Задачи на нахождение плотности преобразованных случайных величин

Задача 1 (Простая) *Случайная величина X имеет плотность распределения $f_X(x) = 2x$ при $0 < x < 1$ и $f_X(x) = 0$ иначе. Найти плотность распределения случайной величины $Y = 3X + 2$.*

Решение 1 *Используем метод функции распределения. Функция $y = 3x + 2$ строго возрастает.*

Найдем функцию распределения Y:

$$F_Y(y) = P(Y < y) = P(3X + 2 < y) = P\left(X < \frac{y-2}{3}\right) = F_X\left(\frac{y-2}{3}\right)$$

Дифференцируем для нахождения плотности:

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) = \frac{d}{dy}F_X\left(\frac{y-2}{3}\right) = f_X\left(\frac{y-2}{3}\right) \cdot \frac{1}{3}$$

Подставляем выражение для f_X:

$$f_Y(y) = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \frac{y-2}{3} = \frac{2(y-2)}{9}, \quad \text{при } 0 < \frac{y-2}{3} < 1$$

Определяем область значений y:

$$0 < \frac{y-2}{3} < 1 \quad \Rightarrow \quad 0 < y - 2 < 3 \quad \Rightarrow \quad 2 < y < 5$$

Окончательно:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2(y-2)}{9}, & \text{если } 2 < y < 5 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Ответ: $f_Y(y) = \frac{2(y-2)}{9}$ *при $2 < y < 5$, и $f_Y(y) = 0$ иначе.*

Задача 2 (Средней сложности) *Случайная величина X имеет стандартное нормальное распределение $N(0, 1)$ с плотностью $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$. Найти плотность распределения случайной величины $Y = X^2$.*

Решение 2 *Функция $y = x^2$ не является монотонной на всей числовой прямой, поэтому разобьем на два интервала.*

Для $y > 0$ функция $y = x^2$ имеет два обратных преобразования:

$$x_1 = -\sqrt{y}, \quad x_2 = \sqrt{y}$$

Функция распределения Y:

$$F_Y(y) = P(Y < y) = P(X^2 < y)$$

При $y \leq 0$: $F_Y(y) = 0$, следовательно $f_Y(y) = 0$.
При $y > 0$:

$$F_Y(y) = P(-\sqrt{y} < X < \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$$

Дифференцируем для нахождения плотности:

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) = f_X(\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} - f_X(-\sqrt{y}) \cdot \left(-\frac{1}{2\sqrt{y}}\right)$$

Учитывая четность нормального распределения $f_X(-x) = f_X(x)$, получаем:

$$f_Y(y) = f_X(\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} + f_X(\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{f_X(\sqrt{y})}{\sqrt{y}}$$

Подставляем выражение для плотности нормального распределения:

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-y/2}, \quad y > 0$$

Это плотность распределения хи-квадрат с одной степенью свободы.
Ответ: *$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-y/2}$ при $y > 0$, и $f_Y(y) = 0$ при $y \leq 0$.*

Задача 3 (Сложная) *Случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$ с плотностью $f_X(x) = 1$ при $0 \leq x \leq 1$. Найти плотность распределения случайной величины $Y = -\frac{1}{\lambda}\ln(1 - X)$, где $\lambda > 0$.*

Решение 3 *Функция $y = -\frac{1}{\lambda}\ln(1 - x)$ строго возрастает на $[0, 1)$.*
Найдем обратную функцию:

$$y = -\frac{1}{\lambda}\ln(1 - x) \quad \Rightarrow \quad -\lambda y = \ln(1 - x) \quad \Rightarrow \quad 1 - x = e^{-\lambda y} \quad \Rightarrow \quad x = 1 - e^{-\lambda y}$$

Производная обратной функции:

$$\frac{dx}{dy} = \lambda e^{-\lambda y}$$

Используем формулу для плотности преобразованной случайной величины:

$$f_Y(y) = f_X(x(y)) \cdot \left|\frac{dx}{dy}\right|$$

Подставляем:

$$f_Y(y) = 1 \cdot \lambda e^{-\lambda y} = \lambda e^{-\lambda y}$$

Определим область значений y. При $x = 0$: $y = -\frac{1}{\lambda}\ln(1 - 0) = 0$. При $x \to 1^-$: $y \to -\frac{1}{\lambda}\ln(0^+) \to +\infty$.
Таким образом, $y \geq 0$.
Получаем:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y}, & y \geq 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases}$$

Это плотность экспоненциального распределения с параметром λ.
Ответ: *$f_Y(y) = \lambda e^{-\lambda y}$ при $y \geq 0$, и $f_Y(y) = 0$ при $y < 0$.*