Лекция 2

Эксперимент. Событие. Операции над событиями.

Понятие вероятности. Классическая формула подсчета вероятности и общий аксиоматический подход Колмогорова

$\mathcal{E}$ - эксперимент

$$\mathcal{E} \quad \rightarrow \quad \underset{\text{события}}{\underset{\uparrow}{A, B, C, \ldots}} \quad \text{- исходы эксперимента}$$

Особые события:

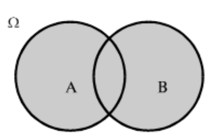
- $\varnothing$ - невозможное
- Ω - достоверное

$A_1 + A_2 + \cdots + A_n$ - сумма событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$
$A_1 A_2 \ldots A_n$ - произведение событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$
$\overline{A}$ - событие, противоположное событию A

Геометрическая интерпретация:

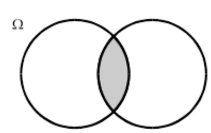
$\mathcal{E}$ - бросание точки в область Ω.

Ω



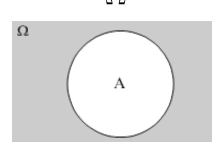
$A + B$ заштриховано

Ω



AB заштриховано

Ω



$\overline{A}$ заштриховано

A и B **несовместны**, если не могут произойти одновременно в одном эксперименте.

События A и B называются **эквивалентными**, если из того факта, что произошло A, неминуемо следует, что произошло B, и наоборот. В этом случае пишут $A = B$.

Свойства операций над событиями

$$A + A = AA = A, \quad A + B = B + A, \quad AB = BA,$$
$$(A + B) + C = A + (B + C), \quad (AB)C = A(BC),$$
$$A(B + C) = AB + AC,$$
$$A + \overline{A} = \Omega, \quad A\overline{A} = \varnothing,$$
$$A + \Omega = \Omega, \quad A + \varnothing = A, \quad A\varnothing = \varnothing$$

Более содержательные свойства:

$$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}, \quad \overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$$

Их обобщения:

$$\overline{A_1 + A_2 + \cdots + A_n} = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdots \overline{A_n}, \quad \overline{A_1 A_2 \ldots A_n} = \overline{A_1} + \overline{A_2} + \cdots + \overline{A_n}$$

Приведённые равенства могут быть доказаны или опровергнуты с помощью таблиц истинности.

Пример

Докажем, что $A(B + C) = AB + AC$

A	B	C	$B + C$	AB	AC	$A(B + C)$	$AB + AC$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Число 1 в ячейке таблицы означает, что соответствующее событие произошло, 0 - не произошло.

Совпадение столбцов под шапками $A(B + C)$ и $AB + AC$ означает эквивалентность соответствующих событий.

Пример

Пусть $\mathcal{E}$ - бросание трёх монет. Пусть монеты пронумерованы и событие:

- Γ_1 - выпадение герба на монете 1
- Γ_2 - выпадение герба на монете 2
- Γ_3 - выпадение герба на монете 3

Выразим через $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ следующие события:

- A - выпадение одного герба и двух решек
- B - выпадение не более одного герба
- C - число выпавших гербов меньше числа выпавших решек

Решение:

1. $A = \Gamma_1\overline{\Gamma_2\Gamma_3} + \overline{\Gamma_1}\Gamma_2\overline{\Gamma_3} + \overline{\Gamma_1\Gamma_2}\Gamma_3$
2. $B = A + \overline{\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3} = \Gamma_1\overline{\Gamma_2\Gamma_3} + \overline{\Gamma_1}\Gamma_2\overline{\Gamma_3} + \overline{\Gamma_1\Gamma_2}\Gamma_3 + \overline{\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3}$
3. $C = B$, т.е. событие C эквивалентно событию B

Вероятность $\mathsf{P}\{A\}$

- количественная оценка степени ожидания того, что при проведении $\mathcal{E}$ интересующее нас событие A произойдёт.

Первоначально: статистический подход к $\mathsf{P}\{A\}$

$$\mathsf{P}\{A\} = \frac{N_A}{N} \quad \text{при больших } N,$$

или

$$\mathsf{P}\{A\} = \lim_{N\to\infty} \frac{N_A}{N}, \tag{*}$$

где N - общее число проведённых экспериментов, N_A - число экспериментов, в которых произошло A.

Недостаток подхода (*): на основе определения (*) не удаётся построить строгую математическую дисциплину.

Классическая формула подсчета вероятности

Рассмотрим эксперимент $\mathcal{E}$, все результаты которого могут быть описаны с помощью конечного числа равновозможных исходов

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n,$$

причём никакие два не могут произойти одновременно: $\omega_i \omega_j = \varnothing \ \forall i \neq j$.

Пусть к событию A приводят исходы $i_1, i_2, \ldots, i_m$, $m \leq n$, и только они. Тогда по определению положим

$$\mathsf{P}\{A\} = \frac{m}{n}. \tag{**}$$

n - общее число исходов; m - число благоприятных исходов.

Пример

$\mathcal{E}$ - бросание игрального кубика

Исходы $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6$:

- ω_1 - выпало одно очко
- $\ldots$
- ω_6 - выпало шесть очков

$n = 6$

Событие A - выпало чётное число очков. Тогда $m = 3$ $(\omega_2, \omega_4, \omega_6)$ и

$$\mathsf{P}\{A\} = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Следствия из (**):

$$\begin{aligned}
&0 \leq \mathsf{P}\{A\} \leq 1, \quad \mathsf{P}\{\varnothing\} = 0, \quad \mathsf{P}\{\Omega\} = 1, \\
&\mathsf{P}\{\overline{A}\} = 1 - \mathsf{P}\{A\}, \\
&\mathsf{P}\{A + B\} = \mathsf{P}\{A\} + \mathsf{P}\{B\} - \mathsf{P}\{AB\}
\end{aligned}$$

Если A и B несовместны, то $\mathsf{P}\{A + B\} = \mathsf{P}\{A\} + \mathsf{P}\{B\}$.

Пример 2

В урне находятся N одинаковых по размеру и внешнему виду шаров; среди них M белых и $(N - M)$ черных. Из урны случайным образом вынимают n шаров. Чему равна вероятность того, что среди них будет m белых?

Решение:

Эксперимент $\mathcal{E}$ - извлечение n шаров из урны

Событие A - среди извлеченных n шаров белых оказалось m

$$\begin{array}{ccc} \underbrace{\circ\circ\ldots\circ}_{M} & & \underbrace{\bullet\bullet\ldots\bullet}_{N-M} \\ & \downarrow & \\ \underbrace{\circ\circ\ldots\circ}_{m} & & \underbrace{\bullet\bullet\ldots\bullet}_{n-m} \end{array} \qquad (n \leq N,\, n - m \leq N - M)$$

$$\mathsf{P}\{A\} = \frac{\text{Число благоприятных исходов}}{\text{Общее число исходов}} = \frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$$

Пример 3

Найти вероятность того, что из 50 студентов, присутствующих на лекции, хотя бы двое имеют одну и ту же дату рождения.

Решение: по комбинаторному правилу произведения $n = 365^{50}$ - общее число равновозможных вариантов распределения дней рождения в году (пусть в году 365 дней)

$$\begin{array}{ccccc} \text{365 сл.} & \text{365 сл.} & \text{365 сл.} & \ldots & \text{365 сл.} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ \text{1-й} & \text{2-й} & \text{3-й} & \ldots & \text{50-й} \\ \text{студ.} & \text{студ.} & \text{студ.} & & \text{студент} \end{array}$$

Пусть $\bar{m}$ - число неблагоприятных вариантов, т.е. когда все родились в разные дни. Тогда $\bar{m} = 365 \cdot 364 \cdots (365 - 49) = A_{365}^{50}$

Значит,

$$\mathsf{P}\{\text{хотя бы двое имеют одну и ту же дату рождения}\} = \frac{m}{n} = \frac{n - \bar{m}}{n} = 1 - \frac{\bar{m}}{n}$$

$$= 1 - \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdots \frac{365 - 49}{365} \approx 0,97\ldots$$

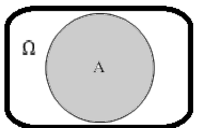
Геометрический подход к подсчету вероятности

(Классическая формула в случае континуума числа исходов ω)

Эксперимент $\leftarrow$ бросание случайным образом точки в некоторую область Ω

Факт проведения эксперимента мы связываем с фиксированием точки в области Ω, результат эксперимента однозначно определяет точку внутри Ω, а любая точка из Ω дает исчерпывающую информацию, чем закончился эксперимент.

Событие $A \leftarrow$ попадание в подмножество A из Ω



По классической формуле $\mathsf{P}\{A\} = \frac{m}{n}$, но теперь m и n бесконечны.

Условно $m \sim \text{mes } A$, $n \sim \text{mes } \Omega$. Поэтому

$$\mathsf{P}\{A\} = \frac{\text{mes } A}{\text{mes } \Omega}$$

Пример 4 (Задача о встрече)

Двое договорились встретиться в условленном месте между 00:00 и 01:00 (полночью и часом ночи). Пришедший первым ждёт 20 мин и уходит, если второй человек не приходит. Каждый обязательно приходит в условленное место, но момент прихода - любой и равновозможный из интервала от 00:00 до 01:00. Какова вероятность того, что встреча произойдёт?

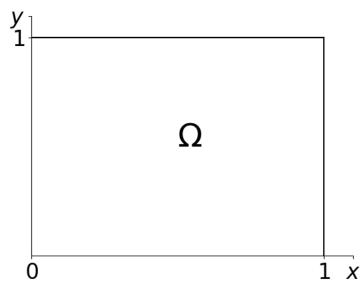
Решение:

Перенумеруем людей: I и II

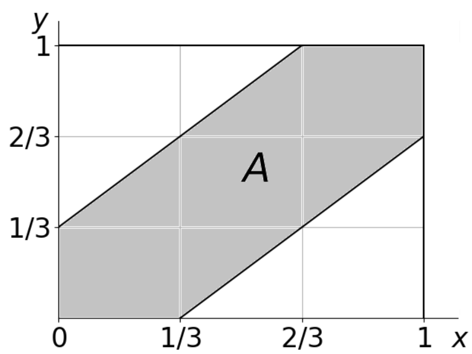
Пусть

- x - момент прихода человека I
- y - момент прихода человека II

Тогда $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$



Условие встречи: $|x-y| \le \frac{1}{3}$ (20 минут $= \frac{1}{3}$ часа)
Задача сводится к определению области $|x-y| \le \frac{1}{3}$ внутри Ω:



попадание в A означает, что встреча состоялась

$$\mathsf{P}\{A\} = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{1 - 2\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\right)}{1} = \frac{5}{9}$$

Общий аксиоматический подход Колмогорова А.Н.

$\mathcal{E} \to \Omega = \{\omega\}$ - множество элементарных исходов

$\mathcal{F}$ это σ-алгебра подмножеств на Ω, т.е. система подмножеств такая, что:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$, $\varnothing \in \mathcal{F}$
2. если $A \in \mathcal{F}$, то $\overline{A} \in \mathcal{F}$
3. если $A_n \in \mathcal{F}$ $\forall n = 1, 2, \ldots$, то $\bigcup\limits_n A_n \in \mathcal{F}$, $\bigcap\limits_n A_n \in \mathcal{F}$

(Достаточно в 2. выполнения одного из условий $\bigcup\limits_n A_n \in \mathcal{F}$ или $\bigcap\limits_n A_n \in \mathcal{F}$, поскольку другое соотношение следует из этого одного и 2.)

Элементы σ-алгебры $\mathcal{F}$ называются событиями.

Аксиомы:

1. Каждому событию A поставлено в соответствие неотрицательное число $\mathsf{P}\{A\}$ (называемое вероятностью)

2. $\mathsf{P}\{\Omega\} = 1$

3. Если события $A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots$ попарно несовместны, то

$$\mathsf{P}\{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \ldots\} = \mathsf{P}\{A_1\} + \mathsf{P}\{A_2\} + \cdots + \mathsf{P}\{A_n\} + \ldots$$

Тройка $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}\}$ называется *вероятностным пространством.*

Частный случай:

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$

σ-алгебра $\mathcal{F}$ включает все 2^n подмножеств множества Ω.

Если все исходы $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ равновозможны, то для любого события $A \subseteq \Omega$ $(A \subseteq \mathcal{F})$ определим

$$\mathsf{P}\{A\} = \frac{m}{n},$$

где m - число тех исходов из $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, которые приводят к A, тогда утверждения аксиом 1, 2 и 3 будут выполнены.