Условия и ответы

1. Человек имеет n ключей, из которых только один подходит к замку. Ключи испытываются в случайном порядке независимо, причём неподошедшие ключи не исключаются. Найти математическое ожидание числа попыток до открытия двери.

   Ответ: $\mathbb{E}[T] = n$.

2. Решить задачу 1, если неподошедшие ключи исключаются из дальнейших испытаний.

   Ответ: $\mathbb{E}[T] = \frac{n+1}{2}$.

3. Игральный кубик бросают до тех пор, пока не выпадут все грани. Найти математическое ожидание числа бросаний.

   Ответ: $\mathbb{E}[T] = 14.7$.

4. Деревья в лесу растут в случайных точках, причём вероятность того, что участок леса площадью S содержит ровно m деревьев равна
$$\frac{(\lambda S)^m}{m!} e^{-\lambda S},$$
   где $\lambda > 0$ — параметр. Выберем произвольную точку O в этом лесу. Пусть X — расстояние между точкой O и ближайшим к ней деревом. Найти математическое ожидание X.

   Ответ: $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}$.

5. Пусть $Y \sim N(\alpha, \sigma^2)$, $X = e^Y$. Найти функцию распределения, плотность распределения и математическое ожидание X.

   Ответ:
$$F_X(x) = \Phi\left(\frac{\ln x - \alpha}{\sigma}\right), \quad x > 0;$$
$$f_X(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln x - \alpha)^2}{2\sigma^2}\right], \quad x > 0;$$
$$\mathbb{E}[X] = \exp\left(\alpha + \frac{\sigma^2}{2}\right).$$

Краткие решения

Задача 1

Человек имеет n ключей, из которых только один подходит к замку. Ключи испытываются в случайном порядке независимо, причём неподошедшие ключи не исключаются. Найти математическое ожидание числа попыток до открытия двери.

Решение:
Вероятность успеха в каждой попытке постоянна: $p = \frac{1}{n}$.
Случайная величина T — число попыток до первого успеха — имеет геометрическое распределение с параметром p.
Математическое ожидание:

$$\mathbb{E}[T] = \frac{1}{p} = n.$$

Задача 2

Решить задачу 1, если неподошедшие ключи исключаются из дальнейших испытаний.

Решение:
Подходящий ключ равновероятно может оказаться на любой из n позиций в последовательности испытаний.
Если он находится на k-й позиции, то $T = k$, $P(T = k) = \frac{1}{n}$.
Математическое ожидание:

$$\mathbb{E}[T] = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

Задача 3

Игральный кубик бросают до тех пор, пока не выпадут все грани. Найти математическое ожидание числа бросаний.

Решение:
Пусть T — число бросков до появления всех 6 граней.

Разобьём на этапы:
$T_1 = 1$ (первая грань).
T_2 — число доп. бросков до появления второй новой грани: $p = \frac{5}{6}$, $\mathbb{E}[T_2] = \frac{6}{5}$.
T_3: $p = \frac{4}{6}$, $\mathbb{E}[T_3] = \frac{6}{4}$.
T_4: $p = \frac{3}{6}$, $\mathbb{E}[T_4] = \frac{6}{3} = 2$.
T_5: $p = \frac{2}{6}$, $\mathbb{E}[T_5] = \frac{6}{2} = 3$.
T_6: $p = \frac{1}{6}$, $\mathbb{E}[T_6] = \frac{6}{1} = 6$.

$$\mathbb{E}[T] = 1 + \frac{6}{5} + \frac{6}{4} + 2 + 3 + 6 = 1 + 1.2 + 1.5 + 2 + 3 + 6 = 14.7.$$

Задача 4

Деревья в лесу растут в случайных точках, причём вероятность того, что участок леса площадью S содержит ровно m деревьев равна

$$\frac{(\lambda S)^m}{m!} e^{-\lambda S},$$

где $\lambda > 0$ — параметр. Выберем произвольную точку O в этом лесу. Пусть X — расстояние между точкой O и ближайшим к ней деревом. Найти математическое ожидание X.

Решение:
Распределение деревьев — пуассоновское поле интенсивности λ.
Событие $\{X > r\}$ означает, что в круге радиуса r с центром O нет деревьев.
Площадь круга $S = \pi r^2$.
Вероятность нуля деревьев в круге:

$$P(X > r) = e^{-\lambda \pi r^2}.$$

Функция распределения:

$$F_X(r) = 1 - e^{-\lambda \pi r^2}, \quad r \geq 0.$$

Плотность:

$$f_X(r) = 2\lambda\pi r\, e^{-\lambda \pi r^2}.$$

Математическое ожидание:

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty r f_X(r)\,dr = \int_0^\infty 2\lambda\pi r^2 e^{-\lambda\pi r^2}\,dr.$$

Замена $t = \sqrt{\lambda\pi}\,r$, $dr = \frac{dt}{\sqrt{\lambda\pi}}$:

$$\mathbb{E}[X] = \frac{2}{\sqrt{\lambda\pi}} \int_0^\infty t^2 e^{-t^2}\,dt.$$

Интеграл $\int_0^\infty t^2 e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$, поэтому:

$$\mathbb{E}[X] = \frac{2}{\sqrt{\lambda\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{4} = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}.$$

Задача 5

Пусть случайная величина $Y \sim N(\alpha, \sigma^2)$, $X = e^Y$. Найти функцию распределения, плотность распределения и математическое ожидание X.

Решение:
Функция распределения X:

$$F_X(x) = P(X < x) = P(e^Y < x) = P(Y < \ln x) = \Phi\left(\frac{\ln x - \alpha}{\sigma}\right), \quad x > 0.$$

Плотность:

$$f_X(x) = F'_X(x) = \frac{1}{x\sigma}\varphi\left(\frac{\ln x - \alpha}{\sigma}\right),$$

где $\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$, т.е.

$$f_X(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln x - \alpha)^2}{2\sigma^2}\right], \quad x > 0.$$

Математическое ожидание:

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[e^Y] = \exp\left(\alpha + \frac{\sigma^2}{2}\right).$$

Подробные решения

Задача 1

Человек имеет n ключей, из которых только один подходит к замку. Ключи испытываются в случайном порядке независимо, причём неподошедшие ключи не исключаются. Найти математическое ожидание числа попыток до открытия двери.

Решение:
Поскольку ключи не исключаются и испытания независимы, вероятность успеха в каждой попытке постоянна и равна:

$$p = \frac{1}{n}$$

Случайная величина T — число попыток до первого успеха — имеет геометрическое распределение с параметром p.

Математическое ожидание геометрического распределения:

$$\mathbb{E}[T] = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot P(T = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (1-p)^{k-1} p$$

Вычислим эту сумму:

$$\mathbb{E}[T] = p \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1}$$

Воспользуемся формулой для суммы ряда:

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \text{при } |x| < 1$$

Подставляя $x = 1 - p$, получаем:

$$\mathbb{E}[T] = p \cdot \frac{1}{(1-(1-p))^2} = p \cdot \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p} = n$$

Ответ: $\mathbb{E}[T] = n$

Задача 2

Решить задачу 1, если неподошедшие ключи исключаются из дальнейших испытаний.

Решение:
При исключении неподошедших ключей подходящий ключ равновероятно может оказаться на любой из n позиций в последовательности испытаний.

Если подходящий ключ находится на k-й позиции, то $T = k$, причём:

$$P(T = k) = \frac{1}{n} \quad \text{для } k = 1, 2, \ldots, n$$

Математическое ожидание:

$$\mathbb{E}[T] = \sum_{k=1}^{n} k \cdot P(T = k) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k$$

Используя формулу для суммы арифметической прогрессии:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Получаем:

$$\mathbb{E}[T] = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$$

Ответ: $\mathbb{E}[T] = \frac{n+1}{2}$

Задача 3

Игральный кубик бросают до тех пор, пока не выпадут все грани. Найти математическое ожидание числа бросаний.

Решение:
Пусть T — число бросков до появления всех 6 граней. Разобьём процесс на этапы:

- **Этап 1:** Первая грань появляется сразу: $T_1 = 1$

- **Этап 2:** Ожидание появления второй новой грани. Вероятность успеха в каждом броске:

$$p_2 = \frac{5}{6}, \quad \mathbb{E}[T_2] = \frac{1}{p_2} = \frac{6}{5}$$

- **Этап 3:** Ожидание появления третьей новой грани:

$$p_3 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \quad \mathbb{E}[T_3] = \frac{1}{p_3} = \frac{3}{2} = 1.5$$

- **Этап 4:** Ожидание появления четвёртой новой грани:

$$p_4 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{E}[T_4] = \frac{1}{p_4} = 2$$

- **Этап 5:** Ожидание появления пятой новой грани:

$$p_5 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \quad \mathbb{E}[T_5] = \frac{1}{p_5} = 3$$

- **Этап 6:** Ожидание появления шестой новой грани:

$$p_6 = \frac{1}{6}, \quad \mathbb{E}[T_6] = \frac{1}{p_6} = 6$$

Общее математическое ожидание:

$$\mathbb{E}[T] = \mathbb{E}[T_1] + \mathbb{E}[T_2] + \mathbb{E}[T_3] + \mathbb{E}[T_4] + \mathbb{E}[T_5] + \mathbb{E}[T_6]$$

$$\mathbb{E}[T] = 1 + \frac{6}{5} + \frac{3}{2} + 2 + 3 + 6 = 1 + 1.2 + 1.5 + 2 + 3 + 6 = 14.7$$

Ответ: $\mathbb{E}[T] = 14.7$

Задача 4

Деревья в лесу растут в случайных точках, причём вероятность того, что участок леса площадью S содержит ровно m деревьев равна

$$\frac{(\lambda S)^m}{m!} e^{-\lambda S},$$

где $\lambda > 0$ — параметр. Выберем произвольную точку O в этом лесу. Пусть X — расстояние между точкой O и ближайшим к ней деревом. Найти математическое ожидание X.

Решение:
Распределение деревьев описывается пуассоновским точечным полем с интенсивностью λ.

Событие $\{X > r\}$ означает, что в круге радиуса r с центром O нет деревьев. Площадь этого круга:

$$S = \pi r^2$$

Вероятность нуля деревьев в круге:

$$P(X > r) = \frac{(\lambda S)^0}{0!} e^{-\lambda S} = e^{-\lambda \pi r^2}$$

Функция распределения:

$$F_X(r) = P(X \le r) = 1 - P(X > r) = 1 - e^{-\lambda \pi r^2}, \quad r \ge 0$$

Плотность распределения:

$$f_X(r) = \frac{d}{dr} F_X(r) = 2\lambda \pi r e^{-\lambda \pi r^2}, \quad r \ge 0$$

Математическое ожидание:

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty r f_X(r)\, dr = \int_0^\infty 2\lambda \pi r^2 e^{-\lambda \pi r^2}\, dr$$

Вычислим интеграл. Сделаем замену переменной:

$$t = \sqrt{\lambda \pi}\, r, \quad r = \frac{t}{\sqrt{\lambda \pi}}, \quad dr = \frac{dt}{\sqrt{\lambda \pi}}$$

Подставляем:

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty 2\lambda \pi \cdot \frac{t^2}{\lambda \pi} e^{-t^2} \cdot \frac{dt}{\sqrt{\lambda \pi}} = \frac{2}{\sqrt{\lambda \pi}} \int_0^\infty t^2 e^{-t^2}\, dt$$

Вычислим интеграл $I = \int_0^\infty t^2 e^{-t^2}\, dt$. Интегрируем по частям:

$$u = t, \quad dv = te^{-t^2} dt, \quad du = dt, \quad v = -\frac{1}{2}e^{-t^2}$$

$$I = \left[-\frac{t}{2}e^{-t^2}\right]_0^\infty + \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-t^2}\, dt$$

Первый член равен нулю, второй член содержит интеграл Пуассона:

$$\int_0^\infty e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Таким образом:

$$I = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$$

Окончательно:

$$\mathbb{E}[X] = \frac{2}{\sqrt{\lambda\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{4} = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}$$

Ответ: $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}$

Задача 5

Пусть случайная величина $Y \sim N(\alpha, \sigma^2)$, $X = e^Y$. Найти функцию распределения, плотность распределения и математическое ожидание случайной величины X.

Решение:

1. Функция распределения:

$$F_X(x) = P(X < x) = P(e^Y < x) = P(Y < \ln x) = \Phi\left(\frac{\ln x - \alpha}{\sigma}\right), \quad x > 0$$

где $\Phi(z)$ — функция распределения стандартного нормального распределения.

2. Плотность распределения: Дифференцируем функцию распределения:

$$f_X(x) = \frac{d}{dx}F_X(x) = \frac{d}{dx}\Phi\left(\frac{\ln x - \alpha}{\sigma}\right) = \varphi\left(\frac{\ln x - \alpha}{\sigma}\right) \cdot \frac{1}{\sigma x}$$

где $\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2}$ — плотность стандартного нормального распределения.

Таким образом:

$$f_X(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(\ln x - \alpha)^2}{2\sigma^2}\right], \quad x > 0$$

3. Математическое ожидание:

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[e^Y] = \int_{-\infty}^{\infty} e^y \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(y-\alpha)^2}{2\sigma^2}\right] dy$$

Преобразуем показатель экспоненты:

$$e^y \cdot \exp\left[-\frac{(y-\alpha)^2}{2\sigma^2}\right] = \exp\left[y - \frac{(y-\alpha)^2}{2\sigma^2}\right]$$

Выделим полный квадрат в показателе:

$$y - \frac{(y-\alpha)^2}{2\sigma^2} = -\frac{1}{2\sigma^2}\left[(y-\alpha)^2 - 2\sigma^2 y\right]$$

$$= -\frac{1}{2\sigma^2}\left[y^2 - 2\alpha y + \alpha^2 - 2\sigma^2 y\right] = -\frac{1}{2\sigma^2}\left[y^2 - 2(\alpha+\sigma^2)y + \alpha^2\right]$$

Дополняем до полного квадрата:

$$= -\frac{1}{2\sigma^2}\left[(y-(\alpha+\sigma^2))^2 - (\alpha+\sigma^2)^2 + \alpha^2\right]$$

$$= -\frac{(y-(\alpha+\sigma^2))^2}{2\sigma^2} + \frac{(\alpha+\sigma^2)^2 - \alpha^2}{2\sigma^2}$$

Вычисляем:

$$(\alpha+\sigma^2)^2 - \alpha^2 = \alpha^2 + 2\alpha\sigma^2 + \sigma^4 - \alpha^2 = 2\alpha\sigma^2 + \sigma^4$$

$$\frac{(\alpha+\sigma^2)^2-\alpha^2}{2\sigma^2} = \frac{2\alpha\sigma^2+\sigma^4}{2\sigma^2} = \alpha + \frac{\sigma^2}{2}$$

Таким образом:

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(y-(\alpha+\sigma^2))^2}{2\sigma^2} + \alpha + \frac{\sigma^2}{2}\right] dy$$

$$= \exp\left(\alpha + \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(y-(\alpha+\sigma^2))^2}{2\sigma^2}\right] dy$$

Интеграл равен 1 (как интеграл от плотности нормального распределения), поэтому:

$$\mathbb{E}[X] = \exp\left(\alpha + \frac{\sigma^2}{2}\right)$$

Ответ:

$$F_X(x) = \Phi\left(\frac{\ln x - \alpha}{\sigma}\right), \quad x > 0;$$

$$f_X(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln x - \alpha)^2}{2\sigma^2}\right], \quad x > 0;$$

$$\mathbb{E}[X] = \exp\left(\alpha + \frac{\sigma^2}{2}\right)$$