Лекция 3

Точечные оценки и их свойства
(несмещенность, эффективность, состоятельность)

Пусть θ — неизвестный параметр изучаемого распределение СВ X, а $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ — выборка объёма n, порождаемая этим распределением. Пусть

$$\hat{\theta}_n = h(X_1, \dots, X_n)$$

— оценка параметра θ, определяемая некоторой заданной функцией $h(x_1, \dots, x_n)$ ~~от~~ n переменных по выборке $(X_1, \dots, X_n)$, так, что $\hat{\theta}$ является случайной величиной.

Пример. Пусть

$$h(x_1, \dots, x_n) = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

Тогда оценка

$$\hat{\theta}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$$

может рассматриваться как оценка неизвестного математического ожидания $M\{X\} = \theta$ изучаемого распределение СВ X.

Определение. Оценка $\hat{\theta}_n$ называется несмещенной, если её математическое ожидание $M\{\hat{\theta}_n\}$ совпадает с θ: $M\{\hat{\theta}_n\} = \theta$.

Пример. Оценка $\hat{\theta}_n = \dfrac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ является несмещённой оценкой для математического ожидания $M\{X\} = \theta$, ибо

$$M\{\hat{\theta}_n\} = \frac{1}{n} M\{X_1 + \dots + X_n\} = \frac{M\{X_1\} + \dots + M\{X_n\}}{n} = \frac{M\{X\} + \dots + M\{X\}}{n} =$$

$$= \frac{n \cdot M\{X\}}{n} = M\{X\} = \theta .$$

<u>Определение</u> Оценка $\hat{\theta}_n = h(X_1, \dots, X_n)$ называется <u>асимптотически несмещенной</u>, если

$$\lim_{n \to \infty} M\{\hat{\theta}_n\} = \theta .$$

~~Определение~~ <u>Пример</u> Пусть выборка $(X_1, \dots, X_n)$ порождена СВ $X \sim R[0, \theta]$, где $\theta > 0$ – неизвестный параметр. Рассмотрим ~~θ~~ оценку $\hat{\theta}_n = X_{(n)}$, где $X_{(n)}$ – соответствующая порядковая статистика (см. лекцию 2). По условию

$$F(x) = P\{X < x\} = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0, \\ \frac{x}{\theta} \text{ при } x \in (0; \theta], \\ 1 \text{ при } x > \theta. \end{cases}$$

Поэтому (см. лекцию 2)

$$F_{(n)}(x) = P\{X_{(n)} < x\} = F^n(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0, \\ \left(\frac{x}{\theta}\right)^n \text{ при } x \in (0; \theta], \\ 1 \text{ при } x > \theta \end{cases}$$

и

$$M\{\hat{\theta}_n\} = M\{X_{(n)}\} = \int_0^\theta x \cdot n \left(\frac{x}{\theta}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{\theta} dx = \frac{n}{\theta^n} \int_0^\theta x^n dx =$$

$$= \frac{n}{\theta^n} \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_{x=0}^{x=\theta} = \frac{n}{\theta^n} \cdot \frac{\theta^{n+1}}{n+1} = \frac{n}{n+1} \theta .$$

Как видно,

$$\lim_{n \to \infty} M\{\hat{\theta}_n\} = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} \theta = \theta ,$$

так что предложенная оценка для θ – является асимптотически несмещенной.

<u>Определение</u> Несмещенная оценка $\hat{\theta}_n$ параметра θ называется эффективной, если при заданном объёме n выборки она имеет наименьшую дисперсию.

<u>Определение</u> Оценка $\hat{\theta}_n$ параметра θ называется состоятельной, если $\forall \varepsilon > 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|\hat{\theta}_n - \theta| < \varepsilon\} = 1$, т.е. $\hat{\theta}_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} \theta$.

<u>Теорема 1</u> (достаточные условия состоятельности)

Пусть для оценки $\hat{\theta}_n$ параметра θ выполнены условия:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} M\{\hat{\theta}_n\} = \theta$ (т.е. оценка $\hat{\theta}_n$ является асимптотически несмещенной)

и

2) $\lim\limits_{n\to\infty} D\{\hat{\theta}_n\} = 0$;

тогда $\hat{\theta}_n$ — состоятельная оценка для θ.

<u>Доказательство</u>. Зафиксируем любое $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists N$ такое, что $\forall n \geq N$

$$|M\{\hat{\theta}_n\} - \theta| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (*)$$

Заметим, что

$$|\hat{\theta}_n - \theta| \leq |\hat{\theta}_n - M\{\hat{\theta}_n\}| + |M\{\hat{\theta}_n\} - \theta|,$$

откуда

$$|\hat{\theta}_n - M\{\hat{\theta}_n\}| \geq |\hat{\theta}_n - \theta| - |M\{\hat{\theta}_n\} - \theta| \quad (**)$$

Определим события

$$A_n = \{ |\hat{\theta}_n - \theta| \geq \varepsilon \} \cdot \text{ и } B_n = \{ |\hat{\theta}_n - M\{\hat{\theta}_n\}| \geq \frac{\varepsilon}{2} \}$$

Если $n \geq N$ и произошло событие A_n то из (*) и (**) следует, что

$$|\hat{\theta}_n - M\{\hat{\theta}_n\}| \geq \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2},$$

т.е. произошло событие B_n. Таким образом, при $n \geq N$ событие A_n влечёт B_n, так что

$$P\{A_n\} \leq P\{B_n\}.$$

По неравенству Чебышёва

$$P\{B_n\} = P\{ |\hat{\theta}_n - M\{\hat{\theta}_n\}| \geq \frac{\varepsilon}{2} \} \leq \frac{D\{\hat{\theta}_n\}}{(\frac{\varepsilon}{2})^2},$$

поэтому

$$P\{A_n\} \leq \frac{D\{\hat{\theta}_n\}}{(\frac{\varepsilon}{2})^2} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Следовательно,

$$P\{ |\hat{\theta}_n - \theta| < \varepsilon \} = 1 - P\{ |\hat{\theta}_n - \theta| \geq \varepsilon \} =$$

$$= 1 - P\{A_n\} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1,$$

что и т.д.

Исследуем на несмещенность и состоятельность выборочные моменты.

Теорема 2 Выборочный начальный момент k-го порядка

$$\overline{\nu_k(n)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i)^k$$

является несмещённой оценкой для соответствующего теоретического момента $\nu_k = M\{X^k\}$ (если последний существует).

Док-во:

$$M\{\overline{\nu_k(n)}\} = M\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i)^k\right\} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M\{(X_i)^k\} =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M\{X^k\} = \frac{1}{n}\cdot n\nu_k = \nu_k \text{, что и т.д.}$$

Теорема 3 Если существует теоретический начальный момент ν_{2m}, то выборочный начальный момент $\overline{\nu_k(n)}$ является состоятельной оценкой для ν_k при любом $k \le m$.

Док-во. Воспользуемся теоремой 1. Условие 1) выполнено. Проверим выполнение условие 2):

$$D\{\overline{\nu_k(n)}\} = D\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i)^k\right\} =$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(D\{X_1^k\} + \ldots + D\{X_n^k\}\right) = \frac{1}{n^2} D\{X^k\}\cdot n =$$

$$= \frac{1}{n} D\{X^k\} = \frac{1}{n}\left\{M\{X^{2k}\} - \left(M\{X^k\}\right)^2\right\} =$$

$$= \frac{1}{n}\left\{\nu_{2k} - \nu_k^2\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 .$$

Таким образом, оба условия 1) и 2) теоремы 1 выполнены, так что $\overline{\nu_k(n)}$ есть состоятельная оценка доли ν_k.

Теорема Слуцкого (вспомогательная техническая теорема) (без док-ва)

Пусть есть k ~~серий~~ последовательностей случайных величин

$$Y_1^{(1)}, Y_2^{(1)}, \ldots, Y_n^{(1)}, \ldots$$

$$Y_1^{(2)}, Y_2^{(2)}, \ldots, Y_n^{(2)}, \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$Y_1^{(k)}, Y_2^{(k)}, \ldots, Y_n^{(k)}, \ldots$$

Пусть

$$Y_n^{(1)} \xrightarrow[n\to\infty]{P} a_1, \ldots, Y_n^{(k)} \xrightarrow[n\to\infty]{P} a_k .$$

Пусть функция $f(y_1, y_2, \ldots, y_k)$ k переменных непрерывна в точке $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$.
Определим последовательность СВ

$$Z_n = f\left(Y_n^{(1)}, Y_n^{(2)}, \ldots, Y_n^{(k)}\right), \ n = 1, 2, \ldots$$

Тогда

$$Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} f(a_1, a_2, \ldots, a_k) .$$

Теорема 4 Если существует теоретический начальный момент ν_{2m}, то выборочный центральный момент

$$\overline{\mu_k(n)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{\nu_1(n)}\right)^k$$

является состоятельной оценкой при $k \le m$.

Док-во: Центральный момент любого порядка μ_k можно представить в виде $\mu_k = f_k(\nu_1, \dots, \nu_k)$, где f_k — многочлен степени k:

$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2,$$

$$\mu_3 = M\{(X-\nu_1)^3\} = M\{X^3 - 3X^2\nu_1 + 3X\nu_1^2 - \nu_1^3\} =$$
$$= M\{X^3\} - 3\nu_1 M\{X^2\} + 3\nu_1^2 M\{X\} - \nu_1^3 =$$
$$= \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 3\nu_1^2\cdot\nu_1 - \nu_1^3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3, \dots$$

При этом выборочные моменты удовлетворяют тем же самым соотношениям:

$$\overline{\mu_k(n)} = f_k\left(\overline{\nu_1(n)}, \overline{\nu_2(n)}, \dots, \overline{\nu_k(n)}\right).$$

Поскольку многочлен — непрерывная функция, и, по теореме 3,

$$\overline{\nu_1(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{P} \nu_1, \dots, \overline{\nu_k(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{P} \nu_k,$$

то, по теореме Слуцкого,

$$\overline{\mu_k(n)} = f_k(\overline{\nu_1(n)}, \dots, \overline{\nu_k(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{P} f_k(\nu_1, \dots, \nu_k) = \mu_k,$$ что и т.д.