A})$:

$P(\mathrm{A}) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) = \gamma(1 - \beta) + (1 - \gamma)\alpha$

4. По формуле Байеса найдем искомую вероятность:

$P(\mathrm{H}_2|\mathrm{A}) = (P(H_2)P(A|H_2))/P(A) = ((1 - \gamma)\alpha)/(\gamma(1 - \beta) + (1 - \gamma)\alpha)$

Ответ: Вероятность того, что признанный больным человек на самом деле здоров, равна

$P = (\alpha(1 - \gamma))/(\gamma(1 - \beta) + \alpha(1 - \gamma))$.

—

Задача 4

Дано:

$P($дефект$) = p$

$P($забракован | дефект$) = \alpha$ (вероятность обнаружить дефект)

$P($забракован | исправен$) = \beta$ (вероятность ложной браковки)

Найти:

$q_0 = P(\text{дефект} \mid \text{не забракован})$
$q_1 = P(\text{дефект} \mid \text{забракован})$
Решение:
1. Введем события:
D = прибор имеет дефект $P(D) = p$
И = прибор исправен $P(\text{И}) = 1 - p$
З = прибор забракован.
2. Найдем вероятности брака и небрака (формула полной вероятности):
P(З) = P(D)P(З|D) + P(И)P(З|И)= $p\alpha + (1 - p)\beta$
P(не З) = 1 - P(З)= $1 - p\alpha - (1 - p)\beta$
3. Найдем q_1 =P(D|З) по формуле Байеса:
q_1 =P(D|З) = (P(D) P(З|D)) / P(З)= $(p\alpha)/(p\alpha + (1 - p)\beta)$
4. Найдем q_0 =P(D| не З). Сначала найдем P(не З|D) и P(не З|И):
P(не З|D) = 1 - P(З|D)= $1 - \alpha$
(дефектный прибор могут не забраковать)
P(не З|И) = 1 - P(З|И)= $1 - \beta$
(исправный прибор могут принять)
Теперь по формуле Байеса:
q_0 =P(D| не З) = (P(D) P(не З|D)) / P(не З) = $(p(1 - \alpha))/(1 - p\alpha - (1 - p)\beta)$
Ответ:
$q_0 = (p(1 - \alpha))/(1 - p\alpha - \beta(1 - p))$
$q_1 = (p\alpha)/(p\alpha + \beta(1 - p))$
—
Задача 5
Дано:
$P(N = n) = p(1 - p)^{(n-1)}$, для n≥1 (геометрическое распределение).
Для семьи с n детьми все 2^n комбинаций полов равновероятны.
Найти вероятность того, что в семье ровно k мальчиков.
Решение:
1. Используем формулу полной вероятности.
Событие M_k = (в семье ровно k мальчиков).
Гипотезы H_n = (в семье ровно n детей), n≥1.
2. Найдем $P(M_k|H_n)$.

Если в семье n детей, то число мальчиков k подчиняется биномиальному распределению с параметрами n и $1/2$.

Если $k > n$, то $P(M_k|H_n) = 0$.
Если k≤n, то $P(M_k|H_n) = C_k^n (1/2)^k (1/2)^{(n-k)} = C_k^n / 2^n$.
3. По формуле полной вероятности:

$P(M_k) = \sum_{n=1}^{\infty} P(H_n)P(M_k|H_n) = \sum_{n=k}^{\infty}[p(1-p)^(n-1)(C_k^n/2^n)]$

(Суммирование начинается с $n = k$, так как при $n < k$ вероятность равна 0).

4. Упростим выражение:

$P(M_k) = p\sum_{n=k}^{\infty} C_k^n((1-p)/2)^n/(1-p)$ (вынесем p и учтем $(1-p)^{(n-1)} = (1-p)^n/(1-p)$)

$P(M_k) = p/(1-p)\sum_{n=k}^{\infty} C_k^n x^n$, где $x = (1-p)/2$.

5. Воспользуемся известным разложением:

$\sum_{n=k}^{\infty} C_k^n x^n = x^k/(1-x)^{(k+1)}$ для $|x| < 1$.

(Это следует из биномиального ряда).

Подставим:

$P(M_k) = p/(1-p)[x^k/(1-x)^(k+1)] =$

$= p/(1-p)[((1-p)/2)^k/(1-(1-p)/2)^{(k+1)}]$

6. Упростим знаменатель:

$1-(1-p)/2 = (2-(1-p))/2 = (1+p)/2$

Подставим:

$P(M_k) = p/(1-p)[((1-p)^k/2^k)/(((1+p)^{(k+1)})/(2^(k+1)))] =$

$= p/(1-p)[(1-p)^k/2^k][2^{(k+1)}/(1+p)^{(k+1)}]$

$P(M_k) = p/(1-p)(1-p)^k 2/(1+p)^{(k+1)}$

$P(M_k) = (2p)/(1+p)^{(k+1)}(1-p)^{(k-1)}$

Ответ: Вероятность того, что в семье ровно k мальчиков, равна

$P(M_k) = (2p(1-p)^{(k-1)})/(1+p)^{(k+1)}$.

Задача 5

Дано: $P(N = n) = p(1-p)^{(n-1)}$, для $n \geq 1$ (геометрическое распределение). Для семьи с n детьми все 2^n комбинаций полов равновероятны. Найти вероятность того, что в семье ровно k мальчиков.

Решение:

$P(N = 0) = P_0 > 0$, а для $n \geqslant 1$ по-прежнему $P(N = n) = ap^n$.

—

1. Нормировка распределения N

$$P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} ap^n = 1$$

$$P_0 + a \cdot \frac{p}{1-p} = 1$$

$$a \cdot \frac{p}{1-p} = 1 - P_0$$

$$a = \frac{(1-P_0)(1-p)}{p}$$

Таким образом:

$$P(N=n) = \begin{cases} P_0, & n=0 \\ \frac{(1-P_0)(1-p)}{p} \cdot p^n = (1-P_0)(1-p)p^{n-1}, & n \geqslant 1 \end{cases}$$

—

2. Условная вероятность $P(X=k \mid N=n)$

Условие:

$$P(X=k \mid N=n) = \frac{1}{n+1}, \quad 0 \leqslant k \leqslant n$$

При $n=0$: k может быть только 0, $P(X=0 \mid N=0) = 1$ (поскольку $1/(0+1)=1$), всё согласовано.

—

3. Полная вероятность $P(X=k)$

$$P(X=k) = \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n)P(X=k \mid N=n)$$

Но $P(X=k \mid N=n) = 0$, если $n<k$, так как нельзя иметь k мальчиков, если детей меньше k.

Поэтому:

$$P(X=k) = \sum_{n=k}^{\infty} P(N=n) \cdot \frac{1}{n+1}$$

Разобьём сумму на $n=0$ (только для $k=0$) и $n \geqslant 1$:

—

Случай 1: $k=0$

$$\begin{aligned} P(X=0) &= P(N=0) \cdot 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P(N=n) \cdot \frac{1}{n+1} \\ &= P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(1-P_0)(1-p)p^{n-1} \cdot \frac{1}{n+1}\right] \end{aligned}$$

Замена $m=n+1$, тогда $n=m-1$, $m \geqslant 2$, $p^{n-1} = p^{m-2}$:

$$P(X=0) = P_0 + (1-P_0)(1-p)\sum_{m=2}^{\infty}\frac{p^{m-2}}{m}$$

$$= P_0 + \frac{(1-P_0)(1-p)}{p^2}\sum_{m=2}^{\infty}\frac{p^m}{m}$$

Известно:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{p^m}{m} = -\ln(1-p)$$

$$\sum_{m=2}^{\infty}\frac{p^m}{m} = -\ln(1-p) - p$$

Таким образом:

$$P(X=0) = P_0 + \frac{(1-P_0)(1-p)}{p^2}\left[-\ln(1-p) - p\right]$$

—

Случай 2: $k \geqslant 1$
Тогда $n \geqslant k \geqslant 1$, слагаемого $n = 0$ нет.

$$P(X=k) = \sum_{n=k}^{\infty}(1-P_0)(1-p)p^{n-1}\cdot\frac{1}{n+1}$$

$$= (1-P_0)(1-p)\sum_{n=k}^{\infty}\frac{p^{n-1}}{n+1}$$

Замена $m = n+1$, $n = m-1$, $m \geqslant k+1$:

$$P(X=k) = (1-P_0)(1-p)\sum_{m=k+1}^{\infty}\frac{p^{m-2}}{m}$$

$$= \frac{(1-P_0)(1-p)}{p^2}\sum_{m=k+1}^{\infty}\frac{p^m}{m}$$

$$= \frac{(1-P_0)(1-p)}{p^2}\left[-\ln(1-p) - \sum_{m=1}^{k}\frac{p^m}{m}\right]$$

—

4. Итоговый ответ

$$\boxed{P(X=k)=\begin{cases} P_0+\frac{(1-P_0)(1-p)}{p^2}\left[-\ln(1-p)-p\right], & k=0\\ \frac{(1-P_0)(1-p)}{p^2}\left[-\ln(1-p)-\sum_{m=1}^{k}\frac{p^m}{m}\right], & k\geqslant 1\end{cases}}$$

где $0<p<1$, $0<P_0<1$.