Лекция 5
Метод моментов

Пусть вид (закон) распределения СВ X известен с точностью до неизвестных параметров $\theta_1, \dots, \theta_k$, $k \geq 1$. Тогда все начальные моменты $\nu_1, \dots, \nu_k$ этой СВ X являются известными функциями от этих параметров:

$$(1) \begin{cases} \nu_1 = M\{X\} = g_1(\theta_1, \dots, \theta_k), \\ \dots\dots\dots\dots \\ \nu_k = M\{X^k\} = g_k(\theta_1, \dots, \theta_k). \end{cases}$$

Если X - непрерывная СВ с плотностью распределения $f(x, \theta_1, \dots, \theta_k)$, то

$$g_1(\theta_1, \dots, \theta_k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x, \theta_1, \dots, \theta_k)\,dx,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$g_k(\theta_1, \dots, \theta_k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x, \theta_1, \dots, \theta_k)\,dx.$$

Если X - дискретная СВ, определяемая законом распределения

$$P\{X = x_m\} = p(x_m, \theta_1, \dots, \theta_k), \ m = 1, 2, \dots,$$

то

$$g_1(\theta_1, \dots, \theta_k) = \sum_m x_m p(x_m, \theta_1, \dots, \theta_k),$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$g_k(\theta_1, \dots, \theta_k) = \sum_m x_m^k p(x_m, \theta_1, \dots, \theta_k),$$

где $\sum\limits_m$ либо конечная сумма, если

X - дискретная СВ с конечным числом возможных значений, либо $\sum\limits_{m}$ есть сумма ряда, если X - дискретная СВ с бесконечным числом возможных значений.

Предполагаем, что моменты $\nu_1, \dots, \nu_k$ существуют. И предположим, что систему (1) можно разрешить относительно ~~системы~~ параметров $\theta_1, \dots, \theta_k$:

$$\begin{cases} \theta_1 = h_1(\nu_1, \dots, \nu_k), \\ \dots\dots\dots\dots \\ \theta_k = h_k(\nu_1, \dots, \nu_k), \end{cases}$$

где $h_1, \dots, h_k$ - непрерывные функции.

<u>Определение</u>. Оценки параметров $\theta_1, \dots, \theta_k$, заданные формулами

$$\hat{\theta}_1 = h_1(\overline{\nu}_1, \dots, \overline{\nu}_k),$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\hat{\theta}_k = h_k(\overline{\nu}_1, \dots, \overline{\nu}_k),$$

называются оценками метода моментов.

Здесь $\overline{\nu}_1, \dots, \overline{\nu}_k$ - соответствующие выборочные начальные моменты, полученные по выборке $\{X_1, \dots, X_n\}$, порождённой случайной величиной X:

$$\overline{\nu}_r = \overline{\nu}_r(n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i)^r, \quad r = 1, 2, \dots, k.$$

Из теоремы 3 и теоремы Слуцкого из лекции 3 следует

Теорема (о состоятельности оценок метода моментов)

Если распределение зависит от параметров $\theta_1,\dots,\theta_k$, и при любом допустимом наборе их значений распределение имеет начальные моменты до порядка $2k$ включительно, то оценки $\hat{\theta}_1,\dots,\hat{\theta}_k$ параметров $\theta_1,\dots,\theta_k$, полученные по методу моментов, являются состоятельными.

Рассмотрим несколько примеров на получение оценок методом моментов.

Пример 1 Пусть выборка $\{X_1,\dots,X_n\}$ порождена СВ X, имеющей равномерное распределение на отрезке $[\theta_1,\theta_2]$. Найти методом моментов оценки $\hat{\theta}_1$ и $\hat{\theta}_2$ для θ_1 и θ_2.

Имеем

$$\begin{cases} \nu_1 = M\{X\} = \dfrac{\theta_1+\theta_2}{2}, \\ \nu_2 = M\{X^2\} = \displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta_2} x^2 \frac{1}{\theta_2-\theta_1}\,dx = \frac{\theta_2^3-\theta_1^3}{3(\theta_2-\theta_1)} = \frac{\theta_2^2+\theta_1\theta_2+\theta_1^2}{3}, \end{cases}$$

или, что равносильно

$$\begin{cases} M\{X\} = \nu_1 = \dfrac{\theta_1+\theta_2}{2}, \\ D\{X\} = \nu_2-\nu_1^2 = \dfrac{(\theta_2-\theta_1)^2}{12}. \end{cases}$$

Разрешаем эту систему относительно θ_1 и θ_2:

$$\begin{cases} \theta_1+\theta_2=2\nu_1 \\ \theta_2-\theta_1=2\sqrt{3}\sqrt{\nu_2-\nu_1^2} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \theta_2=\nu_1+\sqrt{3}\sqrt{\nu_2-\nu_1^2} \\ \theta_1=\nu_1-\sqrt{3}\sqrt{\nu_2-\nu_1^2} \end{cases}$$

Заменив в правых частях последней системы ν_1 на $\overline{\nu_1}$, ν_2 на $\overline{\nu_2}$, получим оценки $\hat{\theta}_2$ и $\hat{\theta}_1$:

$$\hat{\theta}_2=\overline{\nu_1}+\sqrt{3}\sqrt{\overline{\nu_2}-\overline{\nu_1}^2}\ , \quad \hat{\theta}_1=\overline{\nu_1}-\sqrt{3}\sqrt{\overline{\nu_2}-\overline{\nu_1}^2}\ ,$$

где $\overline{\nu_1}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ – выборочное среднее,

$$\overline{\nu_2}-\overline{\nu_1}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\overline{X}_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}_n\right)^2 \text{ - выборочная дисперсия}$$

<u>Пример 2</u> Пусть выборка $\{X_1,\dots,X_n\}$ порождена СВ X, имеющей нормальное распределение с плотностью

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},\ x\in(-\infty,+\infty),$$

где a и $\sigma>0$ – неизвестные параметры. Найти оценки $\hat{a}$ и $\hat{\sigma}$ параметров a и σ методом моментов.

Имеем

$$\begin{cases} \nu_1=M\{X\}=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=\dots=a \\ \nu_2=M\{X^2\}=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=\dots=a^2+\sigma^2 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} a = \nu_1, \\ \sigma = \sqrt{\nu_2 - \nu_1^2} \end{cases}$$

Таким образом, оценки методом моментов имеют вид:

$$\hat{a} = \overline{\nu_1}, \quad \hat{\sigma} = \sqrt{\overline{\nu_2} - \overline{\nu}_1^{\,2}},$$

или (см. пример 1)

$$\hat{a} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \text{ — выборочное среднее},$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}_n)^2} \text{ — корень из выборочной дисперсии}$$

Пример 3 Пусть известно, что СВ X имеет распределение, задаваемое формулой

$$P\{X = k\} = \theta(1-\theta)^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

т.е. X — дискретная СВ, которая может принимать только целые неотрицательные значения. Параметр θ является неизвестным. В результате трёх измерений (экспериментов) СВ X приняла значения 0, 1 и 2. Предложить численную оценку для θ; $\theta \in (0,1)$.

Решение. Воспользуемся методом моментов и найдём общую оценку $\hat{\theta}_n$ по выборке $\{X_1, \ldots, X_n\}$. Имеем

$$\nu_1 = M\{X\} = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P\{X=k\} = \sum_{k=1}^{\infty} k\,\theta(1-\theta)^k =$$

$$= \theta(1-\theta)\sum_{k=1}^{\infty} k(1-\theta)^{k-1}$$

Найдём $\sum_{k=1}^{\infty} k(1-\theta)^{k-1}$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(1-\theta)^{k-1} = \left\{\begin{matrix}\text{обозначим}\\ \text{для краткости}\\ \alpha = 1-\theta\end{matrix}\right\} = \sum_{k=1}^{\infty} k\alpha^{k-1} =$$

$$= \left\{\begin{matrix}\text{воспользуемся}\\ \text{тем, что сходя-}\\ \text{щиеся степенные}\\ \text{ряды можно}\\ \text{дифференцировать}\\ \text{почленно}\end{matrix}\right\} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k\right)'_\alpha =$$

$$= (\underbrace{\alpha + \alpha^2 + \dots}_{\text{бесконечная геом. прогрессия со знаменателем меньше 1}})'_\alpha = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)'_\alpha = \frac{1}{(1-\alpha)^2} = \frac{1}{\theta^2}$$

Значит,
$$\nu_1 = \theta(1-\theta)\cdot\frac{1}{\theta^2} = \frac{1-\theta}{\theta},$$

откуда
$$\theta = \frac{1}{1+\nu_1},$$

так что
$$\hat{\theta}_n = \frac{1}{1+\overline{\nu_1}(n)} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i}.$$

В нашем случае $n=3$ и реализацией выборочного момента $\overline{\nu_1}(n)$ является число $\frac{1}{3}(0+1+2)=1$. Следовательно, искомая численная оценка для θ есть $\hat{\theta}_n = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$.