Дискретное вероятностное пространство

Октаэдр с модулем разности

Бросается октаэдр с гранями, пронумерованными числами 0, 1, 2, ..., 7. Все грани равновероятны. Случайная величина D определяется как модуль разности между числом на выпавшей грани и числом 5:

$$D = |X - 5|$$

где X - число на выпавшей грани.

1. Постройте вероятностное пространство для эксперимента
2. Определите случайную величину - модуль разности с числом 5
3. Найдите функцию распределения этой величины
4. Постройте график функции распределения
5. Найдите математическое ожидание и дисперсию

Решение

1. **Построение вероятностного пространства**

   (a) **Пространство элементарных исходов** (Ω)**:**
   $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ - все возможные результаты броска октаэдра.

   (b) **Сигма-алгебра** ($\mathcal{F}$)**:**
   $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$ - множество всех подмножеств Ω.

   (c) **Вероятностная мера** (P)**:**
   Так как все грани равновероятны:

   $$P(\{i\}) = \frac{1}{8} \quad \text{для } i = 0, 1, 2, \ldots, 7$$

2. **Определение случайной величины**

   Случайная величина $D = |X - 5|$, где X - число на выпавшей грани:

$$
\begin{aligned}
D(0) &= |0 - 5| = 5 \\
D(1) &= |1 - 5| = 4 \\
D(2) &= |2 - 5| = 3 \\
D(3) &= |3 - 5| = 2 \\
D(4) &= |4 - 5| = 1 \\
D(5) &= |5 - 5| = 0 \\
D(6) &= |6 - 5| = 1 \\
D(7) &= |7 - 5| = 2
\end{aligned}
$$

3. **Распределение случайной величины**

   Найдём вероятности каждого значения модуля разности:

$$
\begin{aligned}
P(D = 0) &= P(\{5\}) = \frac{1}{8} \\
P(D = 1) &= P(\{4, 6\}) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \\
P(D = 2) &= P(\{3, 7\}) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \\
P(D = 3) &= P(\{2\}) = \frac{1}{8} \\
P(D = 4) &= P(\{1\}) = \frac{1}{8} \\
P(D = 5) &= P(\{0\}) = \frac{1}{8}
\end{aligned}
$$

4. **Функция распределения $F_D(d)$:**

   Функция распределения определяется как:

$$
F_D(d) = P(D \leq d)
$$

   Вычислим для различных значений d:

$$F_D(d) = \begin{cases} 0, & d < 0 \\ \frac{1}{8}, & 0 \le d < 1 \\ \frac{1}{8} + \frac{2}{8} = \frac{3}{8}, & 1 \le d < 2 \\ \frac{3}{8} + \frac{2}{8} = \frac{5}{8}, & 2 \le d < 3 \\ \frac{5}{8} + \frac{1}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}, & 3 \le d < 4 \\ \frac{6}{8} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}, & 4 \le d < 5 \\ 1, & d \ge 5 \end{cases}$$

5. **График функции распределения**

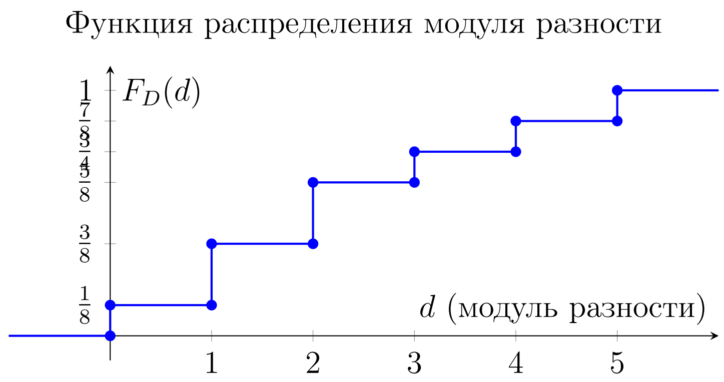


Рис. 1: Функция распределения модуля разности с числом 5

Вычисление числовых характеристик

1. **Математическое ожидание:**

$$E[D] = \sum_{d=0}^{5} d \cdot P(D = d) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{2}{8} + 2 \cdot \frac{2}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} + 4 \cdot \frac{1}{8} + 5 \cdot \frac{1}{8}$$

$$E[D] = 0 + \frac{2}{8} + \frac{4}{8} + \frac{3}{8} + \frac{4}{8} + \frac{5}{8} = \frac{18}{8} = \frac{9}{4} = 2.25$$

2. **Математическое ожидание квадрата:**

$$E[D^2] = \sum_{d=0}^{5} d^2 \cdot P(D=d) = 0^2 \cdot \frac{1}{8} + 1^2 \cdot \frac{2}{8} + 2^2 \cdot \frac{2}{8} + 3^2 \cdot \frac{1}{8} + 4^2 \cdot \frac{1}{8} + 5^2 \cdot \frac{1}{8}$$

$$E[D^2] = 0 + \frac{2}{8} + \frac{8}{8} + \frac{9}{8} + \frac{16}{8} + \frac{25}{8} = \frac{60}{8} = \frac{15}{2} = 7.5$$

3. **Дисперсия:**

$$D[D] = E[D^2] - (E[D])^2 = \frac{15}{2} - \left(\frac{9}{4}\right)^2 = \frac{15}{2} - \frac{81}{16} = \frac{120}{16} - \frac{81}{16} = \frac{39}{16} = 2.4375$$

4. **Среднее квадратическое отклонение:**

$$\sigma_D = \sqrt{D[D]} = \sqrt{\frac{39}{16}} = \frac{\sqrt{39}}{4} \approx \frac{6.245}{4} \approx 1.561$$

Проверка распределения

- **Сумма вероятностей:**

$$\sum_{d=0}^{5} P(D=d) = \frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{2}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 1$$

- **Вероятность того, что разность не превышает 2:**

$$P(D \le 2) = F_D(2) = \frac{5}{8} = 0.625$$

- **Вероятность того, что разность больше 3:**

$$P(D > 3) = 1 - F_D(3) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} = 0.25$$

Таблица распределения

Модуль разности d	Исходы	Вероятность $P(D=d)$	$F_D(d)$
0	$\{5\}$	$\frac{1}{8} = 0.125$	$\frac{1}{8}$
1	$\{4,6\}$	$\frac{2}{8} = 0.25$	$\frac{3}{8} = 0.375$
2	$\{3,7\}$	$\frac{2}{8} = 0.25$	$\frac{5}{8} = 0.625$
3	$\{2\}$	$\frac{1}{8} = 0.125$	$\frac{6}{8} = 0.75$
4	$\{1\}$	$\frac{1}{8} = 0.125$	$\frac{7}{8} = 0.875$
5	$\{0\}$	$\frac{1}{8} = 0.125$	1

Симметрия распределения

Распределение симметрично относительно "центра"2.5:

- $P(D = 0) = P(D = 5) = \frac{1}{8}$
- $P(D = 1) = P(D = 4) = \frac{2}{8}$ (но на самом деле $P(D = 4) = \frac{1}{8}$, поэтому симметрия неполная)

Фактически распределение имеет "двойные горки"на значениях 1 и 2.

Сравнение с равномерным распределением

Если бы модуль разности был распределен равномерно на множестве $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, то:

- Каждое значение имело бы вероятность $\frac{1}{6} \approx 0.1667$
- Математическое ожидание было бы $E[D] = 2.5$
- Дисперсия была бы $D[D] = \frac{6^2-1}{12} = \frac{35}{12} \approx 2.9167$

В нашем случае:

- Распределение не равномерное, имеет два пика при $d = 1$ и $d = 2$
- Математическое ожидание меньше $(2.25 < 2.5)$
- Дисперсия меньше $(2.4375 < 2.9167)$

Геометрическая интерпретация

Модуль разности $|X - 5|$ можно интерпретировать как "расстояние"от выпавшего числа до числа 5 на числовой прямой от 0 до 7:

- Минимальное расстояние: 0 (при $X = 5$)
- Максимальное расстояние: 5 (при $X = 0$)
- Наиболее вероятные расстояния: 1 и 2 (вероятность 0.25 каждое)

Ответ

- Функция распределения:

$$F_D(d) = \begin{cases} 0, & d < 0 \\ \frac{1}{8}, & 0 \le d < 1 \\ \frac{3}{8}, & 1 \le d < 2 \\ \frac{5}{8}, & 2 \le d < 3 \\ \frac{3}{4}, & 3 \le d < 4 \\ \frac{7}{8}, & 4 \le d < 5 \\ 1, & d \ge 5 \end{cases}$$

- Распределение вероятностей:

$$P(D=0) = \frac{1}{8}, \qquad P(D=1) = \frac{1}{4}, \qquad P(D=2) = \frac{1}{4},$$
$$P(D=3) = \frac{1}{8}, \qquad P(D=4) = \frac{1}{8}, \qquad P(D=5) = \frac{1}{8}$$

- Математическое ожидание: $E[D] = \frac{9}{4} = 2.25$

- Дисперсия: $D[D] = \frac{39}{16} = 2.4375$

- Среднее квадратическое отклонение: $\sigma_D \approx 1.561$

Задачи на равномерное распределение

Объём параллелепипеда

На отрезке $[1, 3]$ наудачу выбирается точка. Случайная величина V определяется как объём куба со стороной, равной координате выбранной точки.

1. Постройте вероятностное пространство для координаты выбранной точки
2. Определите случайную величину - объём куба
3. Найдите функцию распределения и плотность распределения объёма
4. Постройте графики функции распределения и плотности
5. Найдите математическое ожидание и дисперсию объёма

Решение

1. **Построение вероятностного пространства**

   (a) **Пространство элементарных исходов** (Ω)**:**
   $\Omega = [1, 3]$ - все возможные координаты выбранной точки.

   (b) **Сигма-алгебра** $(\mathcal{F})$**:**
   Борелевская σ-алгебра на отрезке $[1, 3]$.

   (c) **Вероятностная мера** (P)**:**
   Так как точка выбирается равномерно:

   $$P(A) = \frac{\mu(A)}{2}, \quad \text{где } \mu(A) \text{ - длина множества } A$$

   Например, вероятность того, что точка попадёт в $[1, 2]$:

   $$P([1, 2]) = \frac{2-1}{3-1} = \frac{1}{2}$$

2. **Определение случайной величины**

   Пусть X - координата выбранной точки, $X \in [1, 3]$.

   Случайная величина V - объём куба со стороной X:

   $$V = X^3$$

3. **Функция распределения и плотность**

   (a) **Функция распределения $F_V(v)$:**
   Найдём вероятность того, что объём не превышает v:

$$F_V(v) = P(V \leq v) = P(X^3 \leq v) = P(X \leq v^{1/3})$$

   Так как X равномерно распределена на $[1, 3]$, то:

$$P(X \leq x) = \frac{x-1}{2}, \quad 1 \leq x \leq 3$$

   Подставляя $x = v^{1/3}$, получаем:

$$F_V(v) = \frac{v^{1/3}-1}{2}, \quad 1 \leq v^{1/3} \leq 3$$

   То есть для $1^3 \leq v \leq 3^3$, или $1 \leq v \leq 27$.
   Таким образом:

$$F_V(v) = \begin{cases} 0, & v < 1 \\ \dfrac{v^{1/3}-1}{2}, & 1 \leq v \leq 27 \\ 1, & v > 27 \end{cases}$$

   (b) **Плотность распределения $f_V(v)$:**
   Плотность - производная функции распределения:

$$f_V(v) = F'_V(v) = \frac{d}{dv}\left(\frac{v^{1/3}-1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} v^{-2/3} = \frac{1}{6} v^{-2/3}$$

   Таким образом:

$$f_V(v) = \begin{cases} \dfrac{1}{6} v^{-2/3}, & 1 \leq v \leq 27 \\ 0, & v < 1 \text{ или } v > 27 \end{cases}$$

4. **Графики**

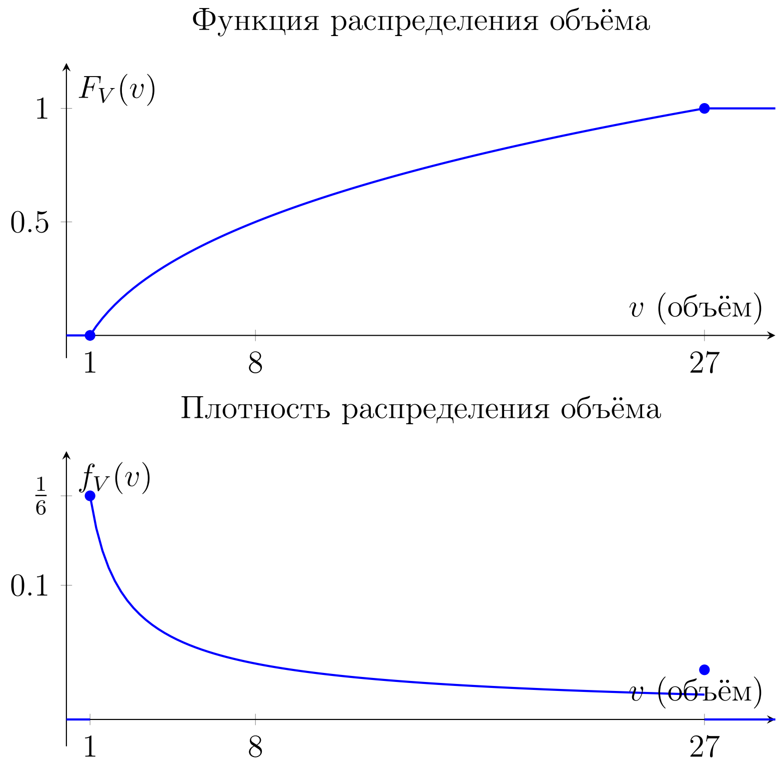


Рис. 2: Распределение объёма куба

Проверка и вычисление характеристик

1. **Проверка нормировки плотности:**

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_V(v)dv = \int_1^{27} \frac{1}{6} v^{-2/3} dv = \frac{1}{6} \cdot 3v^{1/3} \Big|_1^{27} = \frac{1}{2}(27^{1/3} - 1^{1/3}) = \frac{1}{2}(3-1) = 1$$

2. **Математическое ожидание:**

$$E[V] = \int_{-\infty}^{\infty} v f_V(v)dv = \int_1^{27} v \cdot \frac{1}{6} v^{-2/3} dv = \frac{1}{6} \int_1^{27} v^{1/3} dv$$

$$E[V] = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4} v^{4/3} \Big|_1^{27} = \frac{1}{8}(27^{4/3} - 1^{4/3}) = \frac{1}{8}(81 - 1) = \frac{80}{8} = 10$$

3. **Математическое ожидание квадрата:**

$$E[V^2] = \int_{-\infty}^{\infty} v^2 f_V(v)dv = \int_1^{27} v^2 \cdot \frac{1}{6} v^{-2/3} dv = \frac{1}{6} \int_1^{27} v^{4/3} dv$$

$$E[V^2] = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{7} v^{7/3} \Big|_1^{27} = \frac{1}{14}(27^{7/3} - 1^{7/3}) = \frac{1}{14}(2187 - 1) = \frac{2186}{14} = 156.1429$$

4. **Дисперсия:**

$$D[V] = E[V^2] - (E[V])^2 = 156.1429 - 100 = 56.1429$$

5. **Среднее квадратическое отклонение:**

$$\sigma_V = \sqrt{D[V]} = \sqrt{56.1429} \approx 7.49$$

Конкретные вероятности

- **Вероятность того, что объём меньше 8:**

$$P(V < 8) = F_V(8) = \frac{8^{1/3} - 1}{2} = \frac{2 - 1}{2} = 0.5$$

- **Вероятность того, что объём между 1 и 8:**

$$P(1 \le V \le 8) = F_V(8) - F_V(1) = 0.5 - 0 = 0.5$$

- **Вероятность того, что объём больше 15:**

$$P(V > 15) = 1 - F_V(15) = 1 - \frac{15^{1/3} - 1}{2} = 1 - \frac{2.466 - 1}{2} = 1 - 0.733 = 0.267$$

Ответ

- Функция распределения:

$$F_V(v) = \begin{cases} 0, & v < 1 \\ \dfrac{v^{1/3} - 1}{2}, & 1 \le v \le 27 \\ 1, & v > 27 \end{cases}$$

- Плотность распределения:

$$f_V(v) = \begin{cases} \dfrac{1}{6} v^{-2/3}, & 1 \le v \le 27 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

- Математическое ожидание: $E[V] = 10$
- Дисперсия: $D[V] \approx 56.14$
- Среднее квадратическое отклонение: $\sigma_V \approx 7.49$

Сторона квадрата

На отрезке $[4, 9]$ наудачу выбирается точка. Случайная величина a определяется как длина стороны квадрата площади, равной координате выбранной точки.

1. Постройте вероятностное пространство для координаты выбранной точки
2. Определите случайную величину - длину стороны квадрата
3. Найдите функцию распределения и плотность распределения длины стороны
4. Постройте графики функции распределения и плотности
5. Найдите математическое ожидание и дисперсию длины стороны

Решение

1. **Построение вероятностного пространства**

   (a) **Пространство элементарных исходов (Ω):**
   $\Omega = [4, 9]$ - все возможные координаты выбранной точки.

   (b) **Сигма-алгебра ($\mathcal{F}$):**
   Борелевская σ-алгебра на отрезке $[4, 9]$.

   (c) **Вероятностная мера (P):**
   Так как точка выбирается равномерно:

   $$P(A) = \frac{\mu(A)}{5}, \quad \text{где } \mu(A) \text{ - длина множества } A$$

   Длина отрезка: $9 - 4 = 5$.
   Например, вероятность того, что точка попадёт в $[4, 6]$:

   $$P([4, 6]) = \frac{6-4}{5} = \frac{2}{5} = 0.4$$

2. **Определение случайной величины**

   Пусть X - координата выбранной точки, $X \in [4, 9]$.

   Площадь квадрата равна X, поэтому сторона квадрата:

   $$a = \sqrt{X}$$

3. **Функция распределения и плотность**

   (a) **Функция распределения $F_a(t)$:**
   Найдём вероятность того, что длина стороны не превышает t:

$$F_a(t) = P(a \leq t) = P(\sqrt{X} \leq t) = P(X \leq t^2)$$

   Так как X равномерно распределена на $[4, 9]$, то:

$$P(X \leq x) = \frac{x-4}{5}, \quad 4 \leq x \leq 9$$

   Подставляя $x = t^2$, получаем:

$$F_a(t) = \frac{t^2-4}{5}, \quad 2 \leq t \leq 3$$

   Таким образом:

$$F_a(t) = \begin{cases} 0, & t < 2 \\ \dfrac{t^2-4}{5}, & 2 \leq t \leq 3 \\ 1, & t > 3 \end{cases}$$

   (b) **Плотность распределения $f_a(t)$:**
   Плотность - производная функции распределения:

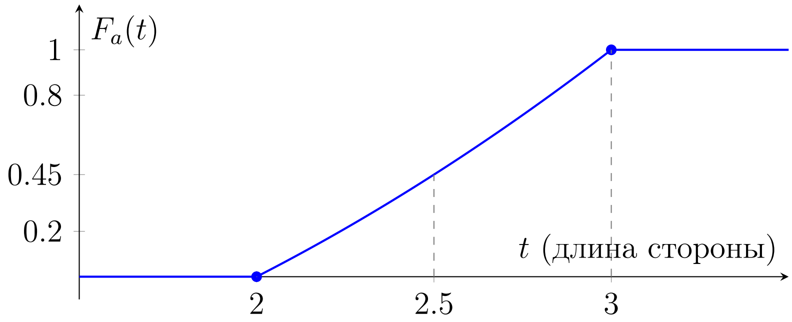
$$f_a(t) = F_a'(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{t^2-4}{5}\right) = \frac{2t}{5}$$

   Таким образом:

$$f_a(t) = \begin{cases} \dfrac{2t}{5}, & 2 \leq t \leq 3 \\ 0, & t < 2 \text{ или } t > 3 \end{cases}$$

4. **Графики**

Функция распределения длины стороны



Плотность распределения длины стороны

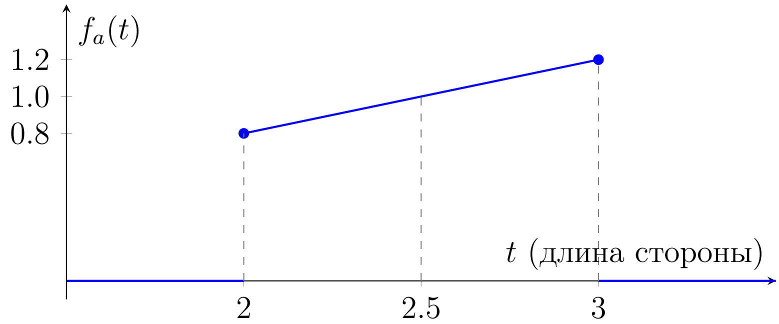


Рис. 3: Распределение длины стороны квадрата

Проверка и вычисление характеристик

1. **Проверка нормировки плотности:**

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_a(t)dt = \int_2^3 \frac{2t}{5}dt = \frac{2}{5} \cdot \frac{t^2}{2}\bigg|_2^3 = \frac{1}{5}(9-4) = \frac{5}{5} = 1$$

2. **Математическое ожидание:**

$$E[a] = \int_{-\infty}^{\infty} t f_a(t)dt = \int_2^3 t \cdot \frac{2t}{5}dt = \frac{2}{5}\int_2^3 t^2 dt$$

$$E[a] = \frac{2}{5} \cdot \frac{t^3}{3}\bigg|_2^3 = \frac{2}{15}(27-8) = \frac{2}{15} \cdot 19 = \frac{38}{15} \approx 2.533$$

3. **Математическое ожидание квадрата:**

$$E[a^2] = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 f_a(t)dt = \int_2^3 t^2 \cdot \frac{2t}{5}dt = \frac{2}{5}\int_2^3 t^3 dt$$

$$E[a^2] = \frac{2}{5} \cdot \frac{t^4}{4}\Big|_2^3 = \frac{1}{10}(81 - 16) = \frac{65}{10} = 6.5$$

4. **Дисперсия:**

$$D[a] = E[a^2] - (E[a])^2 = 6.5 - \left(\frac{38}{15}\right)^2 = 6.5 - \frac{1444}{225} = \frac{1462.5}{225} - \frac{1444}{225} = \frac{18.5}{225} \approx 0.0822$$

5. **Среднее квадратическое отклонение:**

$$\sigma_a = \sqrt{D[a]} = \sqrt{0.0822} \approx 0.2868$$

Конкретные вероятности

- **Вероятность того, что сторона меньше 2.5:**

$$P(a < 2.5) = F_a(2.5) = \frac{2.5^2 - 4}{5} = \frac{6.25 - 4}{5} = \frac{2.25}{5} = 0.45$$

- **Вероятность того, что сторона между 2.2 и 2.8:**

$$P(2.2 \le a \le 2.8) = F_a(2.8) - F_a(2.2) = \frac{7.84 - 4}{5} - \frac{4.84 - 4}{5} = \frac{3.84}{5} - \frac{0.84}{5} = \frac{3.0}{5} = 0.6$$

- **Вероятность того, что сторона больше 2.7:**

$$P(a > 2.7) = 1 - F_a(2.7) = 1 - \frac{7.29 - 4}{5} = 1 - \frac{3.29}{5} = 1 - 0.658 = 0.342$$

Интерпретация результатов

- Длина стороны изменяется от 2 до 3
- Плотность распределения линейно возрастает от $\frac{4}{5} = 0.8$ до $\frac{6}{5} = 1.2$
- Средняя длина стороны составляет $\frac{38}{15} \approx 2.533$
- Вероятность получить сторону меньше средней (2.533) равна:

$$P(a < 2.533) = \frac{2.533^2 - 4}{5} = \frac{6.416 - 4}{5} = \frac{2.416}{5} = 0.4832$$

Ответ

- Функция распределения:

$$F_a(t) = \begin{cases} 0, & t < 2 \\ \dfrac{t^2 - 4}{5}, & 2 \le t \le 3 \\ 1, & t > 3 \end{cases}$$

- Плотность распределения:

$$f_a(t) = \begin{cases} \dfrac{2t}{5}, & 2 \le t \le 3 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

- Математическое ожидание: $E[a] = \dfrac{38}{15} \approx 2.533$
- Дисперсия: $D[a] \approx 0.0822$
- Среднее квадратическое отклонение: $\sigma_a \approx 0.2868$