

Графы и топология  
С. К. Ландо

13 февраля 2018 г.



Графы — универсальный способ кодирования информации. Они удобны для представления разнообразных сведений об объектах и связях между ними. В нашем курсе мы будем смотреть на графы, в первую очередь, с точки зрения топологии. Несмотря на то, что графы существенно *дискретны*, а топология изучает свойства объектов, не меняющиеся при *непрерывных* преобразованиях, графы служат “одномерными объектами” топологии. На их примере можно изучить работу целого ряда топологических понятий. Да и вообще, любой изучаемый топологией объект допускает конечное описание, а значит, с ним можно работать в дискретных терминах.

Для манипуляций с графами разработано множество компьютерных программ. В частности, практически любая система символьной математики — будь то Maple, Mathematica или что-нибудь еще — имеет встроенные пакеты работы с графами. Зачастую мы будем использовать для иллюстрации результаты работы системы Mathematica.



# Оглавление

<b>1</b>	<b>Терминология графов</b>	<b>4</b>
1.1	Пример: квадрирование квадрата . . . . .	5
1.2	Определения . . . . .	6
1.3	Пути и циклы . . . . .	7
1.4	Типы графов . . . . .	7
1.4.1	Деревья и леса . . . . .	8
1.4.2	Циклические графы . . . . .	8
1.4.3	Полные графы . . . . .	8
1.4.4	Двудольные графы . . . . .	8
1.4.5	$n$ -мерный куб . . . . .	9
1.5	Подграфы . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Способы представления графов</b>	<b>10</b>
2.1	Дополнительные понятия . . . . .	11
2.2	Набор ребер . . . . .	12
2.3	Матрица инцидентности . . . . .	12
2.4	Матрица смежности . . . . .	13
2.5	Матрица Кирхгофа . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Изоморфизм графов. Простейшие инварианты</b>	<b>16</b>
3.1	Определение изоморфизма . . . . .	17
3.2	Классы изоморфизма графов . . . . .	17
3.3	Простейшие инварианты графов . . . . .	18
3.4	Как проверять изоморфизм графов? . . . . .	21
<b>4</b>	<b>Полиномиальные инварианты</b>	<b>22</b>
4.1	Хроматическая функция . . . . .	23
4.2	Многочлен Абеля . . . . .	25
4.3	Многочлен паросочетаний . . . . .	26
<b>5</b>	<b>Соотношения удаления-стягивания и теорема Татта</b>	<b>28</b>
5.1	Соотношение удаление-стягивание для хроматической функции	29
5.2	Немного о топологии графа . . . . .	30
5.3	Многочлен Пенроуза* . . . . .	32



5.4	Соотношения Татта . . . . .	34
5.5	Теорема Татта . . . . .	35
5.6	Доказательство теоремы Татта* . . . . .	36
5.7	Новые примеры инвариантов Татта . . . . .	38
5.8	Задачи . . . . .	41
6	Статистические модели инвариантов	44
7	Группа автоморфизмов графа	45
8	Перечисление графов	46
9	Топологическая эквивалентность графов	47
10	Поверхности	48
11	Склейка поверхностей из многоугольников	49
12	Топологические характеристики поверхностей	50
13	Плоские и планарные графы	51
14	Графы на поверхностях	52



## Глава 1

# Терминология графов



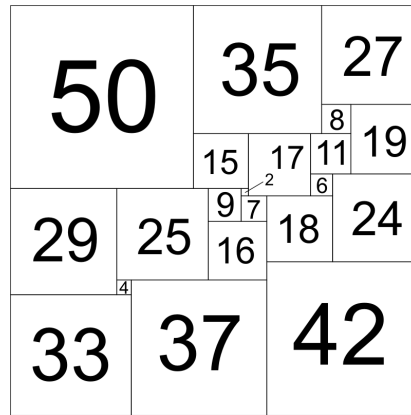


Рис. 1.1: Минимальное квадрирование квадрата

По существу, каждый граф представляет собой набор вершин, некоторые из которых соединены ребрами. Однако эта картинка имеет многообразные модификации, и чтение литературы по графам может оказаться затруднительным в силу того, что за столетия изучения графов была развита весьма изощренная терминология, и не всегда понятно, о каких графах и каких их свойствах в действительности идет речь. Поэтому на первой лекции мы дадим строгие определения некоторых простейших понятий, а на протяжении последующих лекций будем потихоньку вводить новые определения.

## 1.1 Пример: квадрирование квадрата

Задача квадрирования прямоугольника состоит в том, чтобы разбить его на попарно непересекающиеся квадраты, никакие два из которых не равны друг другу. На рис. 1.1 приведено минимальное квадрирование квадрата, т.е. квадрирование, состоящее из минимально возможного числа квадратов (на рисунке их 21). Задача поиска минимального квадрирования квадрата долго не поддавалась решению — пока не было предложено описание квадрирований с помощью графов. Это описание устроено следующим образом.

Каждому горизонтальному отрезку квадрирования (включая верхнюю и нижнюю стороны квадратируемого прямоугольника) сопоставляется вершина графа. Каждому квадрату квадрирования соответствует ребро, соединяющее отрезок, содержащий верхнюю сторону квадрата, с отрезком, содержащим его нижнюю сторону. Ребро можно ориентировать сверху вниз и написать на нем длину стороны квадрата. Полученный в результате граф называется *диаграммой Смита* квадрирования.

*Замечание 1.1.1.* Приводимые здесь рисунки взяты из статьи *Квадрирование квадрата* в русской Wikipedia.



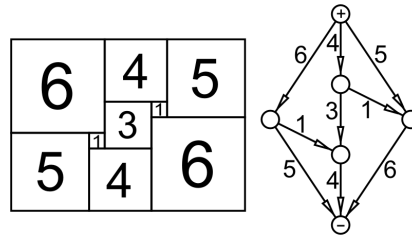


Рис. 1.2: Разбиение прямоугольника на квадраты и его диаграмма Смита

**Задача 1.1.** Проверьте, что в каждой вершине диаграммы Смита, за исключением вершин, отвечающих горизонтальным сторонам исходного прямоугольника, сумма чисел, написанных на ребрах, входящих в эту вершину, равна сумме чисел на ребрах, выходящих из нее.

**Задача 1.2.** \* Докажите, что нельзя кубировать куб, т.е. разбить его на попарно различные меньшие кубы. **Указание:** Предположим противное. Тогда основание куба представляет собой квадратованный квадрат. Рассмотрите наименьший из квадратов квадрирования и те кубы, которые прилегают к верхней грани куба, нижней гранью которого является этот наименьший квадрат.

## 1.2 Определения

**Определение 1.2.1.** *Граф* это конечное множество *вершин*, и некоторое конечное множество *ребер*, т.е. неповторяющихся пар различных вершин.

Часто графы, описываемые этим определением, называют *простыми*. Существует множество других видов графов, но нам они понадобятся скоро.

Для графа  $G$  множество его вершин обозначается через  $V(G)$ , а множество его ребер — через  $E(G)$ . Граф можно себе представлять в виде пары  $G = (V(G), E(G))$ , состоящей из множества его вершин и множества его ребер.

**Пример 1.2.2.** Например,  $G_1 = (\{1, 2, a\}, \{\{1, a\}, \{a, 2\}\})$  имеет три вершины  $1, 2, a$  и два ребра  $\{1, a\} = \{a, 1\}$  и  $\{2, a\} = \{a, 2\}$ . Как обычно, мы заключаем элементы множества в фигурные скобки.

**Определение 1.2.3.** Две вершины, образующие ребро, называются *концами* этого ребра. *Валентностью* (или *порядком*) вершины графа называется количество ребер, для которых эта вершина является концом.



Например, в графе  $G_1$  из примера 1.2.2 вершины 0 и 1 имеют валентность 1, а вершина  $a$  имеет валентность 2.

**Задача 1.3.** Докажите, что число вершин нечетной валентности в графе четно.

Например, в графе  $G_1$  из примера 1.2.2 две вершины нечетной валентности.

**Задача 1.4.** Докажите, что не существует графа с набором валентностей вершин  $\{7, 6, 5, 4, 3, 3, 2\}$  и  $\{6, 6, 5, 4, 3, 2, 1\}$ .

### 1.3 Пути и циклы

**Определение 1.3.1.** *Простым путем длины  $\ell$*  в графе называется последовательность его вершин  $(v_0, v_1, \dots, v_\ell)$ , в которой все вершины попарно различны и любые две последовательные вершины  $v_{i-1}, v_i$  соединены ребром.

Простой путь длины  $\ell$  содержит  $\ell$  ребер и  $\ell + 1$  вершин. Вершина  $v_0$  называется *началом* пути, а вершина  $v_\ell$  — его *концом*, и говорят, что путь *соединяет* свое начало  $v_0$  со своим концом  $v_\ell$ . Вершины  $v_1, v_2, \dots, v_{\ell-1}$  называются *внутренними*, или *промежуточными*, вершинами простого пути. Каждая вершина образует простой путь длины нуль; она является его началом и концом.

**Определение 1.3.2.** Граф называется *связным*, если для любой пары вершин в нем существует соединяющий их простой путь.

**Задача 1.5.** Докажите, что если в графе  $G$  с  $|V(G)|$  вершинами больше, чем

$$\binom{|V(G)| - 1}{2} = \frac{1}{2}(|V(G)| - 1)(|V(G)| - 2)$$

ребер, то он связан.

*Простой цикл* в графе определяется так же, как и простой путь, но начало и конец в нем должны совпадать.

**Задача 1.6.** Дайте формальное определение простого цикла.

Простой цикл в простом графе имеет длину не меньше 3.

### 1.4 Типы графов

Графы, встречающиеся при решении определенного круга задач, зачастую принадлежат к тому или иному типу графов. Графы одного типа обладают похожими свойствами. В этом разделе мы определяем несколько типов графов и рассматриваем их простейшие свойства.



### 1.4.1 Деревья и леса

**Определение 1.4.1.** Граф, не имеющий простых циклов, называется *лесом*. Связный граф, не имеющий простых циклов, называется *деревом*.

Скажем, граф  $G_1$  из примера 1.2.2 является деревом.

*Задача 1.7.* Приведите пример дерева с 7 вершинами.

*Задача 1.8.* Докажите, что в любом дереве число вершин на 1 превышает число ребер.

### 1.4.2 Циклические графы

*Циклический граф*  $C_n$  — это граф, состоящий из одного цикла длины  $n$ , и не имеющий других вершин и ребер.

### 1.4.3 Полные графы

**Определение 1.4.2.** *Полный граф* — это граф, в котором каждая пара вершин соединена ребром.

*Задача 1.9.* Сколько ребер имеет полный граф с  $n$  вершинами?

### 1.4.4 Двудольные графы

**Определение 1.4.3.** Граф  $G$ , множество вершин  $V(G)$  которого можно разбить на два непересекающиеся подмножества  $V(G) = U \sqcup W$  так, что всякое ребро соединяет некоторую вершину из  $U$  с некоторой вершиной из  $W$ , называется *двудольным*, а подмножества вершин  $U$  и  $W$  — его *долями*. Двудольный граф с долями  $U, W$  называется *полным двудольным графом*, если в нем всякая вершина из  $U$  соединена ребром с каждой вершиной из  $W$ .

*Задача 1.10.* Сколько ребер имеет полный двудольный граф с долями, содержащими  $m$  вершин и  $n$  вершин?

*Задача 1.11.* Докажите, что максимальное число ребер в двудольном графе на  $2n$  вершинах не превосходит  $n^2$ .

*Задача 1.12.* Докажите, что множество вершин  $V(G)$  в связном двудольном графе  $G$  допускает единственное разбиение на доли (с точностью до перестановки долей).

*Задача 1.13.* Докажите, что всякий цикл в двудольном графе имеет четную длину.

*Задача 1.14.* Докажите, что если в графе всякий цикл имеет четную длину, то этот граф — двудольный.



### 1.4.5 $n$ -мерный куб

$n$ -мерный куб это граф, вершины которого — все возможные последовательности из 0 и 1 длины  $n$ ; две вершины соединены ребром, если соответствующие им последовательности отличаются ровно в одной позиции.

*Пример 1.4.4.* 1-мерный куб это отрезок (пара вершин, соединенных ребром); 2-мерный куб это цикл длины 4; 3-мерный куб это граф, состоящий из ребер обычного куба.

*Задача 1.15.* Сколько вершин в  $n$ -мерном кубе? Сколько ребер в  $n$ -мерном кубе?

*Задача 1.16.* Докажите, что  $n$ -мерный куб является двудольным графом при любом значении  $n = 1, 2, 3, 4, \dots$

## 1.5 Подграфы

Новые графы можно конструировать из уже изученных. Один из простейших, и поэтому наиболее полезных, способов конструирования новых графов — рассмотрение подграфов.

**Определение 1.5.1.** Пусть  $G = (V(G), E(G))$  — граф. Граф  $H = (V(H), E(H))$  называется *подграфом* графа  $G$ , если  $V(H) \subset V(G)$  и  $E(H) \subset E(G)$ , т.е. если множество вершин графа  $H$  является подмножеством множества вершин графа  $G$ , и множество ребер графа  $H$  является подмножеством множества ребер графа  $G$ .

**Определение 1.5.2.** Пусть  $G = (V(G), E(G))$  — граф,  $U \subset V(G)$  — подмножество его множества вершин. Подграфом графа  $G$ , *индуцированным подмножеством вершин  $U$* , называется граф  $G|_U = (U, E|_U(G))$ , где через  $E|_U(G)$  обозначено множество тех ребер графа  $G$ , оба конца которых лежат в  $U$ .

*Задача 1.17.* Приведите пример графа и подграфа в нем, не являющегося индуцированным.

*Задача 1.18.* Докажите, что каждый индуцированный подграф полного графа является полным графом.

*Задача 1.19.* Докажите, что каждый подграф двудольного графа является двудольным графом.

*Задача 1.20.* Докажите, что каждый индуцированный подграф полного двудольного графа является полным двудольным графом.

*Задача 1.21.* Придумайте двудольный граф, который не является подграфом  $n$ -мерного куба ни при каких  $n$ .



## Глава 2

# Способы представления графов



Изображение графов мелом на доске чрезвычайно полезно и информативно. Однако в некоторых ситуациях оно мало пригодно — например, если граф велик или для автоматической обработки графа. Поэтому как в теоретических построениях, так и на практике используются разнообразные способы формализованного представления графов. Различные представления оказываются эффективными в различных ситуациях. Автоматизированные системы символьного манипулирования математическими объектами содержат утилиты для перевода из одного представления в другое.

## 2.1 Дополнительные понятия

Чтобы слушатели могли почувствовать, какие представления оказываются более, а какие менее эффективными для решения различных задач, дадим еще некоторые определения характеристик графа, позволяющие эти задачи формулировать.

**Определение 2.1.1.** Говорят, что две вершины  $u, v \in V(G)$  принадлежат одной компоненте связности графа  $G = (V(G), E(G))$ , если в  $G$  существует простой путь из  $u$  в  $v$ .

**Задача 2.1.** Докажите, что если вершины  $u$  и  $v$  принадлежат одной компоненте связности графа  $G = (V(G), E(G))$ , и  $v$  и  $w$  также принадлежат одной компоненте связности, то  $u$  и  $w$  тоже принадлежат одной компоненте связности графа  $G$ . Воспользовавшись этим, докажите, что все множество вершин  $V(G)$  графа  $G$  допускает разбиение на попарно непересекающиеся непустые подмножества  $V(G) = V_1 \sqcup V_2 \sqcup \dots \sqcup V_c$ , обладающее следующими свойствами:

- всякий индуцированный подграф  $G|_{V_i}$ ,  $i = 1, \dots, c$ , является связным;
- всякое ребро графа  $G$  соединяет вершины одного подмножества  $V_i$ .

Докажите, что такое разбиение единственно (с точностью до перенумерации подмножеств  $V_i$ ).

**Определение 2.1.2.** Подграфы  $G|_{V_i}$ ,  $i = 1, \dots, c$ , существование которых доказано в предыдущей задаче, называются *компонентами связности* графа  $G$ , а число  $c$  этих компонент — числом компонент связности.

Если граф  $G$  связен, то его разбиение на компоненты связности имеет вид  $V(G) = V_1$ , и число компонент связности в нем равно 1.

**Определение 2.1.3.** Пусть  $u, v$  — две вершины в связном графе  $G$ . *Расстоянием между вершинами  $u, v$*  называется длина кратчайшего простого пути, соединяющего  $u$  и  $v$  в  $G$ . *Диаметром* графа  $G$  называется максимум расстояний между его вершинами.

**Задача 2.2.** Найдите диаметр



- полного графа на  $n$  вершинах;
- полного двудольного графа с долями размеров  $m$  и  $n$ ;
- цикла на  $n$  вершинах;
- $n$ -мерного куба.

**Задача 2.3.** Найдите а) максимально возможный диаметр; б) минимально возможный диаметр дерева на  $n$  вершинах при всех значениях  $n = 1, 2, 3, \dots$

**Определение 2.1.4.** *Остовным деревом* в связном графе  $G$  называется его подграф, содержащий все вершины графа и являющийся деревом.

**Задача 2.4.** Найдите количество остовных деревьев

- в дереве на  $n$  вершинах;
- в цикле на  $n$  вершинах.

## 2.2 Набор ребер

Стандартное определение графа как набора вершин и набора ребер  $G = (V(G), E(G))$  вполне годится и для его компьютерного представления. До недавнего времени такое представление считалось неэффективным, однако с развитием компьютерных мощностей оно вполне используется для представления небольших графов (до нескольких десятков тысяч вершин, с несколькими сотнями тысяч ребер).

**Задача 2.5.** Дан граф  $G = (\{1, 5, a, X, 9, n, t, 2, M\}, \{\{1, X\}, \{a, 2\}, \{a, M\}, \{a, n\}, \{t, X\}, \{5, 1\}, \{1, t\}, \{2, n\}, \{t, 5\}\})$ . Найдите а) количество компонент связности графа и число вершин в каждой компоненте; б) длину самого длинного простого цикла; в) диаметр каждой компоненты связности графа.

## 2.3 Матрица инцидентности

Для определения матрицы инцидентности графа  $G = (V(G), E(G))$  мы должны занумеровать его вершины числами от 1 до  $|V(G)|$  и его ребра числами от 1 до  $|E(G)|$ . Получившаяся матрица инцидентности зависит от выбора нумерации.

**Определение 2.3.1.** *Матрицей инцидентности* графа  $G$  с  $|V(G)|$  занумерованными вершинами и  $|E(G)|$  занумерованными ребрами называется  $|V(G)| \times |E(G)|$ -матрица, у которой в клетке на пересечении  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца стоит 1, если вершина с номером  $i$  является концом ребра с номером  $j$ , имеющим меньший номер,  $-1$ , если вершина с номером  $i$  является концом ребра с номером  $j$ , имеющим больший номер, и 0, если вершина с номером  $i$  не является концом ребра с номером  $j$ .



В частности, в каждом столбце матрицы инцидентности стоит ровно одна единица, одна  $-1$ , а количество ненулей в ее  $i$ -й строке равно валентности вершины с номером  $i$ .

**Задача 2.6.** Дана матрица инцидентности графа

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдите а) количество компонент связности графа и число вершин в каждой компоненте; б) длину самого длинного простого цикла; в) диаметр каждой компоненты связности графа.

**Задача 2.7.** Докажите, что в матрице  $M(G)M(G)^t$  на диагонали стоят валентности вершин графа  $G$ .

Здесь через  $M(G)^t$  обозначена  $|E(G)| \times |V(G)|$ -матрица, транспонированная к  $M(G)$ . Напомним, что произведение  $AB$  матрицы  $A$  размером  $k \times \ell$  и матрицы  $B$  размером  $m \times n$  определено только в том случае, если  $\ell = m$ . В этом случае в клетке на пересечении  $i$ -строки и  $j$ -го столбца матрицы  $AB$  стоит сумма

$$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{i\ell}b_{\ell j}$$

попарных произведений соответствующих элементов  $i$ -ой строки матрицы  $A$  и  $j$ -ой строки матрицы  $B$ .

## 2.4 Матрица смежности

Для определения матрицы смежности графа  $G = (V(G), E(G))$  достаточно занумеровать числами от 1 до  $|V(G)|$  его вершины — нумеровать ребра нет необходимости. Получившаяся матрица смежности зависит от выбора нумерации.

**Определение 2.4.1.** Матрицей смежности графа  $G$  с  $|V(G)|$  занумерованными вершинами называется квадратная  $|V(G)| \times |V(G)|$ -матрица, у которой в клетке на пересечении  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца стоит 1, если вершина с номером  $i$  соединена вершиной с номером  $j$ , и 0 в противном случае.

В частности, количество единиц в  $i$ -м столбце матрицы смежности равно валентности вершины с номером  $i$ , и то же самое справедливо для ее  $i$ -строки. Кроме того, матрица смежности простого графа симметрична —



если в клетке на пересечении  $i$ -ой строки и  $j$ -го столбца стоит 1, то то же самое справедливо и для клетки на пересечении  $j$ -го столбца и  $i$ -ой строки.

*Задача 2.8.* Дана матрица смежности графа

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдите а) количество компонент связности графа и число вершин в каждой компоненте; б) длину самого длинного простого цикла; в) диаметр графа.

*Задача 2.9.* Докажите, что в матрице  $A^2(G)$  на диагонали стоят валентности вершин графа  $G$ .

*Задача 2.10.* Докажите, что в клетке на пересечении  $i$ -ой строки и  $j$ -го столбца матрицы  $A^2(G)$ ,  $i \neq j$  стоит количество простых путей длины 2 из вершины с номером  $i$  в вершину с номером  $j$ .

*Задача 2.11.* Придумайте способ подсчитывать количество простых путей данной длины  $k$  из вершины с номером  $i$  в вершину с номером  $j$  с помощью матрицы смежности графа.

## 2.5 Матрица Кирхгофа

*Матрица Кирхгофа*, называемая также *матрицей Лапласа*, похожа на матрицу смежности графа. Она также квадратная, симметричная размерами  $|V(G)| \times |V(G)|$ , и если, при  $i \neq j$  вершина с номером  $i$  не соединена ребром с вершиной с номером  $j$ , то в клетке на пересечении  $i$ -ой строки и  $j$ -го столбца стоит 0. Однако вместо единиц в матрице смежности, означающих наличие ребер, в матрице Кирхгофа на тех же местах стоят  $-1$ , а в каждой диагональной клетке на пересечении  $i$ -ой строки и  $i$ -го столбца в матрице Кирхгофа стоит валентность вершины с номером  $i$ . Матрицу Кирхгофа графа  $G$  с занумерованными вершинами мы будем обозначать через  $K(G)$ .

*Пример 2.5.1.* Вот как выглядит матрица Кирхгофа графа с пятью вершинами:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$



**Задача 2.12.** Нарисуйте граф, заданный матрицей Кирхгофа из примера 2.5.1. Занумеруйте его вершины таким образом, чтобы указанная матрица действительно была матрицей Кирхгофа этого графа с выбранной нумерацией вершин.

**Задача 2.13.** Докажите, что для любого простого графа  $G$  с выбранной нумерацией вершин и ребер справедливо равенство

$$K(G) = M(G)M(G)^t.$$

В частности, произведение в правой части этого равенства не зависит от выбора нумерации ребер графа  $G$ .

Как нетрудно видеть, сумма элементов матрицы Кирхгофа в любой строке (а, значит, и в любом столбце) равна 0. Отсюда легко вытекает следующее утверждение.

**Теорема 2.5.2.** *Определитель матрицы Кирхгофа любого графа равен 0.*

Действительно, векторы-столбцы в матрице Кирхгофа линейно зависимы — их сумма равна нулевому вектору.

Гораздо более содержательной и полезной является, однако, следующая теорема.

**Теорема 2.5.3** (Матричная теорема о деревьях). *Определитель матрицы  $K_i(G)$  размером  $(|V(G)| - 1) \times (|V(G)| - 1)$ , получаемой из матрицы Кирхгофа вычеркиванием  $i$ -ой строки и  $i$ -го столбца, не зависит от выбранного номера  $i$ . Он равен количеству остовных деревьев в графе  $G$ .*

**Задача 2.14.** Подсчитайте количество остовных деревьев в графе из примера 2.5.1 двумя способами — непосредственно и с помощью матричной теоремы о деревьях. Сравните результаты.



## Глава 3

# Изоморфизм графов. Простейшие инварианты



В исходном определении графа  $G = (V(G), E(G))$  множество его вершин  $V(G)$  играет крайне существенную роль — два графа с разными множествами вершин непременно оказываются различными. С другой стороны, ясно, скажем, что два полных графа на  $n$  вершинах отличаются друг от друга несущественно, независимо от того, каковы множества их вершин: любые численные характеристики этих графов, определение которых не опирается на множество вершин графа, оказываются одинаковыми. Да и представляя граф в матричной форме — вне зависимости от того, будет ли это матрица инцидентности, смежности или Кирхгофа, — мы должны прежде всего занумеровать вершины графа, а при нумерации память о том, что из себя представляет множество вершин, теряется.

Понятие изоморфизма графов позволяет нам не различать графы, имеющие одинаковую структуру. С другой стороны, инварианты графов позволяют нам в некоторых случаях убедиться, что два графа не изоморфны: если инвариант принимает на двух графах различные значения, то эти два графа не могут быть изоморфны.

### 3.1 Определение изоморфизма

Пусть  $G = (V(G), E(G))$  и  $H = (V(H), E(H))$  — два графа. Отображение  $f : V(G) \rightarrow V(H)$  множества вершин графа  $G$  в множество вершин графа  $H$  называется *изоморфизмом* графа  $G$  на граф  $H$ , если выполняются следующие условия:

- отображение  $f$  является взаимно-однозначным, т.е. оно переводит различные вершины графа  $G$  в различные вершины графа  $H$ , и в каждую вершину графа  $H$  переходит какая-то вершина графа  $G$ ;
- всякие две вершины  $f(u)$ ,  $f(v)$  графа  $H$  соединены в  $H$  ребром в том и только в том случае, если вершины  $u$ ,  $v$  графа  $G$  соединены ребром в  $G$ .

Одним из ключевых свойств изоморфизма является его обратимость: если  $f : V(G) \rightarrow V(H)$  — взаимно-однозначное отображение, то у него есть обратное отображение  $f^{-1} : V(H) \rightarrow V(G)$ , и если  $f$  является изоморфизмом графа  $G$  на граф  $H$ , то  $f^{-1}$  является изоморфизмом графа  $H$  на граф  $G$ .

*Задача 3.1.* Установите изоморфизм между парой графов на рис. 3.1.

### 3.2 Классы изоморфизма графов

Для некоторых классов графов один или несколько числовых параметров однозначно определяют класс изоморфизма графов с этими параметрами. Так, все полные графы на  $n$  вершинах изоморфны друг другу. Поэтому для классов изоморфизма можно вводить простые обозначения. Так,



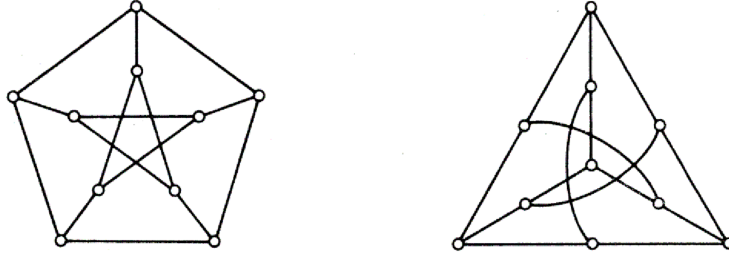


Рис. 3.1: Изоморфные графы

- класс изоморфизма полных графов на  $n$  вершинах обозначается  $K_n$ ;
- класс изоморфизма полных двудольных графов с долями величины  $n$  и  $m$  обозначается  $K_{n,m}$ ;
- класс изоморфизма циклов длины  $n$  обозначается  $C_n$ .

При  $n = 1, 2, 3$  имеется соответственно 1, 2, 4 классов изоморфизма графов с  $n$  вершинами. Ясно, что для описания классов изоморфизма графов с  $n$  вершинами достаточно знать классы изоморфизма связных графов с  $1, 2, 3, \dots, n$  вершинами. Поэтому обычно таблицы графов содержат только связные графы.

**Задача 3.2.** Нарисуйте все классы изоморфизма простых связных графов с 4 и 5 вершинами.

### 3.3 Простейшие инварианты графов

**Определение 3.3.1.** Пусть  $F$  — функция на графах, т.е. отображение, сопоставляющее каждому графу какое-нибудь значение. Такая функция называется *инвариантом* графов, если на любых двух изоморфных графах она принимает одинаковые значения.

Понятие инварианта распространено в математике очень широко. Его общий смысл — “что-то, что не меняется при разрешенных преобразованиях”. Так, в топологии инвариант топологического пространства — это величина, которая не меняется при гомеоморфизмах.

Инварианты не всегда подходят для установления изоморфизма графов — графы с одинаковыми значениями инвариантов могут оказаться неизоморфными друг другу. Однако они отлично работают для доказательства того, что два графа неизоморфны.

Мы уже знаем несколько простейших инвариантов графов. Это



- количество вершин в графе;
- количество ребер в графе;
- является ли граф связным или несвязным;
- количество компонент связности в графе;
- набор валентностей вершин в графе;
- диаметр графа;
- длина минимального простого цикла в графе;
- количество остовных деревьев в графе;
- является ли граф деревом;
- является ли граф двудольным.

*Задача 3.3.* Докажите, что каждая из упомянутых здесь величин действительно является инвариантом графов.

Докажем для примера, что инвариантом является диаметр графа.

Пусть  $G = (V(G), E(G))$  и  $H = (V(H), E(H))$  — два изоморфных графа, и  $f : V(G) \rightarrow V(H)$  — отображение множества вершин графа  $G$  в множество вершин графа  $H$ , устанавливающее изоморфизм между графами. Тогда для любых двух вершин  $u, v \in V(G)$  графа  $G$  расстояние между ними в графе  $G$  совпадает с расстоянием между вершинами  $f(u), f(v) \in V(H)$  в графе  $H$ . Действительно, любой простой путь  $(u, v_1, \dots, v_{\ell-1}, v)$  длины  $\ell$ , соединяющий в графе  $G$  вершины  $u$  и  $v$ , переходит при отображении  $f$  в простой путь  $(f(u), f(v_1), \dots, f(v_{\ell-1}), f(v))$  длины  $\ell$ , соединяющий вершины  $f(u)$  и  $f(v)$  в графе  $H$ . Поэтому расстояние между вершинами  $f(u)$  и  $f(v)$  в  $H$  не больше расстояния между вершинами  $u$  и  $v$  в  $G$ . Обратное неравенство следует из того, что изоморфизм  $f$  обратим.

Диаметр графа, представляющий собой наибольшее расстояние между его вершинами, является инвариантом графа, так как набор расстояний между вершинами для двух изоморфных графов одинаков.

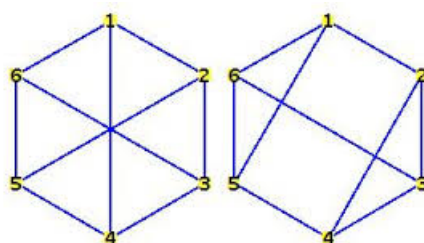
*Задача 3.4.* Используя инварианты из приведенного списка, докажите, что графы на рис. 3.2 не изоморфны друг другу.

*Задача 3.5.* Приведите пример пары не изоморфных друг другу деревьев, для которых все инварианты из приведенного списка принимают одинаковые значения.

*Задача 3.6.* Среди трех графов на рис. 3.3 два изоморфны, а третий не изоморфен им. Найдите изоморфную пару графов, установите изоморфизм и докажите неизоморфность третьего графа первым двум.

*Задача 3.7.* Разбейте графы на рис. 3.4 на классы попарно изоморфных друг другу.





2. Two of the following graphs  $F$ ,  $G$  and  $H$  are isomorphic to each other. For the two graphs which are isomorphic, give an isomorphism between them and show that it is indeed an isomorphism. For the other graph, give a reason that it is not isomorphic to the two which are isomorphic.

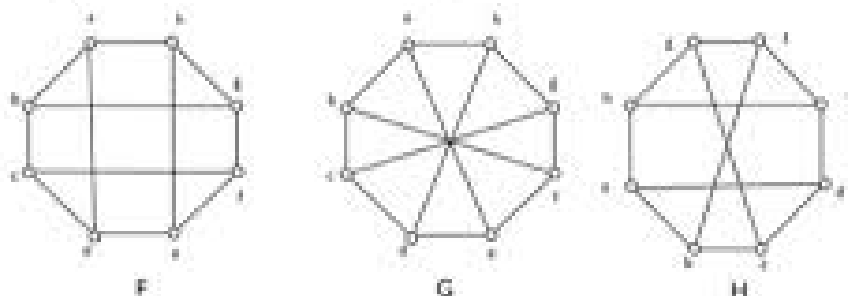


Рис. 3.3: Три графа

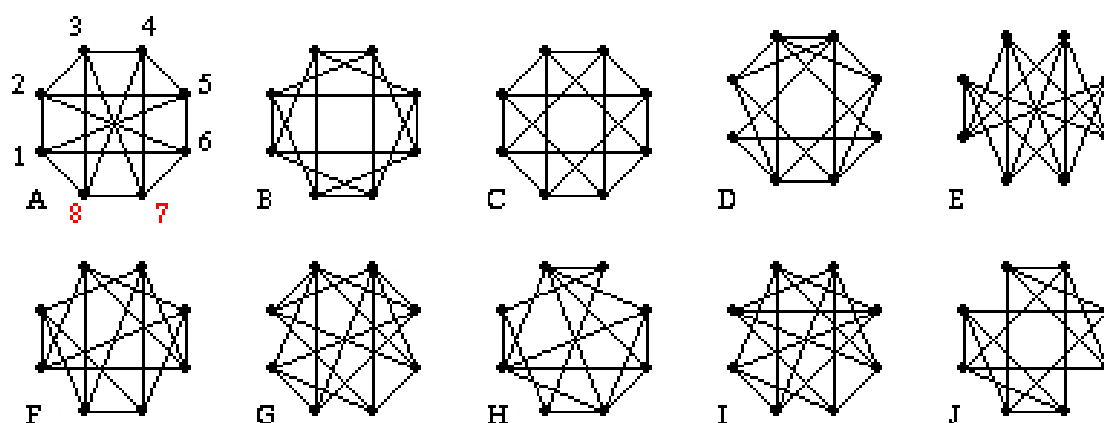


Рис. 3.4: Какие из этих графов попарно изоморфны?



**Задача 3.8.** Придумайте свои инварианты графов и докажите, что они действительно являются инвариантами.

Поскольку придумать инвариант графов несложно, встает вопрос: как сравнивать инварианты? Какие из них лучше, какие хуже? Такая постановка вопроса приводит к следующим естественным требованиям к инварианту:

- инвариант должен быть легко вычислимым (скажем, за полиномиальное по числу вершин время);
- инвариант должен различать как можно больше неизоморфных графов;

и соответствующим “критериям качества”: один инвариант лучше другого, если он

- быстрее вычисляется;
- различает больше графов.

К сожалению, первое требование трудно выполнимо. Второе же допускает дальнейшую формализацию, и мы не раз к нему вернемся.

### 3.4 Как проверять изоморфизм графов?

Задача проверки изоморфизма графов имеет очевидное решение. Если  $G = (V(G), E(G))$  и  $H = (V(H), E(H))$  — два графа, причем  $|V(G)| = |V(H)|$ , то достаточно перебрать все возможные взаимно однозначные отображения из  $V(G)$  в  $V(H)$  и проверить для каждого из них, является ли оно изоморфизмом, т.е. устанавливает ли оно взаимно-однозначное отображение множества ребер.

Подобный перебор является вычислительно сложным — количество взаимно-однозначных отображений из множества  $V(G)$  в множество  $V(H)$  равно факториалу  $|V(G)|!$  количества элементов в множестве вершин. Уже на графах с несколькими сотнями вершин подобный перебор не доступен современным компьютерам за разумное время. Существенно более эффективные алгоритмы известны только в ситуациях, когда рассматриваемые графы обладают какими-то специальными свойствами или принадлежат какому-то специальным классам графов. Например, проверять изоморфизм деревьев можно за полиномиальное по числу их вершин время. Вопрос о существовании алгоритма проверки изоморфизма графов общего вида за полиномиальное по числу их вершин время является одним из ключевых вопросов современной теории алгоритмической сложности.



## Глава 4

# Полиномиальные инварианты





Рис. 4.1: Две различные раскраски двувёршинного графа без ребер

Рассматривавшиеся нами до сих пор инварианты графов являются числовыми — количество вершин в графе или его диаметр, или число остовных деревьев в нем. Значения таких инвариантов оказываются совпадающими на многих различных графах, поэтому их различительная сила не очень велика. Большую различительную силу имеют инварианты, принимающие полиномиальные значения. На каждом графе значение такого инварианта является многочленом, и вместо одного числового инварианта мы получаем одновременно несколько таких инвариантов — коэффициентов многочлена.

В этой главе мы приведем примеры полиномиальных инвариантов.

## 4.1 Хроматическая функция

Рассмотрим важный и нетривиальный пример полиномиального инварианта. Пусть  $c$  — натуральное число. Обозначим через  $\chi_G(c)$  число правильных раскрасок вершин графа  $G$  в  $c$  цветов. Это функция от переменной  $c$ , и мы будем называть ее *хроматической функцией* графа  $G$ . Под *правильной раскраской* мы понимаем сопоставление цвета каждой вершине графа таким образом, что любые две соседние (т.е. соединенные ребром) вершины окрашены в различные цвета.

Например, вершины графа допускают правильную раскраску в один цвет ( $c = 1$ ) в том и только в том случае, если в графе нет ребер, т.е. он состоит из  $n$  не связанных между собою вершин. Заметим, что в этом случае мы можем красить каждую вершину произвольно в любой из  $c$  цветов — раскраска все равно будет правильной, а значит,  $\chi_G(c) = c^n$ . Обратите внимание на то, что две раскраски вершин двувёршинного графа, изображенные на рис. 4.1, мы считаем *различными*. Другими словами, зафиксировав граф  $G$ , мы помечаем его вершины и считаем различными любые две раскраски, в которых хотя бы одна вершина окрашена в различные цвета.

Для графа из двух вершин, соединенных ребром, имеем  $\chi_G(c) = c(c-1)$ . Действительно, если мы окрасим первую вершину в один из  $c$  цветов, то для окраски второй вершины мы можем использовать один из оставшихся  $c-1$  цветов. Аналогично, для полного графа на 3 вершинах (трех вершин, попарно соединенных ребрами)  $\chi_{K_3}(c) = c(c-1)(c-2)$ . Эти утверждения несложно обобщить на некоторые графы с большим числом вершин.

**Утверждение 4.1.1.** (i) Справедливо равенство

$$\chi_{K_n}(c) = c(c-1)(c-2) \dots (c-n+1),$$





Рис. 4.2: Граф-цепочка  $A_n$

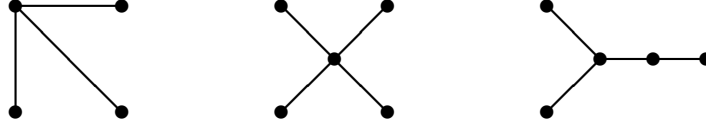


Рис. 4.3: Деревья с 4 и 5 вершинами

где  $K_n$  — полный граф на  $n$  вершинах, т.е. граф, в котором все вершины соединены ребрами попарно.

(ii) Справедливо равенство

$$\chi_{A_n}(c) = c(c-1)^{n-1},$$

где  $A_n$  — цепочка на  $n$  вершинах (см. рис. 4.2).

Заметим, что если граф  $G$  представляется в виде несвязного объединения двух графов  $G = G_1 \sqcup G_2$ , то  $\chi_G(c) = \chi_{G_1}(c)\chi_{G_2}(c)$ . Это очень важное свойство, и мы остановимся на нем подробнее.

*Несвязное объединение* двух графов — это граф, множество вершин и множество ребер которого являются несвязным объединением множеств вершин и ребер этих графов. Множество компонент связности несвязного объединения двух графов является объединением множеств их компонент связности. То, что хроматическая функция несвязного объединения двух графов является произведением хроматических функций этих графов, очевидно: правильная раскраска каждого из графов автоматически дает правильную раскраску их объединения и наоборот. В дальнейшем нас очень часто будут интересовать именно такие инварианты графов, значения которых на несвязных объединениях графов равны произведению значений на каждом из объединяемых графов. Заметим, что значение такого инварианта на *пустом* графе следует полагать равным 1.

**Задача 4.1.** Воспользовавшись задачей 1.12, докажите, что для связного графа  $G$  выполняется равенство  $\chi_G(2) = 2$ , если граф  $G$  двудолен, и  $\chi_G(2) = 0$  в противном случае.

**Задача 4.2.** Вычислите значение хроматической функции на деревьях, изображенных на рис. 4.3.

**Задача 4.3.** Вычислите значение хроматической функции на графах с рис. 4.4.



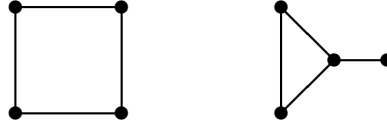


Рис. 4.4: Два графа с 4 вершинами

## 4.2 Многочлен Абеля

Коэффициенты многочлена Абеля перечисляют корневые остовные леса в графе. *Остовным лесом* в данном графе  $G$  называется подграф, содержащий все вершины графа  $G$  и не имеющий циклов. В частности, остовное дерево — это связный остовный лес. Каждый остовный лес состоит из одного или нескольких деревьев — своих компонент связности.

Определим *многочлен Абеля*  $A_G(x)$  графа  $G$  как многочлен переменной  $x$ , коэффициент которого при мономе  $x^k$  равен числу корневых остовных лесов из  $k$  деревьев в графе  $G$ . Под *корневым остовным лесом* мы понимаем остовный лес, в каждом дереве которого одна из вершин объявлена *корнем*.

Приведем примеры вычисления многочлена Абеля для нескольких графов.

*Пример 4.2.1.* Многочлен Абеля графа, состоящего из одной вершины, равен  $x$ .

*Пример 4.2.2.* Многочлен Абеля графа  $K_2$ , состоящего из двух вершин, соединенных ребром, равен  $A_{K_2}(x) = x^2 + 2x$ . Действительно, в этом графе два остовных подграфа (один из них содержит единственное ребро, другой не содержит). Оба этих остовных подграфа являются лесами. Первый подграф состоит из одного дерева на двух вершинах, и корень в этом дереве можно выбрать двумя способами. Поэтому этот подграф дает вклад  $2x$  в многочлен Абеля. В свою очередь, второй остовный подграф состоит из двух деревьев, в каждом из которых одна вершина, и корень поэтому можно выбрать единственным способом. Вклад этого подграфа в многочлен Абеля, тем самым, равен  $x^2$ .

*Задача 4.4.* Проверьте выполнение равенств

$$\begin{aligned} A_{A_3}(x) &= x^3 + 4x^2 + 3x \\ A_{K_3}(x) &= x^3 + 6x^2 + 9x. \end{aligned}$$

*Задача 4.5.* Докажите следующие свойства многочлена Абеля:

- многочлен Абеля  $A_G(x)$  с  $n$  вершинами имеет степень  $n$  и коэффициент при  $x^n$  в нем равен 1;
- свободный член многочлена Абеля любого непустого графа равен 0;



- если в графе  $G$   $k$  компонент связности, то  $A_G(x)$  делится на  $x^k$  и не делится на  $x^{k+1}$ ;
- $A_{G \sqcup H}(x) = A_G(x)A_H(x)$ ;
- коэффициент при  $x^{n-1}$  (второй коэффициент) в многочлене Абеля равен удвоенному количеству ребер в графе.

*Задача 4.6.* Найдите многочлены Абеля графов с рисунков 4.2, 4.3, 4.4.

### 4.3 Многочлен паросочетаний

Пусть  $G = (V(G), E(G))$  — граф. *Паросочетанием* длины  $\ell$  в графе  $G$  называется набор попарно различных ребер  $\{e_1, \dots, e_\ell\}$ , никакие два из которых не имеют общих концов. Если в графе  $G$  четное число вершин,  $|V(G)| = 2n$ , то в нем могут быть паросочетания длины  $n$ . Такое паросочетание называется *совершенным*. В графе с нечетным числом вершин совершенных паросочетаний нет.

**Определение 4.3.1.** *Многочленом паросочетаний* графа  $G$  называется многочлен

$$M_G(y) = m_0(G)y^{|V(G)|} - m_1(G)y^{|V(G)|-2} + m_2(G)y^{|V(G)|-4} + \dots,$$

где через  $m_0, m_1, m_2, \dots$  обозначены количество паросочетаний в графе  $G$  длины соответственно  $0, 1, 2, \dots$ .

Так, многочлен паросочетаний цепочки из двух вершин равен

$$M_{A_2}(y) = y^2 - 1,$$

а многочлен паросочетаний полного графа на 3 вершинах имеет вид

$$M_{K_3}(y) = y^3 - 3y.$$

Очевидно, что многочлен паросочетаний обладает следующими свойствами:

- степень многочлена паросочетаний равна числу вершин в графе, а его старший коэффициент равен 1;
- многочлен паросочетаний является четным (содержит только мономы четной степени), если число вершин в графе четно, и нечетным (содержит только мономы нечетной степени), если число вершин в графе нечетно;
- второй коэффициент в многочлене паросочетаний равен взятому со знаком — числу ребер в графе.



*Задача 4.7.* Докажите, что многочлен паросочетаний является мультипликативным,  $M_{G \sqcup H} = M_G M_H$ .

*Задача 4.8.* Вычислите многочлен паросочетаний цепочки на  $n$  вершинах.

*Задача 4.9.* Найдите многочлены паросочетаний графов с рисунков 4.2, 4.3, 4.4.

*Задача 4.10.* Вычислите многочлен паросочетаний полного двудольного графа  $K_{3,2}$ .

*Задача 4.11.* \* Докажите, что многочлен паросочетаний

- $M_{K_n}(y)$  полного графа  $K_n$  равен многочлену Эрмита  $H_n(y)$ , определяемому равенством

$$H_n(y) = (-1)^n e^{\frac{y^2}{2}} \frac{d^n}{dy^n} e^{-\frac{y^2}{2}};$$

Первые многочлены Эрмита имеют вид

$$H_1(y) = y; \quad H_2(y) = y^2 - 1; \quad H_3(y) = y^3 - 3y; \quad H_4(y) = y^4 - 6y^2 + 3;$$

- $M_{K_{n,m}}(y)$  полного двудольного графа  $K_{m,n}$  равен  $n! L^{(n-m)}(y^2)$ , где многочлен Лагерра  $L^{(a)}(y)$  определяется равенством

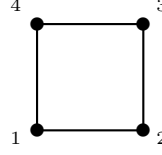
$$L_n^{(a)}(y) = \frac{y^{-a} e^y}{n!} \frac{d^n}{dy^n} (e^{-y} y^{n+a}).$$



## Глава 5

# Соотношения удаления-стягивания и теорема Татта



Рис. 5.1: Граф  $C_4$  с занумерованными вершинами

Многие инварианты графов легко определить, однако их практическое вычисление затруднено. В этой главе мы объясняем, как можно — относительно эффективно — вычислять хроматическую функцию. Способ вычисления основан на том, что хроматическая функция удовлетворяет соотношению удаления-стягивания, которое позволяет вычислять ее рекуррентно, постепенно упрощая граф. Это же свойство хроматической функции позволяет доказать, что ее значение на каждом графе в действительности является многочленом.

## 5.1 Соотношение удаление-стягивание для хроматической функции

Вычислим хроматическую функцию для графа  $C_4$  (квадрата), решив тем самым одну из задач предыдущей главы. Занумеруем его вершины в циклическом порядке (см. рис. 5.1) и будем раскрашивать их последовательно. Первую вершину можно раскрасить в  $c$  цветов. Вторую — в  $c - 1$  цветов. Третью — тоже в  $c - 1$  цветов: ее цвет должен отличаться от цвета второй вершины. С четвертой вершиной дело обстоит сложнее. Ее цвет должен отличаться и от цвета третьей, и от цвета первой вершины. Разделим все возможные окраски четвертой вершины в цвет, отличный от цвета третьей вершины, на две группы: те, в которых цвет четвертой вершины отличен от цвета первой, и те, в которых эти два цвета совпадают. Первая группа дает правильные раскраски квадрата, а вторая — правильные раскраски треугольника. Действительно, если первая и четвертая вершина покрашены в один и тот же цвет, то мы можем склеить их в одну, получив из квадрата треугольник. Тем самым, мы доказали равенство

$$\chi_{C_4}(c) = \chi_{A_4}(c) - \chi_{C_3}(c) = c(c-1)^3 - c(c-1)(c-2) = c(c-1)(c^2 - 3c + 3).$$

Здесь  $A_4$  — цепочка на четырех вершинах, а  $C_3 = K_3$  — треугольник.

На самом деле, в приведенном рассуждении нигде не использовалась структура графа  $C_4$ . Оно годится для произвольного графа. Пусть  $G$  — граф,  $e \in E(G)$  — ребро в нем. Обозначим через  $G'_e$  граф  $G$  с выкинутым ребром  $e$ , а через  $G''_e$  — этот же граф, в котором ребро  $e$  стянуто в точку (и, следовательно, два конца ребра  $e$  стали новой вершиной нового графа, а число вершин в нем на 1 меньше, чем в  $G$ ). Тогда справедливо следующее утверждение.



**Теорема 5.1.1.** *Хроматическая функция удовлетворяет равенству*

$$\chi_G(c) = \chi_{G'_e}(c) - \chi_{G''_e}(c) \quad (5.1)$$

для любого графа  $G$  и любого ребра  $e$  в нем.

Тем самым, хроматическую функцию графа можно вычислять последовательно: оба графа в правой части равенства (5.1) устроены проще, чем граф в его левой части. У первого из них меньше ребер, а у второго — меньше и вершин, и ребер. Заметим, однако, что сложность такого вычисления экспоненциальна. Действительно, на каждом шаге мы получаем два графа вместо одного, т.е. на шаге с номером  $k$  мы получим  $2^k$  графов (некоторые из которых могут оказаться изоморфными). Важно также отметить, что — несмотря на свободу выбора ребра на каждом шаге — результат вычисления, в силу инвариантности хроматической функции, не зависит от выбираемых ребер.

*Замечание 5.1.2.* Хроматическую функцию можно определить также и для графов, содержащих петли и кратные ребра. При этом для графа с петлями она оказывается тождественно равной нулю (поскольку у таких графов правильные раскраски вершин отсутствуют). Хроматическая функция графа с кратными ребрами совпадает с хроматической функцией того же графа, в котором каждое кратное ребро заменено обычным однократным ребром. Такое определение согласуется с теоремой 5.1.1. Действительно, если в графе есть кратные ребра, то, выбирая любое из этих ребер в качестве ребра  $e$  и применяя к нему формулу (5.1), мы получаем в правой части формулы тот же граф, в котором кратность ребра уменьшилась на 1, а также граф с петлей, хроматическая функция для которого равна нулю.

Во всех просчитанных нами примерах хроматическая функция оказывается многочленом, степень которого равна числу вершин в графе, а старший коэффициент равен 1. Теорема 5.1.1 позволяет распространить это утверждение на произвольные графы.

**Следствие 5.1.3.** *Хроматическая функция любого графа является многочленом, степень которого равна числу вершин в графе, а старший коэффициент равен 1.*

Действительно, хроматическая функция графа на  $n$  вершинах, не имеющего ребер, равна  $c^n$ , что составляет базу индукции. Теорема 5.1.1 обеспечивает шаг индукции: согласно предположению индукции хроматический многочлен графа  $G'_e$  это многочлен степени  $n$  со старшим коэффициентом 1, а хроматический многочлен графа  $G''_e$  это многочлен степени  $n - 1$ . Их разность является многочленом степени  $n$  со старшим коэффициентом 1.

## 5.2 Немного о топологии графа

Граф — одномерный объект, поэтому его топология довольно проста. Однако она не совсем пуста. Так, графы, — как и произвольные топологические пространства, — представляются в виде несвязного объединения своих



компонент связности. Разумеется, в первую очередь интерес представляет топология связных графов.

Граф называется *эйлеровым*, если валентность всех вершин в нем четна. Остовный подграф в графе называется *эйлеровым подграфом*, если он является эйлеровым графом. Например, в треугольнике  $C_3$  есть два эйлеровых подграфа: пустой набор ребер и набор, состоящий из всех трех ребер, т.е. сам граф  $C_3$ .

Заметим, что всякий эйлеров подграф разбивается в объединение простых циклов, не имеющих общих ребер (отдельная вершина также образует такой цикл; длина его равна 0). Действительно, возьмем какой-нибудь простой цикл, содержащийся в данном эйлеровом подграфе. Такой цикл всегда существует (докажите!). Выкинув ребра, входящие в выбранный цикл, мы снова получаем эйлеров подграф, поскольку количество ребер, проходящих через каждую вершину, остается четным.

**Задача 5.1.** Приведите пример эйлерова графа, ребра которого можно разбить на простые циклы тремя различными способами.

Рассмотрим векторное пространство  $\mathbb{Z}_2^{E(G)}$  над полем  $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$  вычетов по модулю 2, натянутое на все ребра графа как на образующие. Любое подмножество в множестве  $E(G)$  всех ребер графа  $G$  можно считать вектором в этом пространстве. Координата такого вектора, соответствующая ребру  $e$ , равна нулю, если ребро  $e$  не входит в подмножество, и равна 1 в противном случае. Наоборот, каждому вектору однозначно сопоставляется набор ребер графа. Размерность пространства  $\mathbb{Z}_2^{E(G)}$  равна  $|E(G)|$  — числу ребер в графе.

Множество  $\mathcal{C}(G)$  всех эйлеровых подграфов в  $G$  образует векторное подпространство в этом пространстве. Действительно, рассмотрим два эйлеровых подграфа и произвольную вершину графа. В сумме над  $\mathbb{Z}_2$  этих эйлеровых подграфов ребра, проходящие через выбранную вершину, аннигилируются попарно. Поэтому число неаннигилировавших ребер четно. Размерность векторного пространства эйлеровых циклов в графе  $G$  обозначается  $b_1(G)$  и называется *первым числом Бетти*, или *цикломатическим числом*.

Ученым языком, это число равно числу образующих в первой группе гомологий графа. Число компонент связности в графе называют также *нулевым числом Бетти*; оно обозначается через  $b_0(G)$ . Это — число образующих нулевой группы гомологий.

**Теорема 5.2.1 (Эйлер).** *Первое число Бетти связного графа равно*

$$b_1(G) = |E(G)| - |V(G)| + 1.$$

Это утверждение можно считать определением цикломатического числа. Первое число Бетти графа, очевидно, является инвариантом графа.

Для доказательства теоремы Эйлера заметим, во-первых, что если граф  $G$  — дерево, то величины слева и справа от знака равенства равны 0. Действительно, непустых эйлеровых подграфов в дереве нет, а число ребер в нем



больше числа вершин на 1. Наоборот, если цикломатическое число данного связного графа равно 0, то этот граф — дерево. Действительно, любой простой цикл в графе — эйлеров подграф в нем.

Пусть теперь теорема Эйлера доказана для всех связных графов с цикломатическим числом  $k$ . Возьмем граф  $G$ , в котором  $|E(G)| - |V(G)| + 1 = k + 1$ . Выкинув из него произвольное ребро  $e$ , стирание которого не нарушает связности графа, мы получим граф с цикломатическим числом  $k$ . Рассмотрим в  $\mathcal{C}(G)$  подпространство эйлеровых подграфов, не содержащих ребро  $e$ . Это подпространство совпадает с пространством  $\mathcal{C}(G'_e)$  эйлеровых подграфов в графе  $G'_e$ , поэтому его размерность равна  $k$ .

С другой стороны, поскольку выкидывание ребра  $e$  не нарушает связности графа  $G$ , через  $e$  проходит хотя бы один цикл, а значит,  $e$  содержится хотя бы в одном эйлеровом подграфе. Сумма над  $\mathbb{Z}_2$  любых двух таких эйлеровых подграфов не содержит  $e$ , следовательно, лежит в  $\mathcal{C}(G'_e)$ . Тем самым, пространство  $\mathcal{C}(G)$  является прямой суммой пространств  $\mathcal{C}(G'_e)$  и одномерного векторного пространства, натянутого на произвольный вектор, представленный циклом, содержащим ребро  $e$ . Поэтому его размерность равна  $k + 1$ , и теорема Эйлера доказана.  $\square$

### 5.3 Многочлен Пенроуза\*

Вот еще один, по-видимому, чрезвычайно важный, инвариант графов.

Для любого разбиения множества  $V(G)$  вершин графа  $G$  на два непересекающихся подмножества  $V(G) = V_1 \sqcup V_2$  подмножество всех ребер, соединяющих вершины из  $V_1$  с вершинами из  $V_2$ , называется *коциклом* в  $G$ . В  $\mathcal{C}_3$  коциклы — это пустое подмножество ребер, а также все пары ребер. Обозначим через  $\mathcal{K}(G)$  множество всех коциклов.

В пространстве  $\mathbb{Z}_2^{E(G)}$  есть невырожденное скалярное произведение со значениями в  $\mathbb{Z}_2$ : скалярное произведение двух наборов ребер равно четности числа элементов в пересечении этих наборов.

**Теорема 5.3.1** (Веблен, 1912). *Множество коциклов  $\mathcal{K}(G)$  является векторным подпространством в  $\mathbb{Z}_2^{E(G)}$ , ортогональным подпространству эйлеровых подграфов  $\mathcal{C}(G)$  относительно этого скалярного произведения:*

$$\mathcal{C}(G) = \mathcal{K}^\perp(G), \quad \mathcal{K}^\perp(G) = \mathcal{C}(G).$$

Для доказательства теоремы Веблена заметим, во-первых, что любой коцикл пересекается с любым эйлеровым подграфом по четному числу ребер. Действительно, пусть коцикл сопоставлен разбиению множества вершин графа на два непересекающихся подмножества  $V_1$  и  $V_2$ . Разобьем эйлеров подграф в объединение циклов, не имеющих общих ребер. В каждом цикле число ребер, соединяющих вершины из  $V_1$  с вершинами из  $V_2$ , четно — если идти по циклу в выбранном направлении, то число переходов из  $V_1$  в  $V_2$  равно числу переходов из  $V_2$  в  $V_1$ . Поэтому четно и число таких ребер в



эйлеровом подграфе, а значит, скалярное произведение эйлерова подграфа и коцикла равно нулю.

Количество способов, которыми множество вершин графа можно разбить на два непересекающихся подмножества, равно  $2^{|V(G)|-1}$ . Поэтому множество всех коциклов состоит из  $2^{|V(G)|-1}$  элементов. С другой стороны, согласно формуле Эйлера, подпространство, ортогональное пространству эйлеровых подграфов, имеет размерность  $|V(G)| - 1$ , а значит оно состоит из  $2^{|V(G)|-1}$  элементов. Поскольку оно содержит множество всех коциклов, оно просто совпадает с ним. Теорема Веблена доказана.  $\square$

Например, как мы видели, размерность пространства циклов в  $C_3$  равна 1, а размерность пространства коциклов равна 2. Сумма этих размерностей равна 3 — числу ребер в  $C_3$ .

*Замечание 5.3.2.* Не следует думать, что пространство  $\mathbb{Z}_2^{E(G)}$  является прямой суммой подпространства эйлеровых подграфов и подпространства коциклов, несмотря на дополняемость размерностей этих подпространств. Например, для графа  $C_4$  — цикла на четырех вершинах — сумма всех ребер является одновременно циклом и коциклом. Поэтому подпространство эйлеровых подграфов, состоящее из пустого множества ребер и суммы всех ребер, лежит в пространстве коциклов,  $\mathcal{C}(C_4) \subset \mathcal{K}(C_4)$ . В общем случае, подпространство эйлеровых подграфов и подпространство коциклов могут пересекаться по подпространству положительной размерности.

Для подмножества  $E' \subset E(G)$  множества ребер в  $G$  рассмотрим подпространство

$$B_G(E') = \{C \in \mathcal{C}(G), C \cap E' \in \mathcal{K}(G)\} \subset \mathbb{Z}_2^{E(G)}.$$

*Многочленом Пенроуза* графа  $G$  называется многочлен от одной переменной (которую принято обозначать  $\lambda$ ), определяемый равенством

$$P_G(\lambda) = \lambda \sum_{E' \subset E(G)} (-1)^{|E'|} \lambda^{\dim B_G(E')}.$$

*Пример 5.3.3.* Вычислим многочлен Пенроуза графа  $C_4$ , цикла на четырех вершинах. В этом графе четыре ребра, поэтому вычисление многочлена  $P_{C_4}$  требует перебора всех  $2^4 = 16$  подмножеств в множестве ребер. Мы будем пересекать с каждым из этих подмножеств одномерное пространство циклов, состоящее из пустого набора ребер и множества всех ребер. В свою очередь, размерность пространства коциклов равна  $|V(C_4)| - 1 = 3$ , и оно состоит из пустого набора ребер, набора всех ребер и всех пар ребер.

Для пустого подмножества ребер пересечение с ним любого цикла является коциклом, поэтому вклад пустого подмножества в многочлен Пенроуза равен  $\lambda^1 = \lambda$ .

Вклад любого подмножества из одного ребра равен  $-\lambda^0 = -1$ , поскольку пересечение цикла с таким подмножеством является коциклом только, если исходный цикл пуст. Всего таких подмножеств четыре, поэтому их суммарный вклад равен  $-4$ .



Размерность пространства коциклов, являющихся результатом пересечения пространства циклов с любым подмножеством из двух ребер равна единице. Таких подмножеств шесть, поэтому их суммарный вклад равен  $6\lambda$ .

Суммарный вклад подмножеств из трех ребер равен  $-4$ .

Вклад подмножества, состоящего из всех четырех ребер, равен  $\lambda$ .

Суммируя все вклады, получаем

$$P_{C_4}(\lambda) = 8\lambda(\lambda - 1).$$

## 5.4 Соотношения Татта

Мы показали, что хроматический многочлен графа  $\chi_G(c)$  удовлетворяет соотношению

$$\chi_G(c) = \chi_{G'_e}(c) - \chi_{G''_e}(c)$$

для любого ребра  $e$  в графе  $G$ . Однако хроматический многочлен — не единственный инвариант графов, удовлетворяющий такому соотношению. Татт называет *W-функцией* всякий инвариант графов  $f$ , удовлетворяющий соотношению

$$f(G) = f(G'_e) + f(G''_e) \quad (5.2)$$

для любого графа  $G$  и любого ребра  $e$  в нем. Изменение знака  $-$  на  $+$  не играет существенной роли: хроматический многочлен несложно модифицировать так, чтобы он удовлетворял соотношению (5.2). Для этого достаточно умножить его на  $(-1)^{|V(G)|}$ , где  $|V(G)|$  — число вершин в  $G$ , т.е. рассмотреть модифицированный хроматический многочлен  $\tilde{\chi}_G(c) = (-1)^{|V(G)|} \chi_G(c)$ . Мы будем называть равенство (5.2) *соотношением Татта*.

Соотношение Татта мы будем рассматривать уже не для простых графов, а для графов с петлями и кратными ребрами. *Петлей* в графе называется ребро с совпадающими концами. Ребро, не являющееся петлей, называется *жем* звеном. Если какие-то две вершины в графе соединены несколькими (более чем одним) ребрами, то эти ребра мы называем *кратными*. Как мы уже отмечали, хроматический многочлен можно определить и для таких, непростых, графов, причем для выбранного продолжения соотношения (5.2) продолжают выполняться.

Помимо соотношений Татта хроматический многочлен удовлетворяет также соотношению

$$f(G) = f(G_1)f(G_2) \quad (5.3)$$

в случае, если граф  $G$  является несвязным объединением графов  $G_1$  и  $G_2$ . Татт называет *W-функции*, удовлетворяющие соотношению (5.3), *V-функциями*, а мы будем называть их также *инвариантами Татта*. Для того, чтобы равенства (5.2) и (5.3) имели смысл, необходимо, чтобы в области значений инварианта  $f$  были определены сложение и умножение. Поэтому мы всегда будем предполагать, что эта область значений представляет собой некоторое фиксированное коммутативное кольцо  $K$ . В случае хроматического многочлена кольцо  $K$  является кольцом многочленов от одной



переменной  $c$ ,  $K = \mathbb{Z}[c]$ . Наша задача — доказать теорему Татта, дающую полное описание инвариантов Татта.

*Пример 5.4.1 (сложность графа).* Приведем еще один важный пример  $W$ -функции. Напомним, что *остовным деревом* графа  $G$  называется поддереву в нем, содержащее все вершины графа  $G$ . *Сложностью* графа называется число остовных деревьев в нем. Обозначим сложность графа  $G$  через  $C(G)$ . Очевидно, что сложность несвязного графа равна нулю. Сложность графа удовлетворяет соотношению Татта (5.2). Действительно, все остовные деревья в графе  $G$  разбиваются на два класса: не содержащие данное ребро  $e$  и содержащие это ребро. Остовные деревья первого типа находятся в естественном взаимно-однозначном соответствии с остовными деревьями графа  $G'_e$ , а остовные деревья второго типа — в естественном взаимно-однозначном соответствии с остовными деревьями графа  $G''_e$ .

## 5.5 Теорема Татта

Оба графа в правой части соотношения Татта “проще” графа в его левой части: в них меньше звеньев. Поэтому, применяя соотношение Татта последовательно, мы можем свести вычисление любой  $W$ -функции к ее вычислению на графах без звеньев. Такое вычисление можно понимать как замену любого графа формальной линейной комбинацией графов без звеньев с целыми неотрицательными коэффициентами.

Всякий граф без звеньев является несвязным объединением одновершинных графов с несколькими петлями. Поэтому для задания  $W$ -функции достаточно определить ее на таких графах. Для задания  $V$ -функции достаточно определить ее на одновершинных графах с произвольным количеством петель: на несвязных объединениях таких графов значение  $V$ -функции будет произведением ее значений на связных компонентах.

*Пример 5.5.1.* Хроматический многочлен однозначно определяется условиями (5.2), (5.3) и тем, что на одновершинном графе без петель он равен  $c$ , а на одновершинном графе с одной и более петлей он равен нулю.

Сложность графа однозначно определяется условием (5.2) и тем, что она равна 1 на любом одновершинном графе и 0 на несвязном объединении двух и более одновершинных графов.

Принципиальное значение поэтому имеет следующий вопрос: верно ли, что  $W$ -функция может принимать *любое* значение на несвязном объединении одновершинных графов (соответственно, верно ли что  $V$ -функция может принимать любое значение на одновершинных графах). Другими словами, последовательность упрощений графа с помощью соотношения Татта всегда приводит к линейной комбинации графов без звеньев. Однако таких последовательностей много — верно ли, что результат не зависит от выбранной последовательности?

Например, для графа на рис. 5.2 есть две различные возможности выбрать ребро, однако уже на следующем шаге мы с необходимостью при-



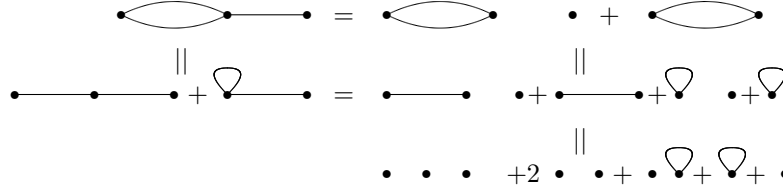


Рис. 5.2: Различные последовательности упрощения графа с помощью соотношений Татта

ходим к равным линейным комбинациям графов. Верно ли, что так будет всегда? Теорема Татта дает положительный ответ на этот вопрос.

**Теорема 5.5.2** (Татт). *Для любого набора значений на графах без звеньев (соотв., на одновершинных графах) существует  $W$ -функция (соотв.,  $V$ -функция), принимающая такие значения.*

Как мы уже видели раньше, такая функция единственна.

## 5.6 Доказательство теоремы Татта\*

В основе доказательства теоремы Татта лежит построение *универсальной*  $V$ -функции. Так мы называем  $V$ -функцию со значениями в кольце многочленов  $\mathbb{Z}[s_0, s_1, \dots]$  от бесконечного числа переменных, такую, что любую другую  $V$ -функцию со значением в произвольном кольце  $K$  можно получить подстановкой вместо переменных  $s_i$  подходящих элементов кольца  $K$ . Заметим, что элементами кольца  $\mathbb{Z}[s_0, s_1, \dots]$  являются конечные суммы мономов, представляющих собой конечные произведения переменных  $s_i$  с целыми коэффициентами.

Такую функцию можно построить следующим образом. Напомним, что *остовным подграфом* графа называется всякий его подграф, содержащий все его вершины. Тем самым, у каждого графа  $G$  ровно  $2^{|E(G)|}$  остовных подграфов — по числу подмножеств в множестве ребер. Положим

$$U_G(s_0, s_1, \dots) = \sum_{E' \subset E(G)} s_0^{i_0(G(E'))} s_1^{i_1(G(E'))} \dots \quad (5.4)$$

В правой части формулы суммирование идет по всем подмножествам  $E'$  множества ребер  $E(G)$ ; через  $G(E')$  обозначен соответствующий остовный подграф, а  $i_m(G(E'))$  — число связных компонент в  $G(E')$  с первым числом Бетти  $m$  (т.е.,  $i_0(G(E'))$  — число деревьев среди связных компонент,  $i_1(G(E'))$  — число связных компонент с одним простым циклом и т.д.).

**Лемма 5.6.1.** *Функция  $U_G$  является инвариантом Татта, т.е.*

$$U_G = U_{G'_e} + U_{G''_e}$$

для любого графа  $G$  и любого звена  $e$  в нем.



Прежде, чем доказывать лемму, посмотрим, что означает на практике вычисление функции  $U_G$ .

*Пример 5.6.2.* Пусть  $G = C_3$  — граф-треугольник. Тогда у него  $2^3 = 8$  остовных подграфов. Подграф с пустым множеством ребер содержит три компоненты, каждая с цикломатическим числом 0, поэтому его вклад в функцию  $U_{C_3}$  равен  $s_0^3$ . Каждый из трех подграфов с одним ребром содержит две компоненты, обе с цикломатическим числом 0. Их общий вклад равен поэтому  $3s_0^2$ . Аналогично, вклад трех двухреберных подграфов равен  $3s_0$ . Наконец, сам граф  $C_3$  состоит из одной компоненты связности с цикломатическим числом 1, поэтому его вклад равен  $s_1$ . Таким образом,

$$U_{C_3} = s_0^3 + 3s_0^2 + 3s_0 + s_1.$$

**Доказательство леммы 5.6.1** Фиксируем граф  $G$  и звено  $e$  в нем. Остовные подграфы графа  $G$ , не содержащие ребро  $e$ , находятся во взаимно однозначном соответствии с остовными подграфами графа  $G'_e$ . При этом соответствии подграфы изоморфны, а значит соответствующие им значения  $i_0, i_1, \dots$  совпадают. С другой стороны, остовные подграфы графа  $G$ , содержащие ребро  $e$ , находятся во взаимно однозначном соответствии с остовными подграфами графа  $G''_e$ . При этом соответствии в каждом остовном подграфе в  $G''_e$  стягивается одно ребро, что не меняет набора цикломатических чисел его связных компонент. Лемма доказана.  $\square$

Покажем теперь, что придавая различные значения переменным  $s_i$  мы можем превратить  $U$  в  $V$ -функцию с любыми наперед заданными значениями на одновершинных графах без ребер. Обозначим одновершинный граф с  $n$  петлями через  $X_n$ . Выпишем значения функции  $U$  на  $X_n$ . Имеем

$$U(X_0) = s_0, \quad U(X_1) = s_0 + s_1, \quad U(X_2) = s_0 + 2s_1 + s_2;$$

вообще

$$U(X_n) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} s_j.$$

Действительно, в графе  $X_n$  имеется  $2^n$  остовных подграфов — по числу подмножеств в множестве петель. Все эти подграфы связны. Число остовных подграфов из  $k$  петель равно  $\binom{n}{k}$ , и его цикломатическое число равно  $k$ .

Из этих равенств мы можем выразить  $s_i$ :

$$s_0 = U(X_0), s_1 = U(X_1) - U(X_0), \dots, s_n = (-1)^n \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} U(X_j), \dots$$

Тем самым, для произвольного набора значений  $U(X_j) = t_j$ , мы можем восстановить значения  $s_i$ , а значит и значение функции  $U$  на произвольном графе, положив

$$s_i = (-1)^i \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{i}{j} t_j.$$



Теорема Татта доказана.  $\square$

Проверим проведенное выше вычисление значения функции  $U$  на графе  $C_3$ . Последовательно применяя соотношения Татта, мы заключаем, что

$$C_3 = X_0^3 + 3X_0^2 + 2X_0 + X_1.$$

Отсюда

$$U_{C_3} = U_{X_0}^3 + 3U_{X_0}^2 + 2U_{X_0} + U_{X_1} = s_0^3 + 3s_0^2 + 2s_0 + s_1 + s_0 = s_0^3 + 3s_0^2 + 3s_0 + s_1$$

в согласии с нашими предыдущими вычислениями.

## 5.7 Новые примеры инвариантов Татта

Результаты предыдущего раздела означают, что инвариант Татта можно задать, либо подставив в универсальную функцию  $U_G$  произвольные значения вместо параметров  $s_i$ , либо указав значения инварианта на графах  $X_n$ , — любой из этих наборов значений однозначно выражается через другой. Вот что получается при некоторых специальных подстановках.

*Пример 5.7.1 (ребра).* Если мы положим в универсальном инварианте  $U$  все  $s_i = 1$ , то получим  $V$ -функцию, принимающую на графе  $G$  значение  $2^{|E(G)|}$ .

*Пример 5.7.2 (дихроматический многочлен и дихромат).* Дихроматический многочлен  $Q_G(t, z)$  зависит от двух переменных, и определяется подстановкой  $s_k = tz^k$  в универсальный инвариант Татта. Как нетрудно видеть, значение дихроматического многочлена на графе  $X_n$  равно

$$Q_{X_n}(t, z) = t(1 + z)^n,$$

и эти равенства также можно считать его определением.

Подстановка  $t = -c$ ,  $z = -1$  превращает дихроматический многочлен в хроматический.

*Дихромат* графа  $G$  определяется формулой

$$\chi_G(x, y) = (x - 1)^{-b_0(G)} Q_G(x - 1, y - 1),$$

или

$$\chi_G(x, y) = (x - 1)^{-b_0(G)} \sum_{E' \subseteq E(G)} (x - 1)^{b_0(E')} (y - 1)^{b_1(E')}.$$

*Пример 5.7.3 (поточный многочлен).* Подстановка  $z = -m$ ,  $t = -1$  превращает дихроматический многочлен в *поточный*, который мы обозначим через  $F_G(m)$ :

$$F_G(m) = Q_G(-1, -m).$$

Объясним причину такого названия. Обозначим через  $\mathbb{Z}_m$  группу вычетов по модулю  $m$ . *Целью* над  $\mathbb{Z}_m$  в графе  $G$  называется формальная линейная



комбинация ребер графа  $G$  с коэффициентами из  $\mathbb{Z}_m$ , т.е. элемент группы  $\mathbb{Z}_m^{E(G)}$ . Ориентируем ребра графа  $G$  произвольным образом. Тогда *границей* цепи называется формальная линейная комбинация вершин графа  $G$ , в которой коэффициент при каждой вершине равен сумме коэффициентов цепи входящих в нее ребер минус сумма коэффициентов выходящих ребер. Цепь называется *циклом*, если у нее нулевая граница (т.е. коэффициенты границы при каждой вершине равны нулю). Понятие эйлерова подграфа совпадает с понятием цикла над  $\mathbb{Z}_2$ . При этом выбор ориентации графа не важен, так как в группе  $\mathbb{Z}_2$  всякий элемент совпадает со своим противоположным.

Например, граф из двух вершин, соединенных двумя ребрами, допускает две существенно различных ориентации. В обоих случаях цепи имеют вид  $a_1e_1 + a_2e_2$ , где символами  $e_1, e_2$  обозначены (ориентированные) ребра графа, а  $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}_m$ . Граница такой цепи равна сумме вершин, взятых с коэффициентами  $a_1 + a_2, -(a_1 + a_2)$  в случае, если ребра ориентированы одинаково, и с коэффициентами  $a_1 - a_2, a_2 - a_1$ , если ориентации ребер противоположны. Если оба ребра ориентированы одинаково, то циклы имеют вид  $ae_1 - ae_2$ , а если ориентация ребер противоположна, то циклы имеют вид  $ae_1 + ae_2$ .

**Утверждение 5.7.4.** *Значение многочлена  $F_G(m)$  при целом  $m \geq 2$  равно числу всюду ненулевых циклов над  $\mathbb{Z}_m$  в произвольной ориентации ребер графа  $G$ , умноженному на  $(-1)^{b_1(G)+1}$ .*

Всюду ненулевой цикл можно понимать как “поток” в графе, а его коэффициенты при ребрах как “величину тока” вдоль направления этого ребра, что и объясняет название инварианта. При этом суммарный поток через любую вершину равен нулю, т.е. вершина не является ни источником, ни стоком.

Для доказательства утверждения заметим прежде всего, что число всюду ненулевых циклов не зависит от выбора ориентации графа: чтобы превратить цикл в некоторой ориентации в цикл относительно другой ориентации, отличающейся от первой ориентацией некоторых ребер, достаточно поменять коэффициенты при этих ребрах на противоположные. Ясно, что такая операция задает взаимно-однозначное отображение, как на множествах циклов, так и на множествах всюду ненулевых циклов.

Проверим теперь, что число всюду ненулевых циклов над  $\mathbb{Z}_m$ , умноженное на  $(-1)^{b_1(G)}$ , является  $V$ -функцией. Мультипликативность числа всюду ненулевых циклов очевидна. Умножение на  $(-1)^{b_1(G)}$  не меняет этого свойства, поскольку при несвязном объединении графов их цикломатические числа складываются.

Фиксируем граф  $G$ , ориентацию в нем и ребро  $e \in G$ . Для проверки соотношения Татта заметим, что всякому всюду ненулевому циклу в графе  $G''_e$  можно сопоставить цикл в графе  $G$ . Действительно, рассмотрим цепь в  $G$ , отвечающую выбранному циклу в  $G''_e$ , и достроим ее до цикла. Для этого нужно приписать ребру  $e$  в  $G$  коэффициент, равный, с точностью



до знака, значению коэффициента границы рассматриваемой цепи в любой из вершин, инцидентных ребру  $e$ . Эти два значения отличаются знаком, и выбранный коэффициент зависит от выбранного направления ребра  $e$ . Может случиться, однако, что построенный таким образом коэффициент равен нулю. Такое происходит в том и только в том случае, когда цикл в  $G''_e$  задает цикл в  $G'_e$ . Тем самым, число всюду ненулевых циклов в  $G$  равно разности числа всюду ненулевых циклов в  $G''_e$  и  $G'_e$ . Цикломатические числа графов  $G$  и  $G''_e$  совпадают, а цикломатическое число графа  $G'_e$  меньше их на единицу. Поэтому после умножения числа всюду ненулевых циклов на  $(-1)^{b_1(G)}$  получаем функцию, удовлетворяющую соотношению Татта.

Осталось проверить ее совпадение с функцией  $F$  на графах  $X_n$ . Но мы знаем, что

$$F_{X_n}(m) = -(1 - m)^n,$$

что после умножения на  $(-1)^{b_1(V(G))+1} = (-1)^{n+1}$  в точности равно  $(m - 1)^n$  — числу всюду ненулевых циклов в  $X_n$  над  $\mathbb{Z}_m$  (поскольку любая расстановка ненулевых элементов группы  $\mathbb{Z}_m$  на петлях графа  $X_n$  является циклом), что и требовалось.  $\square$

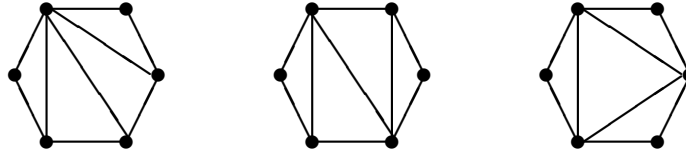
*Пример 5.7.5 (эйлеровость).* Вот  $V$ -функция со значениями в  $\mathbb{Z}_2$ , выделяющая эйлеровы графы (напомним, граф называется *эйлеровым*, если у всех его вершин четные валентности). Положим значение  $V$ -функции  $\varepsilon$  равным 1 на всех графах  $X_n$ . Тогда значение такой функции на произвольном эйлеровом графе  $G$  равно 1, а на неэйлеровом графе — нулю.

Для доказательства последнего утверждения достаточно проверить, что такая функция удовлетворяет соотношению Татта. Эйлеровость графа является *топологической* характеристикой — она не меняется при стягивании ребра. Поэтому если граф  $G$  эйлеров, то граф  $G''_e$  тоже эйлеров для любого ребра  $e \in E(G)$ , а граф  $G'_e$  неэйлеров — в нем валентности двух вершин меняются на 1. Если же граф  $G$  неэйлеров, причем в нем есть вершина нечетной валентности не на концах ребра  $e$ , то и оба графа  $G'_e$  и  $G''_e$  неэйлеровы. Если же нечетную валентность имеют лишь оба конца ребра  $e$ , то оба графа  $G'_e$  и  $G''_e$  эйлеровы. Во всех этих случаях

$$\varepsilon(G) = \varepsilon(G'_e) + \varepsilon(G''_e).$$

Заметим также, что эйлеровость графа совпадает с числом всюду ненулевых циклов в нем с коэффициентами в группе  $\mathbb{Z}_2$ . Действительно, единственный способ приписать всем ребрам графа ненулевые значения в  $\mathbb{Z}_2$  состоит в том, чтобы сопоставить каждому ребру значение 1. В результате мы получим цикл в том и только в том случае, если в каждой вершине сходится четное число ребер, т.е. если наш граф — эйлеров. Тем самым, этот пример является частным случаем предыдущего.



Рис. 5.3: Различные триангуляции цикла  $C_6$ 

## 5.8 Задачи

**Задача 5.2.** Рассуждая по индукции, найдите  $\chi_{C_n}(c)$  для произвольного цикла длины  $n$ .

**Задача 5.3.** Пусть  $G$  — граф. Докажите, что хроматический многочлен графа, полученного из  $G$  добавлением одной вершины, соединенной с одной из его вершин, получается из хроматического многочлена графа  $G$  умножением на  $c - 1$ .

**Задача 5.4.** Пользуясь теоремой 5.1.1, подсчитайте хроматический многочлен для а) деревьев на  $n$  вершинах; б) триангуляций (т.е. циклов, в которых проведены “попарно непересекающиеся диагонали”, разбивающие их на треугольники, см. рис. 5.3. Покажите, в частности, что хроматическая функция одинакова для всех деревьев и для всех триангуляций на данном числе вершин, а значит, не различает попарно неизоморфные графы этих типов.

**Задача 5.5.** Докажите, что второй коэффициент хроматического многочлена  $\chi_G(c)$  графа  $G$  с  $n$  вершинами (коэффициент при  $c^{n-1}$ ) равен числу ребер в  $G$ , взятому со знаком минус.

**Задача 5.6.** Докажите, что знаки коэффициентов хроматического многочлена чередуются — коэффициент при  $c^k$  имеет знак  $(-1)^{n-k}$  или равен нулю.

**Задача 5.7.** Дайте доказательство теоремы Татта, основанное на том, что операции удаления/стягивания двух различных звеньев в графе коммутируют между собой.

**Задача 5.8.** Ориентацией графа называется выбор направлений ребер в нем. Ориентация называется *ациклической*, если в графе отсутствуют циклы, идущие в направлении ориентированных ребер. Докажите, что число ациклических ориентаций графа равно  $|\chi_G(-1)|$  — модулю значения хроматического многочлена в точке  $-1$ . Проверьте, что это утверждение распространяется и на графы с кратными ребрами и петлями.

Например, для графа  $A_2 = K_2$  имеем  $\chi_{A_2}(-1) = 2$ , и действительно, обе возможные ориентации отрезка являются ациклическими. В свою очередь,  $\chi_{K_3}(-1) = -6$ , и из восьми возможных ориентаций треугольника ровно две не являются ациклическими. Для доказательства воспользуйтесь тем, что количество ациклических ориентаций удовлетворяет соотношению Татта (предварительно доказав этот факт).



*Задача 5.9.* Подсчитайте первое число Бетти а) для деревьев; б) для циклов  $C_n$ ; в) для полных графов  $K_n$ ; г) для триангуляций (см. задачу 5.4).

*Задача 5.10.* \* Вычислите многочлен Пенроуза для всех графов с не более, чем 4 вершинами.

*Задача 5.11.* \* Докажите, что многочлен Пенроуза связного графа, в котором есть *перешеек* (ребро, при выкидывании которого граф становится несвязным) равен нулю.

*Задача 5.12.* Вычислите сложность графов, принадлежащих к изучавшимся нами ранее типам. Какова сложность связного графа с цикломатическим числом 1, содержащего единственный простой цикл длины  $n$ ?

*Задача 5.13.* Проверьте, что сложность графа не меняется при удалении из него и добавлении к нему петель.

*Задача 5.14.* Понятие цикла над группой  $\mathbb{Z}_m$  можно обобщить на произвольные абелевы группы. Докажите, что потоковый многочлен перечисляет не только всюду ненулевые циклы над  $\mathbb{Z}_m$ , но и всюду ненулевые циклы над произвольной абелевой группой с  $m$  элементами.

*Задача 5.15.* Остовный подграф графа  $G$  на  $2n$  вершинах называется *совершенным паросочетанием*, или *1-фактором*, если он состоит из  $n$  ребер, никакие два из которых не имеют общих концов. Например, в квадрате  $C_4$  два совершенных паросочетания, а в полном графе  $K_4$  их три. Рассмотрим  $V$ -функцию, значение которой на графе  $X_n$  равно

$$\frac{(-1)^{n+1}}{2}(3^n + 1).$$

Докажите, что значение этой  $V$ -функции на всяком *кубическом* графе (т.е., на графе, валентности всех вершин которого равны трем) равно числу совершенных паросочетаний в нем.

Проверим это утверждение для кубического графа  $K_4$  — полного графа на четырех вершинах. Значение универсального инварианта  $U$  на таком графе равно

$$U_{K_4} = s_0^4 + 6s_0^3 + 15s_0^2 + 4s_0s_1 + 16s_0 + 15s_1 + 6s_2 + s_3.$$

Его несложно вычислить благодаря высокой степени симметрии графа  $K_4$ . Например, в множестве его ребер имеется  $\binom{6}{3} = 20$  трехреберных подмножеств. Четыре из соответствующих остовных подграфов составляют треугольник  $C_3$ , объединенный с отдельной вершиной, остальные 16 состоят из трех компонент связности с цикломатическим числом 0. Таким образом, вклад трехреберных подграфов в универсальный инвариант равен  $4s_0s_1 + 16s_0^3$ . Вычисление остальных слагаемых еще проще.

Воспользовавшись выражениями для  $s_n$

$$\begin{aligned} s_0 &= t_0, & s_1 &= t_1 - t_0, \\ s_2 &= t_2 - 2t_1 + t_0, & s_3 &= t_3 - 3t_2 + 3t_1 - t_0, \end{aligned}$$



через значения на базисных графах и известными значениями

$$t_0 = -1, \quad t_1 = 2, \quad t_2 = -5, \quad t_3 = 14,$$

получаем

$$s_0 = -1, \quad s_1 = 3, \quad s_2 = -10, \quad s_3 = 36.$$

Подстановка этих значений в универсальный инвариант дает 3, что и требовалось.

*Задача 5.16.* Подсчитайте число совершенных паросочетаний в а) цепочках  $A_n$ ; б) циклах  $C_n$ ; в) полных графах  $K_n$ ; г) в триангуляциях (см. задачу 5.4).

*Задача 5.17.* Найдите все графы с шестью вершинами, имеющие 6 совершенных паросочетаний.

*Задача 5.18.* Добавьте в таблицу всех связных графов с  $\leq 5$  вершинами значения всех введенных выше инвариантов графов.



## Глава 6

# Статистические модели инвариантов



## Глава 7

# Группа автоморфизмов графа



## Глава 8

# Перечисление графов



## Глава 9

# Топологическая эквивалентность графов



## Глава 10

# Поверхности



## Глава 11

# Склейка поверхностей из многоугольников



## Глава 12

# Топологические характеристики поверхностей



## Глава 13

# Плоские и планарные графы



## Глава 14

# Графы на поверхностях