

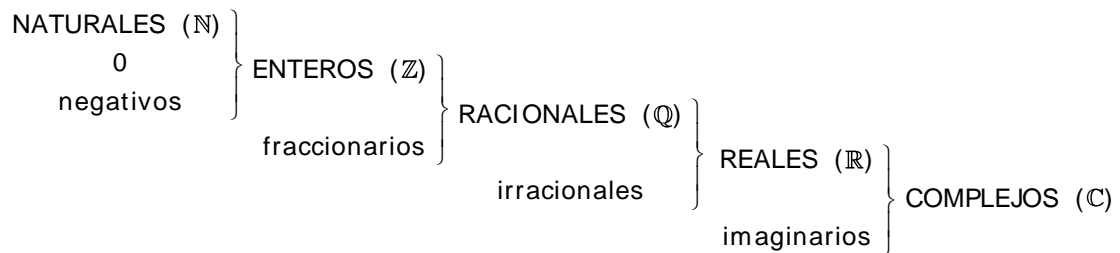
Módulo 2

Conjuntos Numéricos

“Los números son la esencia de las cosas”

Pitágoras

Vamos a comenzar nuestro estudio recordando el siguiente diagrama:



Este cuadro nos muestra cómo se van ampliando los **conjuntos numéricos** desde el conjunto de los números naturales hasta llegar a los números complejos, y eso es lo que haremos en este módulo: iremos recorriendo los diferentes conjuntos numéricos recordando sus propiedades y también las de las operaciones que podemos realizar en cada uno de ellos.

NÚMEROS NATURALES (\mathbb{N})

Comencemos por el primer conjunto numérico: los **números naturales**, a este conjunto lo simbolizaremos con la \mathbb{N} .

$$\mathbb{N} = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; \dots\}$$

¿Por qué ponemos los puntos suspensivos? Porque si bien el conjunto \mathbb{N} tiene un primer elemento (el uno), no tiene un último elemento, es por lo tanto, un conjunto infinito.

Aunque el cero no es un número natural, muchas veces es necesario "agregarlo" a \mathbb{N} , en ese caso, el conjunto se simboliza \mathbb{N}_0 y se lo denomina "*naturales con el cero*" o simplemente "*ene sub-cero*".

$$\mathbb{N}_0 = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; \dots\}$$

ACTIVIDAD 1

Representar los siete primeros números naturales en la recta numérica y contestar:

- a) ¿Cuántos números naturales hay entre 2 y 6?
- b) ¿Cuántos entre 1 y 7?
- c) ¿Cuántos entre 2 y 3?

Como seguramente lo habrás contestado, puedes contar cuántos elementos de \mathbb{N} hay entre otros dos. Esto quiere decir que \mathbb{N} es un conjunto *discreto*.

Además, no podemos determinar el último elemento de este conjunto (¿Por qué?), por lo tanto es infinito.

También podemos ordenar los números naturales, de menor a mayor o viceversa, eso quiere decir que \mathbb{N} es un conjunto *ordenado*.

Operaciones en \mathbb{N}

No todas las operaciones son siempre posibles en el conjunto de los números naturales, veamos primero cuáles podemos resolver sin tener problemas:

- Suma
- Producto
- Potenciación

Pero también podemos realizar otras operaciones en algunos casos:

- Resta (si el minuendo es mayor que el sustraendo en \mathbb{N} , y si el minuendo es mayor o *igual* que el sustraendo en \mathbb{N}_0).
- Cociente (Si el dividendo es múltiplo del divisor y éste es distinto de cero).
- Radicación (Podemos extraer raíces cuadradas de cuadrados perfectos, raíces cúbicas de cubos perfectos, etc.).

ACTIVIDAD 2

Mediante ejemplos clasifique en **V** o **F** las siguientes afirmaciones sobre la propiedad distributiva:

1) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

2) $(a + b)^n = a^n + b^n$

3) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

ACTIVIDAD 3

Expresar de tres formas diferentes cada una de las siguientes operaciones, indicando la propiedad empleada:

a) $2 + 4 + 1 =$

b) $a + b + c =$

c) $2 \cdot 8 \cdot 7 =$

Algo para recordar:

- 1- Producto de potencias de igual base: es otra potencia de igual base cuyo exponente es la suma de los exponentes de los factores: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.
- 2- Cociente de potencias de igual base: $a^m : a^n = a^{m-n}$
- 3- Potencia de potencia: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.
- 4- Cuadrado de un binomio: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
- 5- Cubo de un binomio: $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
- 6- Producto de una suma por una diferencia: $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$.

ACTIVIDAD 4

1) Resolver:

$$a) (2 + a)^2 = \quad b) (2 - 3x)^2 = \quad c) (2x^5 + 3)^2 =$$

$$d) (-2m + 3)^3 = \quad e) (4a^2 - 2b^3)^3 =$$

2) Calcular: $a) (3a - 2b)(3a + 2b) =$ $b) (5 + 4x)(5 - 4x) =$

3) Escribir en forma abreviada:

$$a) (a + b) + (a + b) + (a + b) =$$

$$b) (a + b) \cdot (a + b) \cdot (a + b) =$$

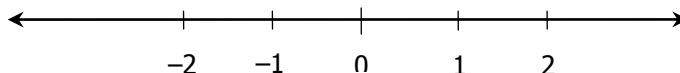
$$c) (xyz) \cdot (xyz) \cdot (xyz) \cdot (xyz) =$$

NÚMEROS ENTEROS (\mathbb{Z})

En las operaciones de números naturales se vio la imposibilidad de resolver una diferencia en la que el minuendo es menor que el sustraendo, por ejemplo:

$$5 - 9 \text{ no tiene solución en } \mathbb{N}$$

Para poder resolver estas diferencias se crean los *números negativos*. En la recta numérica los ubicamos a la izquierda del cero:



El conjunto de los números enteros resulta de unir los naturales con el cero y los negativos:

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \mathbb{N}_0.$$

Entonces: \mathbb{Z}^+ : enteros positivos (naturales), \mathbb{Z}^- : enteros negativos. Por lo tanto, podemos escribir: $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$.

Se define **valor absoluto** de un número entero x , y se simboliza $|x|$, al mismo número x si éste es positivo o nulo y al opuesto de x ($-x$) si el número es negativo. En símbolos:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Por ejemplo: $|5| = 5$; $|-3| = -(-3) = 3$.

Con respecto a las operaciones podemos hacer las siguientes observaciones:

- No hay inconvenientes para efectuar la resta.
- Para el producto y el cociente se debe tener en cuenta la regla de los signos.
- La potenciación es posible si la base es entera pero el exponente es natural.

Divisibilidad en \mathbb{Z}

Un número entero $a \neq 0$ es divisor de otro número entero b si existe un tercer número entero n tal que se verifica $a \cdot n = b$.

En símbolos:

$$a|b \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z} / b = a \cdot n$$

Observaciones: $a|b$ se lee " a es divisor de b "

Ejemplos:

$$-4|20 \text{ pues } 20 = -4 \cdot (-5)$$

$$8|48 \text{ pues } 48 = 8 \cdot 6$$

Decir que a es divisor de b es equivalente a decir que b es divisible por a o bien que b es un múltiplo de a .

Investigando...

Para saber si un número es o no divisible por otro nos valemos de los criterios de divisibilidad, te pedimos que investigues los criterios de divisibilidad por 2; 3; 5; 6; 7; 9; 11 y las potencias de 10.

Números primos

Se llaman números primos a aquellos números enteros distintos de 1 y -1 que solamente admiten *cuatro divisores*: 1, -1 , el mismo número y su opuesto. Por ejemplo:

3 es un número primo pues sus divisores son $D_3 = \{1; -1; 3; -3\}$.

A los números distintos de 1 que admiten más de cuatro divisores se los llama números *compuestos*.

Observación: 1 y -1 no son números primos ni compuestos.

ACTIVIDAD 5

Escribir los números primos menores que 100.

Máximo común divisor y mínimo común múltiplo

Recordemos las definiciones:

- Se llama Máximo Común Divisor (MCD) de dos o más números al número que resulta de multiplicar los factores primos *comunes* que los componen, con su menor exponente.
- Se llama mínimo común múltiplo (mcm) de dos o más números al número que resulta de multiplicar los factores primos *comunes y no comunes* que los componen, con su mayor exponente.

ACTIVIDAD 6

Hallar:

$$a) MCD(6; 9; 12) =$$

$$b) MCD(10; 20; 30; 50) =$$

$$c) MCD(10; 20; 35) =$$

$$d) mcm(3; 6; 9) =$$

$$e) mcm(10; 20; 50) =$$

$$f) mcm(25; 35; 36) =$$

Números coprimos

Dos números naturales son **coprimos o primos entre sí**, si el único divisor común que tienen es el 1. Por ejemplo 2 y 3 son coprimos, también lo son 4 y 7, y también 9 y 25 (verificarlo). Tengamos en cuenta que si bien dos números primos son siempre coprimos, no es necesario que los números dados sean primos para que resulten coprimos.

Investigando....

¿Sabés cuál es el mayor número primo conocido?

NÚMEROS RACIONALES (\mathbb{Q})

Si bien al introducir los números negativos hemos solucionado el problema de la resta, aún subsiste el problema para el cociente, ya que, por ejemplo $7:3$ no tiene solución en el conjunto de los números enteros.

Para dar solución a los cocientes donde el dividendo no es múltiplo del divisor se crearon los números fraccionarios.

$$\begin{array}{lcl} \underline{a} & \longrightarrow & \text{Numerador} \\ \underline{b} & \longrightarrow & \text{Denominador} \end{array}$$

El conjunto de los números enteros unido al de los fraccionarios forma el conjunto de los números racionales, que se simboliza con \mathbb{Q} .

Este conjunto, a diferencia de los conjuntos \mathbb{N} y \mathbb{Z} no es discreto, ya que entre dos números cualesquiera existe un número infinito de números racionales.

Para intercalar un número racional x entre dos números a y b es suficiente hacer $x = \frac{a+b}{2}$

(semisuma de a y b). Por ejemplo:

Intercalar un número racional entre 2 y 3:

$$\begin{aligned} 2 &< x < 3 \\ x &= \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2} \\ \therefore 2 &< \frac{5}{2} < 3 \end{aligned}$$

Si se desea seguir intercalando números se repite el proceso tantas veces como se quiera,

$$\text{así por ejemplo } 2 < x < \frac{5}{2} < 3 \quad ; \quad x = \frac{2 + \frac{5}{2}}{2} = \frac{9}{4} \dots \text{ etc.}$$

ACTIVIDAD 7

- a) Intercalar 3 números racionales entre 4 y 5.
- b) Intercalar 5 números racionales entre 0 y 1.
- c) Intercalar 2 números racionales entre -2 y -1.

Operaciones en \mathbb{Q}

Recordemos las reglas básicas para la **suma** y el **producto** de fracciones:

$$a) \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

$$b) \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

ACTIVIDAD 8

Resolver aplicando las reglas enunciadas para la suma y el producto:

$$a) \frac{3}{2} + \frac{5}{3} =$$

$$b) \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{2} =$$

Para **restar** dos fracciones, simplemente sumamos al minuendo el opuesto del sustraendo:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a}{b} + \left(-\frac{c}{d}\right) = \frac{ad - bc}{bd}$$

El **cociente** se resuelve multiplicando el dividendo por el recíproco o inverso del divisor:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Recordar: Dos números racionales son recíprocos o inversos multiplicativos si su producto es igual a 1.

Hay un número racional que no tiene recíproco... ¿Cuál es?

La **potenciación** puede hacerse en el conjunto de los números racionales para base racional y exponente *entero*:

a) Si el exponente es natural: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

b) Si el exponente es negativo: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}$

Radicación de números racionales

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \left(\frac{c}{d}\right)^n = \frac{a}{b}$$

Ejemplos:

$$* \sqrt[3]{\frac{64}{125}} = \frac{4}{5} \quad \text{pues} \quad \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{64}{125}$$

$$*\sqrt[5]{-\frac{1}{32}} = -\frac{1}{2} \quad \text{pues} \quad \left(-\frac{1}{2}\right)^5 = -\frac{1}{32}$$

$$*\sqrt{\frac{9}{16}} = \pm \frac{3}{4} \quad \text{pues} \quad \left(\pm \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

$$*\sqrt{-\frac{1}{81}} \text{ no tiene solución en } Q$$

Expresiones decimales

Puede darse una expresión decimal para los números racionales, por ejemplo:

$$\frac{1}{2} = 0,5 \quad , \quad \frac{3}{8} = 0,375 \text{ etc}$$

Para expresar una fracción como número decimal es suficiente efectuar el cociente entre el numerador y el denominador, pero hay fracciones que originan expresiones cuyas cifras decimales se repiten infinitamente, como por ejemplo:

$$\frac{1}{3} = 0,33333333333333333333\ldots$$
$$\frac{20}{37} = 0,54054054054054054054\ldots$$

Estas expresiones reciben el nombre de *expresiones decimales periódicas*.

Nos interesa un procedimiento para escribir una expresión decimal periódica en forma de fracción, para ello tendremos en cuenta lo siguiente:

- Para mayor comodidad en la escritura, escribiremos una sola vez el período con un arco sobre él. $0,3333333\dots = 0,\overline{3}$.
- Si el período comienza inmediatamente después de la coma, la expresión es *pura*, si existen cifras no periódicas antes del período la expresión es *mixta*. Por ejemplo: $0,\overline{5}$ es pura y $0,87\overline{2}$ es mixta.

Conversión de una expresión decimal periódica pura a fracción ordinaria

Ejemplo:

$$0, \overline{47} = \frac{47}{99}$$

Toda expresión decimal periódica de parte entera nula se puede transformar en una fracción ordinaria tal que:

- el numerador es el período;
- el denominador está formado por tantos nueves como cifras tiene el período.

ACTIVIDAD 9

Expresar como fracciones:

a) $0,\widehat{7} =$ b) $0,2\widehat{4} =$ c) $0,6\widehat{9}2 =$ d) $1,\widehat{4} =$ e) $6,4\widehat{5} =$

Conversión de una expresión decimal periódica mixta en fracción ordinaria

Ejemplo: $0,7\widehat{2}3 = \frac{723 - 7}{990}$

Toda expresión decimal periódica mixta con parte entera nula se puede convertir en una fracción ordinaria tal que:

- El numerador es igual al número que se forma escribiendo la parte no periódica seguida del período *menos* la parte no periódica;
- El denominador está formado por tantos nueves como cifras tiene el período, seguido de tantos ceros como cifras tiene la parte no periódica.

ACTIVIDAD 10

Escribir como fracción ordinaria:

a) $0,9\widehat{7} =$ b) $0,0\widehat{3} =$ c) $0,632\widehat{2}4 =$ d) $2,204\widehat{3}6 =$

El período 9

Si convertimos en fracción una expresión decimal periódica pura con período 9 $5,\widehat{9} = 5 + \frac{9}{9} = 5 + 1 = 6$ vemos que obtenemos un número entero.

Ahora transformemos una expresión decimal periódica mixta con período 9 $0,24\widehat{9} = \frac{249 - 24}{900} = \frac{225}{900} = \frac{1}{4} = 0,25$, el resultado es un número con un número *finito* de cifras decimales.

¿Qué conclusión se puede enunciar en estos casos?

.....

.....

.....

.....

.....

Vemos entonces que cualquier número racional puede escribirse como una expresión decimal periódica, podemos decir que el conjunto \mathbb{Q} es el conjunto de las expresiones decimales periódicas.

NÚMEROS IRRACIONALES

Como vimos antes, si un número tiene una cantidad finita de cifras decimales o tiene infinitas cifras decimales periódicas es un número racional. Pero podemos escribir números que, aunque tienen infinitas cifras decimales, éstas no forman período, por ejemplo:

0,1234567891011121314151617181920... (las cifras decimales son la sucesión de los números naturales);

0,1011001110001111000011111..... (las cifras decimales son una sucesión de un uno y un cero, luego, dos unos y dos ceros, tres unos y tres ceros, etc.)

Estos números *no son* racionales pues es imposible encontrar un período y por lo tanto no se pueden escribir como fracción ordinaria, los llamaremos *irracionales*.

Pero estos números pueden aparecer como solución de ecuaciones, por ejemplo, la ecuación $x^2 = 2$ tiene solución irracional (recuerda que en la escuela secundaria te demostraron que $\sqrt{2}$ es un número irracional) y se puede generalizar diciendo todas las raíces enésimas no exactas son irracionales. Estos números se denominan *irracionales algebraicos*. Además existen otros como el número π (relación de la circunferencia al diámetro) y e (base de los logaritmos naturales) que no son irracionales algebraicos sino *irracionales trascendentes*.

Como curiosidad te presentamos las 50 primeras cifras de $\sqrt{2}$ y de π . Del segundo, en los últimos años se han calculados varios millones de cifras decimales.

$$\sqrt{2} = 1,41421356237309504880168872420969807856967187537694...$$

$$\pi = 3,14159265358979323846264338327950288419716939937510.....$$

NÚMEROS REALES (\mathbb{R})

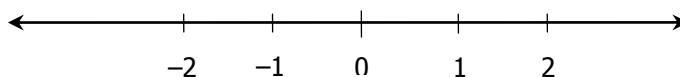
Si unimos al conjunto de los números racionales el de los números irracionales obtendremos el conjunto de los números *reales*, al que simbolizaremos con \mathbb{R} .

El conjunto \mathbb{R} , al igual que \mathbb{Q} es denso (o sea que entre dos reales siempre existe otro real), pero se diferencia de \mathbb{Q} , en que, mientras que en el conjunto de los racionales quedaban "huecos" en la recta numérica, en los números reales esos huecos han sido ocupados por los irracionales, con lo que podemos afirmar que los reales *cubren* toda la recta numérica, es decir que:

"A cada número real le corresponde un punto sobre la recta y a cada punto de la recta numérica le corresponde un número real".

Representación geométrica de los números reales

Los números reales se representan en una recta llamada recta real o eje real.



A cada punto de la recta real le corresponde un único número real y cada número real está representado por un único punto de la recta real.

Para la determinación de la escala, se elige un punto que representa al 0 y otro punto a la derecha que representa el 1. Se divide la recta a la derecha y a la izquierda de 0, tomando como unidad el segmento de longitud igual al determinado por 0 y 1. Quedan representados, entonces, los números enteros y los números reales completan la recta. Los números reales que se representan a la derecha de 0 son los reales positivos y los que se representan a la izquierda, los reales negativos. El 0 es el número real que no es positivo ni negativo.

Si $a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R}$, la igualdad $a = b$ significa que ambos representan al mismo número real, la desigualdad $a < b$ significa que a está a la izquierda de b y $a > b$ significa que a está a la derecha de b .

Ahora nos detendremos un poco en el estudio de una de las dos operaciones inversas de la potenciación: la *radicación*. (A propósito... ¿qué son dos operaciones inversas?)

Recordemos la definición de **raíz enésima** de un número real:

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a \quad (n \in \mathbb{N} \wedge n > 1)$$

Radicales

Llamaremos *radicales* a las expresiones formadas por el signo radical y una expresión numérica y/o literal debajo del mismo. Esa expresión se denomina *radicando*.

Ejemplos de radicales son:

$$\sqrt{2x}$$

$$\sqrt[5]{-\frac{1}{3}m^2z}$$

$$\sqrt[3]{4a^2bc}$$

ACTIVIDAD 11

Colocar **V** o **F** a las siguientes afirmaciones, puedes guiarte probando con ejemplos numéricos:

$$a) \sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$b) \sqrt{a-b} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

$$c) \sqrt{ab} = \sqrt{a} \sqrt{b}$$

$$d) \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Simplificación de radicales

Simplificar un radical es encontrar otro equivalente pero de menor índice.

Por ejemplo:

$$\sqrt[6]{8a^9y^6m^3} = \sqrt[6 \cdot 3]{2^{3 \cdot 3}a^{9 \cdot 3}y^{6 \cdot 3}m^{3 \cdot 3}} = \sqrt{2a^3y^2m}$$

Es decir que si en un radical de radicando positivo podemos dividir por un mismo número *todos* los exponentes del radicando y el índice, es posible la simplificación.

Pero si en el radicando tiene base negativa, esta regla no se cumple en todos los casos. Analicemos dos casos:

a) Índice impar:

$$\sqrt[3]{(-2)^3} = -2 \text{ (simplificando)}$$

$$\sqrt[3]{(-2)^3} = \sqrt[3]{-8} = -2 \text{ (resolviendo)}$$

Como los resultados coinciden, afirmamos que en este caso la simplificación es válida.

b) Índice par:

Si resolvemos las operaciones indicadas, obtenemos: $\sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2$.

Si aplicamos directamente la simplificación: $\sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6 \div 2]{(-8)^{2 \div 2}} = \sqrt[3]{-8} = -2$.

Como vemos, los resultados **no** coinciden y en consecuencia *no se puede simplificar un radical con radicando de base negativa e índice par*.

En general:

$$\sqrt{b^2} = |b|$$

Extracción de factores fuera del radical

Teniendo en cuenta las propiedades de la radicación, podemos extraer fuera del radical aquellos factores del radicando que figuren con un exponente *mayor o igual* que el índice de la raíz.

Veamos cómo lo hacemos aplicando las propiedades en los dos ejemplos siguientes:

Ejemplo 1: $\sqrt{a^5} = \sqrt{a^4 \cdot a} = \sqrt{a^4} \cdot \sqrt{a} = a^2 \sqrt{a}$ ¿Puede nombrar las propiedades que se usaron?

Ejemplo 2: $\sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{3^4} = \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{3} = 3 \cdot \sqrt[3]{3}$

Este procedimiento resulta complicado si en el radicando figuran varios factores, por lo que daremos una regla práctica que nos permita trabajar con mayor rapidez:

“Si el exponente del factor es mayor o igual que el índice de la raíz, se hace la división entera del exponente por el índice. El resultado del cociente es el exponente con el que dicho factor figurará *fuera* del radical y el resto de la división es el exponente con el que figurará dentro del radical”.

exponente	índice
exponente con el que “queda”	exponente con el que “sale”

Prueba resolver los ejemplos 1 y 2 aplicando la regla práctica... ¿No te resulta más sencillo?

Reducción a mínimo común índice

Reducir dos o más radicales a mínimo común índice es encontrar otros radicales que, siendo respectivamente equivalentes a los dados, tengan por índice común al mínimo común múltiplo de los radicales dados.

Por ejemplo:

a) Reducir a mínimo común índice los siguientes radicales: $\sqrt{3}$; $\sqrt[5]{2a^2}$; $\sqrt[4]{3a^3}$

El mínimo común múltiplo de los índices es 20 (verificarlo), por lo tanto, deberemos multiplicar el índice y el o los exponentes de cada radicando por un número tal que los radicales sean ahora de índice 20:

$$\begin{aligned}\sqrt{3} &= {}^{2 \cdot 10}\sqrt{3^{1 \cdot 10}} = {}^{20}\sqrt{3^{10}} \\ \sqrt[5]{2a^2} &= {}^{5 \cdot 4}\sqrt{(2a^2)^4} = {}^{20}\sqrt{2^4 a^8} \\ \sqrt[4]{3a^3} &= {}^{4 \cdot 5}\sqrt{(3a^3)^5} = {}^{20}\sqrt{3^5 a^{15}}\end{aligned}$$

b) Resolveremos este ejemplo aplicando una regla práctica similar a la usada para el común denominador de fracciones, es decir, que dividiremos el mínimo común índice por cada uno de los índices de los radicales y luego multiplicamos ese resultado por cada uno de los exponentes de los factores:

Reducir a mínimo común índice: $\sqrt[3]{3bm^2}$; $\sqrt[6]{2a^2}$.

Como $mcm(3; 6) = 6$, entonces resulta:

$$\sqrt[6]{3^2 b^2 m^4} ; \sqrt[6]{2a^2}$$

Radicales semejantes

Dos o más *radicales son semejantes* si tienen igual índice e igual radicando.

$$2\sqrt[3]{x^2y} \text{ y } -\frac{2}{3}\sqrt[3]{x^2y} \text{ son radicales semejantes}$$

Operaciones con radicales

1) *Suma algebraica*

Pueden presentarse dos casos: que los radicales sean semejantes o que no lo sean. En el primero de ellos se obtiene un radical semejante a los dados cuyo coeficiente es la suma algebraica de los coeficientes de los radicales dados. En el segundo caso, simplemente la operación se deja indicada.

Ejemplos:

$$a) 3\sqrt{2x} + 5\sqrt{2x} - 6\sqrt{2x} = (3 + 5 - 6)\sqrt{2x} = 2\sqrt{2x}$$

$$b) 4\sqrt[3]{2} - 11\sqrt{2} + 5\sqrt[3]{2a} \text{ (queda indicado)}$$

2) *Producto*

El producto de dos o más radicales es otro radical que tiene por coeficiente al producto de los coeficientes de los dados y cuyo radicando está formado por el producto de los radicandos de los dados, reducido a común índice si es necesario.

Ejemplos:

$$a) 2\sqrt[3]{4} \cdot (-3\sqrt[3]{4}) \cdot (-4\sqrt[3]{4}) = 24\sqrt[3]{4^3} = 24 \cdot 4 = 96$$

$$b) 2\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt[6]{3^2} \cdot \sqrt[6]{2^3} = 2\sqrt[6]{9 \cdot 8} = 2\sqrt[6]{72}$$

3) Cociente

El coeficiente y el radicando del resultado son, respectivamente, los cocientes de los coeficientes y de los radicandos dados (ordenadamente y después de reducidos a común índice si es necesario).

Detengámonos en los siguientes casos:

$$a) \frac{1}{5} \sqrt[4]{3} : \frac{1}{4} \sqrt[4]{9} = \left(\frac{1}{5} : \frac{1}{4} \right) \sqrt[4]{3:9} = \frac{4}{5} \sqrt[4]{\frac{1}{3}}$$

$$b) 2 \sqrt{2} : \frac{4}{3} \sqrt[3]{2} = \left(2 : \frac{4}{3} \right) \sqrt[6]{2^3:2^2} = \frac{3}{2} \sqrt[6]{2}$$

Racionalización de denominadores

En una expresión puede aparecer algún radical en el denominador, como en las siguientes:

$$\frac{3x}{\sqrt{2x}} ; \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{5}} ; \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{7}}$$

Racionalizar el denominador de una expresión es encontrar otra expresión equivalente pero con denominador racional.

Existen cuatro casos, nosotros nos detendremos en el estudio de tres de ellos:

Primer Caso: El denominador es un radical único

Dada la expresión $\frac{3}{\sqrt{5}}$, sabemos que dicha expresión no altera si se multiplican numerador y denominador por un mismo número, se trata de buscar entonces un radical del mismo índice que el dado, de tal forma que al multiplicarlo por el que figura en el denominador se obtenga una expresión racional.

Dicho radical se puede obtener fácilmente de la siguiente forma:

Las bases son las mismas que las del radicando dado y los exponentes con los que figuran se obtiene haciendo la diferencia entre el índice de la raíz y el exponente original. En nuestro caso, el índice es 2 y el exponente es 1, por lo tanto, para racionalizar la expresión, deberemos multiplicar numerador y denominador por $\sqrt{5}$:

$$\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3 \cdot \sqrt{5}}{\underbrace{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}}_{\text{producto de radicales de igual índice}}} = \frac{3 \sqrt{5}}{\sqrt{5^2}} = \frac{3 \sqrt{5}}{5}$$

simplificación

Veamos otro ejemplo:

$$\frac{5x}{\sqrt[4]{x^2y^3}} = \frac{5x \cdot \sqrt[4]{x^2y}}{\sqrt[4]{x^2y^3} \cdot \sqrt[4]{x^2y}} = \frac{5x \cdot \sqrt[4]{x^2y}}{\sqrt[4]{x^4y^4}} = \frac{5x \cdot \sqrt[4]{x^2y}}{xy} = \frac{5 \sqrt[4]{x^2y}}{y}$$

(Observación: en el 3º paso, hemos podido dividir numerador y denominador por x, pues estamos suponiendo que $x \neq 0$, ya que está en el denominador del enunciado del ejercicio.)

Si algún factor del radicando tiene exponente mayor que el índice del radical, es conveniente extraerlo antes de racionalizar.

Segundo Caso: El denominador es la suma o diferencia de un número real y un irracional cuadrático.

Dada la expresión $\frac{2x}{\sqrt{2}+2}$, para racionalizar su denominador se multiplican numerador y denominador por el *binomio conjugado* del denominador: dado $a + b$ su conjugado es $a - b$. O sea que en nuestro caso multiplicaremos por $\sqrt{2} - 2$.

$$\frac{2x}{\sqrt{2}+2} = \frac{2x \cdot (\sqrt{2}-2)}{(\sqrt{2}+2)(\sqrt{2}-2)} = \frac{2x \cdot (\sqrt{2}-2)}{\underbrace{(\sqrt{2})^2 - 2^2}_{\text{producto de una suma por una diferencia}}} = \frac{2x \cdot (\sqrt{2}-2)}{2-4} = \frac{2x \cdot (\sqrt{2}-2)}{-2} = -x \cdot (\sqrt{2}-2)$$

Tercer caso: El denominador es una suma o diferencia de irracionales cuadráticos.

El procedimiento es similar al caso anterior, te lo dejamos para que lo enuncies:

$$\frac{2a}{\sqrt{7}+\sqrt{3}} = \frac{2a(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{3})} = \frac{2a(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{7-3} = \frac{2a(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{4} = \frac{a(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{2}$$

Potencia de exponente racional

La *potencia de exponente racional* se define de la siguiente forma:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Toda potencia de exponente racional es igual al radical cuyo índice es el denominador del exponente y cuyo radicando es la base de la potencia elevada a un exponente igual al numerador del exponente dado.

Ejemplos:

$$x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}, \quad z^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{z^5}, \quad a^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}, \text{ etc.}$$

La potencia de exponente racional goza de las mismas propiedades que la de exponente entero. (Verifícalas).

Hasta aquí lo que se refiere a la primera operación inversa de la potenciación, ya es momento de entrar en la otra operación inversa que es la *logaritmicación*.

Así como la radicación busca la base de una potencia, el logaritmo busca el exponente.

Logaritmicación

Se llama **logaritmo en base b de un número x** a otro número y , tal que, b elevado al exponente y sea igual a x .

En símbolos: $\log_b x = y \Leftrightarrow b^y = x \quad (b \in \mathbb{R}^+ \wedge b \neq 1)$

Ejemplos:

$$\log_2 8 = 3 \text{ pues } 2^3 = 8$$

$$\log_3 \frac{1}{9} = -2 \text{ pues } 3^{-2} = \frac{1}{9}$$

Casos particulares:

1) El logaritmo de 1, en cualquier base es igual a cero: $\log_b 1 = 0$ pues $b^0 = 1$.

2) En cualquier base, el logaritmo de la base es 1: $\log_b b = 1$ pues $b^1 = b$.

Recordar:

- Los números negativos no tienen logaritmo en el conjunto de los números reales.
- No existe el logaritmo de cero.
- La logaritimación no es distributiva con respecto a ninguna operación.

Otras propiedades:

- El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores:

$$\log_b (x \cdot y) = \log_b x + \log_b y$$

- El logaritmo de un cociente es igual a la diferencia entre el logaritmo del dividendo y el logaritmo del divisor:

$$\log_b (x : y) = \log_b x - \log_b y$$

- El logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base:

$$\log_b x^n = n \cdot \log_b x$$

- El logaritmo de una raíz enésima es igual al logaritmo del radicando dividido por el índice de la raíz:

$$\log_b \sqrt[n]{x} = \frac{\log_b x}{n}$$

- Si se elevan a un mismo exponente no nulo la base y el argumento de un logaritmo, el resultado no varía:

$$\log_b x = \log_{b^n} x^n$$

Logaritmos naturales y decimales

Si bien se puede trabajar con logaritmos en cualquier base, las más usuales en matemática son 10 y e .

A los logaritmos de base 10 se los denomina *logaritmos decimales* y se escriben $\log x$. Los logaritmos de base e se llaman *logaritmos naturales* y se simbolizan $\ln x$.

Todas las calculadoras científicas calculan ambos logaritmos.

Cambio de base

Aunque lo usual es trabajar con logaritmos decimales o con logaritmos naturales, en ocasiones podemos necesitar el logaritmo de un número en una base distinta de alguna de las nombradas. Podemos calcular el logaritmo en una base cualquiera c de un número a si aplicamos la siguiente fórmula:

$$\log_c a = \frac{\log_b a}{\log_b c}$$

Ejemplo: Calcular $\log_4 100$ sabiendo que $\log 4 \cong 0,6$

$$\log_4 100 = \frac{\log 100}{\log 4} \cong \frac{2}{0,6} \cong 3,33..$$

ECUACIONES

Una ecuación es una igualdad en la que aparecen números y letras (incógnitas) que se relacionan mediante operaciones matemáticas y cualquier valor de las incógnitas que verifique la igualdad, es una solución de la ecuación.

Ecuaciones lineales

Si la incógnita o variable de la ecuación está elevada únicamente a la primera potencia, la ecuación se llama lineal o de primer grado.

Ejemplos:

1. $3x - 4 = 1$ tiene como solución $x = \frac{5}{3}$
2. $x + 2 = \frac{3}{2}x - 5$ tiene como solución $x = 14$

ACTIVIDAD 12

Reemplazar el valor dado en cada caso y verificar si es correcto.

INTERVALOS

Los intervalos son subconjuntos de números reales y pueden ser abiertos, cerrados, semiabiertos o semicerrados.

Intervalos abiertos:

$$(a; b) = \{x / x \in \mathbb{R} \wedge a < x < b\} \quad a \text{ (---) } b$$

$$(a; +\infty) = \{x / x \in \mathbb{R} \wedge x > a\} \quad a \text{ (---) } \rightarrow$$

$$(-\infty; b) = \{x / x \in \mathbb{R} \wedge x < b\} \quad \leftarrow \text{ (---) } b$$

$$(-\infty; +\infty) = \{x / x \in \mathbb{R}\}$$



Intervalos cerrados:

$$[a; b] = \{x / x \in \mathbb{R} \wedge a \leq x \leq b\} \quad a \text{ [-----] } b$$

Intervalos semiabiertos o semicerrados:

$$[a; b) = \{x / x \in \mathbb{R} \wedge a \leq x < b\}$$

$$(a; b] = \{x / x \in \mathbb{R} \wedge a < x \leq b\}$$

ACTIVIDAD 13

Graficar los intervalos anteriores.

ACTIVIDAD 14

Escribir con notación de conjuntos y representar en la recta real los siguientes intervalos:

a) $[-5; 4] =$

b) $\left(\frac{3}{2}; 6\right) =$

c) $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right) =$

d) $\left(2; \frac{7}{2}\right] =$

ACTIVIDAD 15

Escribir con notación de intervalos y representar en la recta real los siguientes conjuntos:

a) $\{x / x \in \mathbb{R} \wedge 3 \leq x < 5\} =$

b) $\{x / x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 2\} =$

c) $\{x / x \in \mathbb{R} \wedge -8 < x \leq -1\} =$

d) $\{x / x \in \mathbb{R} \wedge x < -3\} =$

INECUACIONES

Una inecuación es una desigualdad en la que aparecen números y letras (incógnitas) que se relacionan mediante operaciones matemáticas y da como resultado un conjunto tal que al reemplazar la incógnita por cualquier valor del mismo se verifica la desigualdad. El conjunto solución, entonces, es un intervalo o una unión de intervalos.

Si la inecuación tiene una sola incógnita que está elevada a la primera potencia, la inecuación es lineal con una incógnita.

Para resolverla aplicamos propiedades:

- ✓ Si se suma o se resta un mismo número a ambos miembros de una desigualdad, la misma no cambia el sentido.
- ✓ Si se multiplica o divide cada miembro de una desigualdad por un número positivo, no cambia el sentido de la desigualdad.
- ✓ Si se multiplica o divide cada miembro de una desigualdad por un número negativo, cambia el sentido de la desigualdad.

Aplicamos propiedades para resolver las siguientes inecuaciones lineales:

Ejemplo 1:

$$5x - 2 < 3x + 7$$

$$5x - 2 + 2 < 3x + 7 + 2$$

$$5x < 3x + 9$$

$$5x - 3x < 3x + 9 - 3x$$

$$2x < 9$$

$$2x \cdot \frac{1}{2} < 9 \cdot \frac{1}{2}$$

$$x < \frac{9}{2}$$

Entonces la solución de la inecuación es: $S = \left(-\infty; \frac{9}{2}\right) = \left\{x / x \in \mathbb{R} \wedge x < \frac{9}{2}\right\}$

Ejemplo 2:

$$\frac{2x - 5}{-4} > \frac{1}{2}$$

$$\frac{2x - 5}{-4} \cdot (-4) < \frac{1}{2} \cdot (-4)$$

$$2x - 5 < -2$$

$$2x - 5 + 5 < -2 + 5$$

$$2x < 3$$

$$2x \cdot \frac{1}{2} < 3 \cdot \frac{1}{2}$$

$$x < \frac{3}{2}$$

Entonces la solución de la inecuación es: $S = \left(-\infty; \frac{3}{2}\right) = \left\{x / x \in \mathbb{R} \wedge x < \frac{3}{2}\right\}$

ACTIVIDAD 16

Resolver las siguientes inecuaciones lineales y representarlas en la recta real:

a) $7x + \frac{3}{4} \geq 2x - 1$

b) $3(2x + 9) < \frac{3}{2} - x$

c) $-4(x - 1) \leq 2 - x$

d) $\frac{3 - 2x}{5} > x + 3$

ACTIVIDAD 17

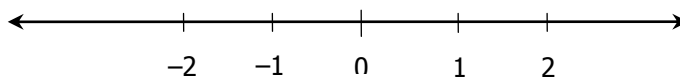
Resolver los siguientes problemas:

- Para ingresar a la Universidad el promedio exigible es de 70 puntos. Máximo sacó 72 y 63 puntos en los dos primeros parciales. ¿Cuántos puntos debe sacar en el próximo parcial para igualar o superar el promedio de aprobación?
- Una empresa ofrece a sus empleados dos opciones de pago. La primera opción es una suma fija de \$600 más el 4% de comisiones sobre todas las ventas y la segunda propone una suma fija de \$800 más el 6% sobre el total de las ventas, una vez superados los \$10.000. ¿Para qué cantidad del total de ventas es mejor la primera opción que la segunda?
- Sobre una lámina cuadrada de 30 cm de lado se quiere dibujar un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mida $3x - 16$ cm y que uno de sus catetos mida $2x - 5$ cm. ¿Qué valores puede tomar x para que el triángulo exista y pueda dibujarse sobre la cartulina?

Valor absoluto de un número real

El módulo o valor absoluto de un número real es la distancia de dicho número al cero y se lo representa: $|x|$.

Los números 2 y -2 están, ambos, a dos unidades de 0, entonces tienen igual valor absoluto y por tener distinto signo, son opuestos.



$$|-2| = |2| = 2$$

El valor absoluto de número positivo o cero es el mismo número. Simbólicamente lo expresamos como $|x| = x$ y el valor absoluto de un número negativo es su opuesto y se expresa como $|x| = -x$, que quiere decir que si x es negativo, su valor absoluto tendrá signo contrario y será positivo.

Otra forma de expresar el valor absoluto o módulo de un número real es: $|x| = \sqrt{x^2}$.

Distancia entre dos números

La distancia d entre dos números a y b es la diferencia en valor absoluto de los mismos.

$d = |b - a| = |a - b|$: quiere decir que a está de b a una distancia igual a la que b está de a .

Por ejemplo:

La distancia entre -2 y 6 es 8 porque $|-2 - 6| = |-8| = 8$ y $|6 - (-2)| = |6 + 2| = |8| = 8$

La expresión: $|x - 3| = 5$ significa que el número x está a 5 unidades de 3 y puede ser 8 ya que $8 - 3 = 5$ o puede ser -2 porque $-2 - 3 = -5$ y el módulo de -5 es 5 .

La expresión: $|x + 2| = 4$ significa que el número x está a 4 unidades del número -2 y los valores que puede tomar son 2 y -6 ya que $|x + 2| = |x - (-2)| = 4$

La expresión: $|x - 1| < 3$ significa que el número x está a menos de 3 unidades de 1. El número x puede ser cualquier número real perteneciente al intervalo $(-2; 4)$.

La expresión: $|x - 2| \geq 3$ significa que el número x puede ser cualquiera que pertenezca a los intervalos $[5; +\infty)$ o $(-\infty; -1]$.

ACTIVIDAD 18

Representar las igualdades y desigualdades anteriores en la recta real.

ACTIVIDAD 19

Escribir con notación de valor absoluto y representar en la recta real las siguientes proposiciones:

- a) "El número x está a más de 9 unidades de -4 "
- b) "El número x está, a lo sumo, a 2 unidades del número 7"
- c) "La distancia entre el número x y -12 es 3"
- d) "La distancia entre el número x y 8 es 15"

ACTIVIDAD 20

Hallar los posibles valores que puede tomar x que verifiquen las proposiciones de la actividad anterior.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES PROPUESTAS

Actividad 1: A cargo del alumno.

Actividad 2: 1) V; 2) F; 3) V.

Actividad 3: A cargo del alumno.

Actividad 4:

- 1) a) $4 + 4a + a^2$ b) $4 - 12x + 9x^2$ c) $4x^{10} + 12x^5 + 9$
 d) $-8m^3 + 36m^2 - 54m + 27$ e) $64a^6 - 96a^4b^3 + 48a^2b^6 - 8b^9$
- 2) a) $9a^2 - 4b^2$ b) $25 - 16x^2$ 3) a) $3(a + b)$ b) $(a + b)^3$ c) $(xyz)^4$

Investigando: los criterios de divisibilidad pueden encontrarse en cualquier libro de matemática, pero el criterio de divisibilidad por 7 es un poco más difícil de hallar, por eso lo

enunciamos aquí:

Un número es divisible por 7 cuando la diferencia entre el número formado por todas las cifras, excepto la de las unidades, y el doble de la de las unidades es múltiplo de 7.

Actividad 5: A cargo del alumno.

Actividad 6: a) 3; b) 10; c) 5; d) 18; e) 100; f) 6.300

Actividad 7: A cargo del alumno.

Actividad 8: a) $\frac{19}{6}$ b) $\frac{21}{8}$

Actividad 9: a) $\frac{7}{9}$ b) $\frac{8}{33}$ c) $\frac{692}{999}$ d) $\frac{13}{9}$ e) $\frac{71}{11}$

Actividad 10: a) $\frac{44}{45}$ b) $\frac{1}{30}$ c) $\frac{2608}{4125}$ d) $\frac{66.131}{30.000}$

Actividad 11: a) F; b) F; c) V; d) V

Actividad 12: Ambos verifican.

Actividad 13: A cargo del alumno.

Actividad 14: a) $\{x / x \in \mathbb{R} \wedge -5 \leq x \leq 4\}$ b) $\left\{x / x \in \mathbb{R} \wedge \frac{3}{2} < x < 6\right\}$
c) $\left\{x / x \in \mathbb{R} \wedge x > -\frac{1}{2}\right\}$ d) $\left\{x / x \in \mathbb{R} \wedge 2 < x \leq \frac{7}{2}\right\}$

Representaciones gráficas a cargo del alumno.

Actividad 15: a) $[3; 5)$; b) $[2; +\infty)$; c) $(-8; -1]$; d) $(-\infty; -3)$

Representaciones gráficas a cargo del alumno.

Actividad 16: a) $\left[-\frac{7}{20}; +\infty\right) = \left\{x / x \in \mathbb{R} \wedge x \geq -\frac{7}{20}\right\};$
b) $\left(-\infty; -\frac{51}{14}\right) = \left\{x / x \in \mathbb{R} \wedge x < -\frac{51}{14}\right\}$
c) $\left[\frac{2}{3}; +\infty\right) = \left\{x / x \in \mathbb{R} \wedge x \geq \frac{2}{3}\right\}$
d) $\left(-\infty; -\frac{12}{7}\right) = \left\{x / x \in \mathbb{R} \wedge x < -\frac{12}{7}\right\}.$

Representaciones gráficas a cargo del alumno.

Actividad 17: a) $x \geq 75$ b) $5000 < x < 20000$ c) $11 \text{ cm} < x < 17,5 \text{ cm}.$

Actividad 18: A cargo del alumno.

Actividad 19: a) $|x + 4| > 9$ b) $|x - 7| \leq 2;$
c) $|x + 12| = 3$ d) $|x - 8| = 15.$

Actividad 20: a) $S = (-\infty; -13) \cup (5; +\infty)$ b) $S = [5; 9]$
c) $S = \{-15; -9\}$ d) $S = \{-7; 23\}.$