Решения задач семинара 5

Задача 1. *Показать, что если СВ X имеет непрерывную строго возрастающую функцию распределения $F_X(x) = P(X < x)$, то СВ $Y = F_X(X)$ равномерно распределена на отрезке $[0; 1]$.*

Решение 1. *Так как $F_X(x)$ непрерывна и строго возрастает, она взаимно однозначно отображает область значений X на интервал $(0, 1)$. Непрерывность гарантирует, что $P(X = x) = 0$ для любого x, поэтому неважно, строгое или нестрогое неравенство в определении.*

Рассмотрим функцию распределения Y:

$$F_Y(y) = P(Y < y) = P(F_X(X) < y), \quad y \in [0, 1].$$

Так как F_X строго возрастает, у нее существует обратная функция F_X^{-1}. Применим ее:

$$F_Y(y) = P(F_X(X) < y) = P(X < F_X^{-1}(y)).$$

По определению функции распределения F_X, имеем:

$$P(X < F_X^{-1}(y)) = F_X(F_X^{-1}(y)) = y.$$

Таким образом,

$$F_Y(y) = y, \quad \text{для } y \in [0, 1].$$

Это функция распределения равномерной на $[0, 1]$ величины.

Задача 2. *Пусть СВ X имеет плотность распределения $f(x)$. Найти плотность распределения $g(y)$ случайной величины $Y = aX + b$, где a и b — заданные постоянные, причём $a \neq 0$.*

Решение 2. ***Случай 1:*** *$a > 0$. Функция $y = ax + b$ строго возрастает.*

$$G(y) = P(Y < y) = P(aX + b < y) = P\left(X < \frac{y-b}{a}\right) = F_X\left(\frac{y-b}{a}\right).$$

Плотность:

$$g(y) = G'(y) = f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \cdot \frac{1}{a}.$$

Случай 2: *$a < 0$. Функция строго убывает.*

$$G(y) = P(aX + b < y) = P\left(X > \frac{y-b}{a}\right) = 1 - P\left(X \leq \frac{y-b}{a}\right).$$

Учитывая, что у непрерывной величины $P(X = x) = 0$, получаем:

$$G(y) = 1 - F_X\left(\frac{y-b}{a}\right).$$

Плотность:

$$g(y) = -f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \cdot \frac{1}{a} = f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \cdot \frac{1}{|a|}.$$

Окончательный ответ:

$$g(y) = \frac{1}{|a|} \cdot f\left(\frac{y-b}{a}\right).$$

Задача 3. *Доказать, что любая функция распределения $F(x) = P(X < x)$ не может иметь более чем счётное число точек разрыва.*

Решение 3. *Функция $F(x)$ неубывающая. В точках разрыва x_0 скачок равен:*

$$p_{x_0} = \lim_{x \to x_0+} F(x) - \lim_{x \to x_0-} F(x) = F(x_0+) - F(x_0-).$$

Заметим, что $F(x_0) = P(X < x_0) = F(x_0-)$, так как предел слева совпадает со значением функции для $F(x) = P(X < x)$.

Рассмотрим $D_n = \{x_0 : F(x_0+) - F(x_0-) > 1/n\}$. Сумма скачков не превышает 1, поэтому каждое D_n конечно. Объединение $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ не более чем счётно.

Задача 4. *Показать, что ф.р. $F(x) = P(X < x)$ непрерывна слева.*

Решение 4. *Рассмотрим $x_n \uparrow x_0$. Тогда:*

$$\lim_{n \to \infty} F(x_n) = \lim_{n \to \infty} P(X < x_n) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{X < x_n\}\right).$$

Но $\bigcup_{n=1}^{\infty} \{X < x_n\} = \{X < x_0\}$, так как если $X < x_0$, то $\exists N : X < x_N$. Следовательно:

$$\lim_{n \to \infty} F(x_n) = P(X < x_0) = F(x_0).$$

Это означает непрерывность слева.