Ответы на вопросы к экзамену 2025

1. **Комбинаторное правило произведения.**

Лекция 1, раздел "1. Правило произведения":

Пусть $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ - строка из k различных элементов.

Строки $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ и $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_k)$ будем называть одинаковыми, если

$$x_i = \tilde{x}_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, k,$$

т.е. если строки

a) состоят из одного и того же набора элементов

b) порядок следования элементов один и тот же

В противном случае строки $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ и $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_k)$ будем называть различными.

Пусть элемент x_1 в строке $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ может быть выбран из некоторой совокупности различных элементов числом способов n_1; при выбранном элементе x_1 элемент x_2 может быть выбран числом способов n_2 (при этом число n_2 не зависит от того, какой именно элемент был выбран в качестве x_1); ...; при выбранных элементах $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}$ элемент x_k может быть выбран числом способов n_k (при этом число n_k не зависит от того, какие именно элементы были выбраны в качестве $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}$).

Тогда число различных строк вида $(x_1, x_2, \dots, x_k)$, которое при этом может быть составлено, равно

$$N = n_1 n_2 \dots n_k$$

2. **Число перестановок, число сочетаний и число размещений.**

Лекция 1, раздел "2. Число перестановок P_n":

- число способов расположить n различных элементов в ряд.

- $n = 1$: $P_1 = 1$
- $n = 2$: $P_2 = 2$
- $n = 3$: $P_3 = 6$

В общем случае:

$$P_n = n!$$

Доказательство: пусть, для наглядности, элементы - это люди с разными именами.

расстановка в ряд $\Leftrightarrow$ последовательность-строка из n имён (n позиций)

число различных расстановок будет равно числу различных строк

$$
\begin{array}{cccc}
1 & 2 & 3 & n \\
\uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
\text{можем} & \text{можем} & \text{можем} & \text{можем} \\
\text{вписать} & \text{вписать} & \text{вписать} & \text{вписать} \\
\text{любое} & \text{любое} & \text{любое} & \text{только} \\
\text{из } n \text{ имён} & \text{из } n-1 \text{ оставшихся} & \text{из } n-2 \text{ оставшихся} & \text{одно имя} \\
 & \text{имён} & \text{имён} & \text{- последнее} \\
\uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
n \text{ способов} & (n-1) \text{ способ} & (n-2) \text{ способа} & 1 \text{ способ}
\end{array}
$$

Число различных строк:

$$N = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 1 = n!$$

Лекция 1, раздел "3. Число сочетаний из n элементов по k элементов C_n^k":

- число способов выбрать k элементов из n различных элементов без учёта порядка следования элементов в выборке.

Пример: $n = 3$, $k = 2$: $C_3^2 = 3$

Общий результат:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad \text{где } k \le n, \ 0! = 1$$

Доказательство: найдём число различных строк длины k, которые можно составить из n элементов.

Возьмём какие-либо k элементов и будем их переставлять, получим $k!$ различных строк; поменяем набор из k элементов, получим из них $k!$ новых строк. Но число различных наборов равно C_n^k, так что общее число различных строк будет равно $C_n^k \cdot k!$

С другой стороны, по правилу произведения из n элементов можно составить следующее число строк длины k:

$$
\begin{array}{cccc}
1 & 2 & 3 & k \\
\uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
n \text{ способов} & (n-1) \text{ способ} & (n-2) \text{ способа} & (n-k-1) \text{ способа}
\end{array}
$$

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-(k-1))$$

Значит,

$$C_n^k \cdot k! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-(k-1))$$

$$C_n^k = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-(k-1))}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Лекция 1, раздел "4. Число размещений из n по k элементов A_n^k":

- число способов выбрать k элементов из n различных элементов с учётом порядка следования элементов в выборке.

Пример:

$$n = 3, \quad k = 2$$

$$\square, \triangle, \circ$$

Возможные выборы:

$$\left.\begin{array}{c}\square\triangle, \triangle\square \\ \square\circ, \circ\square \\ \triangle\circ, \circ\triangle\end{array}\right\}\text{всего 6 вариантов: } A_3^2 = 6$$

Общий результат:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Доказательство: Следует из правила произведения:

$$\Rightarrow N = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

или, ещё проще,

$$A_n^k = C_n^k \cdot P_k \Rightarrow A_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot k! = \frac{n!}{(n-k)!}$$

3. **Равенство $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$.**

Лекция 1, раздел "Некоторые свойства чисел C_n^k":

(a) $C_n^k = C_n^{n-k}$ легко проверяются “в лоб”

(b) $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$

(c) $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$

Последняя формула доказывается по методу математической индукции:

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n+1-k}$$

Пусть $m = k+1$

$$= \sum_{m=1}^{n+1} C_n^{m-1} a^m b^{n+1-m} + \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^m b^{n+1-m}$$
$$= \sum_{m=1}^{n} C_n^{m-1} a^m b^{n+1-m} + a^{n+1} + \sum_{m=1}^{n} C_n^m a^m b^{n+1-m} + b^{n+1}$$
$$= \sum_{m=1}^{n} (C_n^{m-1} + C_n^m) a^m b^{n+1-m} + a^{n+1} + b^{n+1}$$
$$= \sum_{m=1}^{n} C_{n+1}^m a^m b^{n+1-m} + a^{n+1} + b^{n+1}$$
$$= \sum_{m=0}^{n+1} C_{n+1}^m a^m b^{n+1-m}, \quad \text{что и т.д.}$$

4. Следствие из 3:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$$

Этому равенству можно дать следующее истолкование: слева стоит число всех возможных подмножеств, которые можно составить из n различных элементов:

$$\begin{aligned}
C_n^0 &= 1 \text{ – пустое подмножество} \\
C_n^1 &= n \text{ – число всех подмножеств, состоящих из 1-го элемента} \\
C_n^2 &= \frac{n(n-1)}{2} \text{ – число всех подмножеств, состоящих из 2-х элементов} \\
&\ldots \\
C_n^{n-1} &= n \text{ – число всех подмножеств, состоящих из } (n-1)\text{-го элемента} \\
C_n^n &= 1 \text{ – подмножество, совпадающее с исходным множеством}
\end{aligned}$$

Это же число всех возможных подмножеств можно подсчитать по правилу произведения:

строка из n позиций:

⊔	⊔	⊔	...	⊔
N1	N2	N3	...	Nn

Перенумеруем все элементы.

Установим взаимно-однозначное соответствие между подмножеством и строкой:

если элемент $N\,l$ входит в подмножество, то в позицию $N\,l$ пишем «+», а если не входит – пишем «−», $l = 1, 2, \ldots, n$.

Например, подмножество, состоящее из элементов $N2$ и $N5$, будет соответствовать строке

$$- + - - + - - \cdots -$$

Число различных подмножеств будет соответствовать числу различных строк, которое может быть найдено по правилу произведения:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ n \text{ сомножителей}}}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2} \quad = \quad 2^n$$

4. **Операции над событиями. Их геометрическая интерпретация. Эквивалентные события.**

Лекция 2, раздел "Эксперимент. Событие. Операции над событиями.":

$\mathcal{E}$ - эксперимент

$$\mathcal{E} \quad \to \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{события}}}{A,\ B,\ C,\ \ldots} \quad \text{- исходы эксперимента}$$

Особые события:

- $\varnothing$ - невозможное
- Ω - достоверное

$A_1 + A_2 + \cdots + A_n$ - сумма событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$

$A_1 A_2 \ldots A_n$ - произведение событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$

$\overline{A}$ - событие, противоположное событию A

Лекция 2, раздел "Геометрическая интерпретация:"

$\mathcal{E}$ - бросание точки в область Ω.

Ω	Ω	Ω
$A + B$ заштриховано	AB заштриховано	$\overline{A}$ заштриховано

A и B **несовместны**, если не могут произойти одновременно в одном эксперименте.

События A и B называются **эквивалентными**, если из того факта, что произошло A, неминуемо следует, что произошло B, и наоборот. В этом случае пишут $A = B$.

Лекция 2, раздел "Свойства операций над событиями":

$$\begin{aligned}
&A + A = AA = A, \quad A + B = B + A, \quad AB = BA,\\
&(A + B) + C = A + (B + C), \quad (AB)C = A(BC),\\
&A(B + C) = AB + AC,\\
&A + \overline{A} = \Omega, \quad A\overline{A} = \varnothing,\\
&A + \Omega = \Omega, \quad A + \varnothing = A, \quad A\varnothing = \varnothing
\end{aligned}$$

Более содержательные свойства:

$$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}, \quad \overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$$

Их обобщения:

$$\overline{A_1 + A_2 + \cdots + A_n} = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdots \overline{A_n}, \quad \overline{A_1 A_2 \ldots A_n} = \overline{A_1} + \overline{A_2} + \cdots + \overline{A_n}$$

5. **Классическая формула подсчёта вероятности. Геометрический подход к подсчёту вероятности.**

Лекция 2, раздел "Классическая формула подсчета вероятности":

Рассмотрим эксперимент $\mathcal{E}$, все результаты которого могут быть описаны с помощью конечного числа равновозможных исходов

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n,$$

причём никакие два не могут произойти одновременно: $\omega_i \omega_j = \varnothing \ \forall i \neq j$.

Пусть к событию A приводят исходы $i_1, i_2, \ldots, i_m$, $m \leq n$, и только они. Тогда по определению положим

$$\mathsf{P}\{A\} = \frac{m}{n}. \qquad (**)$$

n - общее число исходов; m - число благоприятных исходов.

Лекция 2, раздел "Геометрический подход к подсчету вероятности":

(Классическая формула в случае континуума числа исходов ω)

Эксперимент $\leftarrow$ бросание случайным образом точки в некоторую область Ω

Факт проведения эксперимента мы связываем с фиксированием точки в области Ω, результат эксперимента однозначно определяет точку внутри Ω, а любая точка из Ω дает исчерпывающую информацию, чем закончился эксперимент.

Событие $A \leftarrow$ попадание в подмножество A из Ω

По классической формуле $\mathsf{P}\{A\} = \frac{m}{n}$, но теперь m и n бесконечны.

Условно $m \sim \text{mes } A$, $n \sim \text{mes } \Omega$. Поэтому

$$\mathsf{P}\{A\} = \frac{\text{mes } A}{\text{mes } \Omega}$$

6. **Общий аксиоматический подход к определению вероятности, предложенный А. Н. Колмогоровым.**

Лекция 2, раздел "Общий аксиоматический подход Колмогорова А.Н.":

$\mathcal{E} \to \Omega = \{\omega\}$ - множество элементарных исходов

$\mathcal{F}$ это σ-алгебра подмножеств на Ω, т.е. система подмножеств такая, что:

(a) $\Omega \in \mathcal{F}$, $\varnothing \in \mathcal{F}$

(b) если $A \in \mathcal{F}$, то $\overline{A} \in \mathcal{F}$

(c) если $A_n \in \mathcal{F}$ $\forall n = 1, 2, \ldots$, то $\bigcup\limits_n A_n \in \mathcal{F}$, $\bigcap\limits_n A_n \in \mathcal{F}$

(Достаточно в 2. выполнения одного из условий $\bigcup\limits_n A_n \in \mathcal{F}$ или $\bigcap\limits_n A_n \in \mathcal{F}$, поскольку другое соотношение следует из этого одного и 2.)

Элементы σ-алгебры $\mathcal{F}$ называются событиями.

Аксиомы:

(a) Каждому событию A поставлено в соответствие неотрицательное число $\mathsf{P}\{A\}$ (называемое вероятностью)

(b) $\mathsf{P}\{\Omega\} = 1$

(c) Если события $A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots$ попарно несовместны, то

$$\mathsf{P}\{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \ldots\} = \mathsf{P}\{A_1\} + \mathsf{P}\{A_2\} + \cdots + \mathsf{P}\{A_n\} + \ldots$$

Тройка $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}\}$ называется *вероятностным пространством.*

Частный случай:

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$

σ-алгебра $\mathcal{F}$ включает все 2^n подмножеств множества Ω.

Если все исходы $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ равновозможны, то для любого события $A \subseteq \Omega$ ($A \subseteq \mathcal{F}$) определим

$$\mathsf{P}\{A\} = \frac{m}{n},$$

где m - число тех исходов из $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, которые приводят к A, тогда утверждения аксиом 1, 2 и 3 будут выполнены.

7. **Условная вероятность. Определение независимости событий. Формулы полной вероятности и Байеса.**

Лекция 3, раздел "Условная вероятность":

Пусть A, B - события, связанные с экспериментом $\mathcal{E}$.

$\mathcal{E} \to A, B, \ldots$

Пусть $\mathsf{P}\{B\} \neq 0$. Отношение $\frac{\mathsf{P}\{AB\}}{\mathsf{P}\{B\}}$ называется *условной вероятностью* события A при условии, что произошло B, и обозначается $\mathsf{P}\{A|B\}$:

$$\mathsf{P}\{A|B\} = \frac{\mathsf{P}\{AB\}}{\mathsf{P}\{B\}}$$

Содержательная мотивировка этого определения:

Пусть $\mathcal{E}$ может быть описан с помощью конечного числа n несовместных и равновозможных исходов, из которых исходы n_A приводят к событию A, исходы n_B - к событию B, исходы n_{AB} - к событию AB.

Предположим, что точно известно, что произошло событие B, т.е. реализовался один из исходов n_B; тогда степень ожидания того, что при этом произошло и A, естественно определить как:

$$\frac{n_{AB}}{n_B}, \quad \text{или} \quad \frac{n_{AB}/n}{n_B/n} = \frac{\mathsf{P}\{AB\}}{\mathsf{P}\{B\}}$$

Лекция 3, раздел "Определение независимости событий":

Событие A называется *независимым от* B, если $\mathsf{P}\{A|B\} = \mathsf{P}\{A\}$.

Утверждение. Пусть $\mathsf{P}\{A\} \neq 0$, $\mathsf{P}\{B\} \neq 0$. Если событие A не зависит от B, то и событие B не зависит от A.

Доказательство:

$$\text{По условию: } \mathsf{P}\{A|B\} = \mathsf{P}\{A\}$$
$$\text{По определению: } \mathsf{P}\{A|B\} = \frac{\mathsf{P}\{AB\}}{\mathsf{P}\{B\}} \Rightarrow \mathsf{P}\{AB\} = \mathsf{P}\{A\} \cdot \mathsf{P}\{B\}$$
$$\text{По определению: } \mathsf{P}\{B|A\} = \frac{\mathsf{P}\{BA\}}{\mathsf{P}\{A\}} = \frac{\mathsf{P}\{A\} \cdot \mathsf{P}\{B\}}{\mathsf{P}\{A\}} = \mathsf{P}\{B\}$$

Следствие. Для независимых событий A и B (при $\mathsf{P}\{A\} \neq 0$, $\mathsf{P}\{B\} \neq 0$)

$$\mathsf{P}\{AB\} = \mathsf{P}\{A\} \cdot \mathsf{P}\{B\}. \qquad (*)$$

Заметим, что если условие $\mathsf{P}\{A\} \neq 0$, $\mathsf{P}\{B\} \neq 0$ нарушено, то равенство $(*)$ может выполниться.

Лекция 3, раздел "Формула полной вероятности":

Пусть событие A может осуществиться с одним и только одним из n несовместных событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$; в частности это условие выполнится если $H_1, H_2, \ldots, H_n$ - полная группа событий:

Определение. $H_1, H_2, \ldots, H_n$ - полная группа событий, если

$$H_1 + H_2 + \cdots + H_n = \Omega, \quad H_i H_j = \varnothing \ \forall i \neq j.$$

Тогда

$$A = AH_1 + AH_2 + \cdots + AH_n,$$

откуда

$$\mathsf{P}\{A\} = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}\{AH_i\},$$

или

$$\mathsf{P}\{A\} = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}\{A|H_i\} \cdot \mathsf{P}\{H_i\}$$

- *формула полной вероятности.*

Лекция 3, раздел "Формула Байеса":

(формула апостериорных вероятностей гипотез)

Пусть A - некоторое событие, а $H_1, H_2, \ldots, H_n$ - полная группа событий, связанных с экспериментом $\mathcal{E}$. Можем написать:

$$\mathsf{P}\{H_i A\} = \mathsf{P}\{A|H_i\} \cdot \mathsf{P}\{H_i\} = \mathsf{P}\{H_i|A\} \cdot \mathsf{P}\{A\}$$

следовательно

$$\mathsf{P}\{H_i|A\} = \frac{\mathsf{P}\{A|H_i\} \cdot \mathsf{P}\{H_i\}}{\mathsf{P}\{A\}}$$

или

$$\mathsf{P}\{H_i|A\} = \frac{\mathsf{P}\{A|H_i\} \cdot \mathsf{P}\{H_i\}}{\sum_{j=1}^{n} \mathsf{P}\{A|H_j\} \cdot \mathsf{P}\{H_j\}}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

- *формула Байеса.*

Формула Байеса может быть проинтерпретирована следующим образом: $H_1, H_2, \ldots, H_n$ - гипотезы, приводящие к событию A, которое фактически произошло, причём к A смогла привести одна и только одна из гипотез. Тогда условную вероятность $\mathsf{P}\{H_i|A\}$ в левой части можно интерпретировать как апостериорную (т.е. считаемую после того, как факт A реализовался) вероятность гипотезы H_i.

8. **Схема независимых испытаний. Формула Бернулли. Обобщённая формула Бернулли.**

Лекция 4, раздел "Схема независимых испытаний Бернулли. Формула Бернулли и её асимптотики.":

Событие A связано с экспериментом $\mathcal{E}$, $\mathsf{P}\{A\} = p$, $\mathsf{P}\{\overline{A}\} = 1 - p = q$.

Эксперимент $\mathcal{E}$ повторяется n раз. Пусть $P_n(k)$ - вероятность того, что в серии из n экспериментов событие A произошло ровно k раз, $k = 0, 1, \ldots, n$. Легко доказать, что

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

- *формула Бернулли.*

Лекция 4, раздел "Обобщенная формула Бернулли":

Пусть $A_1, A_2, \dots, A_k$ - полная группа событий, связанных с экспериментом $\mathcal{E}$. Пусть $P_n(m_1, m_2, \dots, m_k)$ - вероятность того, что при проведении n экспериментов событие A_1 произошло m_1 раз, ... событие A_k произошло m_k раз, так что $m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$. Обозначим $\mathsf{P}\{A_1\} = p_1, \dots, \mathsf{P}\{A_k\} = p_k$.

Тогда

$$P_n(m_1, m_2, \dots, m_k) = \frac{n!}{m_1! m_2! \dots m_k!} p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_k^{m_k} \tag{1}$$

- *обобщенная формула Бернулли.*

Её доказательство аналогично доказательству классической формулы Бернулли. Последняя будет частным случаем формулы (1) при $k = 2$. В этом случае $A_1 = A$, $A_2 = \overline{A}$, $p_1 = p$, $p_2 = 1 - p = q$, $m_1 = m$, $m_2 = n - m$ и

$$P_n(m_1, m_2) = P_n(m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}$$

9. **Наиболее вероятное число успехов в серии независимых испытаний.**

Лекция 4, раздел "Наиболее вероятное число успехов в серии из n испытаний":

В формуле Бернулли

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

при фиксированных n и p (а значит, и q) найдём такое k, при котором $P_n(k)$ будет максимальным.

Наиболее вероятное число успехов $k_{\text{н.в.}}$ - значение k, при котором (при фиксированных n и p) вероятность

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

принимает наибольшее значение.

Поскольку

$$\frac{P_n(k+1)}{P_n(k)} = \frac{(n-k)p}{(k+1)q},$$

то

$$\begin{aligned} P_n(k+1) > P_n(k) &\Leftrightarrow k < np - q \\ P_n(k+1) = P_n(k) &\Leftrightarrow k = np - q \\ P_n(k+1) < P_n(k) &\Leftrightarrow k > np - q \end{aligned} \tag{*}$$

Обозначим $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} np - q$. Тогда из соотношений (*) следует:

- если α - не целое, то $k_{\text{н.в.}} = [\alpha] + 1$;
- если α - целое, то $k_{\text{н.в.}} = \alpha$ и $k_{\text{н.в.}} = \alpha + 1$;

где $[\alpha]$ - целая часть числа α. Таким образом, в итоге можем написать:

$$np - q \le k_{\text{н.в.}} \le np + p. \tag{**}$$

Если $np - q$ не целое, то неравенствам (**) удовлетворяет единственное $k_{\text{н.в.}}$; если же $np - q$ целое, то будет два значения $k_{\text{н.в.}}$: $k_{\text{н.в.}} = np - q$ и $k_{\text{н.в.}} = np + p$.

10. **Приближённые локальная и интегральная формулы Муавра–Лапласа и приближённая формула Пуассона.**

Лекция 4, раздел "Асимптотики формул Бернулли":

Локальная теорема Муавра-Лапласа

Если вероятность наступления некоторого события в n независимых испытаниях постоянна и равна p $(0 < p < 1)$, то при $n \to \infty$

$$\frac{\sqrt{npq}P_n(k)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}} \to 1$$

равномерно для всех k, для которых $x = x_{nk} = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$ находится в каком-либо конечном интервале.

Интегральная теорема Муавра-Лапласа

Для фиксированных z_1 и z_2 при $n \to \infty$

$$P_n(np + z_1\sqrt{npq} \le k \le np + z_2\sqrt{npq}) \to \Phi(z_2) - \Phi(z_1)$$

где $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}dt$ - функция Лапласа.

Теорема Пуассона

Если p_n - вероятность успеха в серии из n испытаний и $p_n \to 0$ при $n \to \infty$, то

$$P_n(k) - \frac{\lambda_n^k}{k!}e^{-\lambda_n} \to 0, \quad \text{где } \lambda_n = np_n$$

11. **Понятие случайной величины (СВ) и её функции распределения. Свойства функции распределения.**

Лекция 5, раздел "Случайная величина. Функция распределения случайной величины и её свойства.":

Пусть $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}\}$ - вероятностное пространство, связанное с экспериментом $\mathcal{E}$. Пусть $X = X(\omega)$ - конечная вещественная функция, определенная для всех элементарных событий ω, составляющих множество $\Omega = \{\omega\}$. Говорят, что функция X измерима и называют её *случайной величиной*, если

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \{\omega : X(\omega) < x\} \text{ есть элемент } \sigma\text{-алгебры } \mathcal{F}.$$

Функцией распределения (ф.р.) случайной величины X называется функция

$$F(x) = \mathsf{P}\{\omega : X(\omega) < x\},$$

или, более кратко,

$$F(x) = \mathsf{P}\{X < x\}.$$

Свойства функции распределения $F(x)$:

(a) $F(x)$ - неубывающая функция;

(b) $F(x)$ непрерывна слева;

(c) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$;

(d) $\mathsf{P}\{x_1 \le X < x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$

12. **Основные дискретные распределения (биномиальное, геометрическое и Пуассона).**

Лекция 5, раздел "Примеры дискретных распределений":

1. Биномиальное распределение. Определяется следующей таблицей:

X	0	1	$\ldots$	k	$\ldots$	n
P	$(1-p)^n$	$C_n^1 p(1-p)^{n-1}$	$\ldots$	$C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$	$\ldots$	p^n

где $n \in \mathbb{N}$ и $p \in (0,1)$ - параметры.

Может рассматриваться как распределение случайной величины X, представляющей собой число успехов в серии из n независимых испытаний с вероятностью успеха p в каждом испытании.

2. Геометрическое распределение. Определяется таблицей:

X	1	2	3	$\ldots$	k
P	p	$(1-p)p$	$(1-p)^2 p$	$\ldots$	$(1-p)^{k-1} p$

где $p \in (0,1)$ - параметр. Может рассматриваться как распределение случайной величины X, представляющей собой число испытаний до первого успеха в серии независимых испытаний с вероятностью успеха p в каждом испытании.

3. Распределение Пуассона. Определяется таблицей:

X	0	1	2	$\ldots$	k
P	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda}$	$\ldots$	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

где $\lambda > 0$ - параметр. Распределение Пуассона может рассматриваться как предельный случай биномиального при $n \to \infty$, $p \to 0$, $np \to \lambda$.

13. **Понятие плотности распределения для непрерывной случайной величины. Основные непрерывные распределения (равномерное на отрезке, показательное, нормальное).**

Лекция 5, раздел "Непрерывные случайные величины":

Случайная величина называется *непрерывной*, если существует неотрицательная функция $f(x)$, удовлетворяющая при любом x равенству

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt;$$

функция $f(x)$ называется *плотностью распределения* случайной величины X.

Свойства $f(x)$:

(a) $f(x) \geq 0$;

(b) при любых x_1 и x_2

$$\mathsf{P}\{x_1 < X < x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx;$$

(c) если $f(x)$ непрерывна в точке x, то при малых Δx

$$\mathsf{P}\{x \leq X < x + \Delta x\} \approx f(x)\Delta x$$

с точностью до малых высшего порядка.

Лекция 5, раздел "Примеры непрерывных распределений":

1. Равномерное распределение на отрезке $[a, b]$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a,b], \\ 0, & x \notin [a,b] \end{cases}$$

Функция распределения:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 0, & x \leq a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a < x \leq b, \\ 1, & x > b \end{cases}$$

2. Показательное (экспоненциальное) распределение с параметром $\lambda > 0$:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Функция распределения:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases}$$

3. Нормальное (гауссовское) распределение с параметрами $\sigma > 0$ и a:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Функция распределения:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ - функция Лапласа.

14. **Функция распределения системы двух случайных величин. Плотность совместного распределения двух непрерывных СВ. Общие свойства. Условие независимости случайных величин.**

Лекция 6, раздел "Функция распределения системы случайных величин":

Пусть на вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}\}$ определены n случайных величин $X_1 = X_1(\omega), \dots, X_n = X_n(\omega)$.

Для любых чисел $x_1, x_2, \dots, x_n \in (-\infty; +\infty)$ определена вероятность

$$\mathsf{P}\{X_1 < x_1, X_2 < x_2, \dots, X_n < x_n\},$$

которая называется *функцией распределения системы случайных величин* $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ и обозначается $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathsf{P}\{X_1 < x_1, X_2 < x_2, \dots, X_n < x_n\}.$$

Функция $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ удовлетворяет следующим свойствам:

(a) F есть неубывающая функция по каждому аргументу;

(b) F непрерывна слева по каждому аргументу;

(c) $\lim\limits_{\substack{x_1 \to +\infty \\ \dots \\ x_n \to +\infty}} F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1;$

(d) $\forall k (1 \le k \le n) \quad \lim\limits_{x_k \to -\infty} F(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n) = 0.$

Лекция 6, раздел "Плотность распределения":

Если существует функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ такая, что $\forall x_1, x_2, \dots, x_n$

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int\limits_{-\infty}^{x_1} \int\limits_{-\infty}^{x_2} \cdots \int\limits_{-\infty}^{x_n} f(t_1, t_2, \dots, t_n) dt_1 dt_2 \dots dt_n,$$

то эта функция называется *плотностью распределения системы случайных величин* $(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

Её свойства:

(a) $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \ge 0;$

(b) вероятность попадания случайной n-мерной точки $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ в какую-либо область $G \subset \mathbb{R}^n$ равна

$$\int \underset{G}{\cdots} \int f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n;$$

(c) в частности, если f непрерывна в точке $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, то при малых $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$

$$\mathsf{P}\begin{Bmatrix} x_1 \le X_1 < x_1 + \Delta x_1, \\ x_2 \le X_2 < x_2 + \Delta x_2, \\ \dots \\ x_n \le X_n < x_n + \Delta x_n \end{Bmatrix} \approx f(x_1, x_2, \dots, x_n) \Delta x_1 \Delta x_2 \dots \Delta x_n$$

с точностью до малых высшего порядка.

Лекция 6, раздел "Независимость случайных величин":

Случайные величины $X_1, X_2, \dots, X_n$ называются *независимыми*, если для любой группы $X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_k}$ этих величин

$$\mathsf{P}\{X_{i_1} < x_{i_1}, X_{i_2} < x_{i_2}, \dots, X_{i_k} < x_{i_k}\} = \prod_{j=1}^{k} \mathsf{P}\{X_{i_j} < x_{i_j}\}$$

для произвольных $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$ и любом k $(1 \le k \le n)$.

В частности, при $k = n$ в терминах функций распределения это равенство принимает вид:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_1(x_1)F_2(x_2)\dots F_n(x_n),$$

где $F_k(x_k) = \mathsf{P}\{X_k < x_k\}$ — функция распределения случайных величин X_k.

Из определения плотности $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ следует, что в точках непрерывности функции f

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}.$$

В дальнейшем пусть для определенности $n = 2$.

Итак, если X_1 и X_2 — независимые случайные величины, то

$$F(x_1, x_2) = F_1(x_1)F_2(x_2).$$

Если при этом существуют плотности распределения $f_1(x_1)$ и $f_2(x_2)$ случайных величин X_1 и X_2, то

$$f(x_1, x_2) = f_1(x_1)f_2(x_2).$$

15. **Определение и свойства математического ожидания СВ. Математическое ожидание СВ, определяемых основными дискретными и непрерывными распределениями.**

Лекция 7, раздел "Определение и свойства математического ожидания случайных величин":

Пусть X - дискретная случайная величина:

X	x_1	x_2	$\dots$	x_k
P	p_1	p_2	$\dots$	p_k

Определение Математическим ожиданием дискретной случайной величины X называется число

$$\mathsf{M}\{X\} = \sum_i x_i p_i,$$

если ряд справа сходится абсолютно. (Если X - дискретная случайная величина с конечным спектром, то ряд превращается в конечную сумму.) В противном случае говорят, что X не имеет математического ожидания.

Определение Математическое ожидание непрерывной случайной величины X с плотностью распределения $f(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$, есть число

$$\mathsf{M}\{X\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx,$$

если интеграл сходится абсолютно. В противном случае говорим, что случайная величина X не имеет математического ожидания.

Лекция 7, примеры 1-6:

Пример 1. Пусть случайная величина X распределена по биномиальному закону:

X	0	1	$\dots$	k	$\dots$	n
P	q^n	npq^{n-1}	$\dots$	$C_n^k p^k q^{n-k}$	$\dots$	p^n

Тогда $\mathsf{M}\{X\} = np$.

Пример 2. Пусть случайная величина X распределена по геометрическому закону:

X	1	2	$\dots$	k
P	p	qp	$\dots$	$q^{k-1}p$

$0 < p < 1,\ q = 1 - p$

Тогда $\mathsf{M}\{X\} = \frac{1}{p}$.

Пример 3. Пусть случайная величина X распределена по закону Пуассона:

X	0	1	2	$\dots$	k
P	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2}e^{-\lambda}$	$\dots$	$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

Тогда $\mathsf{M}\{X\} = \lambda$.

Пример 4. Пусть случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[a, b]$, т.е.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [a,b] \\ \frac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \end{cases}$$

Тогда $\mathsf{M}\{X\} = \frac{a+b}{2}$.

Пример 5. Пусть случайная величина X имеет показательное распределение с параметром λ:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \Rightarrow \mathsf{M}\{X\} = \frac{1}{\lambda}$$

Пример 6. Пусть случайная величина X имеет нормальное распределение:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in (-\infty; +\infty)$$

Тогда $\mathsf{M}\{X\} = a$.

Лекция 7, раздел "Свойства математического ожидания":

(a) Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:

$$\mathsf{M}\{c \cdot X\} = c \cdot \mathsf{M}\{X\}$$

(b) Математическое ожидание суммы равно сумме математических ожиданий:

$$\mathsf{M}\{X_1 + X_2 + \dots + X_n\} = \mathsf{M}\{X_1\} + \mathsf{M}\{X_2\} + \dots + \mathsf{M}\{X_n\}$$

(c) Математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий сомножителей:

$$\mathsf{M}\{X_1 X_2 \dots X_n\} = \mathsf{M}\{X_1\} \cdot \mathsf{M}\{X_2\} \cdot \dots \cdot \mathsf{M}\{X_n\}$$

(d) Пусть X - дискретная случайная величина

X	x_1	x_2	$\ldots$
P	p_1	p_2	$\ldots$

Пусть $\varphi(x)$ - заданная функция, причём $x_1, x_2, \ldots$ входят в область определения $\varphi(x)$.

Тогда определим случайную величину Y: $Y = \varphi(X)$.

$$\mathsf{M}\{Y\} = \sum_i p_i \cdot \varphi(x_i).$$

(e) Если в предыдущем пункте X - непрерывная случайная величина с плотностью $f(x)$, то

$$\mathsf{M}\{Y\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f(x) dx.$$

16. **Определение и свойства дисперсии СВ. Дисперсии для основных дискретных и непрерывных распределений.**

Лекция 8, раздел "Дисперсия случайной величины и её свойства":

Дисперсией случайной величины X называется число

$$\mathsf{D}X = \mathsf{M}\left\{(X - \mathsf{M}X)^2\right\}, \tag{1}$$

если математическое ожидание справа существует.

- Если X — дискретная случайная величина:

X	x_1	x_2	$\ldots$
P	p_1	p_2	$\ldots$

то из (1) получаем:

$$\mathsf{D}X = \sum_i (x_i - \mathsf{M}X)^2 p_i.$$

- Если X — непрерывная случайная величина с плотностью $f(x)$, то из (1) получаем:

$$\mathsf{D}X = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathsf{M}X)^2 f(x)\, dx.$$

Свойства дисперсии

(a) Прибавление константы к случайной величине не меняет её дисперсии:

$$\mathsf{D}(X + \mathrm{const}) = \mathsf{D}X.$$

(b) Постоянный множитель выносится из-под знака дисперсии в квадрате:

$$\mathsf{D}(\mathrm{const} \cdot X) = (\mathrm{const})^2 \cdot \mathsf{D}X.$$

(c) Если $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые случайные величины, имеющие дисперсии $\mathsf{D}X_1, \mathsf{D}X_2, \ldots, \mathsf{D}$ то

$$\mathsf{D}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = \mathsf{D}X_1 + \mathsf{D}X_2 + \ldots + \mathsf{D}X_n.$$

(d) $\mathsf{D}X = \mathsf{M}[X^2] - (\mathsf{M}X)^2$.

Лекция 8, разделы "Дисперсии основных дискретных распределений"и "Дисперсии основных непрерывных распределений":

(a) Пусть X имеет биномиальное распределение с параметрами n и p:

X	0	1	$\ldots$	k	$\ldots$	n
P	q^n	npq^{n-1}	$\ldots$	$C_n^k p^k q^{n-k}$	$\ldots$	p^n

тогда

$$\mathsf{D}X = npq, \quad \text{где } q = 1 - p.$$

(b) Пусть X имеет геометрическое распределение с параметром p:

X	1	2	$\ldots$	k	$\ldots$
P	p	qp	$\ldots$	$q^{k-1}p$	$\ldots$

тогда

$$\mathsf{D}X = \frac{q}{p^2}, \quad \text{где } q = 1 - p.$$

(c) Пусть X имеет распределение Пуассона с параметром λ:

X	0	1	$\ldots$	k	$\ldots$
P	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\ldots$	$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	$\ldots$

тогда

$$\mathsf{D}X = \lambda.$$

4. Если X определяется плотностью

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \quad \text{(равномерное распределение на отрезке)} \\ 0, & x \notin [a,b] \end{cases}$$

тогда

$$\mathsf{D}X = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

5. Если X определяется плотностью

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \quad \text{(показательное распределение)} \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

тогда

$$\mathsf{D}X = \frac{1}{\lambda^2}.$$

6. Если X определяется плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in (-\infty; +\infty) \quad \text{(нормальное распределение)},$$

тогда

$$\mathsf{D}X = \sigma^2.$$

17. **Понятие условного математического ожидания. Разложение безусловного математического ожидания по условным (аналог формулы полной вероятности).**

Лекция 8, раздел "Условное математическое ожидание":

Пусть X — дискретная случайная величина, определяемая:

$$\begin{array}{c|ccc} X & x_1 & x_2 & \dots \\ \hline P & p_1 & p_2 & \dots \end{array}$$

Пусть A — некоторое событие (относящееся к тому же вероятностному пространству, что и случайная величина X). *Условным математическим ожиданием* случайной величины X при условии, что произошло событие A, называется число

$$\mathsf{M}[X \mid A] = \sum_i x_i \cdot \mathsf{P}\{X = x_i \mid A\},$$

если ряд справа сходится абсолютно (если X — случайная величина с конечным спектром, то справа будет конечная сумма и вопрос о сходимости отпадает).

Пусть $H_1, H_2, \dots, H_n$ — полная группа событий. Тогда по формуле полной вероятности:

$$\mathsf{P}\{X = x_i\} = \sum_{j=1}^{n} \mathsf{P}\{X = x_i \mid H_j\} \cdot \mathsf{P}\{H_j\}.$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \mathsf{M}X = \sum_i x_i \mathsf{P}\{X = x_i\} &= \sum_i x_i \sum_{j=1}^{n} \mathsf{P}\{X = x_i \mid H_j\} \mathsf{P}\{H_j\} = \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_i x_i \mathsf{P}\{X = x_i \mid H_j\} \right) \mathsf{P}\{H_j\} = \\ &= \sum_{j=1}^{n} \mathsf{P}\{H_j\} \cdot \mathsf{M}[X \mid H_j]. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\mathsf{M}X = \sum_{j=1}^{n} \mathsf{M}[X \mid H_j] \cdot \mathsf{P}\{H_j\}. \tag{2}$$

Этот результат можно рассматривать как аналог формулы полной вероятности для математического ожидания.

Если X — непрерывная случайная величина с плотностью $f(x)$, то

$$\mathsf{M}X = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx,$$

а условное математическое ожидание $\mathsf{M}[X \mid A]$ определяется по формуле:

$$\mathsf{M}[X \mid A] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x \mid A)\, dx,$$

где условная плотность $f(x \mid A)$ определяется как:

$$f(x \mid A) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mathsf{P}\{x \le X < x + \Delta x \mid A\}}{\Delta x}.$$

При этом результат (2) сохраняет свою силу.

18. **Ковариация и коэффициент корреляции случайных величин. Их свойства.**

Лекция 9, раздел "Ковариация":

Определение 1 *Ковариацией случайных величин X и Y называется число*

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathsf{M}(X - \mathsf{M}X)(Y - \mathsf{M}Y),$$

если математические ожидания справа существуют.

Правую часть последнего равенства можно преобразовать к виду

$$\mathsf{M}XY - \mathsf{M}X \cdot \mathsf{M}Y$$

так что

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathsf{M}XY - \mathsf{M}X \cdot \mathsf{M}Y.$$

Определение 2 *Если* $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$*, то случайные величины X и Y называются некоррелированными.*

Заметим, что если X и Y — независимы, то они некоррелированы.

Непосредственно из определения следуют свойства ковариации:

(a) $\mathrm{Cov}(\lambda X, Y) = \mathrm{Cov}(X, \lambda Y) = \lambda \cdot \mathrm{Cov}(X,Y)$, где λ — постоянная;

(b) $\mathrm{Cov}(X+Y, Z) = \mathrm{Cov}(X,Z) + \mathrm{Cov}(Y,Z)$;

(c) $\mathrm{Cov}(X, Y+Z) = \mathrm{Cov}(X,Y) + \mathrm{Cov}(X,Z)$;

(d) $\mathrm{Cov}(X,X) = \mathsf{D}X$, т.е. дисперсию формально можно рассматривать как ковариацию между случайной величиной и ей самой.

Лекция 9, раздел "Коэффициент корреляции":

Определение 3 *Коэффициентом корреляции случайных величин X и Y называется число*

$$\rho_{XY} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y},$$

где $\sigma_X^2 = \mathsf{D}X$, $\sigma_Y^2 = \mathsf{D}Y$. (ρ_{XY} определён только при $\sigma_X > 0$ и $\sigma_Y > 0$.)

Утверждение 1 $|\rho_{XY}| \le 1$.

Отметим также следующие свойства коэффициента корреляции:

(a) ρ_{XY} — безразмерная величина;

(b) Если случайные величины X и Y связаны линейной зависимостью $Y = \alpha X + \beta$, где $\alpha \ne 0$, β — произвольные постоянные, то

$$\rho_{XY} = \begin{cases} 1, & \alpha > 0, \\ -1, & \alpha < 0. \end{cases}$$

(c) Если X и Y независимые случайные величины, то $\rho_{XY} = 0$.

(d) Из некоррелированности случайных величин, вообще говоря, не следует их независимость.

19. **Неравенство Чебышёва. Закон больших чисел: теорема Чебышёва и теорема Бернулли.**

Лекция 10, раздел "Неравенство Чебышёва":

Теорема 1 (Общее неравенство Чебышёва) *Пусть Y — случайная величина такая, что $\mathsf{M}|Y|^k < \infty$, где $k > 0$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$:*

$$\mathsf{P}\{|Y| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\mathsf{M}|Y|^k}{\varepsilon^k}$$

Доказательство: Пусть для определённости Y — непрерывная случайная величина с плотностью $f(y)$. Тогда:

$$\mathsf{M}|Y|^k = \int_{-\infty}^{+\infty} |y|^k f(y)dy \geq \int_{-\infty}^{-\varepsilon} |y|^k f(y)dy + \int_{\varepsilon}^{+\infty} |y|^k f(y)dy$$

$$\geq \varepsilon^k \int_{-\infty}^{-\varepsilon} f(y)dy + \varepsilon^k \int_{\varepsilon}^{+\infty} f(y)dy = \varepsilon^k \mathsf{P}\{|Y| \geq \varepsilon\}$$

Откуда и следует неравенство.

Лекция 10, раздел "Правило трёх сигм":

Пусть X — случайная величина, $m_X = \mathsf{M}X$. Положим $Y = X - m_X$, $k = 2$ и применим неравенство Чебышёва:

$$\mathsf{P}\{|X - m_X| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\mathsf{D}X}{\varepsilon^2}$$

или

$$\mathsf{P}\{|X - m_X| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{\mathsf{D}X}{\varepsilon^2}$$

Пусть $\varepsilon = 3\sigma_X$, где $\sigma_X = \sqrt{\mathsf{D}X}$. Тогда:

$$\mathsf{P}\{|X - m_X| < 3\sigma_X\} \geq 1 - \frac{\mathsf{D}X}{9\mathsf{D}X} = \frac{8}{9}$$

Это неравенство называется **правилом трёх сигм**:

Утверждение 2 (Правило трёх сигм) *Для любой случайной величины X с конечной дисперсией:*

$$\mathsf{P}\{m_X - 3\sigma_X < X < m_X + 3\sigma_X\} \geq \frac{8}{9}$$

Лекция 10, раздел "Закон больших чисел":

Теорема 2 (Теорема Чебышёва) *Пусть имеется бесконечная последовательность $X_1, X_2, \ldots$ независимых случайных величин таких, что:*

$$\mathsf{M}X_1 = \mathsf{M}X_2 = \cdots = m, \quad \mathsf{D}X_1 \leq C, \mathsf{D}X_2 \leq C, \ldots$$

где $C > 0$ и m — постоянные. Тогда $\forall \varepsilon > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left\{\left|\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - m\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

Теорема 3 (Теорема Бернулли) *Пусть k — число успехов в серии из n независимых испытаний с вероятностью успеха p в одном испытании. Тогда $\forall \varepsilon > 0$:*

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left\{\left|\frac{k}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

20. **Центральная предельная теорема (ЦПТ) в форме Ляпунова. Интегральная теорема Муавра–Лапласа как следствие из ЦПТ.**

Лекция 10, раздел "Центральная предельная теорема":

Теорема 4 (Центральная предельная теорема в форме Ляпунова) *Пусть последовательность $X_1, X_2, \ldots$ независимых случайных величин удовлетворяет условию Ляпунова:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^n h_i}{\left(\sum_{i=1}^n d_i\right)^{3/2}} = 0$$

где $d_i = \mathsf{D}X_i$, $h_i = \mathsf{M}|X_i - \mathsf{M}X_i|^3$. Тогда:

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left\{\alpha \le \frac{X^n - \mathsf{M}X^n}{\sqrt{\mathsf{D}X^n}} \le \beta\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_\alpha^\beta e^{-x^2/2} dx$$

где $X^n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

Утверждение 3 *Если все случайные величины $X_1, X_2, \ldots$ имеют одно и то же распределение, то условие Ляпунова выполняется.*

Доказательство: В этом случае $d_i = d$, $h_i = h$ для всех $i = 1, 2, \ldots$, поэтому:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^n h_i}{\left(\sum_{i=1}^n d_i\right)^{3/2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{nh}{(nd)^{3/2}} = \frac{h}{d^{3/2}} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

Пример 1 (Вывод интегральной теоремы Муавра-Лапласа) *Пусть k — число успехов в серии из n независимых испытаний с вероятностью успеха p в одном испытании. Тогда:*

$$k = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

где $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые случайные величины, имеющие одинаковый закон распределения:

X_i	1	0
P	p	$1-p$

Поскольку $\mathsf{M}k = np$, $\mathsf{D}k = npq$, где $q = 1 - p$, то по теореме Ляпунова:

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left\{\alpha \le \frac{k - np}{\sqrt{npq}} \le \beta\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_\alpha^\beta e^{-x^2/2} dx = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha)$$

где $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-t^2/2} dt$ — функция Лапласа.

Это и есть утверждение интегральной теоремы Муавра-Лапласа.

21. **Различные виды сходимости в вероятностном пространстве: почти наверное, в среднеквадратичном, по вероятности, по распределению. Теорема о соотношении между сходимостью в ср. кв. и по вероятности.**

Лекция 11, раздел "Сходимость в среднеквадратичном":

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ – последовательность случайных величин, определенных на одном и том же вероятностном пространстве; X – ещё одна случайная величина на том же вероятностном пространстве.

Определение 4 (Сходимость в среднеквадратичном) *$X_1, X_2, \ldots$ сходится к X в среднеквадратичном, если*

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{M}(X_n - X)^2 = 0.$$

Пишут l.i.m. $X_n = X$, или $X_n \xrightarrow{ср.кв.} X$.

Лекция 11, раздел "Сходимость с вероятностью 1":

Определение 5 (Сходимость с вероятностью 1) *$X_1, X_2, \ldots$ сходится к X с вероятностью 1 (почти наверное, почти всюду), если*

$$\mathsf{P}\{\omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\} = 1,$$

т.е. если вероятностная мера множества, состоящего из тех ω, для которых $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$, равна 1, где $x_1 = X_1(\omega), x_2 = X_2(\omega), \ldots$ – числовая последовательность, соответствующая реализациям случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ в эксперименте, определяемом элементарным событием ω.

Пишут $X_n \xrightarrow{п.н.} X$, или $X_n \xrightarrow{п.в.} X$.

Лекция 11, раздел "Сходимость по вероятности":

Определение 6 (Сходимость по вероятности) *$X_1, X_2, \ldots$ сходится к X по вероятности, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\{|X_n - X| > \varepsilon\} = 0.$$

Пишут $X_n \xrightarrow{P} X$.

Лекция 11, раздел "Сходимость по распределению":

Определение 7 (Сходимость по распределению) *$X_1, X_2, \ldots$ сходится к X по распределению, если во всех точках непрерывности функции $F_X(x)$ (функции распределения случайной величины X)*

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x),$$

где $F_{X_n}(x)$ – функция распределения случайной величины X_n.

Пишут $X_n \xrightarrow{d} X$.

Лекция 11, теорема "Сходимость в среднеквадратичном влечёт сходимость по вероятности":

Теорема 5 (Сходимость в среднеквадратичном влечёт сходимость по вероятности) *Если* $X_n \xrightarrow{ср.кв.} X$, *то* $X_n \xrightarrow{P} X$.

Доказательство 1 *Согласно неравенству Чебышева, если для случайной величины* Y *существует* $\mathsf{M}|Y|^k$ *(где* $k > 0$*), то* $\forall \varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}\{|Y| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\mathsf{M}|Y|^k}{\varepsilon^k}.$$

Положив $Y = X - X_n$, *при* $k = 2$ *получим*

$$\mathsf{P}\{|X_n - X| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\mathsf{M}(X_n - X)^2}{\varepsilon^2},$$

так что

$$\mathsf{P}\{|X_n - X| > \varepsilon\} \leq \mathsf{P}\{|X_n - X| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\mathsf{M}(X_n - X)^2}{\varepsilon^2}.$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{M}(X_n - X)^2 = 0$, *то это влечёт выполнение условия*

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\{|X_n - X| > \varepsilon\} = 0,$$

что и требовалось доказать.

22. **Теорема о соотношении между сходимостью по вероятности и по распределению.**

Лекция 11, теорема "Сходимость по вероятности влечёт сходимость по распределению":

Теорема 6 (Сходимость по вероятности влечёт сходимость по распределению) *Если* $X_n \xrightarrow{P} X$, *то* $X_n \xrightarrow{d} X$.

Доказательство 2 *Выберем любое* $\varepsilon > 0$. *По формуле полной вероятности*

$$\mathsf{P}\{X_n < x\} = \mathsf{P}\{X_n < x, X < x + \varepsilon\} + \mathsf{P}\{X_n < x, X \geq x + \varepsilon\} \leq$$
$$\leq \mathsf{P}\{X < x + \varepsilon\} + \mathsf{P}\{|X_n - X| > \varepsilon\}. \quad (*)$$

Аналогично,

$$\mathsf{P}\{X < x - \varepsilon\} = \mathsf{P}\{X < x - \varepsilon, X_n < x\} + \mathsf{P}\{X < x - \varepsilon, X_n \geq x\} \leq$$
$$\leq \mathsf{P}\{X_n < x\} + \mathsf{P}\{|X_n - X| > \varepsilon\}. \quad (**)$$

Вводя обозначение $S_n(\varepsilon) = \mathsf{P}\{|X_n - X| > \varepsilon\}$ *и объединяя* $(*)$ *и* $(**)$, *получим*

$$\mathsf{P}\{X < x - \varepsilon\} - S_n(\varepsilon) \leq \mathsf{P}\{X_n < x\} \leq \mathsf{P}\{X < x + \varepsilon\} + S_n(\varepsilon),$$

или

$$F_X(x - \varepsilon) - S_n(\varepsilon) \leq F_{X_n}(x) \leq F_X(x + \varepsilon) + S_n(\varepsilon). \quad (1)$$

Возьмём любое сколь угодно малое Δ. *По непрерывности* $F_X(x)$ *в точке* x *можно указать такое* ε, *что* $|F_X(x + \varepsilon) - F_X(x - \varepsilon)| < \Delta/2$. *Далее, поскольку* $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(\varepsilon) = 0$ *(по условию), то* $\exists N\ \forall n \geq N\ S_n(\varepsilon) < \Delta/4$. *Поэтому, в силу (1),* $\forall n_1 \geq N$ *и* $\forall n_2 > N$ *будет* $|F_{X_{n_1}}(x) - F_{X_{n_2}}(x)| < \Delta$.

Значит, по критерию Коши существования предела последовательности существует $\lim\limits_{n\to\infty} F_{X_n}(x)$. *При этом из (1) следует, что этот предел равен* $F_X(x)$, *что и требовалось доказать.*