BTS SIO

Session 2018

Épreuve : **Mathématiques**

Durée de l'épreuve : 2 heures

PROPOSITION DE CORRIGÉ

Exercice 1

1. Pour obtenir l'expression booléenne E on traduit chacun des critères de publication par un produit de variables booléennes. Ainsi :
   - La vidéo a obtenu la note 5 $(a = 1)$ **ET** la vidéo comptabilise un nombre de vues supérieures à 200 $(b = 1)$ donne ab

     OU
   - La vidéo a obtenu la note 5 $(a = 1)$ **ET** la vidéo est récente $(c = 1)$ donne ac

     OU
   - La vidéo ne comptabilise pas un nombre de vues supérieures à 200 $(b = 0)$ **ET** la vidéo est récente $(c = 1)$ donne $\overline{b}c$

     OU
   - La vidéo n'a pas obtenu la note 5 $(a = 0)$ **ET** la vidéo comptabilise un nombre de vues supérieures à 200 $(b = 1)$ donne $\overline{a}b$

D'où $\boldsymbol{E = ab + ac + \overline{b}c + \overline{a}b}$

2.
   a) À partir d'une table de vérité nous pouvons obtenir le diagramme de Karnaugh suivant

c \ ab	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	1	1	1	1

   b) On obtient alors l'expression simplifiée de $\boldsymbol{E = b + c}$

   c) Dans le contexte de l'exercice, on en déduit qu'une vidéo est mise sur la page d'accueil si elle comptabilise un nombre de vues supérieures à 200 ou si elle est récente

3. Le critère décrit correspond à l'expression booléenne $\overline{c}\overline{a}b$, d'après le diagramme précédent, l'expression E vaut alors 1, cette vidéo est mise sur la page d'accueil.
4. On repère dans le diagramme, les cases où apparaissent 0. Ce qui nous donne

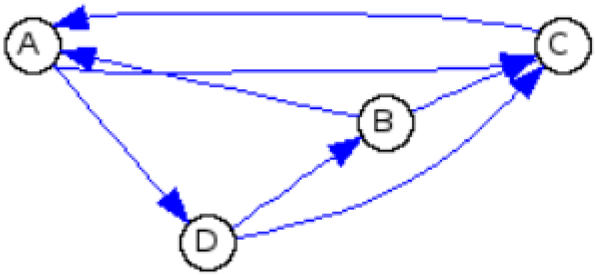
$$\overline{E} = \overline{a}\overline{b}\overline{c} + a\overline{b}\overline{c} = \overline{b}\overline{c}(a + \overline{a}) = \overline{b}\overline{c}$$

   Une vidéo n'est pas mise sur la page d'accueil si elle comptabilise un nombre de vues inférieur à 200 ET si elle n'est pas récente.

Exercice 2

Partie A

1.



2.

a)

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Chaque terme m_{ij} situé à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne vaut 1 s'il y a un arc d'origine i et d'extrémité j et 0 sinon.

b) Tous les termes de la diagonales sont nuls ceci signifie qu'il n'existe pas de boucles dans le graphe.

3.

a)

$$M^4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Le graphe ne contient des circuits car tous les sommets ne sont pas de degré pair. Il n'y a donc aucun cycle eulérien (un cycle qui passe par une et une seule fois par chaque arête du graphe)

c) $M^4{}_{13}$=3 est le nombre de chemins de longueur 4 partant de A vers C.
Nous avons les chemins : A-C-A-D-C, A-D-B-A-C et A-D-C-A-C

4. La matrice $\widehat{M} = I + M + M^2 + M^3$ où I est la matrice identité

On obtient alors $\widehat{M} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

La matrice de fermeture transitive représente tous les chemins existants entre toute paire de sommets plus les boucles réflexives et les chemins rajoutés pour la fermeture transitive

Ici, on a donc tous les liens entre les pages web et ceux rajoutés afin que toutes les pages « communiquent »

Partie B

1. Le sommet C a trois prédécesseurs (A, B et D) qui ont chacun deux successeurs. D'où
$$c = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{d}{2}$$
2.
   a) À partir du système (S)
$$AX = \begin{pmatrix} 0,5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -0,5 \\ 0,5 & -1 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -0,5 \end{pmatrix}$$
Donc $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -0,5 \end{pmatrix}$

   b) On calcule le produit BA
$$BA = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0,75 & -0,25 & -0,25 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -0,5 \\ 0,5 & -1 & 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
On peut en déduire que B est l'inverse de A et on peut écrire $B^{-1} = A$

   c) En reprenant l'équation
$$AX = Y$$
   On multiplie par B
$$BAX = BY$$
   Or $BA = I$, on obtient $X = BY$

   On calcule alors le produit BY pour obtenir la solution du système :
$$X = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0,75 & -0,25 & -0,25 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0,875 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$
3. Chaque ligne de la matrice X donne respectivement le score des pages B, C et D. En classant ces scores par ordre décroissant on obtient alors le classement A, C, D et B.

Exercice 3

1. On suit les étapes données pour calculer la clé de contrôle avec les chiffres du numéro ISSN du Courrier International
$$N = 8 \times 1 + 7 \times 1 + 6 \times 5 + 5 \times 4 + 4 \times 5 + 3 \times 1 + 2 \times 6 = 100$$

On a alors $-N \equiv -100[11] \equiv 10[11]$
Le reste de la division euclidienne de $-N$ par 11 est donc 10, ce qui correspond à la clé de contrôle donné (X).

2.
   a) La fonction f n'est pas injective car il peut exister deux ouvrages dont la clé est identique mais les chiffres du numéro ISSN sont tous différents, comme par exemple Libération et le Nouvel Observateur.
   b) La fonction f est surjective car pour toutes clés, il existe un numéro ISSN correspondant.

3.
   a) De nouveau on suit les étapes pour déterminer la clé de contrôle.

$$N = 8 \times 3 + 7 \times \mathrm{n} + 6 \times 0 + 5 \times 8 + 4 \times 2 + 3 \times 1 + 2 \times 3 = 81 + 7\mathrm{n}$$

On a alors $-N = -(81 + 7n) \equiv 8[11]$ car 8 est la clé de contrôle de ce journal.

Cette équation nous donne $81 + 7n \equiv -8[11] \equiv 3[11]$

4. On résout l'équation précédente par le théorème des restes chinois (ce qui est assez trivial car 11 est un nombre premier)

$$7n \equiv -78[11] \equiv 10[11]$$

L'inverse de 7 est $7^{-1} = 8[11]$, ainsi $n \equiv 8 \times 10[11] \equiv 3[11]$

n est un nombre entier compris entre 0 et 9, dont le reste de la division euclidienne par 11 est 3.

On sait que $3 = 11 \times 1 - 8$ donc $3 \equiv -8[11] \equiv 3[11]$ ainsi $n = 3$

On peut vérifier en calculant la clé de contrôle. Ici $N = 102$ et $102 \equiv 3[11]$ (car $102 = 9 \times 11 + 3$)