Метод максимального правдоподобия

Идея метода

Пусть $x_1, \dots, x_n$ — независимая выборка из распределения с плотностью $f(x;\theta)$, зависящей от параметра θ.

Функцией правдоподобия называют совместную плотность

$$L(x;\theta) = f(x_1;\theta)\cdots f(x_n;\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta),$$

рассматриваемую как функцию параметра θ. В случае дискретных распределений $f(x_i;\theta) = P_\theta\{X = x_i\}$.

Оценкой максимального (наибольшего) правдоподобия ОМП называется оценка $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1, \dots, x_n)$, при которой достигает максимума функция правдоподобия:

$$L(x;\hat{\theta}) = \max_{\theta} L(x;\theta).$$

Метод максимального правдоподобия состоит в выборе такого значения $\hat{\theta}$, которое максимизирует функцию правдоподобия $L(\theta)$ при заданных наблюдениях. Интуитивно это значение делает наблюдаемые данные наиболее вероятными.

Часто удобнее максимизировать логарифмическую функцию правдоподобия:

$$\ell(\theta) = \ln L(x;\theta) = \sum_{i=1}^{n} \ln f(x_i;\theta).$$

Свойства ОМП

Если функция правдоподобия $L(x;\theta)$ дифференцируема по θ, то оценку наибольшего правдоподобия $\hat{\theta}$ можно найти, решив относительно θ уравнение правдоподобия

$$\frac{\partial L(x;\theta)}{\partial \theta} = 0. \tag{1}$$

Установим некоторые свойства оценок наибольшего правдоподобия.

Будем предполагать, что выполнены следующие **условия регулярности**:

1. Пусть параметр θ изменяется в интервале (θ_1, θ_2) и истинное значение параметра θ_0 лежит внутри этого интервала. Предположим, что в этом интервале существуют производные
$$\frac{\partial f}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial \theta^3}.$$

2. Интеграл $\int f(x;\theta)\,dx$ можно два раза дифференцировать под знаком интеграла, так что
$$\int \frac{\partial f}{\partial \theta}\,dx = 0, \qquad \int \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}\,dx = 0.$$

3. $$J_1(\theta_0) = \int \left(\frac{\partial \log f}{\partial \theta}\right)^2 f(x;\theta)\,dx\bigg|_{\theta=\theta_0} > 0, \qquad \left|\frac{\partial^3 \log f}{\partial \theta^3}\right| \le H(x),$$
и $\int H(x) f(x;\theta)\,dx \le M$, где M не зависит от θ.

Теорема 1. *При выполнении условий 1), 2), 3) уравнение правдоподобия (1) имеет решение $\hat{\theta}$, которое при $n \to \infty$ сходится по вероятности к θ_0. Эта оценка наибольшего правдоподобия асимптотически нормальна и асимптотически эффективна.*

Условия регулярности подробно

Для того чтобы оценки максимального правдоподобия обладали хорошими асимптотическими свойствами (состоятельностью, асимптотической нормальностью, достижением нижней границы Крамера–Рао), необходимо выполнение определённых условий регулярности. Эти условия обычно включают:

1. **Носитель распределения не зависит от параметра**. Множество значений случайной величины, где плотность (или вероятность) положительна, не должно зависеть от неизвестного параметра θ. Например, для равномерного распределения $U[0,\theta]$ это условие нарушается, поэтому для него стандартная теория требует отдельного рассмотрения.

2. **Параметрическое множество Θ является открытым интервалом (или открытым множеством в $\mathbb{R}^k$).**

3. **Функция правдоподобия достаточно гладкая**. Для одномерного параметра обычно предполагается, что $\ln f(x;\theta)$ трижды непрерывно дифференцируема по θ для почти всех x, и производные интегрируемы.

4. **Возможность дифференцирования под знаком интеграла**. Предполагается, что выполнены условия, позволяющие дифференцировать интегралы от функций, зависящих от параметра, под знаком интеграла (например, с помощью теоремы Лебега о мажорированной сходимости). В частности, требуются следующие соотношения:
$$\frac{\partial}{\partial\theta}\int_{-\infty}^{\infty} f(x;\theta)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial\theta} f(x;\theta)\,dx = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial\theta}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x;\theta)\,f(x;\theta)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln f(x;\theta)\,f(x;\theta)\,dx,$$
Эти равенства используются при выводе свойств информации Фишера, неравенства Крамера–Рао и асимптотической нормальности оценок максимального правдоподобия.

5. **Ограниченность третьей производной**. Существует функция $H(x)$ такая, что для всех θ из некоторой окрестности истинного значения θ_0 выполняется
$$\left|\frac{\partial^3}{\partial\theta^3}\ln f(x;\theta)\right| \leq H(x),$$
и $\int H(x)f(x;\theta)\,dx < \infty$ (равномерная по θ интегрируемость). Это условие необходимо для обоснования асимптотической нормальности и равномерной сходимости остаточных членов в разложении логарифмической функции правдоподобия.

6. **Информация Фишера**
$$I(\theta) = \mathrm{M}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(X;\theta)\right)^2\right\} = -\mathrm{M}\left\{\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln f(X;\theta)\right\}.$$
существует, конечна и положительна.

При выполнении этих условий ОМП является состоятельной, асимптотически нормальной и асимптотически эффективной.

Неравенство Крамера–Рао

Неравенство Крамера–Рао устанавливает нижнюю границу для дисперсии любой несмещённой оценки параметра (или функции от параметра) в регулярных моделях.

Теорема 2 (Неравенство Крамера–Рао для скалярного параметра)**.** *Пусть* $X_1, \ldots, X_n$ *— выборка из распределения с плотностью* $f(x;\theta)$*, удовлетворяющей условиям регулярности. Пусть* $\hat{\theta}_n = T(X_1, \ldots, X_n)$ *— несмещённая оценка параметра* θ*, т.е.* $\mathrm{M}\{T\} = \theta$*, и дисперсия* $\mathrm{D}\{T\}$ *конечна. Тогда*

$$\mathrm{D}\{T\} \geq \frac{1}{nI(\theta)},$$

где $I(\theta)$ *— информация Фишера, содержащаяся в одном наблюдении:*

$$I(\theta) = \mathrm{M}\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial\theta} \ln f(X;\theta) \right)^2 \right\} = -\mathrm{M}\left\{ \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \ln f(X;\theta) \right\}.$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда $\hat{\theta}_n$ *является линейной функцией от производной логарифмической функции правдоподобия, т.е. когда распределение принадлежит экспоненциальному семейству и оценка является эффективной.*

Замечание. *Если оценивается не сам параметр* θ*, а некоторая функция* $g(\theta)$*, то для несмещённой оценки* $\hat{g}(\theta)$ *нижняя граница имеет вид*

$$\mathrm{D}\{\hat{g}(\theta)\} \geq \frac{(g'(\theta))^2}{nI(\theta)}.$$

Неравенство Крамера–Рао показывает, что дисперсия любой несмещённой оценки не может быть меньше некоторой величины, определяемой информацией Фишера. Оценки, достигающие этой границы, называются *эффективными*. В регулярных моделях оценка максимального правдоподобия является асимптотически эффективной, т.е. её дисперсия стремится к границе Крамера–Рао при $n \to \infty$.

Свойства ОМП в условиях регулярности

При выполнении условий регулярности оценка максимального правдоподобия обладает свойствами:

- **Состоятельность**: $\hat{\theta}_{\text{МП}} \xrightarrow{P} \theta$ при $n \to \infty$.

- **Инвариантность**: если $\hat{\theta}$ — ОМП для θ, то для любой функции g оценкой максимального правдоподобия для $g(\theta)$ является $g(\hat{\theta})$. Это свойство выполняется без каких-либо дополнительных условий на взаимную однозначность g (в отличие от метода моментов, где это нужно для замены переменных). Однако если g не является взаимно однозначной, то под $g(\hat{\theta})$ понимается значение функции в точке $\hat{\theta}$, и оно действительно максимизирует перепараметризованную функцию правдоподобия.

- **Асимптотическая нормальность**:
$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_{\text{МП}} - \theta) \xrightarrow{d} N\left(0, I^{-1}(\theta)\right),$$
где $I(\theta)$ — информация Фишера, содержащаяся в одном наблюдении. Для регулярных моделей информация Фишера определяется как
$$I(\theta) = \mathrm{M}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(X;\theta)\right)^2\right\} = -\mathrm{M}\left\{\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln f(X;\theta)\right\}.$$
Таким образом, асимптотическая дисперсия ОМП совпадает с нижней границей Крамера–Рао для дисперсии несмещённых оценок. Напомним, что согласно определению из лекции 3, *эффективной* называется несмещённая оценка, имеющая наименьшую возможную дисперсию при заданном объёме выборки. В регулярных моделях эта наименьшая дисперсия равна $1/(nI(\theta))$. Для конечных n оценка максимального правдоподобия не обязательно является эффективной (т.е. не обязательно достигает этой границы), однако при $n \to \infty$ её дисперсия стремится к границе Крамера–Рао, поэтому говорят, что ОМП является *асимптотически эффективной*.

Случай дважды дифференцируемой функции правдоподобия

Если логарифмическая функция правдоподобия $\ell(\theta)$ дважды дифференцируема по θ и выполнены условия регулярности, то оценка максимального правдоподобия находится как решение уравнения правдоподобия:
$$\frac{\partial\ell(\theta)}{\partial\theta} = 0.$$
При этом информация Фишера может быть выражена через вторую производную:
$$I(\theta) = -\frac{1}{n}\mathrm{M}\left\{\frac{\partial^2\ell(\theta)}{\partial\theta^2}\right\}.$$

Для больших выборок справедливо приближенное равенство

$$\hat{\theta}_{\text{МП}} \approx N\left(\theta, \frac{1}{nI(\theta)}\right).$$

На практике часто используют наблюдаемую информацию Фишера

$$\hat{I}(\hat{\theta}) = -\frac{1}{n}\left.\frac{\partial^2 \ell(\theta)}{\partial \theta^2}\right|_{\theta=\hat{\theta}},$$

которая является состоятельной оценкой для $I(\theta)$.

Примеры

Нормальное распределение

Пусть наблюдаемая случайная величина имеет нормальное распределения, так что для всех элементов выборки $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, при этом оцениваемый параметр — вектор $\theta = (\mu, \sigma^2)$. Обратим внимание, что оценивается именно σ^2, а не σ, поэтому далее вычисления проводятся так, что σ^2 это переменная, а не квадрат переменной. Плотность распределения наблюдаемой случайной величины:

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Обозначим $\alpha = \sigma^2$, тогда

$$f(x; \mu, \alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\alpha}\right), \quad \alpha > 0.$$

Функция правдоподобия по выборке $X_1, \ldots, X_n$:

$$L(\mu, \alpha) = \prod_{i=1}^{n} f(X_i; \mu, \alpha) = (2\pi\alpha)^{-n/2} \exp\left(-\frac{1}{2\alpha}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2\right).$$

Логарифмическая функция правдоподобия:

$$\ell(\mu, \alpha) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln\alpha - \frac{1}{2\alpha}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2.$$

Максимизация по μ и α даёт систему уравнений:

$$\frac{\partial \ell}{\partial \mu} = \frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu) = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X},$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \alpha} = -\frac{n}{2\alpha} + \frac{1}{2\alpha^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\sigma}^2 = \hat{\alpha} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2.$$

Таким образом, ОМП для дисперсии является смещённая выборочная дисперсия (с делением на n, а не на $n-1$).

Экспоненциальное распределение

Пусть $X_i \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, плотность $f(x;\lambda) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$, $\lambda > 0$.
Функция правдоподобия по выборке $X_1, \ldots, X_n$:

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n}\left(\lambda e^{-\lambda X_i}\right) = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i}.$$

Логарифмическая функция правдоподобия:

$$\ell(\lambda) = \ln L(\lambda) = n \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Производная:

$$\frac{d\ell}{d\lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} X_i} = \frac{1}{\overline{X}}.$$

Распределение Пуассона

Пусть $X_i \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$, $P(X = k) = e^{-\lambda}\lambda^k / k!$.
Функция правдоподобия (вероятность наблюдать значения $X_1, \ldots, X_n$):

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{e^{-\lambda}\lambda^{X_i}}{X_i!}\right) = e^{-n\lambda}\lambda^{\sum_{i=1}^{n} X_i}\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{X_i!}.$$

Логарифмическая функция правдоподобия:

$$\ell(\lambda) = \ln L(\lambda) = -n\lambda + \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\ln \lambda - \sum_{i=1}^{n} \ln X_i!.$$

Производная:

$$\frac{d\ell}{d\lambda} = -n + \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X}.$$

Распределение Бернулли

Пусть $X_i \in \{0,1\}$, $P(X=1)=p$, $P(X=0)=1-p$.
Функция правдоподобия:

$$L(p)=\prod_{i=1}^{n}\Big(p^{X_i}(1-p)^{1-X_i}\Big)=p^{\sum X_i}(1-p)^{n-\sum X_i}.$$

Обозначим $m=\sum_{i=1}^{n} X_i$ — число успехов. Тогда

$$L(p)=p^m(1-p)^{n-m}.$$

Логарифмическая функция правдоподобия:

$$\ell(p)=m\ln p+(n-m)\ln(1-p).$$

Производная:

$$\frac{d\ell}{dp}=\frac{m}{p}-\frac{n-m}{1-p}=0 \quad\Rightarrow\quad \hat{p}=\frac{m}{n}=\overline{X}.$$

Равномерное распределение $U[0,\theta]$

Пусть $X_i \sim U[0,\theta]$, плотность $f(x;\theta)=\frac{1}{\theta}$ при $0\le x\le\theta$ и 0 иначе.
Функция правдоподобия:

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}\mathbf{I}_{[0,\theta]}(X_i)=\frac{1}{\theta^n}\mathbf{I}_{\theta\ge\max(X_1,\dots,X_n)}=\frac{1}{\theta^n}\mathbf{I}_{\theta\ge X_{(n)}}.$$

Таким образом, $L(\theta)>0$ только при $\theta\ge X_{(n)}$, где $X_{(n)}=\max\{X_1,\dots,X_n\}$.
На этом множестве (т.е. при $\theta\ge X_{(n)}$) функция правдоподобия
$L(\theta)=1/\theta^n$ убывает с ростом θ, поэтому максимум достигается при наименьшем возможном θ, т.е.

$$\hat{\theta}=X_{(n)}.$$

Это пример, где ОМП не находится дифференцированием, а требует анализа области определения.

Оценка функции от параметра (свойство инвариантности)

Если $\hat{\theta}$ — ОМП для θ, то для любой функции g оценкой максимального правдоподобия для $g(\theta)$ является $g(\hat{\theta})$.

Для нормального распределения рассмотрим коэффициент вариации $g(\mu,\sigma)=\sigma/\mu$ (при $\mu\neq0$). ОМП для него равна $\hat{\sigma}/\hat{\mu}$,
где $\hat{\mu}=\overline{X}$, $\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum(X_i-\overline{X})^2}$.

Пример: сравнение метода моментов и метода максимального правдоподобия

Рассмотрим распределение с плотностью

$$f(x;\theta) = \theta x^{\theta-1}, \quad 0 < x < 1, \quad \theta > 0.$$

Это частный случай бета-распределения (распределение Парето первого рода). Найдём оценки параметра θ методом моментов и методом максимального правдоподобия.

Метод моментов

Вычислим теоретическое математическое ожидание:

$$\mathrm{M}\{X\} = \int_0^1 x \cdot \theta x^{\theta-1}\,dx = \theta \int_0^1 x^{\theta}\,dx = \theta \cdot \frac{1}{\theta+1} = \frac{\theta}{\theta+1}.$$

Приравнивая к выборочному среднему $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, получаем уравнение

$$\overline{X} = \frac{\theta}{\theta+1}.$$

Решая его относительно θ, находим оценку метода моментов:

$$\hat{\theta}_{\text{ММ}} = \frac{\overline{X}}{1-\overline{X}}.$$

Метод максимального правдоподобия

Функция правдоподобия для выборки $X_1, \ldots, X_n$:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \theta X_i^{\theta-1} = \theta^n \left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{\theta-1}.$$

Логарифмическая функция правдоподобия:

$$\ell(\theta) = n\ln\theta + (\theta-1)\sum_{i=1}^{n}\ln X_i.$$

Дифференцируем по θ и приравниваем к нулю:

$$\frac{d\ell}{d\theta} = \frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^{n}\ln X_i = 0.$$

Отсюда

$$\hat{\theta}_{\text{МП}} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln X_i}.$$

Заметим, что $\ln X_i < 0$, так что знаменатель отрицателен, и оценка положительна.

Оценки различны:

$$\hat{\theta}_{\text{ММ}} = \frac{\overline{X}}{1 - \overline{X}}, \qquad \hat{\theta}_{\text{МП}} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln X_i}.$$

Задача для семинара 6 по ММП, распределение Рэлея

Севастьянов Б.А. 2024

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — независимая выборка из распределения Рэлея с плотностью

$$f(x;\theta) = \frac{x}{\theta^2}\, e^{-\frac{x^2}{2\theta^2}}, \quad x \geq 0,\ \theta > 0.$$

а) Проверить выполнение условий регулярности (носитель не зависит от параметра, параметрическое множество открыто, дифференцируемость, возможность дифференцирования под знаком интеграла, положительность информации Фишера).

б) Записать неравенство Крамера–Рао для дисперсии любой несмещённой оценки параметра θ.

в) Найти оценку максимального правдоподобия $\hat{\theta}$ для параметра θ.