Лекция 3

Условная вероятность.
Определение независимости событий.
Формулы полной вероятности и Байеса.

Пусть A, B - события, связанные с экспериментом $\mathcal{E}$.

$\mathcal{E} \to A, B, \ldots$

Пусть $\mathsf{P}\{B\} \neq 0$. Отношение $\frac{\mathsf{P}\{AB\}}{\mathsf{P}\{B\}}$ называется *условной вероятностью* события A при условии, что произошло B, и обозначается $\mathsf{P}\{A|B\}$:

$$\mathsf{P}\{A|B\} = \frac{\mathsf{P}\{AB\}}{\mathsf{P}\{B\}}$$

Содержательная мотивировка этого определения:

Пусть $\mathcal{E}$ может быть описан с помощью конечного числа n несовместных и равновозможных исходов, из которых исходы n_A приводят к событию A, исходы n_B - к событию B, исходы n_{AB} - к событию AB.

Предположим, что точно известно, что произошло событие B, т.е. реализовался один из исходов n_B; тогда степень ожидания того, что при этом произошло и A, естественно определить как:

$$\frac{n_{AB}}{n_B}, \quad \text{или} \quad \frac{n_{AB}/n}{n_B/n} = \frac{\mathsf{P}\{AB\}}{\mathsf{P}\{B\}}$$

Определение независимости событий

Событие A называется *независимым от* B, если $\mathsf{P}\{A|B\} = \mathsf{P}\{A\}$.

Утверждение. Пусть $\mathsf{P}\{A\} \neq 0$, $\mathsf{P}\{B\} \neq 0$. Если событие A не зависит от B, то и событие B не зависит от A.

Доказательство:

$$\text{По условию: } \mathsf{P}\{A|B\} = \mathsf{P}\{A\}$$

$$\text{По определению: } \mathsf{P}\{A|B\} = \frac{\mathsf{P}\{AB\}}{\mathsf{P}\{B\}} \Rightarrow \mathsf{P}\{AB\} = \mathsf{P}\{A\} \cdot \mathsf{P}\{B\}$$

$$\text{По определению: } \mathsf{P}\{B|A\} = \frac{\mathsf{P}\{BA\}}{\mathsf{P}\{A\}} = \frac{\mathsf{P}\{A\} \cdot \mathsf{P}\{B\}}{\mathsf{P}\{A\}} = \mathsf{P}\{B\}$$

Следствие. Для независимых событий A и B (при $\mathsf{P}\{A\} \neq 0$, $\mathsf{P}\{B\} \neq 0$)

$$\mathsf{P}\{AB\} = \mathsf{P}\{A\} \cdot \mathsf{P}\{B\}. \tag{*}$$

Заметим, что если условие $\mathsf{P}\{A\} \neq 0$, $\mathsf{P}\{B\} \neq 0$ нарушено, то равенство $(*)$ может выполниться.

Пример 1

$\mathcal{E}$ - бросание игрального кубика.

Событие A - выпало 1 очко, B - выпало чётное число очков.

$$\mathsf{P}\{A|B\} = \frac{\mathsf{P}\{AB\}}{\mathsf{P}\{B\}} = \frac{0}{1/2} = 0 \neq \mathsf{P}\{A\} = \frac{1}{6}$$

$\Rightarrow$ события A и B не являются независимыми.

Пример 2

Одновременное бросание двух игральных кубиков: кубика I и кубика II. Событие A - на кубике I выпало 1 очко, событие B - на кубике II выпало чётное число очков.

$$\mathsf{P}\{A|B\} = \frac{\mathsf{P}\{AB\}}{\mathsf{P}\{B\}} = \frac{3/36}{1/2} = \frac{1}{6}, \quad \mathsf{P}\{A\} = \frac{1}{6}$$

$\Rightarrow$ события A и B независимы.

Формула полной вероятности

Пусть событие A может осуществиться с одним и только одним из n несовместных событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$; в частности это условие выполнится если $H_1, H_2, \ldots, H_n$ - полная группа событий:

Определение. $H_1, H_2, \ldots, H_n$ - полная группа событий, если

$$H_1 + H_2 + \cdots + H_n = \Omega, \quad H_i H_j = \varnothing \ \forall i \neq j.$$

Тогда

$$A = AH_1 + AH_2 + \cdots + AH_n,$$

откуда

$$\mathsf{P}\{A\} = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}\{AH_i\},$$

или

$$\mathsf{P}\{A\} = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}\{A|H_i\} \cdot \mathsf{P}\{H_i\}$$

- *формула полной вероятности.*

Пример 3

Автомобиль марки "Субару"выпускается на трёх заводах: в Америке (завод №1), в Европе (завод №2) и в Японии (завод №3). На долю 1-го, 2-го и 3-го заводов приходится 25, 35 и 40% всех выпускаемых автомобилей. А брак в их продукции составляет соответственно 5, 4 и 2%. Какова вероятность того, что купленный в России новый автомобиль "Субару"(на котором не указан завод-изготовитель) окажется бракованным?

Решение: введём следующие события:

- A - купленный автомобиль оказался бракованным
- H_1 - купленный автомобиль изготовлен на заводе 1
- H_2 - купленный автомобиль изготовлен на заводе 2
- H_3 - купленный автомобиль изготовлен на заводе 3

Тогда H_1, H_2, H_3 - полная группа событий, так что

$$\mathsf{P}\{A\} = \mathsf{P}\{A|H_1\} \cdot \mathsf{P}\{H_1\} + \mathsf{P}\{A|H_2\} \cdot \mathsf{P}\{H_2\} + \mathsf{P}\{A|H_3\} \cdot \mathsf{P}\{H_3\}$$

Ясно, что $\mathsf{P}\{H_1\} = 0.25$, $\mathsf{P}\{H_2\} = 0.35$, $\mathsf{P}\{H_3\} = 0.4$, $\mathsf{P}\{A|H_1\} = 0.05$, $\mathsf{P}\{A|H_2\} = 0.04$, $\mathsf{P}\{A|H_3\} = 0.02$. Поэтому

$$\mathsf{P}\{A\} = 0.25 \cdot 0.05 + 0.35 \cdot 0.04 + 0.4 \cdot 0.02 = 0.0345$$

Формула Байеса

(формула апостериорных вероятностей гипотез)

Пусть A - некоторое событие, а $H_1, H_2, \dots, H_n$ - полная группа событий, связанных с экспериментом $\mathcal{E}$. Можем написать:

$$\mathsf{P}\{H_iA\} = \mathsf{P}\{A|H_i\} \cdot \mathsf{P}\{H_i\} = \mathsf{P}\{H_i|A\} \cdot \mathsf{P}\{A\}$$

следовательно

$$\mathsf{P}\{H_i|A\} = \frac{\mathsf{P}\{A|H_i\} \cdot \mathsf{P}\{H_i\}}{\mathsf{P}\{A\}}$$

или

$$\mathsf{P}\{H_i|A\} = \frac{\mathsf{P}\{A|H_i\} \cdot \mathsf{P}\{H_i\}}{\sum_{j=1}^{n} \mathsf{P}\{A|H_j\} \cdot \mathsf{P}\{H_j\}}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

- *формула Байеса.*

Формула Байеса может быть проинтерпретирована следующим образом: $H_1, H_2, \dots, H_n$ - гипотезы, приводящие к событию A, которое фактически произошло, причём к A смогла привести одна и только одна из гипотез. Тогда условную вероятность $\mathsf{P}\{H_i|A\}$ в левой части можно интерпретировать как апостериорную (т.е. считаемую после того, как факт A реализовался) вероятность гипотезы H_i.

Пример 4

Вернёмся к задаче из примера 3. Пусть купленный в России новый автомобиль Субару оказался бракованным. Найти вероятность того, что он был изготовлен: а) на заводе 1, б) на заводе 2, в) на заводе 3

Решение: В обозначениях примера 3 по формуле Байеса имеем

а) $\mathsf{P}\{H_1|A\} = \dfrac{\mathsf{P}\{A|H_1\} \cdot \mathsf{P}\{H_1\}}{\sum_{j=1}^{3} \mathsf{P}\{A|H_j\} \cdot \mathsf{P}\{H_j\}} = \dfrac{0.05 \cdot 0.25}{0.0345} = \dfrac{25}{69}$

б) $\mathsf{P}\{H_2|A\} = \dfrac{\mathsf{P}\{A|H_2\} \cdot \mathsf{P}\{H_2\}}{\sum_{j=1}^{3} \mathsf{P}\{A|H_j\} \cdot \mathsf{P}\{H_j\}} = \dfrac{28}{69}$

в) $\mathsf{P}\{H_3|A\} = \dfrac{\mathsf{P}\{A|H_3\} \cdot \mathsf{P}\{H_3\}}{\sum_{j=1}^{3} \mathsf{P}\{A|H_j\} \cdot \mathsf{P}\{H_j\}} = \dfrac{16}{69}$

Задача об игре двух лиц

Два игрока I и II ведут некоторую игру, состоящую из отдельных партий, до полного разорения одного из них. Начальный капитал I-го игрока a руб, II-го - b руб. Вероятность выигрыша каждой партии для I игрока равна p, для II - q, причём ничьи невозможны. В каждой партии выигрыш одного игрока (а значит, проигрыш другого) равен 1 руб. Под разорением игрока понимается момент, когда капитал игрока становится равным нулю. Найти вероятность разорения каждого из игроков.

Решение:

Пусть P_n - вероятность разорения игрока I, когда он имеет n руб. Заметим, что $P_0 = 1$, $P_{a+b} = 0$.

Пусть событие A_n - первый игрок разорится при исходном капитале n; событие H - игрок I выиграл очередную партию. Тогда

$$\mathsf{P}\{A_n\} = \mathsf{P}\{A_n|H\} \cdot \mathsf{P}\{H\} + \mathsf{P}\{A_n|\overline{H}\} \cdot \mathsf{P}\{\overline{H}\}$$

$$P_n = pP_{n+1} + qP_{n-1} \tag{2}$$

или

$$P_{n+1} - P_n = \frac{q}{p}(P_n - P_{n-1}), \quad \text{где } i = 1, 2, \ldots, a+b-1$$

Соотношения (1) и (2) приводят к результату:

При $p \neq q$:

$$P_n = \frac{(q/p)^{a+b} - (q/p)^n}{(q/p)^{a+b} - 1}$$

При $p = q = \frac{1}{2}$:

$$P_n = 1 - \frac{n}{a+b}$$

Таким образом, вероятность разорения игрока I (т.е. P_n при $n = a$) есть:

$$P_a = \begin{cases} \dfrac{1-(p/q)^b}{1-(p/q)^{a+b}}, & \text{при } p \neq q \\ \dfrac{b}{a+b}, & \text{при } p = q = \frac{1}{2} \end{cases} \tag{4}$$

Отметим некоторые содержательные моменты:

1. Если игроки одинаковы по силе ($p = q = \frac{1}{2}$), и a много больше b ($a \gg b$), то
$$P_a = \frac{b}{a+b} \approx 0$$
- разорение игрока I практически невозможно.

2. Если через Q_b обозначить вероятность разорения игрока II, то (в силу симметрии задачи) при $p \neq q$

$$Q_b = \frac{1 - (q/p)^a}{1 - (q/p)^{a+b}} \tag{5}$$

3. Пусть $p > q$, т.е. игрок I сильнее игрока II, но $b \gg a$, т.е. начальный капитал игрока I значительно ниже. Тогда из (4) и (5) получим следующую асимптотику (формально полагая $b \to \infty$):

$$P_a \sim (q/p)^a, \quad Q_b \sim 1 - (q/p)^a,$$

так что при определенном соотношении параметров p, q и a, а именно

$$(q/p)^a < 1 - (q/p)^a \quad \text{или} \quad 2(q/p)^a < 1,$$

умелый игрок даже с малым капиталом будет иметь меньше шансов на разорение, чем игрок с очень большим капиталом, но менее умелый.