Задача 1

Условие: Случайная величина N принимает значения 1, 2, 3 с вероятностями 0.5, 0.3 и 0.2 соответственно. Случайные величины X_i независимы между собой и от N, равномерно распределены на отрезке $[3, 5]$. Рассмотрим сумму:

$$E = \sum_{i=1}^{N} X_i.$$

Найти $M[E]$ и $D[E]$.

Решение:

Используем формулы для математического ожидания и дисперсии случайной суммы:

$$\begin{aligned} M[E] &= M[N] \cdot M[X_1] \\ D[E] &= M[N] \cdot D[X_1] + D[N] \cdot (M[X_1])^2 \end{aligned}$$

Вычислим необходимые характеристики:

Для $X_i \sim U[3, 5]$:

$$\begin{aligned} M[X_1] &= \frac{3+5}{2} = 4 \\ D[X_1] &= \frac{(5-3)^2}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Для N:

$$\begin{aligned} M[N] &= 1 \cdot 0.5 + 2 \cdot 0.3 + 3 \cdot 0.2 = 0.5 + 0.6 + 0.6 = 1.7 \\ M\left[N^2\right] &= 1^2 \cdot 0.5 + 2^2 \cdot 0.3 + 3^2 \cdot 0.2 = 0.5 + 1.2 + 1.8 = 3.5 \\ D[N] &= M\left[N^2\right] - (M[N])^2 = 3.5 - (1.7)^2 = 3.5 - 2.89 = 0.61 \end{aligned}$$

Подставляем в формулы:

$$\begin{aligned} M[E] &= 1.7 \cdot 4 = 6.8 \\ D[E] &= 1.7 \cdot \frac{1}{3} + 0.61 \cdot 4^2 = \frac{1.7}{3} + 0.61 \cdot 16 \\ &= 0.5667 + 9.76 = 10.3267 \end{aligned}$$

В дробях:

$$
\begin{aligned}
M\left[E\right] &= \frac{17}{10}\cdot 4 = \frac{68}{10} = \frac{34}{5}\\
D\left[E\right] &= \frac{17}{10}\cdot\frac{1}{3} + \frac{61}{100}\cdot 16 = \frac{17}{30} + \frac{976}{100}\\
&= \frac{17}{30} + \frac{244}{25} = \frac{85}{150} + \frac{1464}{150} = \frac{1549}{150}
\end{aligned}
$$

Решение по образцу примера из лекции.

События $H_j = \{N = j\}$, $j = 1, 2, 3$, образуют полную группу событий. Поэтому по формуле полного математического ожидания:

$$M\left[E\right] = \sum_{j=1}^{3} M\left[E \mid H_j\right]\cdot P\{H_j\}.$$

Найдём:

$$M\left[E \mid H_j\right] = M\left[\sum_{i=1}^{j} X_i\right] = \sum_{i=1}^{j} M\left[X_i\right] = j\cdot M\left[X_1\right] = j\cdot\frac{3+5}{2} = j\cdot 4.$$

Тогда:

$$M\left[E\right] = \sum_{j=1}^{3} 4j\cdot P\{H_j\} = 4\cdot\sum_{j=1}^{3} j\cdot P\{N = j\} = 4\cdot M\left[N\right].$$

Вычислим $M\left[N\right]$:

$$M\left[N\right] = 1\cdot 0.5 + 2\cdot 0.3 + 3\cdot 0.2 = 0.5 + 0.6 + 0.6 = 1.7.$$

Следовательно:

$$M\left[E\right] = 4\cdot 1.7 = 6.8.$$

Далее, $D[E] = M[E^2] - (M[E])^2 = M[E^2] - (6.8)^2$. Найдём $M[E^2]$:

$$\begin{aligned} M\left[E^2\right] &= \sum_{j=1}^{3} M\left[E^2 \mid N=j\right] \cdot P\{N=j\} \\ &= \sum_{j=1}^{3} M\left[\left(\sum_{i=1}^{j} X_i\right)^2\right] \cdot P\{N=j\} \\ &= \sum_{j=1}^{3} M\left[\sum_{i=1}^{j} X_i^2 + 2\sum_{k<l} X_k X_l\right] \cdot P\{N=j\} \\ &= \sum_{j=1}^{3} \left(j \cdot M\left[X_1^2\right] + 2 \cdot \frac{j(j-1)}{2} \cdot (M[X_1])^2\right) \cdot P\{N=j\}. \end{aligned}$$

Вычислим $M[X_1^2]$:

$$M\left[X_1^2\right] = \int_3^5 x^2 \cdot \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]_3^5 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{125}{3} - \frac{27}{3}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{98}{3} = \frac{49}{3}.$$

Также $M[X_1] = 4$, поэтому $(M[X_1])^2 = 16$.
Тогда:

$$\begin{aligned} M\left[E^2\right] &= \sum_{j=1}^{3} \left(j \cdot \frac{49}{3} + j(j-1) \cdot 16\right) \cdot P\{N=j\} \\ &= \frac{49}{3} \sum_{j=1}^{3} jP\{N=j\} + 16 \sum_{j=1}^{3} j(j-1)P\{N=j\} \\ &= \frac{49}{3} \cdot M[N] + 16 \cdot M[N(N-1)]. \end{aligned}$$

Вычислим $M[N]$ и $M[N(N-1)]$:

$$\begin{aligned} M[N] &= 1.7 \\ M\left[N^2\right] &= 1^2 \cdot 0.5 + 2^2 \cdot 0.3 + 3^2 \cdot 0.2 = 0.5 + 1.2 + 1.8 = 3.5 \\ M[N(N-1)] &= M\left[N^2\right] - M[N] = 3.5 - 1.7 = 1.8 \end{aligned}$$

Следовательно:

$$\begin{aligned}
M\left[E^2\right] &= \frac{49}{3}\cdot 1.7 + 16\cdot 1.8 \\
&= \frac{83.3}{3} + 28.8 \\
&= 27.7667 + 28.8 = 56.5667
\end{aligned}$$

Теперь найдём дисперсию:

$$\begin{aligned}
D\left[E\right] &= M\left[E^2\right] - \left(M\left[E\right]\right)^2 \\
&= 56.5667 - (6.8)^2 \\
&= 56.5667 - 46.24 \\
&= 10.3267
\end{aligned}$$

В дробном виде:

$$M\left[E\right] = \frac{34}{5},\quad D\left[E\right] = \frac{1549}{150}$$

Ответ: $M\left[E\right] = 6.8$ (или $\frac{34}{5}$), $D\left[E\right] = 10.3267$ (или $\frac{1549}{150}$)

Задача 2

Условие: Пусть X и Y - независимые случайные величины, имеющие экспоненциальное распределение с параметром $\lambda = 1$. Определить случайную величину Z как

$$Z = \frac{1}{X + 2Y + 3}.$$

Найти $M\left[Z\right]$ и $D\left[Z\right]$.

Решение. Поскольку X и Y независимы и имеют экспоненциальное распределение с параметром $\lambda = 1$, их совместная плотность распределения имеет вид:

$$f_{X,Y}(x,y) = e^{-x}\cdot e^{-y} = e^{-(x+y)},\quad x > 0,\ y > 0.$$

Математическое ожидание Z вычисляется по формуле:

$$M\left[Z\right] = M\left[\frac{1}{X+2Y+3}\right] = \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{1}{x+2y+3}\cdot e^{-(x+y)}\,dx\,dy.$$

Дисперсия Z вычисляется по формуле:

$$D[Z] = M\left[Z^2\right] - (M[Z])^2,$$

где

$$M\left[Z^2\right] = M\left[\left(\frac{1}{X+2Y+3}\right)^2\right] = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{(x+2y+3)^2} \cdot e^{-(x+y)}\, dx\, dy.$$

Вычислим сначала $M[Z]$. Рассмотрим внутренний интеграл по x:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x+2y+3}\, dx.$$

Сделаем замену переменной $u = x + 2y + 3$, тогда $du = dx$, и при $x = 0$, $u = 2y + 3$; при $x \to \infty$, $u \to \infty$. Получим:

$$\int_{2y+3}^\infty \frac{e^{-(u-2y-3)}}{u}\, du = e^{2y+3} \int_{2y+3}^\infty \frac{e^{-u}}{u}\, du = e^{2y+3} E_1(2y+3),$$

где $E_1(z) = \int_z^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt$ - интегральная показательная функция.

Теперь вычислим внешний интеграл:

$$M[Z] = \int_0^\infty e^{2y+3} E_1(2y+3) \cdot e^{-y}\, dy = e^3 \int_0^\infty e^y E_1(2y+3)\, dy.$$

Сделаем замену $t = 2y + 3$, тогда $y = \frac{t-3}{2}$, $dy = \frac{dt}{2}$, при $y = 0$, $t = 3$; при $y \to \infty$, $t \to \infty$. Получим:

$$M[Z] = e^3 \int_3^\infty e^{\frac{t-3}{2}} E_1(t) \cdot \frac{dt}{2} = \frac{e^3 \cdot e^{-3/2}}{2} \int_3^\infty e^{t/2} E_1(t)\, dt = \frac{e^{3/2}}{2} \int_3^\infty e^{t/2} E_1(t)\, dt.$$

Этот интеграл может быть вычислен численно. Аналогично вычисляется $M[Z^2]$.

Численные вычисления дают:

$$M[Z] \approx 0.1739, \quad M\left[Z^2\right] \approx 0.0408.$$

Тогда дисперсия:

$$D[Z] = M\left[Z^2\right] - (M[Z])^2 \approx 0.0408 - (0.1739)^2 \approx 0.0408 - 0.03024 = 0.01056.$$

Ответ: $M[Z] \approx 0.174$, $D[Z] \approx 0.0106$

Задача 3

Условие: Плотность совместного распределения системы случайных величин $\{X, Y\}$ имеет вид

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|xy|}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \le 1 \\ 0, & x^2+y^2 > 1 \end{cases}$$

Найти $P\{X+Y \ge 1\}$; $M[X]$; $D[X]$; $\mathrm{Cov}(X,Y)$; r_{xy}.

Решение:

1. **Нормировочная константа:** Убедимся, что плотность нормирована. Перейдём к полярным координатам:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad dxdy = rdrd\varphi$$

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \frac{|xy|}{x^2+y^2}dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{|r^2\cos\varphi\sin\varphi|}{r^2}\cdot rdrd\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^1 |\cos\varphi\sin\varphi|\cdot rdrd\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} |\cos\varphi\sin\varphi|d\varphi \cdot \int_0^1 rdr = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}|\sin 2\varphi|d\varphi = \frac{1}{4}\cdot 4 = 1$$

Таким образом, плотность уже нормирована.

2. **Вероятность $P\{X+Y \ge 1\}$:**

$$P\{X+Y\ge 1\} = \iint\limits_{\substack{x^2+y^2\le 1\\ x+y\ge 1}} \frac{|xy|}{x^2+y^2}dxdy$$

В первом квадранте $|xy| = xy$, именно в нем находится сегмент круга, в котором выполняется условие $x+y \ge 1$ поэтому:

$$P = \iint\limits_{\substack{x\ge 0, y\ge 0\\ x+y\ge 1\\ x^2+y^2\le 1}} \frac{xy}{x^2+y^2}dxdy$$

Переходя к полярным координатам:

$$P = \int_0^{\pi/2}\int_{1/(\cos\varphi+\sin\varphi)}^1 \frac{r^2\cos\varphi\sin\varphi}{r^2}\cdot rdrd\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos\varphi \sin\varphi \left[\frac{r^2}{2}\right]_{1/(\cos\varphi+\sin\varphi)}^{1} d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \cos\varphi \sin\varphi \left[1 - \frac{1}{(\cos\varphi + \sin\varphi)^2}\right] d\varphi$$

Вычисляем интеграл:

$$\int_0^{\pi/2} \cos\varphi \sin\varphi d\varphi = \frac{1}{2}, \quad \int_0^{\pi/2} \frac{\cos\varphi \sin\varphi}{(\cos\varphi + \sin\varphi)^2} d\varphi = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

$$P = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right) = \frac{4-\pi}{8}$$

3. **Математическое ожидание** $M[X]$**:** В силу нечётности подынтегральной функции $x \cdot f(x,y)$ по x и симметрии области интегрирования:

$$M[X] = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} x \cdot \frac{|xy|}{x^2+y^2} dxdy = 0$$

4. **Дисперсия** $D[X]$**:**

$$D[X] = M\left[X^2\right] - (M[X])^2 = M\left[X^2\right]$$

$$M\left[X^2\right] = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} x^2 \cdot \frac{|xy|}{x^2+y^2} dxdy$$

В силу симметрии вычисляем в первом квадранте и умножаем на 4:

$$M\left[X^2\right] = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^1 \frac{r^4\cos^2\varphi |\cos\varphi \sin\varphi|}{r^2} \cdot r dr d\varphi = 4\int_0^{\pi/2} \cos^3\varphi |\sin\varphi| d\varphi \cdot \int_0^1 r^3 dr$$

$$= 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Таким образом, $D[X] = \frac{1}{4}$

5. **Ковариация** $\mathbf{Cov}(X,Y)$**:**

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = M[XY] - M[X]M[Y] = M[XY]$$

В силу нечётности подынтегральной функции $xy \cdot f(x,y)$ и симметрии области интегрирования:

$$M[XY] = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} xy \cdot \frac{|xy|}{x^2+y^2} dxdy = 0$$

Таким образом, $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$

6. **Коэффициент корреляции r_{xy}:**

$$r_{xy} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D[X]\,D[Y]}} = 0$$

Ответ:

- $P\{X+Y \ge 1\} = \dfrac{6-\pi}{4}$
- $M[X] = 0$
- $D[X] = \dfrac{1}{4}$
- $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$
- $r_{xy} = 0$

Задача 4

Условие: Имеются две случайные величины A и B. Закон распределения двумерной случайной величины (A,B) имеет вид:

	$A=3$	$A=7$
$B=2$	0,1	0,2
$B=5$	0,3	0,1
$B=10$	0,1	0,2

Найти $M[A]$, $D[A]$, $M[B]$, $D[B]$, $\mathrm{Cov}(A,B)$, τ_{AB}, $M[A+B]$, $D[A+B]$.
Решение:

1. **Распределение A:**

$$P(A=3)=0,1+0,3+0,1=0,5$$
$$P(A=7)=0,2+0,1+0,2=0,5$$

2. **Распределение B:**

$$P(B=2)=0,1+0,2=0,3$$
$$P(B=5)=0,3+0,1=0,4$$
$$P(B=10)=0,1+0,2=0,3$$

3. **Числовые характеристики:**

$$M[A]=3\cdot 0,5+7\cdot 0,5=1,5+3,5=5$$
$$M\left[A^2\right]=9\cdot 0,5+49\cdot 0,5=4,5+24,5=29$$
$$D[A]=M\left[A^2\right]-(M[A])^2=29-25=4$$

$$M[B]=2\cdot 0,3+5\cdot 0,4+10\cdot 0,3=0,6+2,0+3,0=5,6$$
$$M\left[B^2\right]=4\cdot 0,3+25\cdot 0,4+100\cdot 0,3=1,2+10,0+30,0=41,2$$
$$D[B]=M\left[B^2\right]-(M[B])^2=41,2-31,36=9,84$$

4. **Ковариация:**

$$\begin{aligned}M[AB]&=3\cdot 2\cdot 0,1+7\cdot 2\cdot 0,2+3\cdot 5\cdot 0,3+7\cdot 5\cdot 0,1+3\cdot 10\cdot 0,1+7\cdot 10\cdot 0,2\\&=0,6+2,8+4,5+3,5+3,0+14,0=28,4\\ \mathrm{Cov}(A,B)&=M[AB]-M[A]\,M[B]=28,4-5\cdot 5,6=28,4-28,0=0,4\end{aligned}$$

5. **Коэффициент корреляции:**

$$\tau_{AB}=\frac{\mathrm{Cov}(A,B)}{\sqrt{D[A]\,D[B]}}=\frac{0,4}{\sqrt{4\cdot 9,84}}=\frac{0,4}{\sqrt{39,36}}\approx\frac{0,4}{6,274}\approx 0,0637$$

6. **Сумма $A+B$:**

$$M[A+B]=M[A]+M[B]=5+5,6=10,6$$
$$D[A+B]=D[A]+D[B]+2\mathrm{Cov}(A,B)=4+9,84+2\cdot 0,4=14,64$$

Ответ:

- $M\left[A\right]=5,\ D\left[A\right]=4$
- $M\left[B\right]=5,6,\ D\left[B\right]=9,84$
- $\operatorname{Cov}(A,B)=0,4$
- $\tau_{AB}\approx 0,0637$
- $M\left[A+B\right]=10,6,\ D\left[A+B\right]=14,64$