На экзамене потребуется:

Доказать комбинаторное правило произведения.

Доказать формулу Бернулли.

Вывести формулы для числа перестановок, сочетаний и размещений из комбинаторного правила произведения.

Вывести формулы для математических ожиданий и дисперсий основных дискретных распределений (биномиальное, геометрическое, Пуассона) и непрерывных распределений (равномерное, показательное, гауссовское).

Доказать закон больших чисел в форме Чебышёва (теорема Чебышёва), опираясь на неравенство Чебышёва.

Доказать, что из сходимости в среднеквадратичном следует сходимость по вероятности.

Доказать теорему о соотношении между сходимостью по вероятности и сходимостью по распределению.

ДОПОЛНЕНИЯ: Доказательства

1. Доказательство комбинаторного правила произведения

Пусть элемент x_1 можно выбрать n_1 способами. Для каждого выбора x_1 элемент x_2 можно выбрать n_2 способами. Тогда пару (x_1, x_2) можно выбрать $n_1 \cdot n_2$ способами.

Предположим, что для выбора строки длины $k-1$ правило произведения верно: число способов выбрать $(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1})$ равно $n_1 n_2 \ldots n_{k-1}$.

Для каждого фиксированного набора $(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1})$ элемент x_k можно выбрать n_k способами. Поскольку выбор x_k не зависит от выбора предыдущих элементов, общее число строк длины k равно произведению числа способов выбрать первые $k-1$ элементов на число способов выбрать k-й элемент:

$$N = (n_1 n_2 \ldots n_{k-1}) \cdot n_k = n_1 n_2 \ldots n_k.$$

Таким образом, по индукции правило произведения доказано для любого натурального k.

2. Вывод формул для числа перестановок, сочетаний и размещений

Число перестановок P_n: Перестановка n различных элементов — это строка длины n, в которую все элементы входят по одному разу. Первый элемент можно выбрать n способами, второй — $(n-1)$ способами (один элемент уже выбран), третий — $(n-2)$ способами, и так далее, последний — 1 способом. По правилу произведения:

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1 = n!.$$

Число размещений A_n^k: Размещение из n по k — это строка длины k из различных элементов. Первый элемент можно выбрать n способами, второй — $(n-1)$ способами, ..., k-й элемент — $(n-k+1)$ способами. По правилу произведения:

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Число сочетаний C_n^k: Сочетание — это подмножество мощности k. Каждому сочетанию соответствует $k!$ размещений (перестановок элементов этого сочетания). Поэтому:

$$C_n^k \cdot k! = A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!},$$

откуда

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

3. Вывод формул для математических ожиданий и дисперсий основных распределений

Дискретные распределения

Биномиальное распределение $X \sim \mathbf{Bin}(n,p)$:

Математическое ожидание можно найти, представив X как сумму n независимых индикаторов: $X = I_1 + I_2 + \cdots + I_n$, где I_i — индикатор успеха в i-м испытании. Тогда:

$$\mathsf{M}X = \mathsf{M}\left(\sum_{i=1}^{n} I_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{M}I_i = \sum_{i=1}^{n} p = np.$$

Для дисперсии используем независимость I_i:

$$\mathsf{D}X = \mathsf{D}\left(\sum_{i=1}^{n} I_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{D}I_i = \sum_{i=1}^{n} p(1-p) = np(1-p).$$

Геометрическое распределение X — номер первого успеха:
Вероятность $\mathsf{P}\{X=k\} = (1-p)^{k-1}p$, $k = 1, 2, \ldots$
Математическое ожидание:

$$\mathsf{M}X = \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1}p = p\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}, \quad q = 1-p.$$

Известно, что $\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p^2}$, поэтому

$$\mathsf{M}X = p \cdot \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}.$$

Для дисперсии сначала найдём $\mathsf{M}[X(X-1)]$:

$$\mathsf{M}[X(X-1)] = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)q^{k-1}p = pq\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)q^{k-2}.$$

Так как $\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3} = \frac{2}{p^3}$, то

$$\mathsf{M}[X(X-1)] = pq \cdot \frac{2}{p^3} = \frac{2q}{p^2}.$$

Тогда

$$\mathsf{D}X = \mathsf{M}[X(X-1)] + \mathsf{M}X - (\mathsf{M}X)^2 = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$$

Распределение Пуассона $X \sim \mathbf{Pois}(\lambda)$:
Вероятность $\mathsf{P}\{X=k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Математическое ожидание:

$$\mathsf{M}X = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!} = e^{-\lambda}\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = e^{-\lambda}\lambda e^{\lambda} = \lambda.$$

Для дисперсии найдём $\mathsf{M}[X(X-1)]$:

$$\mathsf{M}[X(X-1)] = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\lambda^2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} = e^{-\lambda}\lambda^2 e^{\lambda} = \lambda^2.$$

Тогда

$$\mathsf{D}X = \mathsf{M}[X(X-1)] + \mathsf{M}X - (\mathsf{M}X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

Непрерывные распределения

Равномерное распределение на $[a,b]$:
Плотность $f(x) = \frac{1}{b-a}$, $x \in [a,b]$.
Математическое ожидание:

$$\mathsf{M}X = \int_a^b x\frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{b^2-a^2}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

Дисперсия:

$$\mathsf{M}X^2 = \int_a^b x^2\frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{b^3-a^3}{3} = \frac{a^2+ab+b^2}{3}.$$

$$\mathsf{D}X = \mathsf{M}X^2 - (\mathsf{M}X)^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Показательное распределение с параметром $\lambda > 0$:
Плотность $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$.
Математическое ожидание:

$$\mathsf{M}X = \int_0^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda}.$$

(Вычисляется интегрированием по частям или с использованием гамма-функции.)
Дисперсия: сначала найдём $\mathsf{M}X^2 = \int_0^{\infty} x^2\lambda e^{-\lambda x}dx = \frac{2}{\lambda^2}$. Тогда

$$\mathsf{D}X = \mathsf{M}X^2 - (\mathsf{M}X)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Нормальное распределение $X \sim N(a,\sigma^2)$:
Плотность $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$.
Математическое ожидание:

$$\mathsf{M}X = \int_{-\infty}^{\infty} x\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx.$$

Сделаем замену $t = \frac{x-a}{\sigma}$, тогда $dx = \sigma dt$:

$$\mathsf{M}X = \int_{-\infty}^{\infty}(a+\sigma t)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}dt = a\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}dt + \sigma\int_{-\infty}^{\infty}t\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}dt.$$

Первый интеграл равен 1, второй — 0 (подынтегральная функция нечётная), поэтому $\mathsf{M}X = a$.

Дисперсия:

$$\mathsf{D}X = \mathsf{M}[(X-a)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

С той же заменой:

$$\mathsf{D}X = \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma t)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt = \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt.$$

Интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} t^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$ есть дисперсия стандартного нормального распределения, которая равна 1. Следовательно, $\mathsf{D}X = \sigma^2$.

4. Доказательство закона больших чисел в форме Чебышёва

Теорема (Чебышёв): Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые случайные величины, имеющие конечные математические ожидания $\mathsf{M}X_i = m_i$ и дисперсии $\mathsf{D}X_i \leq C$ (ограничены одной константой C). Тогда для любого $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left\{ \left| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i \right| < \varepsilon \right\} = 1.$$

В частности, если все m_i равны одному и тому же числу m, то

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left\{ \left| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - m \right| < \varepsilon \right\} = 1.$$

Доказательство: Рассмотрим случайную величину $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Найдём её математическое ожидание и дисперсию:

$$\mathsf{M}Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathsf{M}X_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i.$$

В силу независимости X_i дисперсия суммы равна сумме дисперсий:

$$\mathsf{D}Y_n = \mathsf{D}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \mathsf{D}X_i \leq \frac{1}{n^2}\cdot nC = \frac{C}{n}.$$

Применим неравенство Чебышёва к случайной величине Y_n:

$$\mathsf{P}\left\{|Y_n - \mathsf{M}Y_n| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{\mathsf{D}Y_n}{\varepsilon^2} \leq \frac{C}{n\varepsilon^2}.$$

Переходя к противоположному событию, получаем:

$$\mathsf{P}\left\{|Y_n - \mathsf{M}Y_n| < \varepsilon\right\} \geq 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}.$$

При $n \to \infty$ правая часть стремится к 1, а левая часть не превосходит 1. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left\{|Y_n - \mathsf{M}Y_n| < \varepsilon\right\} = 1.$$

Если все $m_i = m$, то $\mathsf{M}Y_n = m$, и теорема доказана.

Ответы на вопросы к экзамену (с дополнениями)

1. **Комбинаторное правило произведения.**

   Пусть $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ - строка из k различных элементов.

   Строки $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ и $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_k)$ будем называть одинаковыми, если

   $$x_i = \tilde{x}_i \quad \forall i = 1, 2, \ldots, k,$$

   т.е. если строки состоят из одного и того же набора элементов и порядок следования элементов один и тот же. В противном случае строки будем называть различными.

   Пусть элемент x_1 может быть выбран n_1 способами; при выбранном x_1 элемент x_2 может быть выбран n_2 способами (не зависящими от выбора x_1); $\ldots$; при выбранных $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$ элемент x_k может быть выбран n_k способами (не зависящими от предыдущих выборов). Тогда число различных строк вида $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ равно

   $$N = n_1 n_2 \ldots n_k.$$

   *

   Пример. Сколько существует трёхзначных чисел, все цифры которых различны? Первая цифра (сотни) может быть выбрана 9 способами (1–9), вторая (десятки) — 9 способами (0–9, кроме уже выбранной), третья (единицы) — 8 способами. По правилу произведения получаем $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$ чисел.

2. **Число перестановок, число сочетаний и число размещений.**

   Число перестановок P_n — число способов расположить n различных элементов в ряд:

   $$P_n = n!.$$

   Число сочетаний из n по k — число способов выбрать k элементов из n различных без учёта порядка:

   $$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

   Число размещений из n по k — число способов выбрать k элементов из n различных с учёта порядка:

   $$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

   *

   Дополнение. Часто используются свойства: $C_n^k = C_n^{n-k}$ и $A_n^k = C_n^k \cdot k!$. Например, в комитет из 10 человек нужно выбрать 3 делегатов. Число способов: $C_{10}^3 = 120$. Если же этих трёх человек нужно распределить на должности председателя, секретаря и казначея, то число способов: $A_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$.

3. **Равенство $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$.**

   Из бинома Ньютона:

   $$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}.$$

   Подставляя $a = b = 1$, получаем:

   $$2^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k.$$

*

Интерпретация. Число всех подмножеств множества из n элементов равно 2^n. Действительно, каждому элементу можно поставить в соответствие два состояния: входит в подмножество или нет. По правилу произведения получаем 2^n. С другой стороны, число подмножеств мощности k равно C_n^k, суммируя по всем k от 0 до n, получаем общее число подмножеств.

4. **Операции над событиями. Их геометрическая интерпретация. Эквивалентные события.**

   События A и B называются эквивалентными ($A = B$), если из наступления A следует наступление B и наоборот.

   Сумма событий $A + B$ — событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из A или B.

   Произведение событий AB — событие, состоящее в одновременном наступлении A и B.

   Противоположное событие $\overline{A}$ — событие, состоящее в ненаступлении A.

   Геометрическая интерпретация: событиям соответствуют подмножества некоторой области Ω. Сумме соответствует объединение, произведению — пересечение, противоположному событию — дополнение.

   *

   Пример. Бросание игральной кости. Событие A — выпадение чётного числа, B — выпадение числа, большего 3. Тогда $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{4, 5, 6\}$, $A+B = \{2, 4, 5, 6\}$, $AB = \{4, 6\}$, $\overline{A} = \{1, 3, 5\}$. События A и B не эквивалентны, так как, например, выпадение 2 приводит к A, но не к B.

5. **Классическая формула подсчёта вероятности. Геометрический подход к подсчёту вероятности.**

   Классическая формула: если все исходы эксперимента равновозможны и несовместны, то вероятность события A равна
   $$\mathsf{P}\{A\} = \frac{m}{n},$$
   где n — общее число исходов, m — число благоприятных исходов.

   Геометрический подход: если эксперимент состоит в случайном выборе точки из области Ω, то вероятность попадания в подобласть A равна
   $$\mathsf{P}\{A\} = \frac{\text{мера } A}{\text{мера } \Omega},$$
   где мера может быть длиной, площадью, объёмом и т.д.

   *

   Пример (геометрический). На отрезок [0,1] наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что расстояние от точки до левого конца отрезка меньше 0.3. Здесь $\Omega = [0, 1]$, мера — длина. Благоприятное множество $A = [0, 0.3)$. Тогда $\mathsf{P}\{A\} = 0.3/1 = 0.3$.

6. **Общий аксиоматический подход к определению вероятности, предложенный А. Н. Колмогоровым.**

   Вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ состоит из множества элементарных исходов Ω, σ-алгебры событий $\mathcal{F}$ и вероятностной меры P, удовлетворяющей аксиомам:

(a) $\mathsf{P}\{A\} \geq 0$ для любого $A \in \mathcal{F}$.

(b) $\mathsf{P}\{\Omega\} = 1$.

(c) Если события $A_1, A_2, \ldots$ попарно несовместны, то

$$\mathsf{P}\left\{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right\} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}\{A_i\}.$$

*

Замечание. Аксиоматический подход позволяет строить теорию на строгой математической основе, охватывая как классические, так и более сложные модели (например, с бесконечным числом исходов). Из аксиом выводятся все известные свойства вероятности, такие как $\mathsf{P}\{\varnothing\} = 0$, $\mathsf{P}\{\overline{A}\} = 1 - \mathsf{P}\{A\}$, $\mathsf{P}\{A \cup B\} = \mathsf{P}\{A\} + \mathsf{P}\{B\} - \mathsf{P}\{AB\}$ и др.

7. **Условная вероятность. Определение независимости событий. Формулы полной вероятности и Байеса.**

Условная вероятность события A при условии B ($\mathsf{P}\{B\} > 0$):

$$\mathsf{P}\{A|B\} = \frac{\mathsf{P}\{AB\}}{\mathsf{P}\{B\}}.$$

События A и B независимы, если $\mathsf{P}\{AB\} = \mathsf{P}\{A\} \cdot \mathsf{P}\{B\}$.

Формула полной вероятности: если $H_1, \ldots, H_n$ — полная группа несовместных событий, то

$$\mathsf{P}\{A\} = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}\{A|H_i\}\mathsf{P}\{H_i\}.$$

Формула Байеса:

$$\mathsf{P}\{H_i|A\} = \frac{\mathsf{P}\{A|H_i\}\mathsf{P}\{H_i\}}{\sum_{j=1}^{n} \mathsf{P}\{A|H_j\}\mathsf{P}\{H_j\}}.$$

*

Пример. Имеются две урны: в первой 3 белых и 2 чёрных шара, во второй — 1 белый и 4 чёрных. Наудачу выбирается урна и из неё вынимается шар.

(a) Найти вероятность того, что вынут чёрный шар.

(b) Шар оказался белым. Найти вероятность того, что он вынут из первой урны.

Гипотезы: H_1 — выбрана первая урна, H_2 — выбрана вторая. $\mathsf{P}\{H_1\} = \mathsf{P}\{H_2\} = 0.5$.

Условные вероятности: $\mathsf{P}\{\text{чёрный}|H_1\} = 2/5$, $\mathsf{P}\{\text{чёрный}|H_2\} = 4/5$.

По формуле полной вероятности:

$$\mathsf{P}\{\text{чёрный}\} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{5}.$$

Для второго пункта: $\mathsf{P}\{\text{белый}|H_1\} = 3/5$, $\mathsf{P}\{\text{белый}|H_2\} = 1/5$. По формуле Байеса:

$$\mathsf{P}\{H_1|\text{белый}\} = \frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{3}{4}.$$

8. **Схема независимых испытаний. Формула Бернулли. Обобщённая формула Бернулли.**

Схема Бернулли — последовательность n независимых испытаний, в каждом из которых событие A происходит с вероятностью p, а событие $\overline{A}$ — с вероятностью $q = 1-p$.

Формула Бернулли: вероятность того, что в n независимых испытаниях событие A с вероятностью p произойдёт ровно k раз:

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

Доказательство: Рассмотрим конкретную последовательность из k успехов и $n-k$ неудач. Из-за независимости испытаний вероятность такой последовательности равна $p^k(1-p)^{n-k}$. Число различных последовательностей, в которых ровно k успехов, равно числу сочетаний C_n^k (выбираем позиции для успехов). Поскольку эти последовательности несовместны, искомая вероятность равна сумме вероятностей всех таких последовательностей, то есть $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$.

Обобщённая формула Бернулли: если в каждом испытании возможны исходы $A_1, \dots, A_k$ с вероятностями $p_1, \dots, p_k$, то вероятность того, что в n испытаниях A_1 произойдёт m_1 раз, ..., A_k произойдёт m_k раз ($m_1 + \dots + m_k = n$):

$$P_n(m_1, \dots, m_k) = \frac{n!}{m_1! \dots m_k!} p_1^{m_1} \dots p_k^{m_k}.$$

*

Пример. Игральная кость бросается 10 раз. Найти вероятность того, что 1 раз выпадет число меньше 3 (т.е. 1 или 2) и 2 раза выпадет чётное число (2,4,6). Заметим, что события "выпало число меньше 3"и "выпало чётное число"не являются несовместными (число 2 удовлетворяет обоим условиям). Поэтому нельзя непосредственно применить обобщённую формулу Бернулли для этих двух событий. Нужно рассмотреть полную группу несовместных исходов одного броска:

- A_1: число меньше 3 и нечётное? Но меньше 3 — это 1 или 2, из них нечётное только 1.
- A_2: число меньше 3 и чётное? Это только 2.
- A_3: число не меньше 3 и чётное? Это 4 и 6.
- A_4: число не меньше 3 и нечётное? Это 3 и 5.

Вероятности: $p_1 = \frac{1}{6}$, $p_2 = \frac{1}{6}$, $p_3 = \frac{2}{6}$, $p_4 = \frac{2}{6}$. Нас интересует событие: $m_1 + m_2 = 1$ (ровно одно число меньше 3) и $m_2 + m_3 = 2$ (ровно два чётных числа). При этом $m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 10$. Из условий: m_2 может быть 0 или 1. Если $m_2 = 0$, то из первого условия $m_1 = 1$, из второго $m_3 = 2$, тогда $m_4 = 10 - 1 - 0 - 2 = 7$. Если $m_2 = 1$, то $m_1 = 0$, $m_3 = 1$, $m_4 = 10 - 0 - 1 - 1 = 8$. По обобщённой формуле Бернулли:

$$P = \frac{10!}{1!0!2!7!}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{2}{6}\right)^2\left(\frac{2}{6}\right)^7 + \frac{10!}{0!1!1!8!}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{2}{6}\right)^1\left(\frac{2}{6}\right)^8.$$

Вычисление этого выражения требует аккуратности, но принцип ясен.

9. **Наиболее вероятное число успехов в серии независимых испытаний.**

Наиболее вероятное число успехов $k_{\text{н.в.}}$ в схеме Бернулли удовлетворяет неравенствам:

$$np - q \le k_{\text{н.в.}} \le np + p,$$

где $q = 1-p$. Если $np-q$ целое, то два наиболее вероятных числа: $k = np-q$ и $k = np+p$. Иначе одно целое число внутри этого интервала.

*

Пример. В партии из 100 деталей вероятность брака 0.1. Найти наиболее вероятное число бракованных деталей. $n = 100$, $p = 0.1$, $q = 0.9$. $np - q = 10 - 0.9 = 9.1$ — не целое. Тогда $k_{\text{н.в.}} = [9.1] + 1 = 10$. Проверим: $np + p = 10.1$, так что целое число внутри интервала (9.1; 10.1) равно 10.

10. **Приближённые локальная и интегральная формулы Муавра–Лапласа и приближённая формула Пуассона.**

Локальная теорема Муавра–Лапласа: если n велико, p не слишком близко к 0 или 1 (обычно $npq > 9$), то

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x), \quad x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}},$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$.

Интегральная теорема Муавра–Лапласа:

$$\mathsf{P}\{k_1 \le k \le k_2\} \approx \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right),$$

где $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt$.

Теорема Пуассона: если n велико, а p мало, причём $np = \lambda \approx \text{const}$ (обычно $n \ge 50$, $p \le 0.1$, $\lambda \le 10$), то

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

*

Пример. Вероятность рождения мальчика 0.515. Найти вероятность того, что среди 100 новорождённых будет ровно 50 мальчиков. Здесь $n = 100$, $p = 0.515$, $q = 0.485$, $np = 51.5$, $npq = 100 \cdot 0.515 \cdot 0.485 \approx 24.9775$, $\sqrt{npq} \approx 4.998$. Так как p не мало, используем Муавра–Лапласа:

$$x = \frac{50 - 51.5}{4.998} \approx -0.3001, \quad \varphi(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-0.3001^2/2} \approx 0.3814.$$

Тогда $P_{100}(50) \approx \frac{0.3814}{4.998} \approx 0.0763$.

Пример сравнения. Пусть $n = 1000$, $p = 0.01$, тогда $\lambda = np = 10$. Найдём $P_{1000}(5)$. По Пуассону: $P \approx \frac{10^5}{5!}e^{-10} \approx \frac{100000}{120} \cdot 0.0000454 \approx 0.0378$. По Муавра-Лапласа: $np = 10$, $npq = 1000 \cdot 0.01 \cdot 0.99 = 9.9$, $\sqrt{npq} = 3.1464$, $x = \frac{5-10}{3.1464} \approx -1.589$, $\varphi(x) \approx 0.114$, тогда $P \approx \frac{0.114}{3.1464} \approx 0.0362$. Результаты близки.

11. **Понятие случайной величины (СВ) и её функции распределения. Свойства функции распределения.**

Случайная величина X — измеримая функция на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, т.е. для любого $x \in \mathbb{R}$ множество $\{\omega : X(\omega) < x\} \in \mathcal{F}$.

Функция распределения $F(x) = \mathsf{P}\{X < x\}$. Свойства:

(a) $0 \le F(x) \le 1$.

(b) $F(x)$ неубывает.

(c) $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

(d) $F(x)$ непрерывна слева.

(e) $\mathsf{P}\{a \le X < b\} = F(b) - F(a)$.

*

Пример. Бросание монеты: $X = 1$ если герб, $X = 0$ если решка. Тогда

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \frac{1}{2}, & 0 < x \le 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

График $F(x)$ — ступенчатая функция со скачком в точках 0 и 1.

12. **Основные дискретные распределения (биномиальное, геометрическое и Пуассона).**

Биномиальное: $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$,

$$\mathsf{P}\{X = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Геометрическое: X — номер первого успеха в схеме Бернулли,

$$\mathsf{P}\{X = k\} = (1-p)^{k-1} p, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Пуассона: $X \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$,

$$\mathsf{P}\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

*

Пример (геометрическое). Монету подбрасывают до первого появления герба. Вероятность герба $p = 0.5$. Тогда вероятность того, что герб выпадет впервые на 3-м подбрасывании: $\mathsf{P}\{X = 3\} = (0.5)^2 \cdot 0.5 = 0.125$.

13. **Понятие плотности распределения для непрерывной случайной величины. Основные непрерывные распределения (равномерное на отрезке, показательное, нормальное).**

Плотность распределения $f(x)$ непрерывной СВ X:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt, \quad f(x) \ge 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

Равномерное на $[a, b]$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b], \\ 0, & \text{иначе}. \end{cases}$$

Показательное с параметром $\lambda > 0$:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Нормальное с параметрами a и σ^2:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

*

Пример (показательное). Время безотказной работы прибора распределено показательно со средним 100 часов ($\mathsf{M}X = 1/\lambda = 100$, значит $\lambda = 0.01$). Тогда вероятность проработать более 200 часов: $\mathsf{P}\{X > 200\} = e^{-0.01\cdot 200} = e^{-2} \approx 0.135$.

14. **Функция распределения системы двух случайных величин. Плотность совместного распределения двух непрерывных СВ. Общие свойства. Условие независимости случайных величин.**

Функция распределения системы двух СВ:

$$F(x, y) = \mathsf{P}\{X < x, Y < y\}.$$

Свойства: неубывание по каждому аргументу, непрерывность слева, предельные соотношения.

Плотность совместного распределения (если существует):

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}, \quad f(x, y) \geq 0, \quad \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = 1.$$

СВ X и Y независимы, если

$$F(x, y) = F_X(x) F_Y(y) \quad \text{или} \quad f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$$

(для непрерывных).

*

Пример. Пусть совместная плотность $f(x, y) = \begin{cases} c \cdot xy, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$ Найдём константу c из условия нормировки:

$$\int_0^1 \int_0^1 cxy \, dx dy = c \int_0^1 x dx \int_0^1 y dy = c \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{c}{4} = 1 \Rightarrow c = 4.$$

Найдём маргинальные плотности:

$$f_X(x) = \int_0^1 4xy \, dy = 4x \cdot \frac{1}{2} = 2x, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Аналогично $f_Y(y) = 2y$, $0 \leq y \leq 1$. Так как $f(x, y) = 4xy = (2x)(2y) = f_X(x) f_Y(y)$, то X и Y независимы.

15. **Определение и свойства математического ожидания СВ. Математическое ожидание СВ, определяемых основными дискретными и непрерывными распределениями.**

Для дискретной СВ: $\mathsf{M}X = \sum x_i p_i$.

Для непрерывной СВ: $\mathsf{M}X = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$.

Свойства:

(a) $\mathsf{M}(c) = c$.

(b) $\mathsf{M}(cX) = c\mathsf{M}X$.

(c) $\mathsf{M}(X + Y) = \mathsf{M}X + \mathsf{M}Y$.

(d) Если X и Y независимы, то $\mathsf{M}(XY) = \mathsf{M}X \cdot \mathsf{M}Y$.

Матожидания основных распределений:

- Биномиальное: $\mathsf{M}X = np$.
- Геометрическое: $\mathsf{M}X = 1/p$.
- Пуассона: $\mathsf{M}X = \lambda$.
- Равномерное на $[a, b]$: $\mathsf{M}X = \frac{a+b}{2}$.
- Показательное: $\mathsf{M}X = 1/\lambda$.
- Нормальное: $\mathsf{M}X = a$.

*

Пример. Пусть X_1, X_2, X_3 — независимые показательные СВ с параметрами $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Найти $\mathsf{M}(X_1+X_2X_3)$. По свойствам: $\mathsf{M}(X_1+X_2X_3) = \mathsf{M}X_1+\mathsf{M}(X_2X_3) = \frac{1}{\lambda_1}+\mathsf{M}X_2\cdot\mathsf{M}X_3 = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2\lambda_3}$.

16. **Определение и свойства дисперсии СВ. Дисперсии для основных дискретных и непрерывных распределений.**

Дисперсия: $\mathsf{D}X = \mathsf{M}[(X - \mathsf{M}X)^2] = \mathsf{M}(X^2) - (\mathsf{M}X)^2$.

Свойства:

(a) $\mathsf{D}(c) = 0$.

(b) $\mathsf{D}(cX) = c^2\mathsf{D}X$.

(c) $\mathsf{D}(X + Y) = \mathsf{D}X + \mathsf{D}Y$ для независимых X и Y.

Дисперсии основных распределений:

- Биномиальное: $\mathsf{D}X = npq$.
- Геометрическое: $\mathsf{D}X = q/p^2$.
- Пуассона: $\mathsf{D}X = \lambda$.
- Равномерное на $[a, b]$: $\mathsf{D}X = \frac{(b-a)^2}{12}$.
- Показательное: $\mathsf{D}X = 1/\lambda^2$.
- Нормальное: $\mathsf{D}X = \sigma^2$.

*

Пример. Пусть X и Y независимы, $\mathsf{D}X = 4$, $\mathsf{D}Y = 9$. Найти $\mathsf{D}(2X - 3Y + 1)$.

$$\mathsf{D}(2X - 3Y + 1) = \mathsf{D}(2X - 3Y) = 4\mathsf{D}X + 9\mathsf{D}Y = 4 \cdot 4 + 9 \cdot 9 = 16 + 81 = 97.$$

17. **Понятие условного математического ожидания. Разложение безусловного математического ожидания по условным (аналог формулы полной вероятности).**

Условное матожидание дискретной СВ X при условии события A:

$$\mathsf{M}[X|A] = \sum x_i \mathsf{P}\{X = x_i|A\}.$$

Для непрерывной СВ с условной плотностью $f(x|A)$:

$$\mathsf{M}[X|A] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x|A) dx.$$

Если $H_1, \ldots, H_n$ — полная группа событий, то

$$\mathsf{M}X = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{M}[X|H_i]\mathsf{P}\{H_i\}.$$

*

Пример. Пусть X — число очков при бросании игральной кости. Событие A — выпадение чётного числа. Тогда условное распределение X при условии A: значения 2,4,6 с вероятностями по $1/3$. $\mathsf{M}[X|A] = (2+4+6)/3 = 4$. Если A_1 — чётное, A_2 — нечётное, то $\mathsf{P}\{A_1\} = \mathsf{P}\{A_2\} = 0.5$, $\mathsf{M}[X|A_1] = 4$, $\mathsf{M}[X|A_2] = (1+3+5)/3 = 3$. Тогда $\mathsf{M}X = 4 \cdot 0.5 + 3 \cdot 0.5 = 3.5$, что совпадает с непосредственным вычислением.

18. **Ковариация и коэффициент корреляции случайных величин. Их свойства.**

Ковариация:

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathsf{M}[(X - \mathsf{M}X)(Y - \mathsf{M}Y)] = \mathsf{M}(XY) - \mathsf{M}X \cdot \mathsf{M}Y.$$

Коэффициент корреляции:

$$\rho_{XY} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathsf{D}X \cdot \mathsf{D}Y}}.$$

Свойства:

(a) $-1 \le \rho_{XY} \le 1$.

(b) Если X и Y независимы, то $\rho_{XY} = 0$ (обратное неверно).

(c) $\rho_{XY} = 1$ тогда и только тогда, когда $Y = aX + b$ с $a > 0$; $\rho_{XY} = -1$ при $a < 0$.

*

Пример с положительной ковариацией. Пусть X — рост отца, Y — рост сына. Обычно между ними положительная корреляция (сыновья высоких отцов tend to be высокими).

Пример с отрицательной ковариацией. Пусть X — цена на товар, Y — объём продаж. Часто при росте цены продажи падают, и наоборот — отрицательная корреляция.

Пример дискретной случайной величины

Рассмотрим случайные величины X и Y, принимающие значения 0 и 1 с совместным распределением:

$Y \backslash X$	0	1
0	a	b
1	c	d

где $a+b+c+d=1$, $a,b,c,d \geq 0$.

Положительная ковариация
Пусть $a=0.2$, $b=0.1$, $c=0.1$, $d=0.6$.

Маргинальные распределения:

$$\mathsf{P}\{X=0\} = a+c = 0.3, \quad \mathsf{P}\{X=1\} = b+d = 0.7$$

$$\mathsf{P}\{Y=0\} = a+b = 0.3, \quad \mathsf{P}\{Y=1\} = c+d = 0.7$$

Математические ожидания:

$$\mathsf{M}X = 0\cdot 0.3 + 1\cdot 0.7 = 0.7$$

$$\mathsf{M}Y = 0\cdot 0.3 + 1\cdot 0.7 = 0.7$$

$$\mathsf{M}(XY) = 0\cdot 0\cdot 0.2 + 1\cdot 0\cdot 0.1 + 0\cdot 1\cdot 0.1 + 1\cdot 1\cdot 0.6 = 0.6$$

$$\mathsf{cov}(X,Y) = \mathsf{M}(XY) - \mathsf{M}X\cdot\mathsf{M}Y = 0.6 - 0.7\cdot 0.7 = 0.6 - 0.49 = 0.11 > 0$$

Отрицательная ковариация
Пусть $a=0.1$, $b=0.4$, $c=0.4$, $d=0.1$.

$$\mathsf{M}X = 0\cdot 0.5 + 1\cdot 0.5 = 0.5$$

$$\mathsf{M}Y = 0\cdot 0.5 + 1\cdot 0.5 = 0.5$$

$$\mathsf{M}(XY) = 0.1$$

$$\mathsf{cov}(X,Y) = 0.1 - 0.5\cdot 0.5 = 0.1 - 0.25 = -0.15 < 0$$

Непрерывные случайные величины

Рассмотрим совместную плотность распределения $f(x,y)$ на единичном квадрате $[0,1]\times[0,1]$:

Положительная ковариация:
Рассмотрим плотность $f(x,y) = 2(1-x-y+2xy)$ для $0 \leq x,y \leq 1$.

Маргинальные плотности:

$$f_X(x) = \int_0^1 2(1-x-y+2xy)dy = 2\left[y - xy - \frac{y^2}{2} + xy^2\right]_0^1 = 2\left(1 - x - \frac{1}{2} + x\right) = 1$$

$$f_Y(y) = 1$$

Опять X и Y равномерны на $[0,1]$.

$$\begin{aligned}\mathsf{M}(XY) &= \int_0^1\int_0^1 xy\cdot 2(1-x-y+2xy)dxdy \\ &= 2\int_0^1\int_0^1 (xy - x^2y - xy^2 + 2x^2y^2)dxdy\end{aligned}$$

$$= 2\int_0^1 \left[\frac{x^2}{2}y - \frac{x^3}{3}y - \frac{x^2}{2}y^2 + \frac{2x^3}{3}y^2\right]_0^1 dy$$

$$= 2\int_0^1 \left(\frac{y}{2} - \frac{y}{3} - \frac{y^2}{2} + \frac{2y^2}{3}\right) dy$$

$$= 2\int_0^1 \left(\frac{y}{6} + \frac{y^2}{6}\right) dy = 2\left[\frac{y^2}{12} + \frac{y^3}{18}\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{18}\right) = 2 \cdot \frac{5}{36} = \frac{5}{18}$$

$$\mathsf{cov}(X, Y) = \frac{5}{18} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{18} - \frac{1}{4} = \frac{10}{36} - \frac{9}{36} = \frac{1}{36} > 0$$

Отрицательная ковариация:
Пусть $f(x, y) = 2(x + y - 2xy)$ для $0 \leq x, y \leq 1$.

Маргинальные плотности:

$$f_X(x) = \int_0^1 2(x + y - 2xy)dy = 2\left[xy + \frac{y^2}{2} - xy^2\right]_0^1 = 2\left(x + \frac{1}{2} - x\right) = 1$$

$$f_Y(y) = 1$$

Таким образом, X и Y равномерны на $[0, 1]$, $\mathsf{M}X = \mathsf{M}Y = \frac{1}{2}$.

$$\mathsf{M}(XY) = \int_0^1 \int_0^1 xy \cdot 2(x + y - 2xy)dxdy$$

$$= 2\int_0^1 \int_0^1 (x^2y + xy^2 - 2x^2y^2)dxdy$$

$$= 2\int_0^1 \left[\frac{x^3}{3}y + \frac{x^2}{2}y^2 - \frac{2x^3}{3}y^2\right]_0^1 dy$$

$$= 2\int_0^1 \left(\frac{y}{3} + \frac{y^2}{2} - \frac{2y^2}{3}\right) dy$$

$$= 2\int_0^1 \left(\frac{y}{3} - \frac{y^2}{6}\right) dy = 2\left[\frac{y^2}{6} - \frac{y^3}{18}\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{18}\right) = 2 \cdot \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$$

$$\mathsf{cov}(X, Y) = \frac{2}{9} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{9} - \frac{1}{4} = \frac{8}{36} - \frac{9}{36} = -\frac{1}{36} < 0$$

19. **Неравенство Чебышёва. Закон больших чисел: теорема Чебышёва и теорема Бернулли.**

Неравенство Чебышёва: для СВ X с конечной дисперсией и любого $\varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}\{|X - \mathsf{M}X| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\mathsf{D}X}{\varepsilon^2}.$$

Правило трёх сигм: для любой СВ с конечной дисперсией

$$\mathsf{P}\{|X - \mathsf{M}X| < 3\sigma\} \geq \frac{8}{9}, \quad \sigma = \sqrt{\mathsf{D}X}.$$

Теорема Чебышёва (ЗБЧ): для последовательности независимых СВ $X_1, X_2, \ldots$ с одинаковым матожиданием m и ограниченными дисперсиями ($\mathsf{D}X_i \le C$) выполняется

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - m\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

Теорема Бернулли: частота успеха в схеме Бернулли сходится по вероятности к вероятности успеха.

*

Пример. Оценка вероятности отклонения. Пусть $\mathsf{D}X = 4$. Тогда вероятность того, что X отклонится от своего матожидания более чем на 3, не превосходит $4/9 \approx 0.444$. Более точные оценки даются, если известно распределение.

20. **Центральная предельная теорема (ЦПТ) в форме Ляпунова. Интегральная теорема Муавра–Лапласа как следствие из ЦПТ.**

ЦПТ Ляпунова: если $X_1, X_2, \ldots$ независимы, имеют конечные матожидания a_i и дисперсии σ_i^2, и выполняется условие Ляпунова:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{B_n^3} \sum_{i=1}^{n} \mathsf{M}[|X_i - a_i|^3] = 0,$$

где $B_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2$, то распределение нормированной суммы

$$Z_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} a_i}{B_n}$$

сходится к стандартному нормальному распределению.

Интегральная теорема Муавра–Лапласа является частным случаем ЦПТ для схемы Бернулли.

Функция Лапласа: $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt$.

*

Пример. Сумма 100 независимых равномерных на $[0, 1]$ СВ. По ЦПТ её распределение приближённо нормально с параметрами: $\mathsf{M}\sum X_i = 100 \cdot 0.5 = 50$, $\mathsf{D}\sum X_i = 100 \cdot \frac{1}{12} = 8.333$. Тогда вероятность того, что сумма будет между 49 и 51, приближённо равна $\Phi\left(\frac{51-50}{\sqrt{8.333}}\right) - \Phi\left(\frac{49-50}{\sqrt{8.333}}\right) \approx 2\Phi(0.346) - 1 \approx 2 \cdot 0.635 - 1 = 0.27$.

21. **Различные виды сходимости в вероятностном пространстве: почти наверное, в среднеквадратичном, по вероятности, по распределению. Теорема о соотношении между сходимостью в ср. кв. и по вероятности.**

Определения:

- Сходимость почти наверное (п.н.): $\mathsf{P}\{\omega : X_n(\omega) \to X(\omega)\} = 1$.
- Сходимость в среднеквадратичном (ср.кв.): $\mathsf{M}[(X_n - X)^2] \to 0$.
- Сходимость по вероятности: $\forall \varepsilon > 0$ $\mathsf{P}\{|X_n - X| > \varepsilon\} \to 0$.
- Сходимость по распределению: $F_{X_n}(x) \to F_X(x)$ во всех точках непрерывности F_X.

Соотношения: сходимость п.н. $\Rightarrow$ сходимость по вероятности $\Rightarrow$ сходимость по распределению. Сходимость в ср. кв. $\Rightarrow$ сходимость по вероятности.

Доказательство: Если $X_n \xrightarrow{\text{ср.кв.}} X$, то $\mathsf{M}[(X_n - X)^2] \to 0$. Применим неравенство Чебышёва к случайной величине $Y = (X_n - X)^2$ (или неравенство Маркова):

$$\mathsf{P}\{|X_n - X| > \varepsilon\} = \mathsf{P}\{(X_n - X)^2 > \varepsilon^2\} \le \frac{\mathsf{M}[(X_n - X)^2]}{\varepsilon^2} \to 0.$$

Таким образом, $X_n \xrightarrow{P} X$.

Лемма Бореля-Кантелли: если $\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}\{A_n\} < \infty$, то с вероятностью 1 происходит лишь конечное число событий A_n. Если события независимы и $\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}\{A_n\} = \infty$, то с вероятностью 1 происходит бесконечно много событий A_n.

*

Пример сходимости. Пусть X_n независимы, $\mathsf{P}\{X_n = 1\} = 1/n$, $\mathsf{P}\{X_n = 0\} = 1 - 1/n$. Тогда $X_n \xrightarrow{P} 0$, так как $\mathsf{P}\{|X_n| > \varepsilon\} = 1/n \to 0$. Но по лемме Бореля-Кантелли $\sum 1/n = \infty$, и так как события независимы, то с вероятностью 1 бесконечно много X_n равны 1, значит, X_n не сходится к 0 почти наверное.

22. **Теорема о соотношении между сходимостью по вероятности и по распределению.**

- Сходимость по вероятности: $\forall \varepsilon > 0$ $\mathsf{P}\{|X_n - X| > \varepsilon\} \to 0$.
- Сходимость по распределению: $F_{X_n}(x) \to F_X(x)$ во всех точках непрерывности F_X.

Теорема: если $X_n \xrightarrow{P} X$, то $X_n \xrightarrow{d} X$. Обратное неверно.

*

Доказательство (основные моменты). Пусть $X_n \xrightarrow{P} X$. Нужно показать, что для любой точки непрерывности x функции F_X имеем $F_{X_n}(x) \to F_X(x)$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Запишем:

$$\mathsf{P}\{X_n < x\} = \mathsf{P}\{X_n < x, X < x + \varepsilon\} + \mathsf{P}\{X_n < x, X \ge x + \varepsilon\}.$$

Первое слагаемое $\le \mathsf{P}\{X < x + \varepsilon\} = F_X(x + \varepsilon)$. Второе слагаемое $\le \mathsf{P}\{|X_n - X| \ge \varepsilon\}$. Таким образом,

$$F_{X_n}(x) \le F_X(x + \varepsilon) + \mathsf{P}\{|X_n - X| \ge \varepsilon\}.$$

Аналогично, рассматривая $\mathsf{P}\{X < x - \varepsilon\}$, получим

$$F_X(x - \varepsilon) \le F_{X_n}(x) + \mathsf{P}\{|X_n - X| \ge \varepsilon\}.$$

Объединяя, имеем

$$F_X(x - \varepsilon) - \mathsf{P}\{|X_n - X| \ge \varepsilon\} \le F_{X_n}(x) \le F_X(x + \varepsilon) + \mathsf{P}\{|X_n - X| \ge \varepsilon\}.$$

Устремляя $n \to \infty$, получаем для любого $\varepsilon > 0$:

$$F_X(x - \varepsilon) \le \liminf_{n\to\infty} F_{X_n}(x) \le \limsup_{n\to\infty} F_{X_n}(x) \le F_X(x + \varepsilon).$$

Так как x — точка непрерывности, то при $\varepsilon \to 0$ $F_X(x - \varepsilon)$ и $F_X(x + \varepsilon)$ стремятся к $F_X(x)$. Отсюда следует, что $\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$.

Пример. Пусть X — стандартная нормальная СВ, и $X_n = (-1)^n X$. Тогда $X_n \xrightarrow{d} X$, так как распределение X_n такое же, как у X. Но X_n не сходится по вероятности к X (например, при чётных n разность $X_n - X = 0$, при нечётных $X_n - X = -2X$, что не стремится к 0 по вероятности).