Лекция 5

Случайная величина.
Функция распределения случайной величины и её свойства.
Непрерывные и дискретные случайные величины.
Плотность распределения.

Пусть $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}\}$ - вероятностное пространство, связанное с экспериментом $\mathcal{E}$. Пусть $X = X(\omega)$ - конечная вещественная функция, определенная для всех элементарных событий ω, составляющих множество $\Omega = \{\omega\}$. Говорят, что функция X измерима и называют её *случайной величиной*, если

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \{\omega : X(\omega) < x\} \text{ есть элемент } \sigma\text{-алгебры } \mathcal{F}.$$

Функцией распределения (ф.р.) случайной величины X называется функция

$$F(x) = \mathsf{P}\{\omega : X(\omega) < x\},$$

или, более кратко,

$$F(x) = \mathsf{P}\{X < x\}.$$

Свойства функции распределения $F(x)$:

1. $F(x)$ - неубывающая функция;
2. $F(x)$ непрерывна слева;
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$;
4. $\mathsf{P}\{x_1 \le X < x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$

Дискретные случайные величины

СВ X называется *дискретной*, если множество её возможных значений конечно или счетно: $x_1, x_2, \ldots$ В этом случае таблицу

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
P	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

где $p_i = \mathsf{P}\{X = x_i\}$, называют *законом распределения* случайной величины X. При этом всегда

$$\sum_i p_i = 1.$$

Примеры дискретных распределений

1. Биномиальное распределение. Определяется следующей таблицей:

X	0	1	$\ldots$	k	$\ldots$	n
P	$(1-p)^n$	$C_n^1 p(1-p)^{n-1}$	$\ldots$	$C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$	$\ldots$	p^n

где $n \in \mathbb{N}$ и $p \in (0,1)$ - параметры.

Может рассматриваться как распределение случайной величины X, представляющей собой число успехов в серии из n независимых испытаний с вероятностью успеха p в каждом испытании.

2. Геометрическое распределение. Определяется таблицей:

X	1	2	3	$\ldots$	k
P	p	$(1-p)p$	$(1-p)^2 p$	$\ldots$	$(1-p)^{k-1} p$

где $p \in (0,1)$ - параметр. Может рассматриваться как распределение случайной величины X, представляющей собой число испытаний до первого успеха в серии независимых испытаний с вероятностью успеха p в каждом испытании.

3. Распределение Пуассона. Определяется таблицей:

X	0	1	2	$\ldots$	k
P	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\dfrac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda}$	$\ldots$	$\dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

где $\lambda > 0$ - параметр. Распределение Пуассона может рассматриваться как предельный случай биномиального при $n \to \infty$, $p \to 0$, $np \to \lambda$.

Функция распределения дискретной случайной величины является ступенчатой (кусочно-постоянной). Пусть, например, случайная величина X задана таблицей:

X	x_1	x_2	x_3	x_4
P	p_1	p_2	p_3	p_4

Тогда

$$F(x) = \mathsf{P}\{X < x\} = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le x_1, \\ p_1, & \text{при } x_1 < x \le x_2, \\ p_1 + p_2, & \text{при } x_2 < x \le x_3, \\ p_1 + p_2 + p_3, & \text{при } x_3 < x \le x_4, \\ p_1 + p_2 + p_3 + p_4, & \text{при } x > x_4. \end{cases}$$

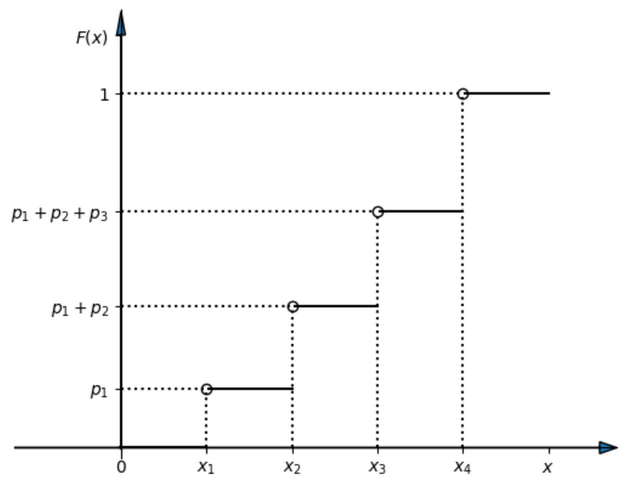


График этой функции имеет вид лесенки. Скачки функции распределения $F(x)$ происходят в точках, соответствующих возможным значениям случайной величины X, причём величины этих скачков равны вероятностям этих значений.

Непрерывные случайные величины

Случайная величина называется *непрерывной*, если существует неотрицательная функция $f(x)$, удовлетворяющая при любом x равенству

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt;$$

функция $f(x)$ называется *плотностью распределения* случайной величины X.

Свойства $f(x)$:

1. $f(x) \geq 0$;
2. при любых x_1 и x_2
$$\mathsf{P}\{x_1 < X < x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx;$$
3. если $f(x)$ непрерывна в точке x, то при малых Δx
$$\mathsf{P}\{x \leq X < x + \Delta x\} \approx f(x)\Delta x$$
с точностью до малых высшего порядка.

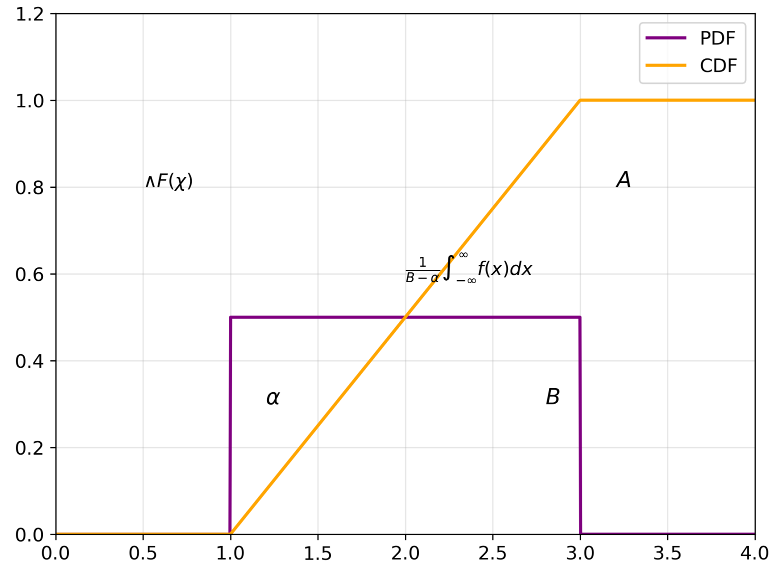
Примеры непрерывных распределений

1. Равномерное распределение на отрезке $[a, b]$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a, b], \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases}$$

Функция распределения:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 0, & x \leq a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a < x \leq b, \\ 1, & x > b \end{cases}$$

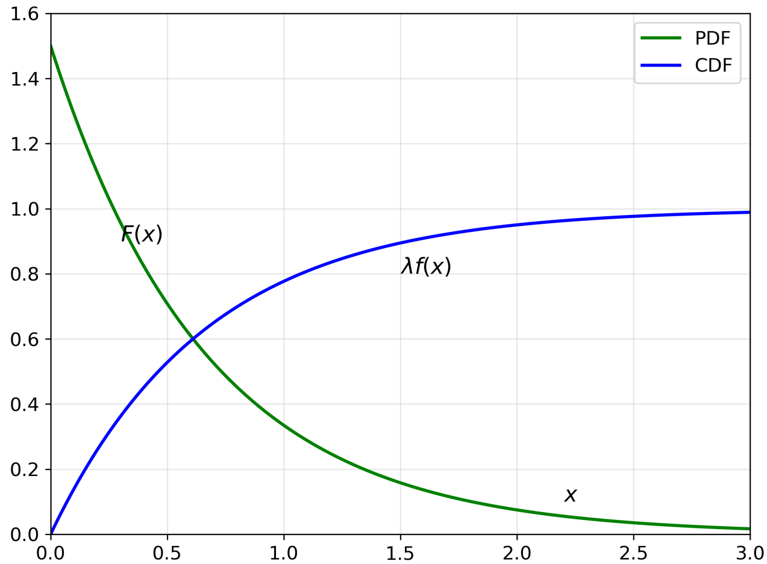


2. Показательное (экспоненциальное) распределение с параметром $\lambda > 0$:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Функция распределения:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases}$$



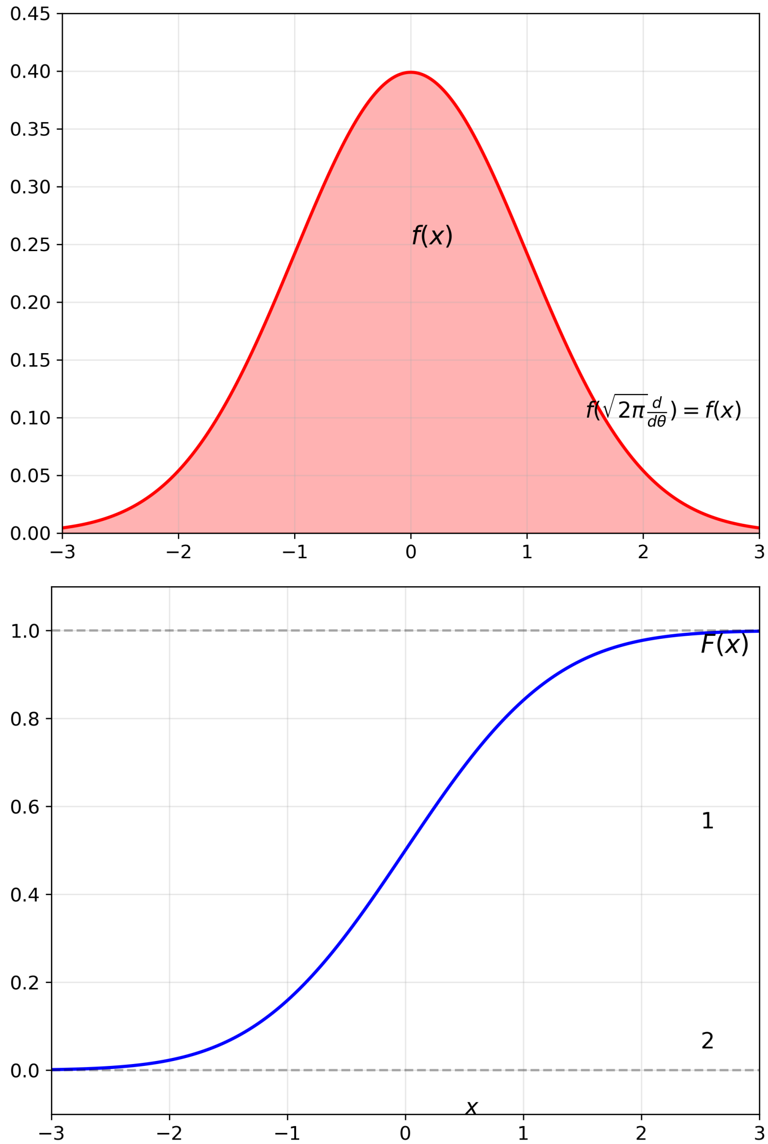
3. Нормальное (гауссовское) распределение с параметрами $\sigma > 0$ и a:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Функция распределения:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ - функция Лапласа.



0.45
0.40
0.35
0.30
0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
$f(x)$
$f(\sqrt{2\pi}\frac{d}{d\theta}) = f(x)$
−3
−2
−1
0
1
2
3
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
$F(x)$
1
2
x