Сводка определений и теорем по теории вероятностей

Комбинаторика

Размещения — число способов выбрать k элементов из n различных элементов с учётом порядка:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Перестановки — число способов расположить n различных элементов в ряд:

$$P_n = n!$$

Сочетания — число способов выбрать k элементов из n различных элементов без учёта порядка:

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Беспорядки (число беспорядков) — число перестановок n элементов, в которых ни один элемент не остаётся на своём месте:

$$!n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

Основные понятия теории вероятностей

Вероятностное пространство — тройка $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, где:

- Ω — пространство элементарных исходов
- $\mathcal{F}$ — σ-алгебра подмножеств Ω
- P — вероятностная мера, удовлетворяющая аксиомам Колмогорова

σ-алгебра — система $\mathcal{F}$ подмножеств Ω называется σ-алгеброй, если:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. Если $A \in \mathcal{F}$, то $\overline{A} \in \mathcal{F}$
3. Если $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$, то $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Борелевская σ-алгебра $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ — это наименьшая σ-алгебра, содержащая все открытые множества на прямой.

Мера Лебега — стандартный способ присвоения длины, площади, объема подмножествам евклидова пространства.

Случайная величина — функция $X : \Omega \to \mathbb{R}$, измеримая относительно σ-алгебры $\mathcal{F}$.

Измеримая функция — функция $f : \Omega \to \mathbb{R}$ называется измеримой, если для любого борелевского множества $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ прообраз $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$.

Теорема 1 *Формула включений-исключений*
Для любых событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$:

$$\mathsf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(A_i) - \sum_{1\le i<j\le n} \mathsf{P}(A_i \cap A_j) + \cdots + (-1)^{n+1}\mathsf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$$

Частные случаи:

- *Для двух событий:* $\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A \cap B)$
- *Для трёх событий:* $\mathsf{P}(A \cup B \cup C) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) + \mathsf{P}(C) - \mathsf{P}(A \cap B) - \mathsf{P}(A \cap C) - \mathsf{P}(B \cap C) + \mathsf{P}(A \cap B \cap C)$

Условная вероятность и независимость

Условная вероятность события A при условии B ($\mathsf{P}(B) > 0$):

$$\mathsf{P}(A|B) = \frac{\mathsf{P}(A \cap B)}{\mathsf{P}(B)}$$

Независимость событий — события A и B независимы, если:

$$\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A) \cdot \mathsf{P}(B)$$

Теорема 2 *Формула полной вероятности*
Если $H_1, H_2, \ldots, H_n$ — полная группа несовместных событий, то:

$$\mathsf{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(H_i) \cdot \mathsf{P}(A|H_i)$$

Теорема 3 *Формула Байеса*

$$\mathsf{P}(H_i|A) = \frac{\mathsf{P}(H_i) \cdot \mathsf{P}(A|H_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} \mathsf{P}(H_j) \cdot \mathsf{P}(A|H_j)}$$

Схема Бернулли

Схема Бернулли — последовательность n независимых испытаний с двумя исходами (успех/неудача) и постоянной вероятностью успеха p в каждом испытании.

Теорема 4 *Формула Бернулли*
Вероятность k успехов в n испытаниях Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

Теорема 5 *Наиболее вероятное число успехов*
Наиболее вероятное число успехов k^* удовлетворяет:

$$np - (1-p) \le k^* \le np + p$$

Теорема 6 *Локальная теорема Муавра-Лапласа*
Если n велико, p не слишком близко к 0 или 1, и $|k-np| = O(\sqrt{npq})$, то:

$$P_n(k) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left(-\frac{(k-np)^2}{2npq}\right)$$

Условия применения:

- $n \geq 100$
- $npq \geq 20$
- $0.1 \leq p \leq 0.9$

Теорема 7 *Интегральная теорема Муавра-Лапласа*

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\alpha \leq \frac{k-np}{\sqrt{npq}} \leq \beta\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_\alpha^\beta e^{-x^2/2}dx = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha)$$

где $\Phi(x)$ — функция Лапласа.

Случайные величины и распределения

Функция распределения случайной величины X:

$$F(x) = \mathsf{P}(X < x) = \mathsf{P}\{\omega : \omega \in \Omega \text{ и } X(\omega) < x\}$$

Утверждение 1 *Свойства функции распределения*

- $F(x)$ *— неубывающая*
- $F(x)$ *— непрерывна слева*
- $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$
- $\mathsf{P}(x_1 \leq X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$

Плотность распределения — если существует $f(x) \geq 0$ такая, что:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$$

то $f(x)$ называется плотностью распределения. В точках дифференцируемости:

$$f(x) = F'(x)$$

Свойство 1 *Преобразование случайных величин*
Если X имеет непрерывную строго возрастающую функцию распределения $F_X(x)$, то $Y = F_X(X) \sim U[0,1]$.

Теорема 8 *Плотность линейного преобразования*
Если X имеет плотность $f(x)$, то $Y = aX + b$ ($a \neq 0$) имеет плотность:

$$g(y) = \frac{1}{|a|} \cdot f\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

Теорема 9 *Плотность функции от случайной величины*
Если X имеет плотность $f_X(x)$, $Y = g(X)$, где g — монотонно возрастающая дифференцируемая функция, то:

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \cdot \left|\frac{d}{dy} g^{-1}(y)\right|$$

Распределение	**Вероятность/Плотность**	$M[\mathbf{X}]$	$D[\mathbf{X}]$
Бернулли	$\mathsf{P}(X = k) = p^k (1-p)^{1-k}$	p	$p(1-p)$
Биномиальное	$\mathsf{P}(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Пуассона	$\mathsf{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	λ	λ
Геометрическое	$\mathsf{P}(X = k) = (1-p)^{k-1} p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Равномерное	$f(x) = \frac{1}{b-a},\ x \in [a, b]$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Показательное	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x},\ x \geq 0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Нормальное	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2
Коши	$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$	не сущ.	не сущ.

Таблица 1: Основные распределения и их характеристики

Математическое ожидание и дисперсия

Математическое ожидание — в общем виде (интеграл Лебега):

$$M[X] = \int_\Omega X(\omega) dP(\omega)$$

Для дискретной случайной величины:

$$M[X] = \sum_i x_i p_i$$

Для непрерывной случайной величины:

$$M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

Утверждение 2 *Свойства математического ожидания*

1. $M[cX] = cM[X]$
2. $M[X + Y] = M[X] + M[Y]$

3. *Если X и Y независимы, то $M[XY] = M[X]\,M[Y]$*

4. $M[\varphi(X)] = \sum_i \varphi(x_i)p_i$ *(дискретный случай)*

5. $M[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)f(x)dx$ *(непрерывный случай)*

Дисперсия:
$$D[X] = M\left[(X - M[X])^2\right] = M\left[X^2\right] - (M[X])^2$$

Свойство 2 *Сумма случайного числа случайных величин*
Если $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$, где X_i — независимые одинаково распределенные случайные величины, не зависящие от N, то:

$$M[S] = M[N]\cdot M[X_1], \quad D[S] = M[N]\cdot D[X_1] + D[N]\cdot (M[X_1])^2$$

Системы случайных величин

Функция распределения системы случайных величин $(X_1, \ldots, X_n)$:

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \mathsf{P}(X_1 < x_1, \ldots, X_n < x_n)$$

Независимость случайных величин — случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ независимы, если:
$$F(x_1, \ldots, x_n) = F_{X_1}(x_1)\cdots F_{X_n}(x_n)$$
или для плотностей:
$$f(x_1, \ldots, x_n) = f_{X_1}(x_1)\cdots f_{X_n}(x_n)$$

Пример 1 *Некоррелированность не влечёт независимость*
Пусть $X \sim N(0, \sigma^2)$ и $Y = X^2$. Тогда $Cov(X, Y) = 0$, но X и Y зависимы.

Ковариация:

$$Cov(X, Y) = M[(X - M[X])(Y - M[Y])] = M[XY] - M[X]\,M[Y]$$

Коэффициент корреляции:

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{D[X]\,D[Y]}}$$

Утверждение 3 *Свойства коэффициента корреляции*

1. $|\rho_{XY}| \leq 1$

2. *Если $Y = aX + b$, $a \neq 0$, то $\rho_{XY} = sign(a)$*

3. *Если X и Y независимы, то $\rho_{XY} = 0$*

Условное математическое ожидание

Условное математическое ожидание — в общем виде:

$$M\left[X|Y\right] = \varphi(Y), \quad \text{где } \varphi(y) = M\left[X|Y=y\right]$$

Для дискретной случайной величины:

$$M\left[X|Y=y\right] = \sum_{x} x \cdot \mathsf{P}(X=x|Y=y)$$

Для непрерывной случайной величины:

$$M\left[X|Y=y\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|Y}(x|y)dx$$

Теорема 10 *Формула полного математического ожидания*
Если $H_1, \ldots, H_n$ — полная группа событий, то:

$$M\left[X\right] = \sum_{j=1}^{n} M\left[X|H_j\right] P(H_j)$$

В общем виде:

$$M\left[X\right] = M\left[M\left[X|Y\right]\right]$$

Закон больших чисел

Сходимость по вероятности — $X_n \xrightarrow{P} X$, если $\forall \varepsilon > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$$

Теорема 11 *Неравенство Чебышёва*
Для любой случайной величины X с конечной дисперсией и любого $\varepsilon > 0$:

$$\mathsf{P}(|X - M\left[X\right]| \geq \varepsilon) \leq \frac{D\left[X\right]}{\varepsilon^2}$$

Теорема 12 *Правило трёх сигм*
Для любой случайной величины X с конечной дисперсией:

$$\mathsf{P}(|X - M\left[X\right]| < 3\sigma_X) \geq \frac{8}{9}$$

где $\sigma_X = \sqrt{D\left[X\right]}$.

Теорема 13 *Закон больших чисел Чебышёва*
Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — независимые случайные величины с $D\left[X_i\right] \leq C$. Тогда:

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M\left[X_i\right]\right| < \varepsilon\right) = 1$$

Теорема 14 *Теорема Бернулли*
Пусть m — число успехов в n испытаниях Бернулли. Тогда:

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1$$

Центральная предельная теорема

Сходимость по распределению — $X_n \xrightarrow{d} X$, если для всех точек непрерывности x функции $F_X(x)$:

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$

Теорема 15 *ЦПТ для независимых одинаково распределенных величин*
Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с $M[X_i] = \mu$ и $D[X_i] = \sigma^2 < \infty$. Тогда:

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

Теорема 16 *ЦПТ Ляпунова*
Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — независимые случайные величины с $M[X_i] = \mu_i$, $D[X_i] = \sigma_i^2$, $s_n^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$.

Условие Ляпунова: *существует $\delta > 0$ такое, что*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n^{2+\delta}} \sum_{i=1}^n M\left[|X_i - \mu_i|^{2+\delta}\right] = 0$$

Если условие Ляпунова выполнено, то:

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^n \mu_i}{s_n} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

Теорема 17 *Общее неравенство Чебышёва*
Пусть Y — случайная величина такая, что $M\left[|Y|^k\right] < \infty$, где $k > 0$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$:

$$\mathsf{P}\{|Y| \geq \varepsilon\} \leq \frac{M\left[|Y|^k\right]}{\varepsilon^k}$$

Дополнение из лекции 10

Теорема 18 (Общее неравенство Чебышёва) *Пусть Y — случайная величина такая, что $M\left[|Y|^k\right] < \infty$, где $k > 0$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$:*

$$\mathsf{P}\{|Y| \geq \varepsilon\} \leq \frac{M\left[|Y|^k\right]}{\varepsilon^k}$$

Теорема 19 (Теорема Чебышёва) *Пусть имеется бесконечная последовательность $X_1, X_2, \ldots$ независимых случайных величин таких, что:*

$$M[X_1] = M[X_2] = \cdots = m, \quad D[X_1] \leq C, D[X_2] \leq C, \ldots$$

где $C > 0$ и m — постоянные. Тогда $\forall \varepsilon > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left\{\left|\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - m\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

Теорема 20 (Теорема Бернулли) *Пусть k — число успехов в серии из n независимых испытаний с вероятностью успеха p в одном испытании. Тогда $\forall \varepsilon > 0$:*

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left\{\left|\frac{k}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

Теорема 21 (Центральная предельная теорема Ляпунова) *Пусть последовательность $X_1, X_2, \ldots$ независимых случайных величин удовлетворяет условию Ляпунова:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} h_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} d_i\right)^{3/2}} = 0$$

где $d_i = D\left[X_i\right]$, $h_i = M\left[\left|X_i - M\left[X_i\right]\right|^3\right]$. Тогда:

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left\{\alpha \leq \frac{X^n - M\left[X^n\right]}{\sqrt{D\left[X^n\right]}} \leq \beta\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-x^2/2} dx$$

где $X^n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

Утверждение 4 *Если все случайные величины $X_1, X_2, \ldots$ имеют одно и то же распределение, то условие Ляпунова выполняется.*