Лекция 3

Условная вероятность.
Определение независимости событий.
Формулы полной вероятности и Байеса.

Пусть A, B — события, связанные с экспериментом $\mathcal{E}$.

$$\mathcal{E} \longrightarrow A, B, \dots$$

~~Оп~~ Пусть $P\{B\} \neq 0$. Отношение $P\{AB\}/P\{B\}$ называется условной вероятностью события A при условии, что произошло B, и обозначается $P\{A|B\}$:

$$P\{A|B\} = \frac{P\{AB\}}{P\{B\}}$$

Содержательная мотивировка этого определения:

Пусть $\mathcal{E}$ м.б. описан с помощью конечного числа n несовместных и равновозможных исходов, из которых исходы n_A приводят с событию A, исходы n_B — к событию B, исходы n_{AB} — к событию AB. Предположим, что точно известно, что произошло событие B, т.е. реализовался один из исходов n_B; тогда степень ожидания того, что при этом произошло и A естественно определить как

$$\frac{n_{AB}}{n_B}, \text{ или } \frac{n_{AB}/n}{n_B/n} = \frac{P\{AB\}}{P\{B}.$$

Определение. Событие A называется независимым от B, если $P\{A|B\}=P\{A\}$.

Утверждение. Пусть $P\{A\}\neq 0$, $P\{B\}\neq 0$. Если событие A не зависит от B, то и событие B не зависит от A.

Док-во:

$$\left.\begin{aligned} &\text{по условию: } P\{A|B\}=P\{A\} \\ &\text{по определению: } P\{A|B\}=\frac{P\{AB\}}{P\{B\}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow P\{AB\}=P\{A\}\cdot P\{B\}$$

по определению $P\{B|A\}=\dfrac{P\{BA\}}{P\{A\}} \Rightarrow$

$$P\{B|A\}=\frac{P\{A\}\cdot P\{B\}}{P\{A\}}=P\{B\},$$ что и т.д.

Следствие. Для независимых событий A и B (при $P\{A\}\neq 0$, $P\{B\}\neq 0$)

$$P\{AB\}=P\{A\}\cdot P\{B\}. \qquad (*)$$

Заметим, что если условие $P\{A\}\neq 0$, $P\{B\}\neq 0$ нарушено, то равенство (*) тоже выполняется.

Пример 1. $\mathcal{E}$ – бросание игрального кубика. Событие A – выпало 1 очко, B – выпало четное число очков.

$$P\{A|B\}=\frac{P\{AB\}}{P\{B\}}=0\neq P\{A\}=\frac{1}{6}$$

$\Rightarrow$ события A и B не являются независимыми.

Пример 2. $\mathcal{E}$ — одновременное бросание двух игральных кубиков: кубика I и кубика II. Событие A — на кубике I выпало 1 очко, событие B — на кубике II выпало четное число очков.

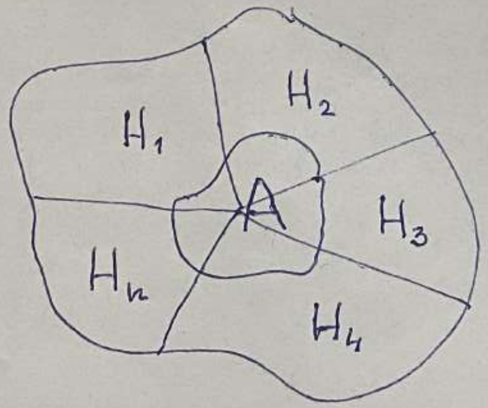
$$P\{A|B\} = \frac{P\{AB\}}{P\{B\}} = \frac{3/36}{1/2} = \frac{1}{6}, \quad P\{A\} = \frac{1}{6}$$

$\Rightarrow$ события A и B независимы.

Пусть событие A может осуществиться с одним и только одним из n несовместных событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$; в частности это условие выполнится если $H_1, H_2, \ldots, H_n$ — полная группа событий!

Опред. $H_1, H_2, \ldots, H_n$ — полная группа событий, если $H_1 + H_2 + \ldots + H_n = \Omega$, $H_i H_j = \varnothing \ \forall i \neq j$.

Тогда



$$A = AH_1 + AH_2 + \ldots + AH_n,$$

откуда

$$P\{A\} = \sum_{i=1}^{n} P\{AH_i\},$$

или

$$P\{A\} = \sum_{i=1}^{n} P\{A|H_i\} \cdot P\{H_i\}$$

— формула полной вероятности

Пример 3 Автомобиль марки „Субару" выпускается только на трёх заводах: в Америке (завод №1), в Европе (завод №2) и в Японии (завод №3). На долю 1-го, 2-го и 3-го заводов приходится 25, 35 и 40% всех выпускаемых автомобилей. А брак в их продукции составляет соответственно 5, 4 и 2%. Какова вероятность того, что купленный в России новый автомобиль „Субару" (на котором не указан завод-изготовитель) окажется бракованным?

Решение: введём следующие события:

A — купленный автомобиль оказался бракованным

H_1 — купленный автомобиль изготовлен на заводе 1
H_2 — —״— на заводе 2
H_3 — —״— на заводе 3

Тогда H_1, H_2, H_3 — полная группа событий, так что

$$P\{A\} = P\{A|H_1\}\cdot P\{H_1\} + P\{A|H_2\}\cdot P\{H_2\} + \\ + P\{A|H_3\}\cdot P\{H_3\},$$

Ясно, что $P\{H_1\}=0{,}25$, $P\{H_2\}=0{,}35$, $P\{H_3\}=0{,}4$,
$P\{A|H_1\}=0{,}05$, $P\{A|H_2\}=0{,}04$, $P\{A|H_3\}=0{,}02$.

Поэтому

$$P\{A\}=0{,}25\cdot 0{,}05 + 0{,}35\cdot 0{,}04 + 0{,}4\cdot 0{,}02 = 0{,}0345.$$

Формула Байеса
(ф-ла апостериорных вероятностей гипотез)

Пусть A – некоторое событие, а $H_1, H_2, \ldots, H_n$ – полная группа событий, связанных с экспериментом $\mathcal{E}$.

Можем написать:

$$P\{H_i A\} = P\{A|H_i\} \cdot P\{H_i\} = P\{H_i|A\} \cdot P\{A\}$$

$$\Rightarrow P\{H_i|A\} = \frac{P\{A|H_i\} \cdot P\{H_i\}}{P\{A\}}$$

или

$$P\{H_i|A\} = \frac{P\{A|H_i\} \cdot P\{H_i\}}{\sum_{j=1}^{n} P\{A|H_j\} \cdot P\{H_j\}} \quad (**),$$

где $i = 1, 2, \ldots, n$.

Формула $(**)$ м.б. проинтерпретирована следующим образом:

$H_1, H_2, \ldots, H_n$ – гипотезы, приводящие к событию A, которое фактически произошло,

причём к A могла привести одна и только одна из гипотез. Тогда условную вероятность $P\{H_i|A\}$ в левой части $(**)$ можно интерпретировать как апостериорную (т.е. считаемую после того, как факт A реализовался) вероятность гипотезы H_i.

Пример 4 Вернёмся к задаче из примера 3. Пусть купленный в России новый автомобиль Субару оказался бракованным. Найти вероятность того, что он был изготовлен:
а) на заводе 1, б) на заводе 2, в) на заводе 3

Решение:

В обозначениях примера 3 по формуле Байеса имеем

а) $$P\{H_1|A\} = \frac{P\{A|H_1\}P\{H_1\}}{\sum_{j=1}^{3} P\{A|H_j\}\cdot P\{H_j\}} =$$

$$= \frac{0,05\cdot 0,25}{0,05\cdot 0,25 + 0,04\cdot 0,35 + 0,02\cdot 0,4} = \frac{25}{69},$$

б) $$P\{H_2|A\} = \frac{P\{A|H_2\}\cdot P\{H_2\}}{\sum_{j=1}^{3} P\{A|H_j\}\cdot P\{H_j\}} = \frac{28}{69},$$

в) $$P\{H_3|A\} = \frac{P\{A|H_3\}\cdot P\{H_3\}}{\sum_{j=1}^{3} P\{A|H_j\}\cdot P\{H_j\}} = \frac{16}{69}.$$

Задача (об игре двух лиц).

Два игрока I и II ведут некоторую игру, состоящую из отдельных партий, до полного разорение одного из них. Начальный капитал I-го игрока a руб., II-го – b руб. Вероятность выигрыша каждой партии для I игрока равна p, для II – q, причём ничьи невозможны. В каждой партии выигрыш одного игрока (а значит, проигрыш другого) равен 1 руб. Под разорением игрока понимается момент, когда капитал игрока становится равным нулю. Найти вероятность разорения каждого из игроков.

Решение:

Пусть P_n – вероятность разорение игрока I, когда он имеет n руб.

Заметим, что $P_0 = 1$, $P_{a+b} = 0$. (1)

Пусть событие A_n – первый игрок разорится при исходном капитале n; событие H — игрок I выиграл очередную партию. Тогда

$$\underbrace{P\{A_n\}}_{P_n} = \underbrace{P\{A_n|H\}}_{P_{n+1}} \cdot \underbrace{P\{H\}}_{p} + \underbrace{P\{A_n|\overline{H}\}}_{P_{n-1}} \cdot \underbrace{P\{\overline{H}\}}_{q},$$

т.е.

$$P_n = p P_{n+1} + q P_{n-1} \quad (2)$$

или

$$P_{n+1} - P_n = \frac{q}{p}(P_n - P_{n-1}), \quad (2)$$

где $i = 1, 2, \ldots, a+b-1$

Соотношение (1) и (2) приводят к результату

$$\text{при } p\neq q \qquad P_n = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b} - \left(\frac{q}{p}\right)^{n}}{\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b} - 1},$$

$$\text{при } p=q=\frac{1}{2} \qquad P_n = 1 - \frac{n}{a+b}.$$

Таким образом, вероятность разорения игрока I (т.е. P_n при $n=a$) есть

$$\underbrace{P_a = \frac{1-\left(\frac{p}{q}\right)^{b}}{1-\left(\frac{p}{q}\right)^{a+b}} \text{ при } p\neq q;}_{(4)} \qquad \underbrace{P_a = \frac{b}{a+b} \text{ при } p=q=1/2}_{(3)}$$

Отметим некоторые содержательные моменты.

1. Если игроки одинаковы по силе ($p=q=1/2$), и a много больше b ($a \gg b$), то
$P_a = \frac{b}{a+b} \simeq 0$ — разорение игрока I практически невозможно.

2. Если через Q_b обозначить вероятность разорение игрока II, то (в силу симметрии задачи) при $p\neq q$

$$Q_b = \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{a}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}} \qquad (5)$$

Пусть $p>q$, т.е. игрок I сильнее игрока
но ~~на~~ $b \gg a$, т.е. начальный капитал
игрока I значительно ниже. Тогда
из (4) и (5) получим следующую
асимптотику (формально полагая $b \sim \infty$)

$$P_a \sim \left(\frac{q}{p}\right)^a, \quad Q_b \sim 1-\left(\frac{q}{p}\right)^a,$$

так что при определенном соотношении параметров p, q и a, а именн

$$\left(\frac{q}{p}\right)^a < 1-\left(\frac{q}{p}\right)^q$$

или

$$2\left(\frac{q}{p}\right)^a < 1,$$

умелый игрок даже с малым капиталом будет иметь меньше
шансов на разорение, чем игрок
с очень большим капиталом, но мене
умелый.