Лекция 13

Характеристическая функция случайной величины

<u>Определение</u> Характеристической функцией СВ X называется комплекснозначная функция действительной переменной t

$$f_X(t) = M\{e^{itX}\}.$$

Характерист. функция обладает следующими свойствами.

1. $f_X(0) = 1$.

2. $|f_X(t)| \leq 1$.

3. Функция $f_X(t)$ непрерывна при $t \in (-\infty; +\infty)$.

4. Если $f_X(t)$ – характерист. функция случайной величины X и $Y = aX + b$, то

$$f_Y(t) = e^{itb} f_X(at).$$

5. Если $X_1, \ldots, X_n$ – независимые СВ с характерист. функциями $f_{X_1}(t), \ldots, f_{X_n}(t)$, то характерист. функция суммы

$$X = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

равна произведению характерист. функций слагаемых:

$$f_X(t) = \prod_{k=1}^{n} f_{X_k}(t).$$

6. По характеристической функции однозначно определяется закон распределение случайной величины.

Пример. Пусть X – целочисленная СВ и $f_X(t)$ – её характерист. функция. Тогда

X	…	-2	-1	0	1	2	…
P	…	p_{-2}	p_{-1}	p_0	p_1	p_2	… ,

$p_m = P\{X=m\}$, $m = \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$, и

$$f_X(t) = M\{e^{itX}\} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{itm} \cdot P\{X=m\}$$

Умножая обе части равенства на $\frac{e^{-itk}}{2\pi}$ и интегрируя в промежутке $(-\pi, \pi)$ по t, получим

$$(*) \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-itk} f_X(t)\,dt = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-it(m-k)} \cdot P\{X=m\}\,dt .$$

Непосредственно проверяется, что если l – целое число, то

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{itl}\,dt = \begin{cases} 1, & l=0, \\ 0, & l\neq 0. \end{cases}$$

Поэтому из $(*)$ получаем

$$P\{X=k\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-itk} f_X(t)\,dt .$$

Полученное равенство называется формулой обращения (позволяющей по характеристической функции определить закон распределения случайной величины).

Если рассматривается непрерывная СВ X с плотностью $\not{f}$ $\rho(x)$, то

$$\rho(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-itx} f_X(t)\,dt.$$

7. Если $M\{|X|^k\}$ существует, то k-я производная характеристической функции существует, непрерывна, причем

$$f_X^{(k)}(0) = i^k M\{X^k\},$$

где $M\{X^k\}$ — начальный момент k-го порядка случайной величины X. Действительно,

$$\frac{d}{dt} f_X(t) = \frac{d}{dt} M\{e^{itX}\} = M\left\{\frac{d}{dt} e^{itX}\right\} = M\{iX \cdot e^{itX}\}$$

(воспользовались свойством переставновочности линейных операций дифференцирование и взятие математического ожидания),

откуда

$$f_X'(0) = \frac{d}{dt} f_X(t)\Big|_{t=0} = i \cdot M\{X\}.$$

Аналогично, вычисляя последующие производные, получим

$$f_X^{(k)}(0) = i^k M\{X^k\}.$$

В частности,

$$MX = \frac{1}{i} f'_X(0), \quad M\{X^2\} = -f''_X(0),$$

$$DX = M\{X^2\} - (MX)^2 = -f''_X(0) + \left(f'_X(0)\right)^2.$$

Характеристические функции некоторых распределений

1. Биномиальное $\left(P\{X=m\} = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}, \ m=0,1,\dots,n \right)$

$$f_X(t) = \sum_{m=0}^{n} e^{itm} C_n^m p^m (1-p)^{n-m} = (1-p+pe^{it})^n.$$

2. Распределение Пуассона $\left(P\{X=m\} = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \ m=0,1,2,\dots \right)$

$$f_X(t) = \sum_{m=0}^{\infty} e^{itm} e^{-\lambda} \frac{\lambda^m}{m!} = e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

3. Стандартное нормальное $\left(p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \right)$

$$f_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = e^{-t^2/2}.$$

4. Распределение Коши $\left(p(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2} \right)$

$$f_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \cdot \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2} dx = e^{-|t|}.$$

5. Нормальное $\left(p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \right)$

$$f_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = e^{ita - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}.$$

6. Равномерное на отрезке $[0,a]$ $\left(p(x)=\begin{cases}\frac{1}{a}, & 0\le x\le a\\ 0, & x\notin[0,a]\end{cases}\right)$

$$f_X(t)=\int_0^a e^{itx}\frac{1}{a}dx=\frac{e^{iat}-1}{iat}.$$

7. Равномерное на отрезке $[-a,a]$ $\left(p(x)=\begin{cases}\frac{1}{2a}, & x\in[-a,a]\\ 0, & x\notin[-a,a]\end{cases}\right)$

$$f_X(t)=\int_{-a}^a e^{itx}\cdot\frac{1}{2a}dx=\frac{\sin at}{at}.$$

Примеры использования характеристических функций

1. Пусть X и Y – независимые СВ, распределённые по закону Пуассона с параметрами λ_x и λ_y. Найдём закон распределения СВ $Z=X+Y$. Имеем:

$$f_X(t)=e^{\lambda_x(e^{it}-1)},\quad f_Y(t)=e^{\lambda_y(e^{it}-1)}.$$

В силу независимости СВ X и Y

$$f_Z(t)=f_X(t)\cdot f_Y(t)=e^{(\lambda_x+\lambda_y)(e^{it}-1)}.$$

Обозначим $\lambda_z=\lambda_x+\lambda_y$. Тогда

$$f_Z(t)=e^{\lambda_z(e^{it}-1)}.$$

Поскольку характеристическая функция однозначно определяет закон распределение СВ, что из последнего равенства следует, что СВ Z имеет распределение Пуассона с параметром λ_Z.

2. Пусть X и Y – независимые СВ, распределённые по нормальному закону:

$$\rho(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x}e^{-\frac{(x-m_x)}{2\sigma_x^2}}, \quad \rho(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_y}e^{-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}}.$$

Найдём закон распределения СВ $Z=X+Y$. Имеем:

$$f_X(t)=e^{itm_x-\frac{\sigma_x^2t^2}{2}}, \quad f_Y(t)=e^{itm_y-\frac{\sigma_y^2t^2}{2}}.$$

В силу независимости X и Y

$$f_Z(t)=f_X(t)\cdot f_Y(t)=e^{it(m_x+m_y)-\frac{(\sigma_x^2+\sigma_y^2)t^2}{2}}.$$

Следовательно, СВ Z имеет нормальное распределение с $MZ=m_x+m_y$ и $DZ=\sigma_x^2+\sigma_y^2$. Укажем здесь, что этот вывод остается в силе и в том случае, когда X и Y не являются независимыми СВ, с той лишь разницей, что в этом случае $DZ=\sigma_x^2+\sigma_y^2+2\,\mathrm{Cov}(X,Y)$.