Задача на дискретное вероятностное пространство: остаток от деления

Условие задачи

Бросается одна стандартная игральная кость (кубик). Случайная величина R определяется как остаток от деления числа выпавших очков на 4.

1. Постройте вероятностное пространство для эксперимента
2. Определите случайную величину - остаток от деления на 4
3. Найдите функцию распределения остатка
4. Постройте график функции распределения
5. Найдите математическое ожидание и дисперсию

Решение

1. **Построение вероятностного пространства**
   (a) **Пространство элементарных исходов (Ω):**
   $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ - все возможные результаты броска кубика.
   (b) **Сигма-алгебра ($\mathcal{F}$):**
   $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$ - множество всех подмножеств Ω.
   (c) **Вероятностная мера (P):**
   Так как кубик стандартный и честный:
   $$P(\{i\}) = \frac{1}{6} \quad \text{для } i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$
2. **Определение случайной величины**
   Случайная величина R - остаток от деления числа очков на 4:
   $$\begin{aligned} R(1) &= 1 \mod 4 = 1 \\ R(2) &= 2 \mod 4 = 2 \\ R(3) &= 3 \mod 4 = 3 \\ R(4) &= 4 \mod 4 = 0 \\ R(5) &= 5 \mod 4 = 1 \\ R(6) &= 6 \mod 4 = 2 \end{aligned}$$

3. **Распределение случайной величины**

   Найдём вероятности каждого значения остатка:

$$P(R=0)=P(\{4\})=\frac{1}{6}$$
$$P(R=1)=P(\{1,5\})=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$
$$P(R=2)=P(\{2,6\})=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$
$$P(R=3)=P(\{3\})=\frac{1}{6}$$

4. **Функция распределения $F_R(r)$:**

   Функция распределения определяется как:

$$F_R(r)=P(R\le r)$$

   Вычислим для различных значений r:

$$F_R(r)=\begin{cases}0, & r<0\\ \frac{1}{6}, & 0\le r<1\\ \frac{1}{6}+\frac{2}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}, & 1\le r<2\\ \frac{1}{6}+\frac{2}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}, & 2\le r<3\\ 1, & r\ge 3\end{cases}$$

5. **График функции распределения**

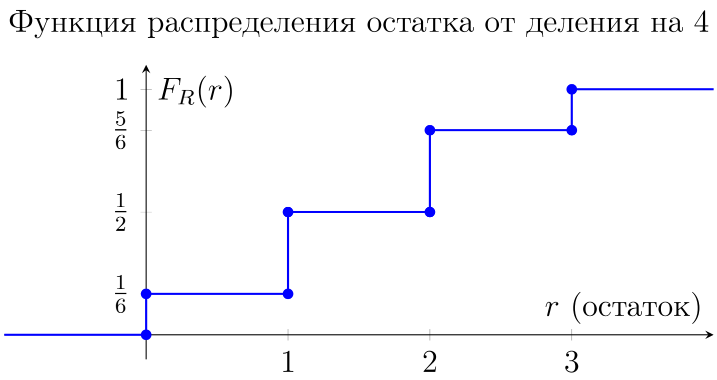

Рис. 1: Функция распределения остатка от деления на 4

Вычисление числовых характеристик

1. **Математическое ожидание:**

$$E[R] = \sum_{r=0}^{3} r \cdot P(R = r) = 0 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{2}{6} + 2 \cdot \frac{2}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6}$$

$$E[R] = 0 + \frac{2}{6} + \frac{4}{6} + \frac{3}{6} = \frac{9}{6} = 1.5$$

2. **Математическое ожидание квадрата:**

$$E[R^2] = \sum_{r=0}^{3} r^2 \cdot P(R = r) = 0^2 \cdot \frac{1}{6} + 1^2 \cdot \frac{2}{6} + 2^2 \cdot \frac{2}{6} + 3^2 \cdot \frac{1}{6}$$

$$E[R^2] = 0 + \frac{2}{6} + \frac{8}{6} + \frac{9}{6} = \frac{19}{6} \approx 3.1667$$

3. **Дисперсия:**

$$D[R] = E[R^2] - (E[R])^2 = \frac{19}{6} - \left(\frac{9}{6}\right)^2 = \frac{19}{6} - \frac{81}{36} = \frac{114}{36} - \frac{81}{36} = \frac{33}{36} = \frac{11}{12} \approx 0.9167$$

4. **Среднее квадратическое отклонение:**

$$\sigma_R = \sqrt{D[R]} = \sqrt{\frac{11}{12}} \approx \sqrt{0.9167} \approx 0.9574$$

Проверка распределения

- **Сумма вероятностей:**

$$\sum_{r=0}^{3} P(R = r) = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = 1$$

- **Вероятность того, что остаток чётный:**

$$P(R \text{ чётный}) = P(R = 0) + P(R = 2) = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3}{6} = 0.5$$

- **Вероятность того, что остаток нечётный:**

$$P(R \text{ нечётный}) = P(R = 1) + P(R = 3) = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = 0.5$$

Таблица распределения

Остаток r	Исходы	Вероятность $P(R = r)$	$F_R(r)$
0	$\{4\}$	$\frac{1}{6} \approx 0.1667$	$\frac{1}{6}$
1	$\{1, 5\}$	$\frac{2}{6} = \frac{1}{3} \approx 0.3333$	$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
2	$\{2, 6\}$	$\frac{2}{6} = \frac{1}{3} \approx 0.3333$	$\frac{5}{6} \approx 0.8333$
3	$\{3\}$	$\frac{1}{6} \approx 0.1667$	1

Сравнение с равномерным распределением

Если бы остатки были распределены равномерно, то:

- Каждый остаток имел бы вероятность $\frac{1}{4} = 0.25$
- Математическое ожидание было бы $E[R] = 1.5$
- Дисперсия была бы $D[R] = \frac{4^2-1}{12} = \frac{15}{12} = 1.25$

В нашем случае:

- Распределение не равномерное
- Математическое ожидание совпадает с равномерным случаем
- Дисперсия меньше ($0.9167 < 1.25$), что означает более сконцентрированное распределение

Ответ

- Функция распределения:

$$F_R(r) = \begin{cases} 0, & r < 0 \\ \frac{1}{6}, & 0 \le r < 1 \\ \frac{1}{2}, & 1 \le r < 2 \\ \frac{5}{6}, & 2 \le r < 3 \\ 1, & r \ge 3 \end{cases}$$

- Распределение вероятностей:

$$P(R = 0) = \frac{1}{6}, \qquad P(R = 1) = \frac{1}{3},$$
$$P(R = 2) = \frac{1}{3}, \qquad P(R = 3) = \frac{1}{6}$$

- Математическое ожидание: $E[R] = 1.5$
- Дисперсия: $D[R] = \dfrac{11}{12} \approx 0.9167$
- Среднее квадратическое отклонение: $\sigma_R \approx 0.9574$

Тетраэдр с неравномерными вероятностями

Бросается тетраэдр с гранями, пронумерованными числами 1, 2, 3, 4. Вероятность выпадения k-й грани в два раза больше вероятности $(k-1)$-й грани. Случайная величина R определяется как остаток от деления числа на выпавшей грани на 3.

1. Постройте вероятностное пространство для эксперимента
2. Определите случайную величину - остаток от деления на 3
3. Найдите функцию распределения остатка
4. Постройте график функции распределения
5. Найдите математическое ожидание и дисперсию

Решение

1. **Построение вероятностного пространства**

   (a) **Пространство элементарных исходов** (Ω)**:**
   $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ - все возможные результаты броска тетраэдра.

   (b) **Сигма-алгебра** $(\mathcal{F})$**:**
   $\mathcal{F} = 2^\Omega$ - множество всех подмножеств Ω.

   (c) **Вероятностная мера** (P)**:**
   Пусть $P(1) = p$, тогда по условию:

$$P(2) = 2p$$
$$P(3) = 2 \cdot P(2) = 4p$$
$$P(4) = 2 \cdot P(3) = 8p$$

   Сумма вероятностей должна равняться 1:

$$p + 2p + 4p + 8p = 15p = 1 \quad \Rightarrow \quad p = \frac{1}{15}$$

   Таким образом:

$$P(1) = \frac{1}{15}$$
$$P(2) = \frac{2}{15}$$
$$P(3) = \frac{4}{15}$$
$$P(4) = \frac{8}{15}$$

2. **Определение случайной величины**

   Случайная величина R - остаток от деления числа на грани на 3:

$$\begin{aligned} R(1) &= 1 \mod 3 = 1 \\ R(2) &= 2 \mod 3 = 2 \\ R(3) &= 3 \mod 3 = 0 \\ R(4) &= 4 \mod 3 = 1 \end{aligned}$$

3. **Распределение случайной величины**

   Найдём вероятности каждого значения остатка:

$$\begin{aligned} P(R = 0) &= P(\{3\}) = \frac{4}{15} \\ P(R = 1) &= P(\{1, 4\}) = \frac{1}{15} + \frac{8}{15} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} \\ P(R = 2) &= P(\{2\}) = \frac{2}{15} \end{aligned}$$

4. **Функция распределения $F_R(r)$:**

   Функция распределения определяется как:

$$F_R(r) = P(R \leq r)$$

   Вычислим для различных значений r:

$$F_R(r) = \begin{cases} 0, & r < 0 \\ \frac{4}{15}, & 0 \leq r < 1 \\ \frac{4}{15} + \frac{9}{15} = \frac{13}{15}, & 1 \leq r < 2 \\ 1, & r \geq 2 \end{cases}$$

5. **График функции распределения**

Функция распределения остатка от деления на 3

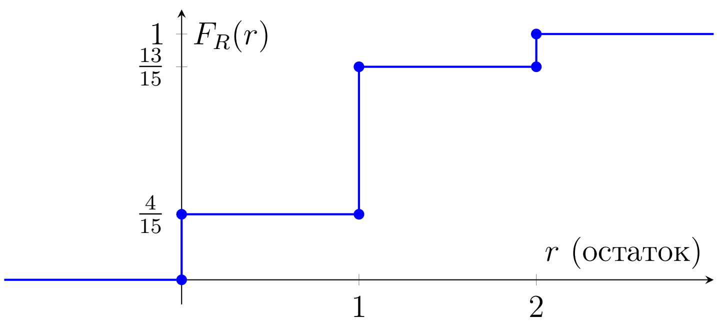

Рис. 2: Функция распределения остатка от деления на 3

Вычисление числовых характеристик

1. **Математическое ожидание:**

$$E[R] = \sum_{r=0}^{2} r \cdot P(R = r) = 0 \cdot \frac{4}{15} + 1 \cdot \frac{9}{15} + 2 \cdot \frac{2}{15}$$

$$E[R] = 0 + \frac{9}{15} + \frac{4}{15} = \frac{13}{15} \approx 0.8667$$

2. **Математическое ожидание квадрата:**

$$E[R^2] = \sum_{r=0}^{2} r^2 \cdot P(R = r) = 0^2 \cdot \frac{4}{15} + 1^2 \cdot \frac{9}{15} + 2^2 \cdot \frac{2}{15}$$

$$E[R^2] = 0 + \frac{9}{15} + \frac{8}{15} = \frac{17}{15} \approx 1.1333$$

3. **Дисперсия:**

$$D[R] = E[R^2] - (E[R])^2 = \frac{17}{15} - \left(\frac{13}{15}\right)^2 = \frac{17}{15} - \frac{169}{225} = \frac{255}{225} - \frac{169}{225} = \frac{86}{225} \approx 0.3822$$

4. **Среднее квадратическое отклонение:**

$$\sigma_R = \sqrt{D[R]} = \sqrt{\frac{86}{225}} = \frac{\sqrt{86}}{15} \approx \frac{9.2736}{15} \approx 0.6182$$

Проверка распределения

- **Сумма вероятностей:**

$$\sum_{r=0}^{2} P(R=r) = \frac{4}{15} + \frac{9}{15} + \frac{2}{15} = 1$$

- **Вероятность того, что остаток чётный:**

$$P(R \text{ чётный}) = P(R=0) + P(R=2) = \frac{4}{15} + \frac{2}{15} = \frac{6}{15} = 0.4$$

- **Вероятность того, что остаток нечётный:**

$$P(R \text{ нечётный}) = P(R=1) = \frac{9}{15} = 0.6$$

Таблица распределения

Остаток r	Исходы	Вероятность $P(R=r)$	$F_R(r)$
0	$\{3\}$	$\frac{4}{15} \approx 0.2667$	$\frac{4}{15}$
1	$\{1,4\}$	$\frac{9}{15} = \frac{3}{5} = 0.6$	$\frac{13}{15} \approx 0.8667$
2	$\{2\}$	$\frac{2}{15} \approx 0.1333$	1

Сравнение с равномерным распределением

Если бы остатки были распределены равномерно на множестве $\{0,1,2\}$, то:

- Каждый остаток имел бы вероятность $\frac{1}{3} \approx 0.3333$
- Математическое ожидание было бы $E[R] = 1$
- Дисперсия была бы $D[R] = \frac{3^2-1}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \approx 0.6667$

В нашем случае:

- Распределение сильно неравномерное
- Вероятность остатка 1 в 4.5 раза больше вероятности остатка 2
- Математическое ожидание меньше $(0.8667 < 1)$
- Дисперсия меньше $(0.3822 < 0.6667)$, что означает более сконцентрированное распределение

Анализ влияния неравномерности

Исходные вероятности граней тетраэдра:

$$P(1) = \frac{1}{15} \approx 0.0667$$
$$P(2) = \frac{2}{15} \approx 0.1333$$
$$P(3) = \frac{4}{15} \approx 0.2667$$
$$P(4) = \frac{8}{15} \approx 0.5333$$

После преобразования остатком от деления на 3:

- Остаток 1 получается из граней 1 и 4 с суммарной вероятностью $0.0667 + 0.5333 = 0.6$
- Остаток 0 получается только из грани 3 с вероятностью 0.2667
- Остаток 2 получается только из грани 2 с вероятностью 0.1333

Ответ

- Функция распределения:

$$F_R(r) = \begin{cases} 0, & r < 0 \\ \frac{4}{15}, & 0 \le r < 1 \\ \frac{13}{15}, & 1 \le r < 2 \\ 1, & r \ge 2 \end{cases}$$

- Распределение вероятностей:

$$P(R = 0) = \frac{4}{15} \approx 0.2667$$
$$P(R = 1) = \frac{3}{5} = 0.6$$
$$P(R = 2) = \frac{2}{15} \approx 0.1333$$

- Математическое ожидание: $E[R] = \frac{13}{15} \approx 0.8667$
- Дисперсия: $D[R] = \frac{86}{225} \approx 0.3822$
- Среднее квадратическое отклонение: $\sigma_R \approx 0.6182$