ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

БУЛЫЧЕВ АЛЕКСАНДР ВИКТОРОВИЧ, К.Т.Н.

МОСКВА, 2025

ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ

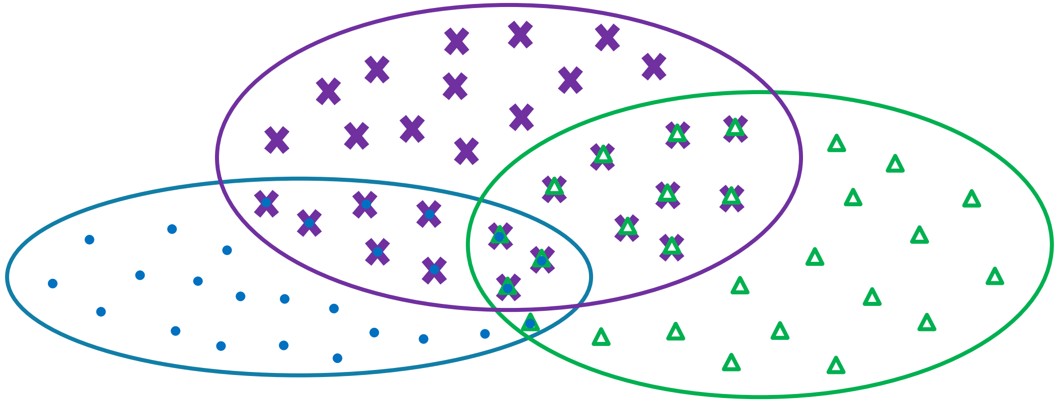
ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. ПОНЯТИЕ ВЕРОЯТНОСТИ СЛУЧАЙНОГО СОБЫТИЯ. ПРИМЕРЫ ЗАДАЧ

БУЛЫЧЕВ АЛЕКСАНДР ВИКТОРОВИЧ, К.Т.Н.

МОСКВА, 2025

ОПЕРАЦИИ С МНОЖЕСТВАМИ

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МНОЖЕСТВ И ОПЕРАЦИЙ С НИМИ, НАПРИМЕР, ОБЪЕДИНЕНИЯ И ПЕРЕСЕЧЕНИЯ, СУЩЕСТВЕННО УПРОЩАЕТ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ, ПОСКОЛЬКУ ДЕЛАЕТ ЯСНОЙ ИХ ФОРМУЛИРОВКУ



ОПЕРАЦИИ С МНОЖЕСТВАМИ

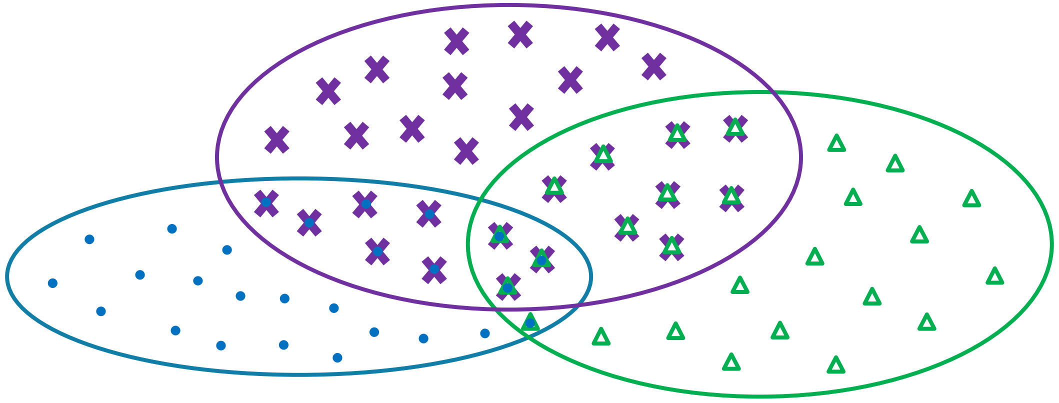
МНОЖЕСТВО –

совокупность элементов произвольной природы

ПОДМНОЖЕСТВО -

любая совокупность элементов множества,

включая пустое множество и само множество

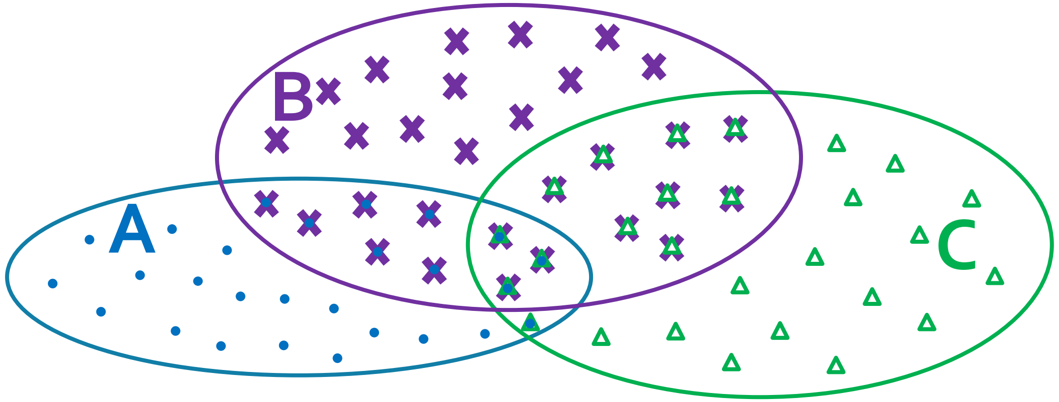


ОПЕРАЦИИ С МНОЖЕСТВАМИ

МНОЖЕСТВО **A** -
элементы со свойством «точка»

МНОЖЕСТВО **B** -
элементы со свойством «крестик»

МНОЖЕСТВО **C** -
элементы со свойством «треугольник»



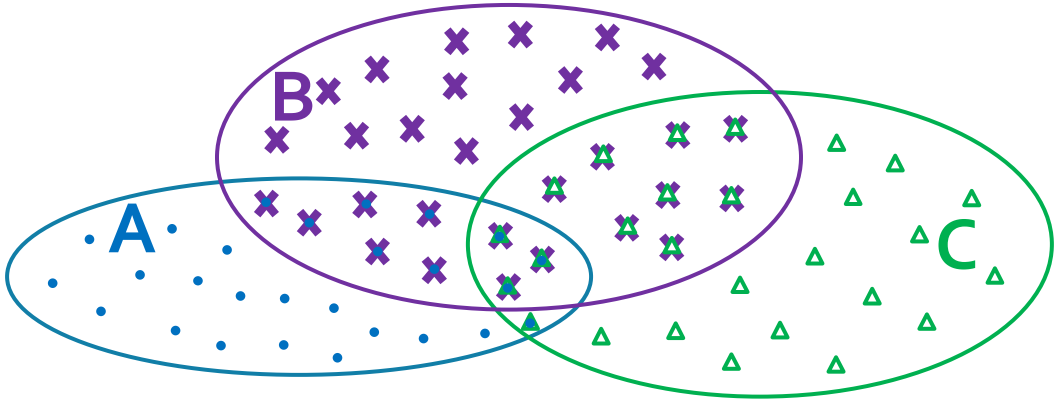
ПЕРЕСЕЧЕНИЕ / ОДНОВРЕМЕННОСТЬ

МНОЖЕСТВО **AB** –
свойства «точка_**и**_крестик»

МНОЖЕСТВО **BC** –
свойства «крестик_**и**_треугольник»

МНОЖЕСТВО **AC** –
свойства «точка_**и**_треугольник»

МНОЖЕСТВО **ABC** –
свойства «точка_**и**_крестик_**и**_треугольник»



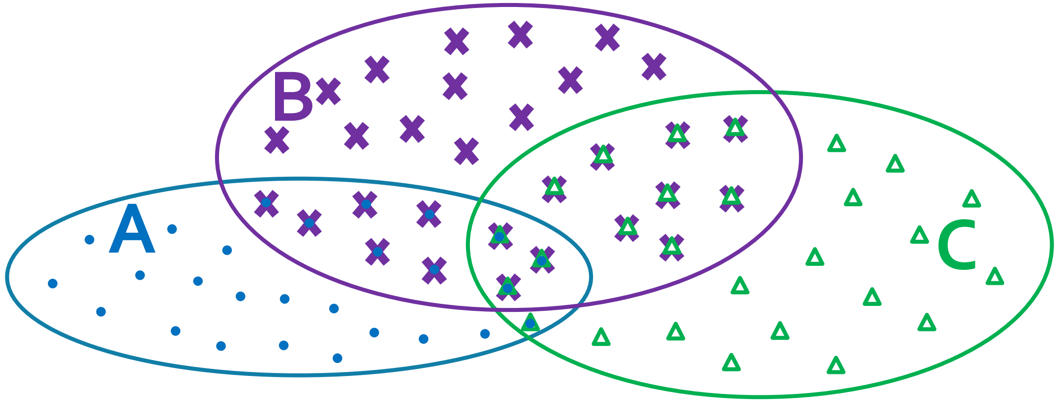
ОБЪЕДИНЕНИЕ / ПРИНАДЛЕЖНОСТЬ ХОТЯ БЫ ОДНОМУ

МНОЖЕСТВО **A**+**B** -
свойства «точка_**или**_крестик»

МНОЖЕСТВО **B**+**C** -
свойства «крестик_**или**_треугольник»

МНОЖЕСТВО **A**+**C** -
свойства «точка_**или**_треугольник»

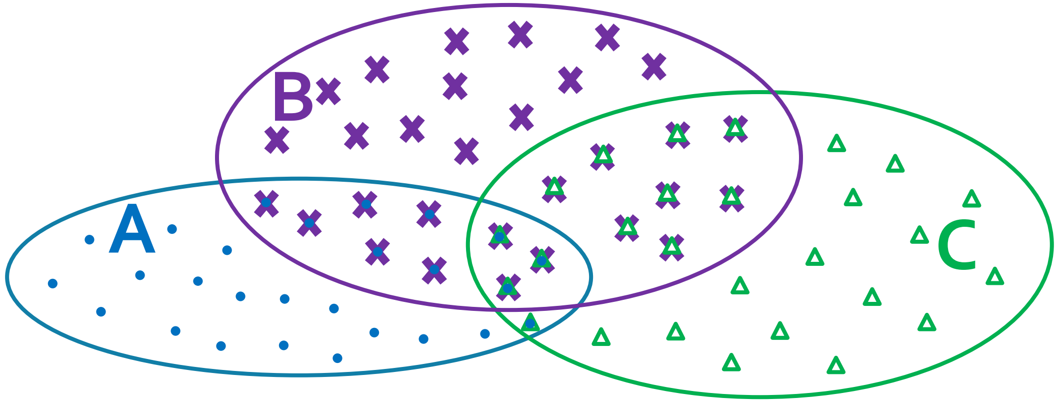
МНОЖЕСТВО **A**+**B**+**C** -
свойства «точка_**или**_крестик_**или**_треугольник»



ОПЕРАЦИИ С МНОЖЕСТВАМИ

ФОРМУЛА ВКЛЮЧЕНИЙ-ИСКЛЮЧЕНИЙ ВЫРАЖАЕТ КОЛИЧЕСТВО ЭЛЕМЕНТОВ В ОБЪЕДИНЕННОМ МНОЖЕСТВЕ ЧЕРЕЗ КОЛИЧЕСТВО ЭЛЕМЕНТОВ В ПОДМНОЖЕСТВАХ ОБЪЕДИНЁННОГО МНОЖЕСТВА

$$\boxed{N(A+B+C)=N(A)+N(B)+N(C)-N(AB)-N(BC)-N(AC)+N(ABC)}$$



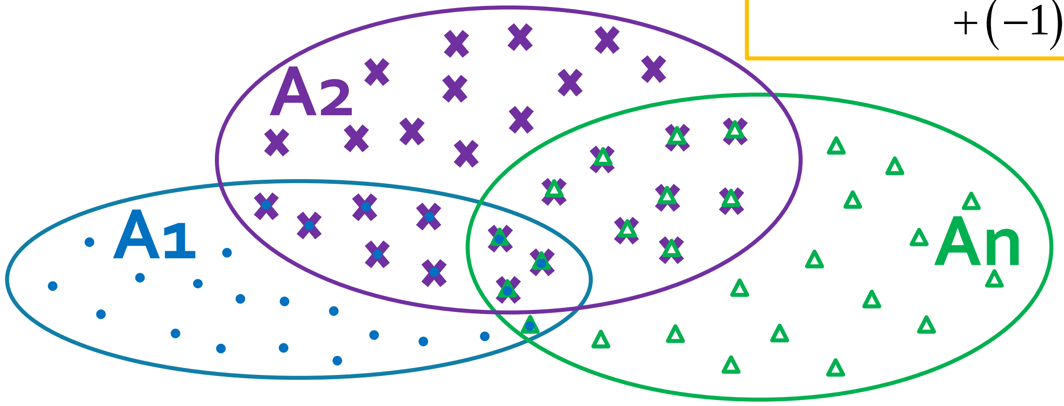
ОПЕРАЦИИ С МНОЖЕСТВАМИ

ФОРМУЛА ВКЛЮЧЕНИЙ-ИСКЛЮЧЕНИЙ

В ОБЩЕМ ВИДЕ:

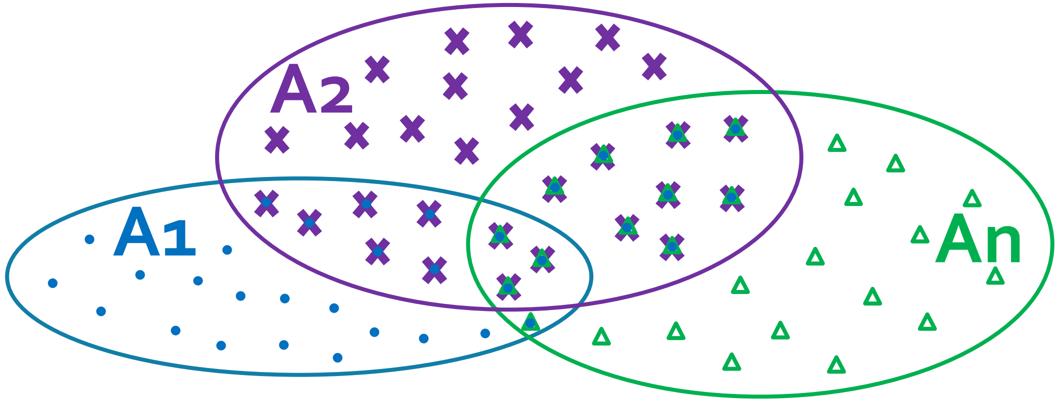
$$\begin{aligned}N(A_1+\ldots+A_n) = {} & N(A_1)+\ldots+N(A_n) \\ & -N(A_1A_2)-\ldots-N(A_{n-1}A_n)+ \\ & +N(A_1A_2A_3)+\ldots+N(A_{n-2}A_{n-1}A_n)- \\ & -\ldots+ \\ & +(-1)^{n-1}N(A_1\ldots A_n)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}N\left(\sum_{i=1,n} A_i\right) = {} & \sum_{i=1,n} N(A_i)- \\ & -\sum_{i<j} N(A_iA_j)+ \\ & +\sum_{i<j<k} N(A_iA_jA_k)-\ldots+ \\ & +(-1)^{n-1}N(A_1\ldots A_n)\end{aligned}$$



ОПЕРАЦИИ С МНОЖЕСТВАМИ. ПРИМЕР

НА КОНЦЕРТЕ КАЖДУЮ ПЕСНЮ ИСПОЛНЯЛИ ДВОЕ АРТИСТОВ, И НИКАКАЯ ПАРА НЕ ВЫСТУПАЛА ВМЕСТЕ БОЛЕЕ ОДНОГО РАЗА. ВСЕГО БЫЛО ИСПОЛНЕНО 30 ПЕСЕН, И КАЖДЫЙ АРТИСТ ВЫСТУПИЛ ПО 5 РАЗ. СКОЛЬКО АРТИСТОВ ВЫСТУПАЛО?



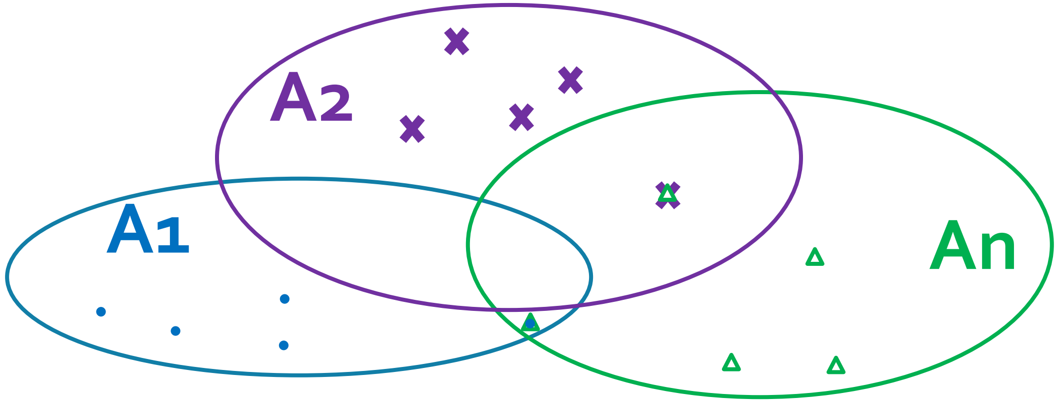
ОПЕРАЦИИ С МНОЖЕСТВАМИ. ПРИМЕР

МНОЖЕСТВО **A1** (5 элементов) -
песни, исполненные первым исполнителем

МНОЖЕСТВО **A2** (5 элементов) -
песни, исполненные вторым исполнителем

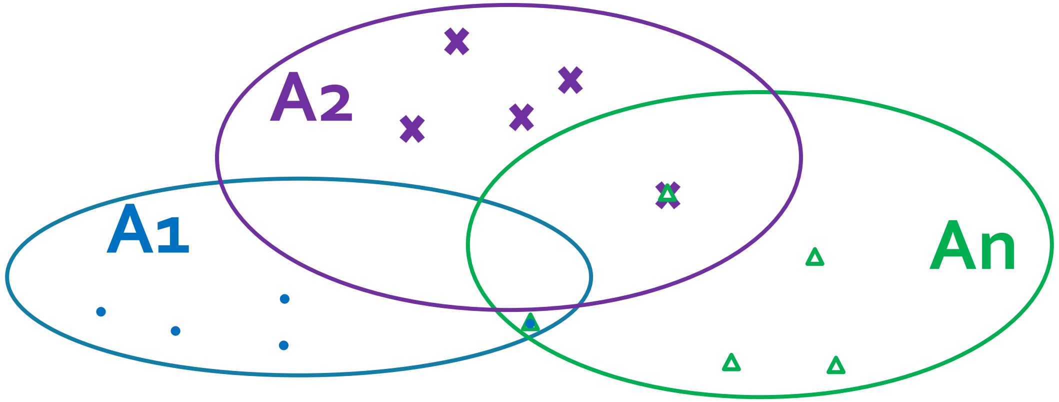
...

МНОЖЕСТВО **An** (5 элементов) -
песни, исполненные n-м исполнителем



ОПЕРАЦИИ С МНОЖЕСТВАМИ. ПРИМЕР

1. Каждую песню исполняли двое артистов: найдутся два таких множества из множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$, что элемент множества $A_1 + A_2 + \ldots + A_n$ им принадлежит;
2. пары не выступали вместе более одного раза: пересечение двух множества из $A_1, A_2, \ldots, A_n$ пустое или состоит из одного элемента;
3. исполнено 30 песен: количество элементов в множестве $A_1 + A_2 + \ldots + A_n$ равно 30.

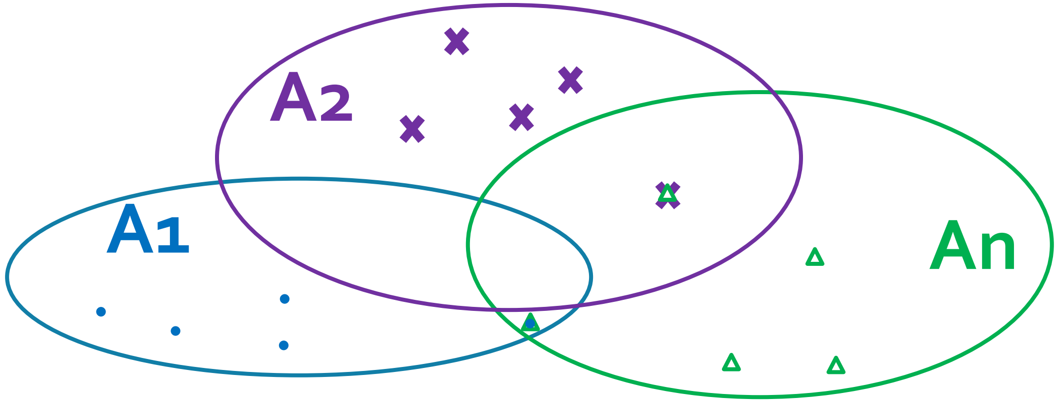


ОПЕРАЦИИ С МНОЖЕСТВАМИ. ПРИМЕР

$$\begin{aligned} N(A_1+\ldots+A_n) = &\{N(A_1)+\ldots+N(A_n)\} \\ &-\{N(A_1A_2)+\ldots+N(A_{n-1}A_n)\}+ \\ &+\{N(A_1A_2A_3)+\ldots+N(A_{n-2}A_{n-1}A_n)\}- \\ &-\{\ldots\}+ \\ &+(-1)^{n-1}N(A_1\ldots A_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 30 = N(A_1+\ldots+A_n) = &\{5+\ldots+5\} \\ &-\{1+0+\ldots+0+1\}+ \\ &+\{0+\ldots+0\}- \\ &-\{0+\ldots+0\}+ \\ &+0 \end{aligned}$$

$$30 = 5n - 30 \Rightarrow n = 12$$



КЛАССИЧЕСКАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КЛАССИЧЕСКОЙ ВЕРОЯТНОСТИ

ВЕРОЯТНОСТЬ СОБЫТИЯ А – ЭТО ОТНОШЕНИЕ БЛАГОПРИЯТНОГО ЧИСЛА РАВНОВЕРОЯТНЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ИСХОДОВ К ОБЩЕМУ ЧИСЛУ РАВНОВЕРОЯТНЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ИСХОДОВ

$$P(A) = \frac{N_{благ}}{N_{общ}}$$

КЛАССИЧЕСКАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ. ПРИМЕР

КАКОВА ВЕРОЯТНОСТЬ ВЫПАДЕНИЯ НЕЧЕТНОГО ЧИСЛА ОЧКОВ ПРИ БРОСАНИИ ПРАВИЛЬНОЙ ШЕСТИГРАННОЙ ИГРАЛЬНОЙ КОСТИ?

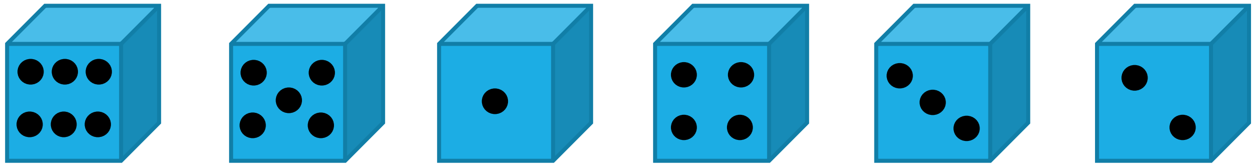
1. БЛАГОПРИЯТНЫЕ ИСХОДЫ - ТРИ (1,3,5 ОЧКОВ)
2. ВСЕ ИСХОДЫ - ШЕСТЬ (1,2,3,4,5,6 ОЧКОВ)

$$P\left(\textit{нечетное}\right) = \frac{N_{\textit{благ}}}{N_{\textit{общ}}} = \frac{3}{6}$$

КЛАССИЧЕСКАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ. ПРИМЕР

КАКОВА ВЕРОЯТНОСТЬ ТОГО, ЧТО ПРИ **ШЕСТИ БРОСАНИЯХ** ПРАВИЛЬНОЙ ШЕСТИГРАННОЙ ИГРАЛЬНОЙ КОСТИ **ХОТЯ БЫ ОДИН РАЗ ВЫПАДЕТ ШЕСТЬ ОЧКОВ**?

ИНТУИТИВНО КАЖЕТСЯ, ЧТО ВЕРОЯТНОСТЬ БЛИЗКА К 100% - ДАВАЙТЕ ЕЕ ВЫЧИСЛИМ



КЛАССИЧЕСКАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ. ПРИМЕР

ОБОЗНАЧИМ СОБЫТИЯ:

А – «ХОТЯ БЫ ОДИН РАЗ ВЫПАЛО ШЕСТЬ ОЧКОВ»;

В – «НИ РАЗУ НЕ ВЫПАЛО ШЕСТЬ ОЧКОВ»

ТАКОЕ ОБОЗНАЧЕНИЕ ГОВОРИТ О ТОМ, ЧТО

А И В – ПРОТИВОПОЛОЖНЫЕ СОБЫТИЯ,

Т.Е. В ОПЫТЕ ПРОИСХОДИТ ИЛИ **А** ИЛИ **В**,

ОДНОВРЕМЕННО **А** И **В** НАБЛЮДАТЬСЯ НЕ МОЖЕТ

$$P(A) = ?$$

КЛАССИЧЕСКАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ. ПРИМЕР

ИСХОДЯ ИЗ ОПРЕДЕЛЕНИЯ
КЛАССИЧЕСКОЙ ВЕРОЯТНОСТИ,
ПОЛУЧАЕМ СЛЕДУЮЩУЮ ЦЕПОЧКУ РАВЕНСТВ:

$$P(A)+P(B)=1 \Rightarrow P(A)=1-P(B)$$

$$P(B)=\frac{N_{благ}}{N_{общ}}=\frac{5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5}{6\cdot6\cdot6\cdot6\cdot6\cdot6}=\left(\frac{5}{6}\right)^6$$

$$\Downarrow$$

$$P(A)=1-P(B)=1-\left(\frac{5}{6}\right)^6 \approx 67\%$$

ОСНОВЫ КОМБИНАТОРИКИ

ПОДСЧЕТ ЧИСЛА ИСХОДОВ
В ЧИСЛИТЕЛЕ И ЗНАМЕНАТЕЛЕ ФОРМУЛЫ
КЛАССИЧЕСКОЙ ВЕРОЯТНОСТИ
ЗАЧАСТУЮ ПРОИСХОДИТ С ПОМОЩЬЮ
КОМБИНАТОРНЫХ ФОРМУЛ:

- **П Е Р Е С Т А Н О В О К**
- **Р А З М Е Щ Е Н И Й**
- **С О Ч Е Т А Н И Й**

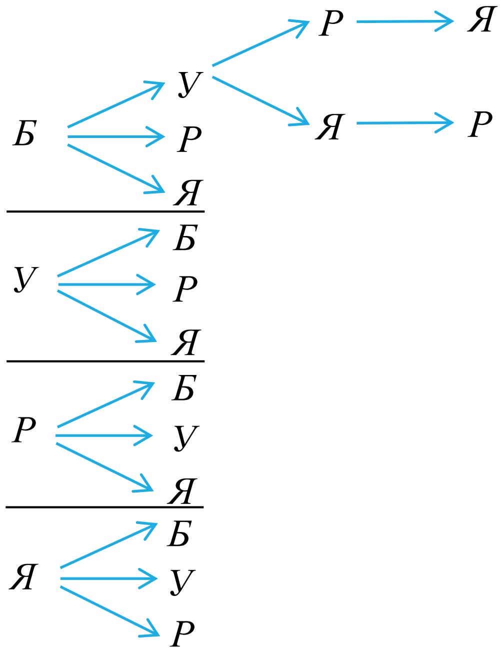
КОМБИНАТОРИКА. ОБЩИЙ ПОДХОД

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ГРАФОВ ПОЗВОЛЯЕТ **ПРЕДСТАВИТЬ И ВИЗУАЛИЗИРОВАТЬ** РЕШЕНИЕ КОМБИНАТОРНЫХ ЗАДАЧ В ЯСНОМ И ИСЧЕРПЫВАЮЩЕМ ВИДЕ

Подобный подход обусловлен природой комбинаций - **«правилом произведения»** т.е. правилом подсчета количества ветвей в графе

КОМБИНАТОРИКА. ПЕРЕСТАНОВКИ

СКОЛЬКО РАЗЛИЧНЫХ СЛОВ ИЗ 4-Х БУКВ (НЕ ОБЯЗАТЕЛЬНО СЛОВАРНЫХ) МОЖНО СОСТАВИТЬ ИЗ БУКВ СЛОВА «БУРЯ»?



1. Каждый полный путь (маршрут) в графе соответствует решению;
2. количество путей определяется количеством вершин (узлов) и ребер, исходящих из вершин:

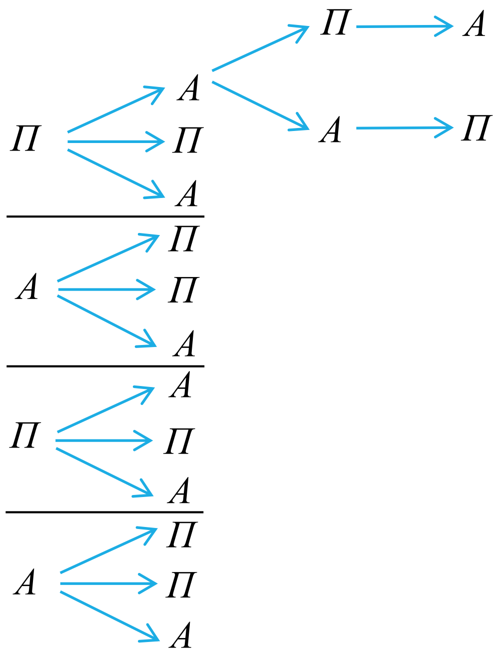
$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$$

Перестановки n элементов:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

КОМБИНАТОРИКА. ПЕРЕСТАНОВКИ

СКОЛЬКО РАЗЛИЧНЫХ СЛОВ ИЗ 4-Х БУКВ (НЕ ОБЯЗАТЕЛЬНО СЛОВАРНЫХ) МОЖНО СОСТАВИТЬ ИЗ БУКВ СЛОВА «ПАПА»?

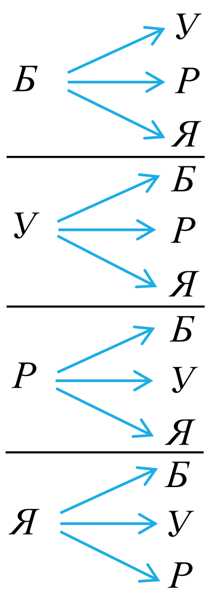


Поскольку две пары букв «А» и «П» повторяются, т.е. их перестановки не приводят к получению новых слов, необходимо общее количество перестановок 4-х букв разделить на количество перестановок 2-х букв «А» и 2-х букв «П»:

$$\frac{4!}{2!2!} = 3! = 6$$

КОМБИНАТОРИКА. РАЗМЕЩЕНИЯ

СКОЛЬКО РАЗЛИЧНЫХ СЛОВ ИЗ 2-Х БУКВ (НЕ ОБЯЗАТЕЛЬНО СЛОВАРНЫХ) МОЖНО СОСТАВИТЬ ИЗ БУКВ СЛОВА «БУРЯ»?



1. Каждый полный путь (маршрут) в новом графе соответствует решению;
2. количество путей снова определяется количеством вершин (узлов) и ребер, исходящих из вершин:

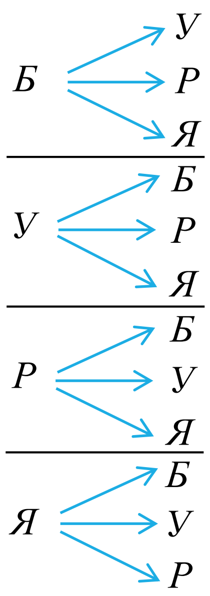
$$4 \cdot 3 = 12$$

Размещения из n элементов по k:

$$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1)) = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-(k-1))(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!} = A_n^k$$

КОМБИНАТОРИКА. СОЧЕТАНИЯ

СКОЛЬКО РАЗЛИЧНЫХ СЛОВ ИЗ 2-Х БУКВ (**ПОДМНОЖЕСТВ**, Т.Е. БЕЗ УЧЕТА ПОРЯДКА СЛОВ) МОЖНО СОСТАВИТЬ ИЗ БУКВ СЛОВА «БУРЯ»?



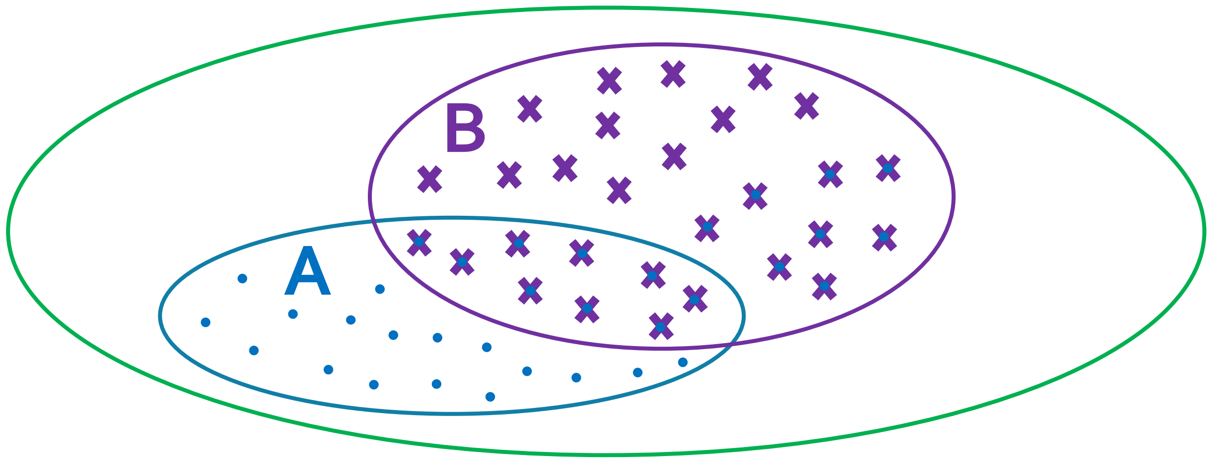
1. Каждый полный путь (маршрут) в новом графе соответствует решению;
2. количество путей определяется количеством вершин (узлов) и ребер, исходящих из вершин;
3. перестановка выбранных букв соответствует одному слову

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \Rightarrow C_4^2 = \frac{A_4^2}{2!} = \frac{4!}{2!2!} = 6$$

КОМБИНАТОРИКА И ВЕРОЯТНОСТЬ. ПРИМЕР

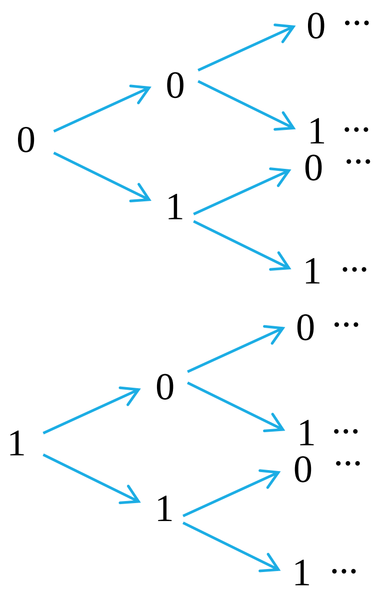
ИМЕЕТСЯ **N-ЭЛЕМЕНТНОЕ МНОЖЕСТВО** И ВЫБИРАЮТСЯ ДВА ЛЮБЫХ ЕГО ПОДМНОЖЕСТВА **A** И **B**. КАКОВА ВЕРОЯТНОСТЬ ТОГО, ЧТО **A** И **B** НЕ ПЕРЕСЕКАЮТСЯ?

$$P(AB=\varnothing)=?$$



КОМБИНАТОРИКА И ВЕРОЯТНОСТЬ. ПРИМЕР

ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА №1: СКОЛЬКО ПОДМНОЖЕСТВ У МНОЖЕСТВА ИЗ M ЭЛЕМЕНТОВ?



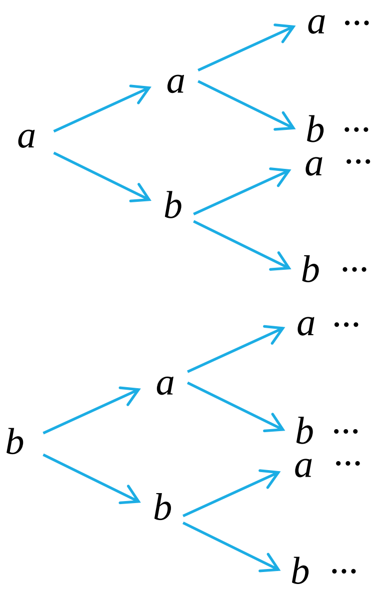
1. Каждый элемент из первоначального множества или принадлежит подмножеству или нет;
2. количество путей в графе решений таким образом будет равно:

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{M\ раз} = 2^M$$

КОМБИНАТОРИКА И ВЕРОЯТНОСТЬ. ПРИМЕР

ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА №2: БИНОМ НЬЮТОНА

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)\cdot(a+b)\cdot\ldots\cdot(a+b)}_{n\ \text{раз}} = \sum_{k=1,n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

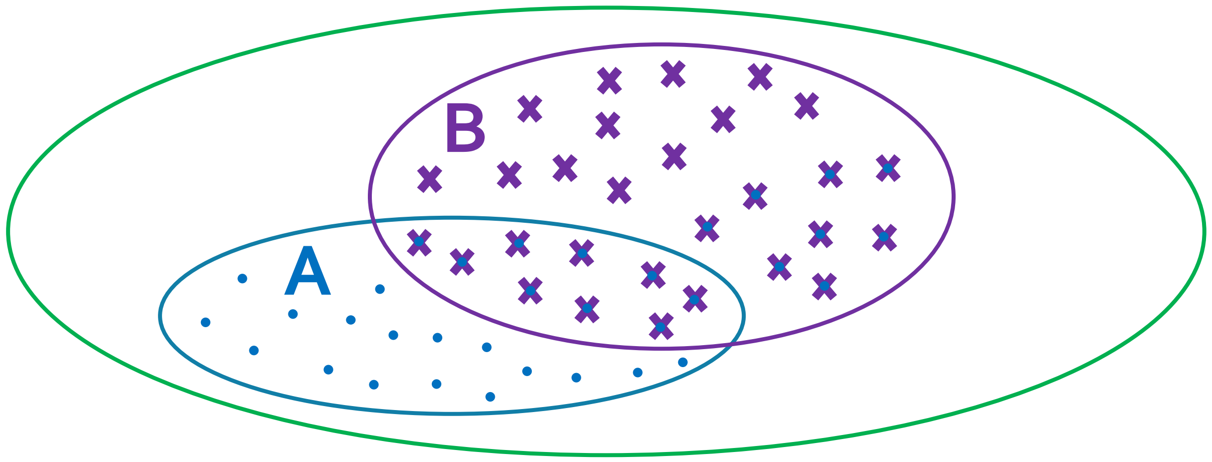


1. Каждый элемент из каждой скобки выбирается один раз;
2. с учетом приведения подобных слагаемых выделяются одинаковые выражения;
3. их количество равно числу сочетаний.

КОМБИНАТОРИКА И ВЕРОЯТНОСТЬ. ПРИМЕР

ИМЕЕТСЯ **N-ЭЛЕМЕНТНОЕ МНОЖЕСТВО** И ВЫБИРАЮТСЯ ДВА ЛЮБЫХ ЕГО ПОДМНОЖЕСТВА **A** И **B**. КАКОВА ВЕРОЯТНОСТЬ ТОГО, ЧТО **A** И **B** НЕ ПЕРЕСЕКАЮТСЯ?

$$P\left(AB=\varnothing\right)=?$$



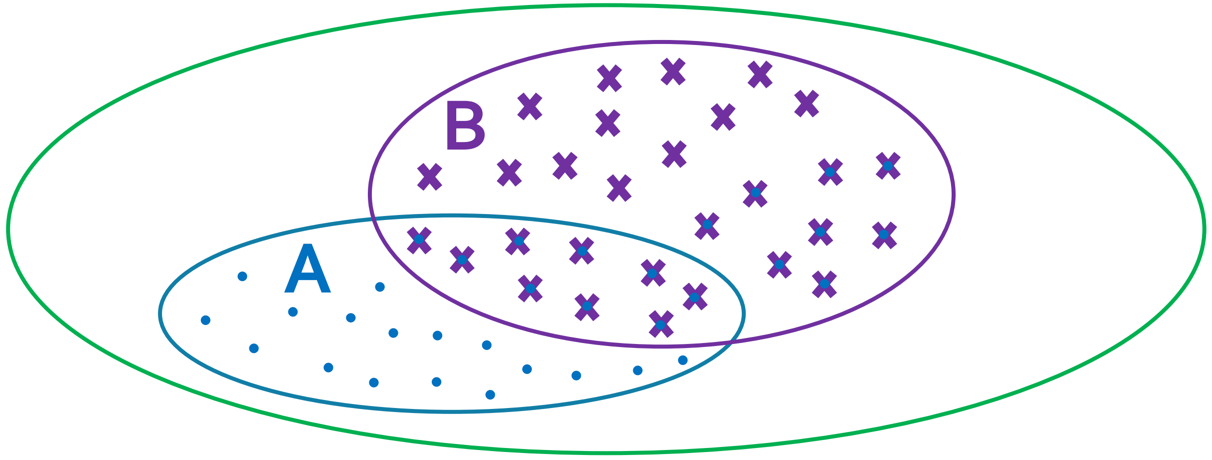
КОМБИНАТОРИКА И ВЕРОЯТНОСТЬ. ПРИМЕР

Пусть множество A содержит n элементов, тогда количество непересекающихся с ним подмножеств равно:

$$\sum_{n=0,N} C_N^n 2^{N-n} = \sum_{n=0,N} C_N^n 1^n 2^{N-n} = (1+2)^N = 3^N,$$

а искомая вероятность вычисляется как:

$$P = \frac{N_{благ}}{N_{общ}} = \frac{3^N}{2^N 2^N} = \frac{3^N}{4^N} = \left(\frac{3}{4}\right)^n$$



КОМБИНАТОРИКА И ВЕРОЯТНОСТЬ. ПРИМЕР

ПАРАДОКС ДНЕЙ РОЖДЕНИЯ:
КАКОВА ВЕРОЯТНОСТЬ ТОГО, ЧТО СРЕДИ N ПРИСУТСТВУЮЩИХ В АУДИТОРИИ ЛЮДЕЙ НАЙДУТСЯ ХОТЯ БЫ ДВОЕ, КОТОРЫЕ РОДИЛИСЬ В ОДИН ДЕНЬ
(ГОДЫ МОГУТ БЫТЬ РАЗНЫЕ)

Интуитивно представляется, что вероятность рассматриваемого события должна быть незначительной для небольшого числа людей (например, до 30 человек) и большого числа возможных дней рождения

КОМБИНАТОРИКА И ВЕРОЯТНОСТЬ. ПРИМЕР

ПУСТЬ ДНИ РОЖДЕНИЯ ВСЕХ ЛЮДЕЙ СЛУЧАЙНЫ, А ЭТО ЗНАЧИТ ЧТО КАЖДЫЙ/АЯ МОГ/ЛА РОДИТЬСЯ В ЛЮБОЙ ИЗ ДНЕЙ В ТЕЧЕНИЕ ГОДА РАВНОВЕРОЯТНО

ОБОЗНАЧИМ СОБЫТИЯ:

А – **«ХОТЯ БЫ ДВОЕ РОДИЛИСЬ В ОДИН ДЕНЬ»**;

В – **«НИКТО НЕ РОДИЛСЯ В ОДИН ДЕНЬ»;**

А И В – ПРОТИВОПОЛОЖНЫЕ СОБЫТИЯ,

КОМБИНАТОРИКА И ВЕРОЯТНОСТЬ. ПРИМЕР

ИСХОДЯ ИЗ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КЛАССИЧЕСКОЙ ВЕРОЯТНОСТИ И ФОРМУЛ ПЕРЕСТАНОВОК И РАЗМЕЩЕНИЙ, ПОЛУЧАЕМ СЛЕДУЮЩУЮ ЦЕПОЧКУ РАВЕНСТВ:

$$P(A)=1-P(B)=1-\frac{365\cdot 364\cdot\ldots\cdot\left(365-(N-1)\right)}{365\cdot 365\cdot\ldots\cdot 365}=1-\frac{365!}{365^{N}\left(365-N\right)!}$$

Количество человек, N	5	10	22	23	30	60
Вероятность	2,7%	11,7%	47,6%	50,7%	70,6%	99,4%

КОМБИНАТОРИКА И ВЕРОЯТНОСТЬ. ПРИМЕР

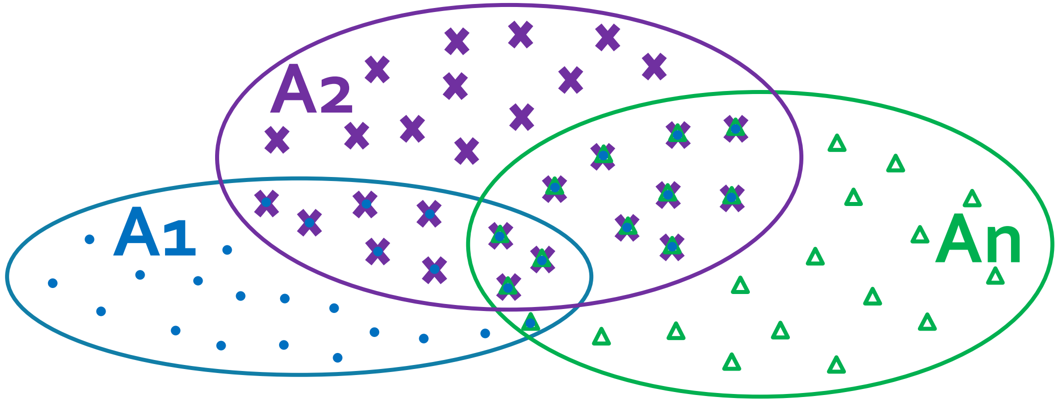
ПАРАДОКС СЛУЧАЙНЫХ ПЕРЕСТАНОВОК:
ПОСЕТИТЕЛИ ТЕАТРА СДАЮТ СВОИ ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ШЛЯПЫ В ГАРДЕРОБ, КОТОРЫЕ ЗАТЕМ СЛУЧАЙНЫМ ОБРАЗОМ ПЕРЕМЕШИВАЮТСЯ И РАЗДАЮТСЯ В КОНЦЕ СПЕКТАКЛЯ ОБРАТНО;
НАЙТИ ВЕРОЯТНОСТЬ ТОГО, ЧТО ХОТЯ БЫ ОДИН ЧЕЛОВЕК УЙДЁТ В СВОЕЙ ШЛЯПЕ

Интуитивно представляется, что с увеличением количества человек вероятность должна убывать до малых величин ввиду существенного роста числа перестановок

КОМБИНАТОРИКА И ВЕРОЯТНОСТЬ. ПРИМЕР

ФОРМАЛИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ НА ЯЗЫКЕ МНОЖЕСТВ

1. Обозначим события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ как следующие события: первый человек уйдет в своей шляпе, второй человек уйдет в своей шляпе и т.д.;
2. событие $A_1+A_2+\ldots+A_n$ эквивалентно событию - «Хотя бы один человек уйдёт в своей шляпе»;

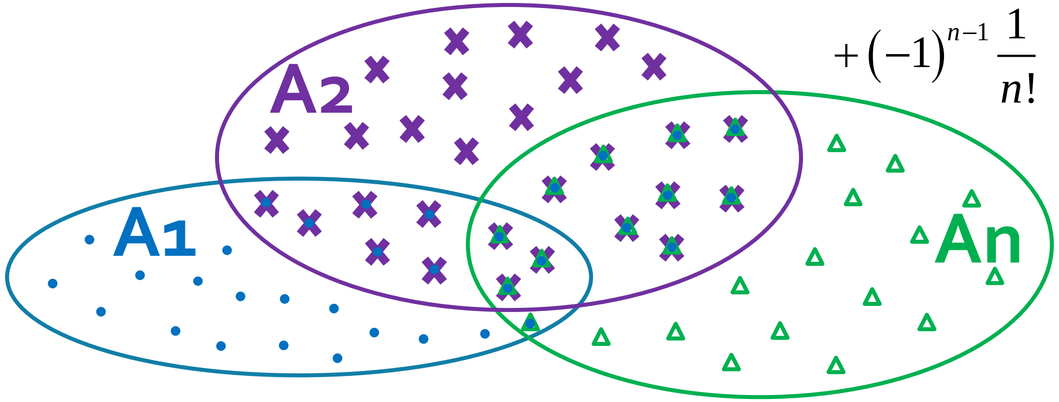


КОМБИНАТОРИКА И ВЕРОЯТНОСТЬ. ПРИМЕР

ФОРМУЛА ВКЛЮЧЕНИЙ-ИСКЛЮЧЕНИЙ

$$
\begin{aligned}
P(A_1+\ldots+A_n) &= P(A_1)+\ldots+P(A_n) \\
&- P(A_1A_2)-\ldots-P(A_{n-1}A_n)+ \\
&+ P(A_1A_2A_3)+\ldots+P(A_{n-2}A_{n-1}A_n)- \\
&-\ldots+ \\
&+(-1)^{n-1}P(A_1\ldots A_n)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(A_1+\ldots+A_n) &= \left\{\frac{(n-1)!}{n!}+\ldots+\frac{(n-1)!}{n!}\right\} \\
&- \left\{\frac{(n-2)!}{n!}+\ldots+\frac{(n-2)!}{n!}\right\}+ \\
&+ \left\{\frac{(n-3)!}{n!}+\ldots+\frac{(n-3)!}{n!}\right\}- \\
&-\ldots+ \\
&+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}
\end{aligned}
$$



КОМБИНАТОРИКА И ВЕРОЯТНОСТЬ. ПРИМЕР

ФОРМУЛА ВКЛЮЧЕНИЙ-ИСКЛЮЧЕНИЙ

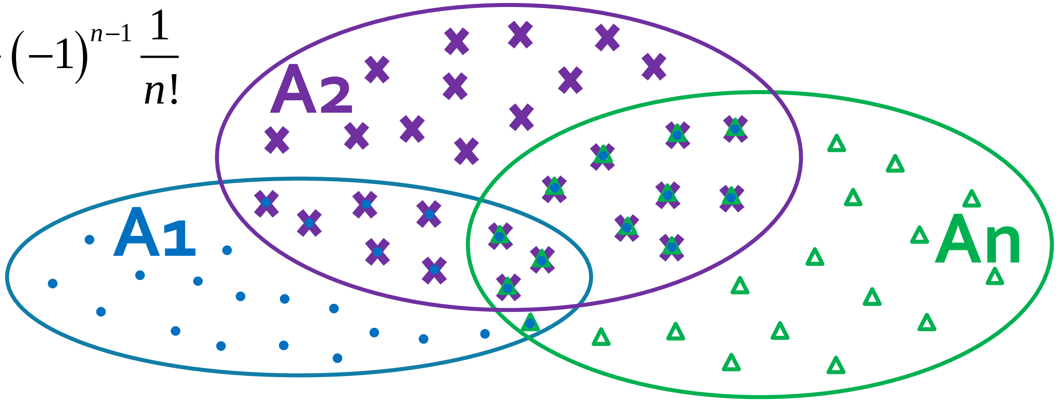
$$P(A_1+\ldots+A_n)=$$

$$=\left\{\frac{(n-1)!}{n!}+\ldots+\frac{(n-1)!}{n!}\right\}-\left\{\frac{(n-2)!}{n!}+\ldots+\frac{(n-2)!}{n!}\right\}+\left\{\frac{(n-3)!}{n!}+\ldots+\frac{(n-3)!}{n!}\right\}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}=$$

$$=C_n^1\frac{(n-1)!}{n!}-C_n^2\frac{(n-2)!}{n!}+C_n^3\frac{(n-3)!}{n!}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}=$$

$$=\frac{n!}{(n-1)!}\frac{(n-1)!}{n!}-\frac{n!}{2!(n-2)!}\frac{(n-2)!}{n!}+\frac{n!}{3!(n-3)!}\frac{(n-3)!}{n!}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}$$

$$=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}$$



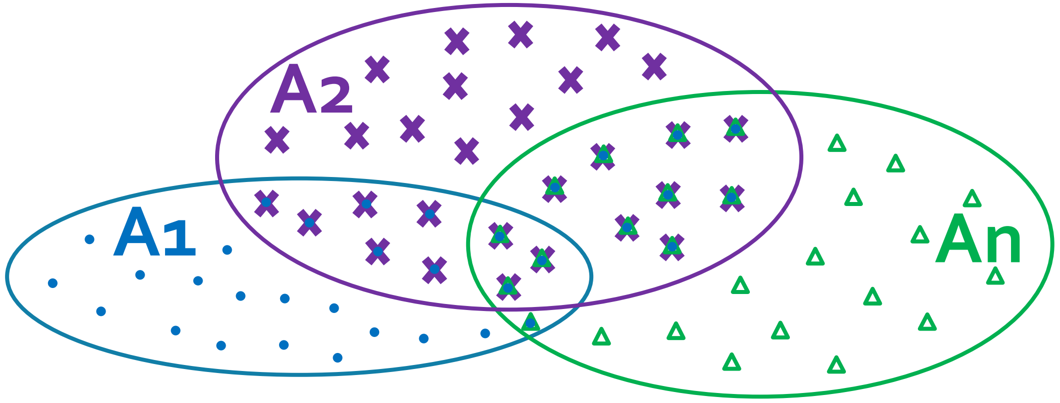
КОМБИНАТОРИКА И ВЕРОЯТНОСТЬ. ПРИМЕР

ФОРМУЛА ВКЛЮЧЕНИЙ-ИСКЛЮЧЕНИЙ

$$P\left(A_1+\ldots+A_n\right)=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}\approx 1-\frac{1}{e}\approx 63\%,$$

$$e^{-1}=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\ldots.$$

ВЕРОЯТНОСТЬ БОЛЬШАЯ И ПОЧТИ НЕ ЗАВИСИТ ОТ КОЛИЧЕСТВА ПОСЕТИТЕЛЕЙ



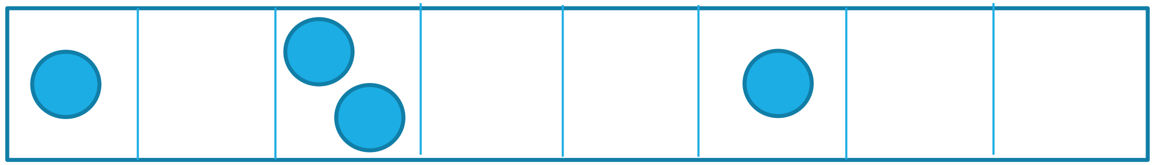
УРНОВАЯ СХЕМА РАЗМЕЩЕНИЯ ШАРОВ ПО ЯЩИКАМ

(!) ШАРЫ различимы, ЯЩИКИ различимы;

(!) ШАРЫ неразличимы, ЯЩИКИ различимы;

ШАРЫ различимы, ЯЩИКИ неразличимы;

ШАРЫ неразличимы, ЯЩИКИ неразличимы.



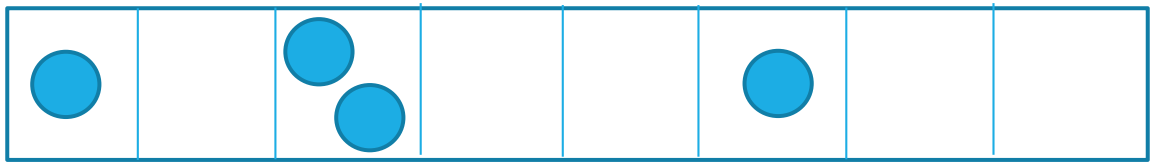
УРНОВАЯ СХЕМА РАЗМЕЩЕНИЯ ШАРОВ ПО ЯЩИКАМ

ШАРЫ различимы (n), ЯЩИКИ различимы (k),
тогда количество вариантов размещения шаров
по ящикам согласно правилу произведения равно:

$$\underbrace{k \cdot k \cdot \ldots \cdot k}_{n\ раз} = k^n$$

Для 3-х шаров и 3-х ящиков получаем:

$$3^3 = 27$$



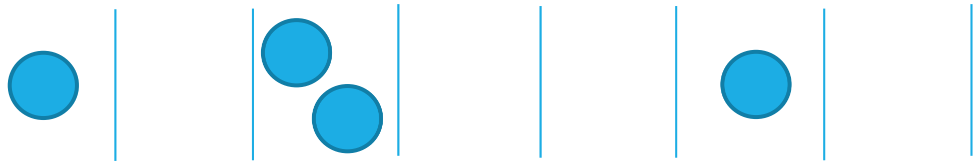
УРНОВАЯ СХЕМА РАЗМЕЩЕНИЯ ШАРОВ ПО ЯЩИКАМ

ШАРЫ неразличимы (n), ЯЩИКИ различимы (k),
тогда количество вариантов размещения шаров
по ящикам согласно «схеме перегородок»
(k урн и k-1 перегородка) равно:

$$C_{n+k-1}^{k-1} = C_{n+k-1}^{n}$$

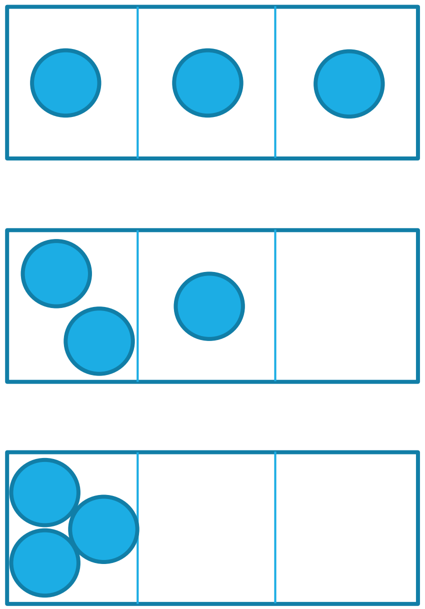
Для 3-х шаров и 3-х ящиков получаем:

$$C_{3+3-1}^{3-1} = C_5^2 = 10$$



УРНОВАЯ СХЕМА РАЗМЕЩЕНИЯ ШАРОВ ПО ЯЩИКАМ

ШАРЫ неразличимы (n), ЯЩИКИ неразличимы (k),
для 3-х шаров и 3-х ящиков получаем ТРИ варианта:



УРНОВАЯ СХЕМА РАЗМЕЩЕНИЯ ШАРОВ ПО ЯЩИКАМ

ШАРЫ неразличимы (7), ЯЩИКИ неразличимы

Случайное размещение 7 шаров по 7 ящикам

Числа заполнения	Число размещений равно $7! \times 7!$, деленному на	Вероятность (число размещений, деленное на 7^7)
1, 1, 1, 1, 1, 1, 1	$7! \times 1!$	0,006 120
2, 1, 1, 1, 1, 1, 0	$5! \times 2!$	0,128 518
2, 2, 1, 1, 1, 0, 0	$2!\ 3!2! \times 2!2!$	0,321 295
2, 2, 2, 1, 0, 0, 0	$3!3! \times 2!2!2!$	0,107 098
3, 1, 1, 1, 1, 0, 0	$4!2! \times 3!$	0,107 098
3, 2, 1, 1, 0, 0, 0	$2!3! \times 3!2!$	0,214 197
3, 2, 2, 0, 0, 0, 0	$2!4! \times 3!2!2!$	0,026 775
3, 3, 1, 0, 0, 0, 0	$2!4! \times 3!3!$	0,017 850
4, 1, 1, 1, 0, 0, 0	$3!3! \times 4!$	0,035 699
4, 2, 1, 0, 0, 0, 0	$4! \times 4!2!$	0,026 775
4, 3, 0, 0, 0, 0, 0	$5! \times 4!3!$	0,001 785
5, 1, 1, 0, 0, 0, 0	$2!4! \times 5!$	0,005 355
5, 2, 0, 0, 0, 0, 0	$5! \times 5!2!$	0,001 071
6, 1, 0, 0, 0, 0, 0	$5! \times 6!$	0,000 357
7, 0, 0, 0, 0, 0, 0	$6! \times 7!$	0,000 008

Интуитивно представляется, что наиболее вероятный случай близок к равномерному распределению, т.е. «размазыванию» шаров по ящикам

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

БЛАГОДАРЮ ЗА ВНИМАНИЕ!