Лекция 8

Дисперсия случайной величины и её свойства. Условное математическое ожидание.

Дисперсией случайной величины X называется число

$$DX = M\left\{(X - MX)^2\right\}, \tag{1}$$

если математическое ожидание справа существует.

- Если X — дискретная случайная величина:

X	x_1	x_2	$\dots$
P	p_1	p_2	$\dots$

  то из (1) получаем:

  $$DX = \sum_i (x_i - MX)^2 p_i.$$

- Если X — непрерывная случайная величина с плотностью $f(x)$, то из (1) получаем:

  $$DX = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - MX)^2 f(x)\,dx.$$

Свойства дисперсии

1. Прибавление константы к случайной величине не меняет её дисперсии:
   $$D(X + \mathrm{const}) = DX.$$

2. Постоянный множитель выносится из-под знака дисперсии в квадрате:
   $$D(\mathrm{const} \cdot X) = (\mathrm{const})^2 \cdot DX.$$

3. Если $X_1, X_2, \dots, X_n$ — независимые случайные величины, имеющие дисперсии $DX_1, DX_2, \dots, DX_n$, то

   $$D(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = DX_1 + DX_2 + \ldots + DX_n.$$

4. $DX = M[X^2] - (MX)^2$.

Дисперсии основных дискретных распределений

1. Пусть X имеет биномиальное распределение с параметрами n и p:

X	0	1	$\ldots$	k	$\ldots$	n
P	q^n	npq^{n-1}	$\ldots$	$C_n^k p^k q^{n-k}$	$\ldots$	p^n

тогда

$$DX = npq, \quad \text{где } q = 1 - p.$$

2. Пусть X имеет геометрическое распределение с параметром p:

X	1	2	$\ldots$	k	$\ldots$
P	p	qp	$\ldots$	$q^{k-1}p$	$\ldots$

тогда

$$DX = \frac{q}{p^2}, \quad \text{где } q = 1 - p.$$

3. Пусть X имеет распределение Пуассона с параметром λ:

X	0	1	$\ldots$	k	$\ldots$
P	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\ldots$	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	$\ldots$

тогда

$$DX = \lambda.$$

Дисперсии основных непрерывных распределений

4. Если X определяется плотностью

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \quad \text{(равномерное распределение на отрезке)} \\ 0, & x \notin [a,b] \end{cases}$$

тогда

$$DX = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

5. Если X определяется плотностью

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \quad \text{(показательное распределение)} \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

тогда

$$DX = \frac{1}{\lambda^2}.$$

6. Если X определяется плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in (-\infty; +\infty) \quad \text{(нормальное распределение)},$$

тогда

$$DX = \sigma^2.$$

Условное математическое ожидание

Пусть X — дискретная случайная величина, определяемая:

X	x_1	x_2	$\dots$
P	p_1	p_2	$\dots$

Пусть A — некоторое событие (относящееся к тому же вероятностному пространству, что и случайная величина X). *Условным математическим ожиданием* случайной величины X при условии, что произошло событие A, называется число

$$M[X \mid A] = \sum_i x_i \cdot P\{X = x_i \mid A\},$$

если ряд справа сходится абсолютно (если X — случайная величина с конечным спектром, то справа будет конечная сумма и вопрос о сходимости отпадает).

Пусть $H_1, H_2, \dots, H_n$ — полная группа событий. Тогда по формуле полной вероятности:

$$P\{X = x_i\} = \sum_{j=1}^{n} P\{X = x_i \mid H_j\} \cdot P\{H_j\}.$$

Тогда:

$$MX = \sum_i x_i P\{X = x_i\} = \sum_i x_i \sum_{j=1}^{n} P\{X = x_i \mid H_j\} P\{H_j\} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_i x_i P\{X = x_i \mid H_j\} \right) P\{H_j\} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} P\{H_j\} \left(\sum_i x_i P\{X = x_i \mid H_j\} \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} P\{H_j\} \cdot M[X \mid H_j].$$

Таким образом,

$$MX = \sum_{j=1}^{n} M[X \mid H_j] \cdot P\{H_j\}. \tag{2}$$

Этот результат можно рассматривать как аналог формулы полной вероятности для математического ожидания.

Если X — непрерывная случайная величина с плотностью $f(x)$, то

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx,$$

а условное математическое ожидание $M[X \mid A]$ определяется по формуле:

$$M[X \mid A] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x \mid A)\, dx,$$

где условная плотность $f(x \mid A)$ определяется как:

$$f(x \mid A) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P\{x \le X < x + \Delta x \mid A\}}{\Delta x}.$$

При этом результат (2) сохраняет свою силу.

Пример

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин, $MX_i = m$, $DX_i = \delta^2$. Случайная величина Y не зависит от $X_1, X_2, \ldots$ и принимает только натуральные значения, $MY = b$, $DY = d$. Пусть

$$Z = \sum_{i=1}^{Y} X_i.$$

Найти MZ и DZ.

Решение. События $H_j = \{Y = j\}$, $j = 1, 2, \ldots$, образуют полную группу событий. Поэтому по формуле (2):

$$MZ = \sum_{j} M[Z \mid H_j] \cdot P\{H_j\}.$$

Найдём:

$$M[Z \mid H_j] = M\left[\sum_{i=1}^{j} X_i\right] = MX_1 + MX_2 + \ldots + MX_j = m \cdot j.$$

Тогда:

$$MZ = \sum_j m \cdot j \cdot P\{H_j\} = m \cdot \sum_j j \cdot P\{Y = j\} = m \cdot b.$$

Далее, $DZ = M[Z^2] - (MZ)^2 = M[Z^2] - m^2 b^2$. Найдём $M[Z^2]$:

$$\begin{aligned}
M[Z^2] &= \sum_j M[Z^2 \mid Y = j] \cdot P\{Y = j\} \\
&= \sum_j M\left[\left(\sum_{i=1}^{j} X_i\right)^2\right] \cdot P\{Y = j\} \\
&= \sum_j M\left[X_1^2 + \ldots + X_j^2 + 2\sum_{k<l} X_k X_l\right] \cdot P\{Y = j\} \\
&= \sum_j \left(j \cdot M[X_1^2] + 2 \cdot \frac{j(j-1)}{2} \cdot (MX_1)^2\right) \cdot P\{Y = j\} \\
&= \sum_j \big(j(m^2 + \delta^2) + m^2(j^2 - j)\big) \cdot P\{Y = j\} \\
&= \sum_j \big(j\delta^2 + m^2 j^2\big) \cdot P\{Y = j\} \\
&= \delta^2 \sum_j jP\{Y = j\} + m^2 \sum_j j^2 P\{Y = j\} \\
&= \delta^2 \cdot b + m^2(d + b^2).
\end{aligned}$$

Значит,

$$\begin{aligned}
DZ &= \delta^2 b + m^2(d + b^2) - m^2 b^2 \\
&= b\delta^2 + m^2 d.
\end{aligned}$$