Примеры возможных задач к семинару по лекции 5
Метод моментов

Задача 1

Выборка $\{X_1, \dots, X_n\}$ порождена случайной величиной X, имеющей плотность распределения

$$f(x;\theta_1,\theta_2) = \begin{cases} \theta_2\, e^{-\theta_2(x-\theta_1)}, & x \geq \theta_1, \\ 0, & x < \theta_1, \end{cases}$$

где θ_1 и θ_2 — неизвестные параметры. Найти оценки $\hat{\theta}_1$ и $\hat{\theta}_2$ параметров θ_1 и θ_2 методом моментов.

Решение. Для сдвинутого экспоненциального распределения известны теоретические моменты:

$$\mathrm{M}\{X\} = \theta_1 + \frac{1}{\theta_2}, \qquad \mathrm{D}\{X\} = \frac{1}{\theta_2^2}.$$

В методе моментов приравнивают теоретические моменты к выборочным. Обычно используют первые два начальных момента, но можно также использовать первый начальный и второй центральный (т.е. дисперсию). Введём выборочные характеристики:

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad \bar{\nu}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2.$$

Выборочная дисперсия (обычная) определяется как

$$D_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \bar{\nu}_2 - \bar{X}^2.$$

Она является оценкой теоретической дисперсии $\mathrm{D}\{X\}$.

Приравнивая $\mathrm{M}\{X\} = \bar{X}$ и $\mathrm{D}\{X\} = D_n$, получаем систему:

$$\bar{X} = \theta_1 + \frac{1}{\theta_2}, \qquad D_n = \frac{1}{\theta_2^2}.$$

Из второго уравнения находим $\theta_2 = \frac{1}{\sqrt{D_n}}$ (берём положительное значение, так как $\theta_2 > 0$). Подставляя в первое, получаем $\theta_1 = \bar{X} - \frac{1}{\theta_2} = \bar{X} - \sqrt{D_n}$.

Таким образом, оценки метода моментов выражаются через выборочное среднее и обычную выборочную дисперсию:

$$\boxed{\hat{\theta}_1 = \bar{X} - \sqrt{D_n}, \qquad \hat{\theta}_2 = \frac{1}{\sqrt{D_n}}.}$$

Эти оценки полностью эквивалентны полученным через начальные моменты, поскольку $D_n = \bar{\nu}_2 - \bar{\nu}_1^2$.

Замечание о выборе выборочной дисперсии. В методе моментов обычно используют обычную выборочную дисперсию (с делением на n), так как она является несмещённой оценкой теоретической дисперсии только для нормального распределения, но в методе моментов важно именно приравнивание моментов, а не несмещённость. Если бы мы использовали исправленную выборочную дисперсию $s^2 = \frac{n}{n-1} D_n$, то получили бы другие оценки:

$$\hat{\theta}_2' = \frac{1}{\sqrt{s^2}} = \sqrt{\frac{n-1}{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{D_n}}, \qquad \hat{\theta}_1' = \bar{X} - \sqrt{\frac{n-1}{n}} \sqrt{D_n}.$$

Эти оценки отличаются от полученных методом моментов.

Задача 2

Выборка $\{X_1, \ldots, X_n\}$ порождена случайной величиной X, имеющей гамма-распределение с плотностью

$$f(x; \alpha, \beta) = \begin{cases} \dfrac{x^\alpha \, e^{-x/\beta}}{\beta^{\alpha+1} \, \Gamma(\alpha+1)}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

где $\alpha > -1$, $\beta > 0$ — неизвестные параметры, а $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция:

$$\Gamma(\alpha+1) = \int\limits_0^\infty t^\alpha \, e^{-t} \, dt.$$

Известно, что для данного распределения

$$\mathrm{M}\{X\} = (\alpha+1)\beta, \qquad \mathrm{M}\{X^2\} = (\alpha+2)(\alpha+1)\beta^2.$$

Найти оценки $\hat{\alpha}$ и $\hat{\beta}$ параметров α и β методом моментов.

Решение. Обозначим теоретические начальные моменты:

$$m_1 = \mathrm{M}\{X\} = (\alpha+1)\beta, \qquad m_2 = \mathrm{M}\{X^2\} = (\alpha+2)(\alpha+1)\beta^2.$$

Из первого равенства выразим $\beta = \dfrac{m_1}{\alpha+1}$ и подставим во второе:

$$m_2 = (\alpha+2)(\alpha+1)\left(\frac{m_1}{\alpha+1}\right)^2 = (\alpha+2)\frac{m_1^2}{\alpha+1}.$$

Умножим обе части на $(\alpha+1)$:

$$m_2(\alpha+1) = (\alpha+2)m_1^2.$$

Раскрываем скобки:

$$m_2\alpha + m_2 = m_1^2\alpha + 2m_1^2.$$

Переносим слагаемые с α влево, остальные вправо:

$$m_2\alpha - m_1^2\alpha = 2m_1^2 - m_2,$$

$$\alpha(m_2 - m_1^2) = 2m_1^2 - m_2.$$

Отсюда

$$\alpha = \frac{2m_1^2 - m_2}{m_2 - m_1^2}.$$

Теперь найдём β. Сначала вычислим $\alpha+1$:

$$\alpha + 1 = \frac{2m_1^2 - m_2}{m_2 - m_1^2} + 1 = \frac{2m_1^2 - m_2 + m_2 - m_1^2}{m_2 - m_1^2} = \frac{m_1^2}{m_2 - m_1^2}.$$

Тогда

$$\beta = \frac{m_1}{\alpha+1} = m_1 \cdot \frac{m_2 - m_1^2}{m_1^2} = \frac{m_2 - m_1^2}{m_1}.$$

Заменим теоретические моменты их выборочными аналогами:

$$\bar{\nu}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad \bar{\nu}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2.$$

Получаем оценки метода моментов:

$$\boxed{\hat{\alpha} = \frac{2\bar{\nu}_1^2 - \bar{\nu}_2}{\bar{\nu}_2 - \bar{\nu}_1^2}, \qquad \hat{\beta} = \frac{\bar{\nu}_2 - \bar{\nu}_1^2}{\bar{\nu}_1}.}$$

Задача 3

Случайная величина X имеет распределение, являющееся смесью двух распределений Пуассона с равными весами:

$$P\{X = k\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda_1^k e^{-\lambda_1}}{k!} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda_2^k e^{-\lambda_2}}{k!}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ — неизвестные параметры. Проведено $N = 327$ независимых испытаний, результаты которых сгруппированы в таблице:

X_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N_i	28	47	81	64	53	24	13	8	3	2	1

Требуется найти оценки $\hat{\lambda}_1$ и $\hat{\lambda}_2$ параметров λ_1 и λ_2 методом моментов.

Решение. Вычислим теоретические моменты смеси. Используя линейность математического ожидания и свойства распределения Пуассона ($\mathrm{M}\{X \mid \lambda\} = \lambda$, $\mathrm{M}\{X^2 \mid \lambda\} = \lambda + \lambda^2$), получаем

$$m_1 = \mathrm{M}\{X\} = \frac{1}{2}\lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_2 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2},$$

$$m_2 = \mathrm{M}\{X^2\} = \frac{1}{2}\big((\lambda_1 + \lambda_1^2) + (\lambda_2 + \lambda_2^2)\big) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2}{2}.$$

Обозначим $b = \lambda_1 + \lambda_2$, $c = \lambda_1\lambda_2$. Тогда $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = b^2 - 2c$, и

$$m_1 = \frac{b}{2}, \qquad m_2 = \frac{b + b^2 - 2c}{2}.$$

Выразим b и c через моменты:

$$b = 2m_1, \qquad c = \frac{b + b^2 - 2m_2}{2} = m_1 + 2m_1^2 - m_2.$$

По теореме Виета параметры λ_1, λ_2 являются корнями квадратного уравнения $t^2 - bt + c = 0$, т.е.

$$t^2 - 2m_1 t + (m_1 + 2m_1^2 - m_2) = 0.$$

Дискриминант этого уравнения:

$$\Delta = 4m_1^2 - 4(m_1 + 2m_1^2 - m_2) = 4\big(m_2 - m_1 - m_1^2\big).$$

Следовательно,

$$\lambda_{1,2} = m_1 \pm \sqrt{m_2 - m_1 - m_1^2}.$$

Теперь найдём выборочные моменты по данным таблицы. Объём выборки $n = 327$. Вычислим необходимые суммы:

$$\sum_{k=0}^{10} kN_k = 0 \cdot 28 + 1 \cdot 47 + 2 \cdot 81 + 3 \cdot 64 + 4 \cdot 53 + 5 \cdot 24$$
$$+ 6 \cdot 13 + 7 \cdot 8 + 8 \cdot 3 + 9 \cdot 2 + 10 \cdot 1 = 919,$$

$$\sum_{k=0}^{10} k^2 N_k = 0^2 \cdot 28 + 1^2 \cdot 47 + 2^2 \cdot 81 + 3^2 \cdot 64 + 4^2 \cdot 53 + 5^2 \cdot 24$$
$$+ 6^2 \cdot 13 + 7^2 \cdot 8 + 8^2 \cdot 3 + 9^2 \cdot 2 + 10^2 \cdot 1 = 3709.$$

Тогда выборочные начальные моменты равны

$$\bar{\nu}_1 = \frac{919}{327}, \qquad \bar{\nu}_2 = \frac{3709}{327}.$$

Вычислим величину, стоящую под корнем:

$$\bar{\nu}_2 - \bar{\nu}_1 - \bar{\nu}_1^2 = \frac{3709}{327} - \frac{919}{327} - \frac{919^2}{327^2}.$$

Приведём к общему знаменателю $327^2 = 106929$:

$$\frac{3709}{327} = \frac{3709 \cdot 327}{106929} = \frac{1212843}{106929}, \qquad \frac{919}{327} = \frac{919 \cdot 327}{106929} = \frac{300513}{106929},$$
$$\frac{919^2}{327^2} = \frac{844561}{106929}.$$

Тогда

$$\bar{\nu}_2 - \bar{\nu}_1 - \bar{\nu}_1^2 = \frac{1212843 - 300513 - 844561}{106929} = \frac{67769}{106929} \approx 0.6338.$$

Корень из этой величины:

$$\sqrt{\frac{67769}{106929}} \approx 0.7961.$$

Таким образом, оценки параметров:

$$\hat{\lambda}_{1,2} = \frac{919}{327} \pm \sqrt{\frac{67769}{106929}} \approx 2.810 \pm 0.796.$$

Окончательно получаем

$$\boxed{\hat{\lambda}_1 \approx 2.014, \qquad \hat{\lambda}_2 \approx 3.606.}$$