Задачи к семинару 9 с решениями

1. Человек имеет n ключей, из которых только один подходит к замку. Ключи испытываются в случайном порядке независимо, причём неподошедшие ключи не исключаются. Найти дисперсию числа попыток до открытия двери.

   Решение:

   Пусть T — число попыток до открытия двери. Так как ключи испытываются независимо и с возвращением, то T имеет геометрическое распределение с параметром $p = \frac{1}{n}$.

   Для геометрического распределения дисперсия равна:

   $$\mathbb{D}[T] = \frac{1-p}{p^2} = \frac{1-\frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{\frac{n-1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = n(n-1).$$

   Ответ: $\mathbb{D}[T] = n(n-1)$.

2. Решить задачу 1, если неподошедшие ключи исключаются из дальнейших испытаний. Найти дисперсию числа попыток.

   Решение:

   В этом случае T равномерно распределена на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$, так как все ключи различны и вероятность успеха на каждом шаге одинакова.

   Для равномерного распределения:

   $$\mathbb{E}[T] = \frac{n+1}{2}, \quad \mathbb{E}[T^2] = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}.$$

   Тогда:

   $$\mathbb{D}[T] = \mathbb{E}[T^2] - (\mathbb{E}[T])^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2.$$

Приведём к общему знаменателю:

$$\mathbb{D}[T] = \frac{2(n+1)(2n+1) - 3(n+1)^2}{12} = \frac{(n+1)(4n+2-3n-3)}{12} =$$

$$= \frac{(n+1)(n-1)}{12} = \frac{n^2-1}{12}.$$

Ответ: $\mathbb{D}[T] = \frac{n^2-1}{12}$.

3. Игральный кубик бросают до тех пор, пока не выпадут все грани. Найти дисперсию числа бросаний.

   Решение:

   Пусть T — число бросаний до появления всех 6 граней. Разобьём процесс на этапы: пусть T_i — число бросаний для получения i-й новой грани после того, как уже есть $i-1$ различных граней. Тогда $T = T_1 + T_2 + \cdots + T_6$, где $T_1 = 1$, а для $i \geq 2$ величина T_i имеет геометрическое распределение с параметром $p_i = \frac{7-i}{6}$. Эти величины независимы.

   Дисперсия геометрического распределения: $\frac{1-p_i}{p_i^2}$. Тогда:

$$\mathbb{D}[T] = \sum_{i=1}^{6} \mathbb{D}[T_i] = 0 + \frac{1-\frac{5}{6}}{\left(\frac{5}{6}\right)^2} + \frac{1-\frac{4}{6}}{\left(\frac{4}{6}\right)^2} + \frac{1-\frac{3}{6}}{\left(\frac{3}{6}\right)^2} + \frac{1-\frac{2}{6}}{\left(\frac{2}{6}\right)^2} + \frac{1-\frac{1}{6}}{\left(\frac{1}{6}\right)^2}.$$

   Вычислим каждое слагаемое:

$$\mathbb{D}[T_2] = \frac{1/6}{25/36} = \frac{6}{25}, \quad \mathbb{D}[T_3] = \frac{2/6}{16/36} = \frac{3}{4}, \quad \mathbb{D}[T_4] = \frac{1/2}{1/4} = 2,$$

$$\mathbb{D}[T_5] = \frac{4/6}{4/36} = 6, \quad \mathbb{D}[T_6] = \frac{5/6}{1/36} = 30.$$

   Суммируем:

$$\mathbb{D}[T] = \frac{6}{25} + \frac{3}{4} + 2 + 6 + 30 = 38 + \frac{24}{100} + \frac{75}{100} = 38 + \frac{99}{100} = \frac{3899}{100}.$$

   Ответ: $\mathbb{D}[T] = \frac{3899}{100}$.

4. Деревья в лесу растут в случайных точках, причём вероятность того, что участок леса площадью S содержит ровно m деревьев равна
$$\frac{(\lambda S)^m}{m!}e^{-\lambda S},$$
где $\lambda > 0$ — параметр. Выберем произвольную точку O в этом лесу. Пусть X — расстояние между точкой O и ближайшим к ней деревом. Найти дисперсию X.

Решение:

Сначала найдём функцию распределения X. Событие $\{X \leq x\}$ означает, что в круге радиуса x есть хотя бы одно дерево. Площадь круга: πx^2. Число деревьев в круге имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda\pi x^2$, поэтому:

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda\pi x^2}, \quad x > 0.$$

Плотность:
$$f_X(x) = F_X'(x) = 2\lambda\pi x e^{-\lambda\pi x^2}.$$

Найдём моменты:

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty x f_X(x)dx = 2\lambda\pi \int_0^\infty x^2 e^{-\lambda\pi x^2}dx.$$

Используем формулу:

$$\int_0^\infty x^2 e^{-ax^2}dx = \frac{1}{4a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad a = \lambda\pi.$$

Тогда:
$$\mathbb{E}[X] = 2\lambda\pi \cdot \frac{1}{4\lambda\pi}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda\pi}} = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}.$$

Второй момент:

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_0^\infty x^2 f_X(x)dx = 2\lambda\pi \int_0^\infty x^3 e^{-\lambda\pi x^2}dx.$$

Сделаем замену: $t = \lambda\pi x^2$, тогда $dt = 2\lambda\pi x dx$, $xdx = \frac{dt}{2\lambda\pi}$, $x^2 = \frac{t}{\lambda\pi}$:

$$\int_0^\infty x^3 e^{-\lambda\pi x^2}dx = \int_0^\infty x^2 \cdot x e^{-\lambda\pi x^2}dx = \int_0^\infty \frac{t}{\lambda\pi}e^{-t}\frac{dt}{2\lambda\pi} =$$

$$= \frac{1}{2(\lambda\pi)^2} \int_0^\infty te^{-t}dt = \frac{1}{2(\lambda\pi)^2}.$$

Тогда:

$$\mathbb{E}[X^2] = 2\lambda\pi \cdot \frac{1}{2(\lambda\pi)^2} = \frac{1}{\lambda\pi}.$$

Дисперсия:

$$\mathbb{D}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \frac{1}{\lambda\pi} - \left(\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\right)^2 = \frac{1}{\lambda\pi} - \frac{1}{4\lambda} = \frac{4-\pi}{4\lambda\pi}.$$

Ответ: $\mathbb{D}[X] = \frac{4-\pi}{4\lambda\pi}$.

5. Пусть $Y \sim N(\alpha, \sigma^2)$, $X = e^Y$. Найти дисперсию X.

   Решение:

   Величина X имеет логнормальное распределение. Найдём моменты:

   $$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[e^Y] = e^{\alpha+\frac{\sigma^2}{2}}, \quad \mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[e^{2Y}] = e^{2\alpha+2\sigma^2}.$$

   Тогда дисперсия:

   $$\mathbb{D}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = e^{2\alpha+2\sigma^2} - e^{2\alpha+\sigma^2} = e^{2\alpha+\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1).$$

   Ответ: $\mathbb{D}[X] = e^{2\alpha+\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$.

6. Пусть X и Y — независимые СВ, имеющие распределение Пуассона с параметрами λ и μ соответственно. Доказать, что СВ $Z = X + Y$ имеет распределение Пуассона. Выявить вид условного распределения СВ X при фиксированном значении СВ $X + Y$ $(X + Y = m = \text{const})$ и найти условное математическое ожидание

   $$M\{X \mid X + Y = m\}.$$

   Решение:

   Докажем, что $Z \sim \text{Poisson}(\lambda + \mu)$. Для любого $k \in \mathbb{N}_0$:

   $$\mathbb{P}(Z = k) = \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(X = i, Y = k - i) = \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!} \cdot \frac{\mu^{k-i} e^{-\mu}}{(k-i)!}$$

$$\mathbb{P}(Z = k) = e^{-(\lambda+\mu)} \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda^i \mu^{k-i}}{i!(k-i)!}.$$

Заметим, что сумма — это биномиальное разложение:

$$\sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!(k-i)!} \lambda^i \mu^{k-i} = (\lambda + \mu)^k,$$

поэтому:

$$\mathbb{P}(Z = k) = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} (\lambda + \mu)^k.$$

Что соответствует распределению Пуассона с параметром $\lambda + \mu$.

Теперь найдём условное распределение:

$$\mathbb{P}(X = i \mid X + Y = m) = \frac{\mathbb{P}(X = i, Y = m - i)}{\mathbb{P}(X + Y = m)} =$$

$$= \frac{\frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!} \cdot \frac{\mu^{m-i} e^{-\mu}}{(m-i)!}}{\frac{(\lambda+\mu)^m e^{-(\lambda+\mu)}}{m!}} = \frac{m!}{i!(m-i)!} \cdot \frac{\lambda^i \mu^{m-i}}{(\lambda + \mu)^m}.$$

Это биномиальное распределение с параметрами m и $p = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$.

Условное математическое ожидание:

$$\mathbb{E}[X \mid X + Y = m] = m \cdot \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.$$

Ответ: $\mathbb{E}[X \mid X + Y = m] = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} m$.