Задачи и решения

К Примеру 1 (Равномерное распределение)

Задача 1.1 (Простая)

Случайный вектор (X, Y, Z) равномерно распределён в кубе $0 \le x, y, z \le 3$. Найдите вероятность того, что $X < 1$, $Y < 1$, $Z < 1$.

Решение: Объём куба: $V = 3^3 = 27$.
Объём области $X < 1, Y < 1, Z < 1$: $V_0 = 1^3 = 1$.
Вероятность:

$$P = \frac{V_0}{V} = \frac{1}{27}.$$

Задача 1.2 (Сложная)

Случайная точка (X, Y, Z) равномерно распределена в шаре $x^2+y^2+z^2 \le R^2$, где $R = 2$. Найдите вероятность того, что $X^2 + Y^2 + Z^2 \le 1$.

Решение: Объём шара радиуса R: $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 8 = \frac{32\pi}{3}$.
Объём шара радиуса 1: $V_1 = \frac{4}{3}\pi$.
Вероятность:

$$P = \frac{V_1}{V} = \frac{\frac{4}{3}\pi}{\frac{32\pi}{3}} = \frac{1}{8}.$$

К Примеру 2 (Разные распределения)

Задача 2.1 (Дискретная)

Случайные величины X и Y независимы и имеют распределение Пуассона с параметрами $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = 3$ соответственно. Найдите $\mathsf{P}(X = 1, Y = 2)$.

Решение:

$$\mathsf{P}(X = 1, Y = 2) = \mathsf{P}(X = 1) \cdot \mathsf{P}(Y = 2) = \frac{2^1 e^{-2}}{1!} \cdot \frac{3^2 e^{-3}}{2!} = 2e^{-2} \cdot \frac{9e^{-3}}{2} = 9e^{-5}.$$

Задача 2.2 (Непрерывная)

Случайные величины X и Y независимы и распределены экспоненциально с параметрами $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 2$ соответственно. Найдите $\mathsf{P}(X < 1, Y < 0.5)$.

Решение:

$$\mathsf{P}(X < 1, Y < 0.5) = (1-e^{-1})\cdot(1-e^{-2\cdot 0.5}) = (1-e^{-1})(1-e^{-1}) = (1-e^{-1})^2.$$

К Примеру 3 (Распределение в области)

Задача 3.1 (Простая)

Случайная точка (X, Y) равномерно распределена в круге $x^2 + y^2 \leq 9$. Найдите $\mathsf{P}(Y > 0)$.

Решение: Площадь круга: $S = \pi \cdot 9 = 9\pi$.
Площадь верхней половины: $S_{\text{верх}} = \frac{1}{2} \cdot 9\pi = 4.5\pi$.
Вероятность:

$$P = \frac{4.5\pi}{9\pi} = 0.5.$$

Задача 3.2 (Сложная)

Случайная точка (X, Y) имеет в круге $x^2 + y^2 \leq 4$ плотность распределения, пропорциональную расстоянию до центра: $f(x, y) = k\sqrt{x^2 + y^2}$. Найдите константу k и $\mathsf{P}(X^2 + Y^2 \leq 1)$.

Решение: Переход к полярным координатам: $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$, $0 \leq r \leq 2$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$.
Условие нормировки:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^2 k \cdot r \cdot r\, dr\, d\phi = 1 \Rightarrow 2\pi k \cdot \frac{2^3}{3} = 1 \Rightarrow k = \frac{3}{16\pi}.$$

Вероятность:

$$\mathsf{P}(X^2 + Y^2 \leq 1) = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{3}{16\pi} \cdot r^2\, dr\, d\phi = 2\pi \cdot \frac{3}{16\pi} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{8}.$$

К Примеру 4 (Плотность распределения)

Задача 4.1 (Простая)

Случайный вектор (X, Y) имеет плотность:

$$f(x, y) = \begin{cases} Ce^{-2x-3y}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Найдите константу C.

Решение:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty Ce^{-2x-3y}\,dx\,dy = C\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{C}{6} = 1 \Rightarrow C = 6.$$

Задача 4.2 (Сложная)

Случайный вектор (X, Y) имеет плотность:

$$f(x,y) = \begin{cases} C(x+y), & 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Найдите константу C и $\mathsf{P}(X+Y<1)$.

Решение: Условие нормировки:

$$\int_0^1\int_0^1 C(x+y)\,dx\,dy = C\left(\int_0^1 \left[\frac{x^2}{2}+xy\right]_{x=0}^{x=1} dy\right) = C\int_0^1\left(\frac{1}{2}+y\right)dy = C\left[\frac{y}{2}+\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = C.$$

Отсюда $C=1$.
Вероятность:

$$\mathsf{P}(X+Y<1) = \int_0^1\int_0^{1-x}(x+y)\,dy\,dx = \int_0^1\left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=1-x} dx = \int_0^1\left(x(1-x)+\frac{(1-x)^2}{2}\right)dx.$$

Вычисляем:

$$= \int_0^1\left(x - x^2 + \frac{1-2x+x^2}{2}\right)dx = \int_0^1\left(\frac{1}{2}-\frac{x^2}{2}\right)dx = \left[\frac{x}{2}-\frac{x^3}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

К Примеру 5 (Независимость и совместное распределение)

Задача 5.1 (Простая)

Случайные величины X и Y независимы и распределены по показательному закону с параметрами $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 2$ соответственно. Запишите совместную плотность $f(x,y)$.

Решение:

$$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y) = \begin{cases} e^{-x}\cdot 2e^{-2y}, & x>0, y>0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} = \begin{cases} 2e^{-x-2y}, & x>0, y>0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Задача 5.2 (Сложная)

Случайные величины X и Y имеют совместную плотность:

$$f(x,y) = \begin{cases} 2e^{-x-y}, & 0 < x < y, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Покажите, что каждая из величин X, Y имеет экспоненциальное распределение, но они не независимы.

Решение: Найдём маргинальные плотности:

$$f_X(x) = \int_x^\infty 2e^{-x-y}\,dy = 2e^{-x}\int_x^\infty e^{-y}\,dy = 2e^{-x}\cdot e^{-x} = 2e^{-2x}, \quad x > 0.$$

$$f_Y(y) = \int_0^y 2e^{-x-y}\,dx = 2e^{-y}\int_0^y e^{-x}\,dx = 2e^{-y}(1-e^{-y}) = 2(e^{-y}-e^{-2y}), \quad y > 0.$$

Видим, что $X \sim \mathrm{Exp}(2)$, Y имеет распределение с плотностью $2(e^{-y} - e^{-2y})$.
Так как $f(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y)$, величины X и Y не независимы.