Математический Анализ

Чепелин Вячеслав

Содержание

1 Интегралы.

1.1 Неопределенный интеграл.

Дано: $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$. F называется **первообразной** функции f, если:

1. F дифференцируема на $\langle a, b\rangle$.
2. $\forall x \in \langle a, b\rangle : F'(x) = f(x)$.

Теорема 1

f - непрерывна на $\langle a, b\rangle$. Тогда f имеет первообразную на $\langle a, b\rangle$.

Доказательство:

<см теорема Барроу>

Q.E.D.

Теорема 2

F - первообразная f на $\langle a, b\rangle$. Тогда:

1. $\forall c \in \mathbb{R}$: $F + c$ тоже первообразная.
2. Если G - еще одна первообразная f, то $F - G = const$.

Доказательство:

1. Воспользуемся арифметическим свойством производной. Тривиально.
2. $(F - G)' = F' - G' = f - f = 0$. Пользуясь теоремами, так как производная везде ≥ 0, то $F - G$ неубывающая. Аналогично так как производная на промежутке ≤ 0, то $F - G$ невозврастающая. Откуда это константа.

Q.E.D.

Неопределенный интеграл f — это множество всех первообразных f.

Замечание от Славы. Кохась подразумевает, что неопределенный интеграл это множество всех первообразных на том же интервале $\langle a, b\rangle$.

Обозначается неопределенный интеграл так:

$$\int f \quad \text{или} \int f(x)dx$$

Формально: $\displaystyle\int f(x)dx = F(x) + C$

Таблица неопределенных интегралов:

Она переписывается из таблицы производных, просто в обратную сторону. Но есть две *загадочные* формулы:

$$\int \frac{dx}{1 - x^2} = \frac{1}{2} \ln \left|\frac{1 + x}{1 - x}\right| + C \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} = \ln \left|x + \sqrt{1 + x^2}\right| + C$$

Теорема (о св-вах неопределенного интервала)

Пусть f, g - имеют первообразные F, G на $\langle a, b\rangle$. Тогда:

1. $\displaystyle\int (f+g) = \int f + \int g$
2. $\forall a \in \mathbb{R} : \displaystyle\int (af) = a \int f$
3. $\displaystyle\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \left(\int f(x)dx\right)\Big|_{x=\varphi(t)} = F(\varphi(t)) + C$
4. частный случай. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \displaystyle\int f(\alpha x + \beta) = \frac{1}{\alpha} F(\alpha x + \beta) + C$
5. f, g - дифф. на $\langle a, b\rangle$. Пусть $f'g$ и fg' имеют первообразную:

   Тогда: $\displaystyle\int fg' = fg - \int f'g$

Доказательство:

1. Очевидно из свойств производной и теоремы 2.
2. Очевидно из свойств производной и теоремы 2.
3. Очевидно из производной композиции.
4. Очевидно из свойств производной и теоремы 2.
5. Перенесите интеграл в правой части налево. Очевидно из произведения производных.

Q.E.D.

Замечание. Формула 3 часто будет использоваться для замены переменных в интегралах.

$$F(\varphi(t)) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Давайте считать, что φ обратима. Тогда $t = \varphi^{-1}(x)$. Подставим:

$$F(x) = \left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\right)\Big|_{t:=\varphi^{-1}(x)}$$

Для чего это? Благодаря этому, мы умеем вычислять первообразные немного по-другому. Мы можем подставлять вместо x что-либо, а потом возвращаться обратно к x.

1.2 Выпуклые функции.

Множество $A \subset R^m$ **выпукло**, если:

$$\forall x, y \in A, [x, y] \subset A : [x, y] = \{x + t(y - x), t \in [0, 1]\} = \{(1 - t)x + ty, t \in [0, 1]\}$$

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ — **выпукла** на промежутке $\langle a, b\rangle$, если:

$$\forall x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle : \forall \alpha \in [0, 1] : f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \le \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2)$$

Надграфик $(f,\ \langle c, d\rangle) = \{(x, y) : x \in \langle c, d\rangle, y \ge f(x)\}$

Замечание. f - выпукло на $\langle a, b\rangle \Leftrightarrow$ Надграфик $(f, \langle a, b\rangle)$ - выпуклый в R^2.

Лемма (о трех хордах)

f - выпукла на $\langle a, b\rangle \Leftrightarrow \forall x_1 < x_2 < x_3 \in \langle a, b\rangle$ выполнено:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \le \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

Доказательство:

Возьму первое неравенство. Домножу на знаменатели и оставлю плюсы:

$$(x_3 - x_1)(f(x_2) - f(x_1)) \le (x_2 - x_1)(f(x_3) - f(x_1))$$

$$f(x_2) \le \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3) + \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1)$$

Чего-то не хватает, вспомним, что $f(x_2) = f\left(\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} x_3 + \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} x_1\right)$. Ой, это же условие выпуклости. Так как все переходы равносильны, то это неравенство выполнено, когда f выпукла. Второе неравенство решается аналогично (позже будет добавлено в конспект).

Q.E.D.

f - **строго выпукла** на $\langle a, b\rangle$:

$$\forall x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle : \forall \alpha \in [0, 1] : f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) < \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2)$$

Просто меняется знак на строгий.

Теорема (об одностор. дифф-ти вып. функции)

f - выпукла на $\langle a, b\rangle$. Тогда $\forall x \in (a, b) : \exists f'_+(x), f'_-(x)$ (конечные), а также

$\forall x_1 < x_2 \in \langle a, b\rangle$ выполнено:

$$f'_-(x_1) \le f'_+(x_1) \le \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le f'_-(x_2)$$

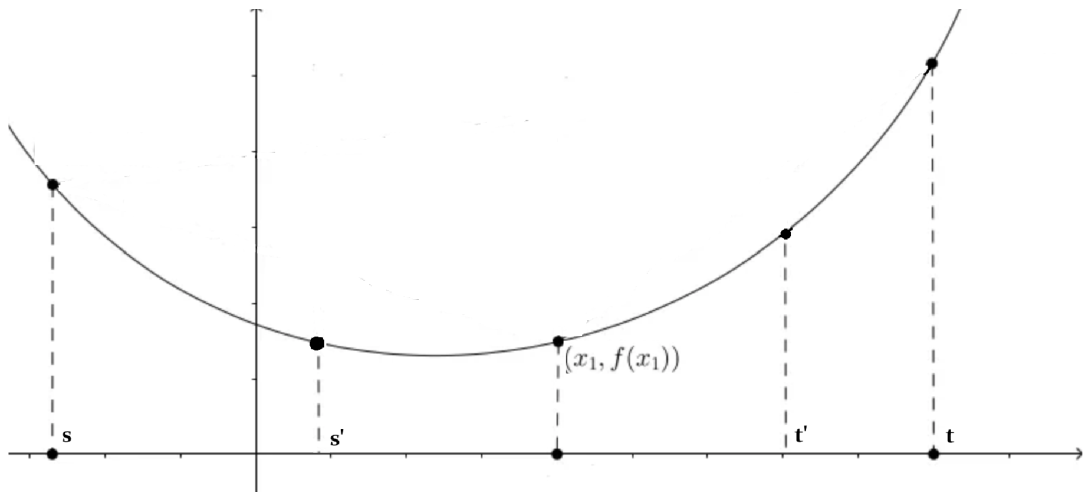
Доказательство:

Сначала докажу, что $f'_-(x_1) \le f'_+(x_1)$. Замечу, что x_1 в таком случае не должно быть граничной (иначе предела существовать просто не будет). Значит есть какая-то s левее x_1 и какое-то t правее x_1. Посмотрю на данные выражения: $\dfrac{f(t)-f(x_1)}{t-x_1}$ и $\dfrac{f(c)-f(x_1)}{c-x_1}$.

По теореме о трех хордах: $\dfrac{f(c)-f(x_1)}{c-x_1} \le \dfrac{f(t)-f(x_1)}{t-x_1}$.

Замечу, что при устремлении s к x_1, $\dfrac{f(c)-f(x_1)}{c-x_1}$ будет увеличиваться по теореме о трех хордах (см изобр, напишите т. о трех хордах для s, s', x_1).

Замечу, что при устремлении t к x_1, $\dfrac{f(t)-f(x_1)}{t-x_1}$ будет уменьшаться по теореме о трех хордах (см изобр, напишите т. о трех хордах для x_1, t', t).



Заметим, что первая функция ограничена сверху второй, а вторая ограничена снизу первой. Откуда существуют $f'_-(x_1), f'_+(x_1)$. Теперь применим теорему о предельном переходе в неравенствах и получим, что $f'_-(x_1) \le f'_+(x_1)$.

Теперь докажем вторую часть.
Возьму t на отрезке (x_1, x_2). Посмотрю на $\dfrac{f(t)-f(x_1)}{t-x_1}$ и $\dfrac{f(t)-f(x_2)}{t-x_2}$

Заметим, что исходя из этого, тк монотонно возрастает и ограниченна снизу и сверху (по тем же соображениям, что и до этого)

$$\exists \lim_{t\to x_1+0} \frac{f(t)-f(x_1)}{t-x_1} = f'_+(x_1)$$

и тк $\dfrac{f(t)-f(x_1)}{t-x_1} \le \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ по лемме о трех хордах, то выполнено второе неравенство.

$$\exists \lim_{t\to x_2-0} \frac{f(t)-f(x_2)}{t-x_2} = f'_-(x_2)$$

и тк $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \dfrac{f(t)-f(x_2)}{t-x_2}$ по лемме о трех хордах, то выполнено третье неравенство.

Q.E.D.

Следствие 1. f - выпукла на $\langle a, b\rangle \Rightarrow f$ непр на (a, b).

Следствие 2. f - выпукла на $\langle a, b\rangle \Rightarrow f$ не дифф. на (a, b) в не более чем счетном множестве (множество точек разрыва НБЧС). Это верно, исходя из того, что значения правосторонних пределов и левосторонних растут (теорема об одностор дифф-ти вып. функции). Берем рациональное число на интервалах f'_- - и f'_+.

Теорема (выпуклость в терминах касательных)

f - дифф. на $\langle a, b\rangle$. Тогда

f - вып. вниз $\Leftrightarrow$ График f лежит не ниже любой касательной:

$$\forall x_0, x \in \langle a, b\rangle : f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Доказательство:

Докажем в правую сторону. Возьму $x > x_0$, тогда по предыдущей теореме: $f'(x_0) \leq \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Домножу и победил. Аналогично $x < x_0$.

Докажем в левую сторону. Возьмем 3 точки, $x_1 < x_0 < x_3$:

$$f(x_3) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_3 - x_0), \quad f(x_1) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

$f'(x_0) \leq \dfrac{f(x_3) - f(x_0)}{x_3 - x_0}$ и $\dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq f'(x_0)$, тогда по лемме о трех хордах f выпукло.

Q.E.D.

def: Дано множество A выпуклое в R^2. Прямая L называется **опорной** к A в точке x_0, если L проходит через x_0 и множество A лежит в одной полуплоскости (замкнутой).

Теорема (дифф. критерий выпуклости)

1) f - дифф на (a, b), непр на $\langle a, b\rangle$. Тогда f - выпукло на $\langle a, b\rangle \Leftrightarrow f'$ возрастает на (a, b).

2) f непр на $\langle a, b\rangle$, f - дважды дифф на (a, b). Тогда f - вып. $\Leftrightarrow f'' \geq 0$ на (a, b).

Доказательство:

1) $\Rightarrow$ очевидно из теоремы об односторонней дифф-ти.
$\Leftarrow$ Проверим утверждение леммы о трех хордах.

$\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c_1)$ по теореме Лагранжа. $\dfrac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = f'(c_2)$ по теореме Лагранжа.

Так как $c_1 < c_2$, а f' возрастает, то нужное неравенство выполняется.

2) f - выпуклое $\Leftrightarrow f'$ возрастает $\Leftrightarrow (f')' \geq 0$

Q.E.D.

1.3 Правило Лопиталя.

Лемма (об ускоренной сходимости)

Пусть даны $f, g : D \in R \to R$, a - предельная точка D в $\overline{\mathbb{R}}$

Пусть $\exists U(a), f, g \neq 0$ в $U(a) \cap D$ - выколотой.

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0, \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$. Тогда:

$$\forall (x_n) : x_n \to a, x_n \in D, x_n \neq a, \exists (y_n) : y_n \to a, y_n \in D, y_n \neq a : \lim_{k\to\infty} \frac{f(y_k)}{g(x_k)} < \frac{1}{k} \text{ и } \lim_{k\to\infty} \frac{g(y_k)}{g(x_k)} < \frac{1}{k}$$

Доказательство:

Давайте будем выбирать такие y_k, что:

$$\left|\frac{f(y_k)}{g(x_k)}\right| < \frac{1}{k} \text{ и } \left|\frac{g(y_k)}{g(x_k)}\right| < \frac{1}{k}$$

Очевидно, что мы сможем выбрать такие y_k. А из этого уже следует то, что нам надо.

Q.E.D.

Замечание: утверждение верно, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty, \lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$

Теорема(пр. Лопиталя)

$f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$, дифф $g' \neq 0$ на (a, b)

$\dfrac{f'(x)}{g'(x)} \xrightarrow{x\to a+0} A \in \overline{\mathbb{R}}$. Пусть $\lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ - неопределенность $\left(\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}\right)$

Тогда: $\lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Доказательство:

Замечание о корректности: тк $g' \neq 0$, то g - строго положительно или отрицательно в какой-то окрестности a.

По Гейне. Возьму $(x_n) : x_n \to a, x_n \neq a$. Берем y_n из Леммы об ускоренной сходимости.

Теорема Коши: $\dfrac{f(x_k) - f(y_k)}{g(x_k) - g(y_k)} = \dfrac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)}$, где $\xi_k \in (x_k, y_k)$.

$$\frac{f(x_k)}{g(x_k)} = \frac{f(y_k)}{g(x_k)} + \frac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)}\left(1 - \frac{g(y_k)}{g(x_k)}\right)$$

Посмотрим, куда это стремится. Справа это стремится к A. Значит и слева должна.

Q.E.D.

Пример неаналитической функции:

<u>**Неаналитическая**</u> - та, которую нельзя представить в виде разложение тейлора для бесконечности.

Пример:

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{x}}, x > 0 \\ 0, x \le 0 \end{cases}$$

$\forall x : \exists f^{(k)}(0) = 0$. По индукции доказываем, что все производные в $x = 0$ нулевые, откуда все слагаемые в тейлоре нулевые.

$a_{n+1} - a_n$ - аналог производной.

<u>**Теорема (Штольца)**</u>

x_n, y_n - вещ. последовательности, $x_n \to 0, y_n \to 0$. y_n монотонный, начиная с какого-то места

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = a \in \overline{\mathbb{R}} \cup \{0\}^*$. Тогда: $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = a$.

Доказательство:

1) $a > 0, a \in \mathbb{R}$

$\forall a > \varepsilon > 0 : \exists N_1 : \forall N > N_1 : a - \varepsilon < \dfrac{x_{N+1} - x_N}{y_{N+1} - y_N} < a + \varepsilon$

Зафиксирую N. Возьму $n > N$ и напишу дроби $\dfrac{x_{N+1} - x_N}{y_{N+1} - y_N}, \dfrac{x_{N+2} - x_{N+1}}{y_{N+2} - y_{N+1}}, \dots, \dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$.

Заметим интересный факт, что (для положит. дробей) $\dfrac{p}{q} < \dfrac{r}{s} \Rightarrow \dfrac{p}{q} < \dfrac{p+r}{q+s} < \dfrac{r}{s}$. Поэтому, если мы сложим, все вышесказанные дроби так, как показано, то они будут между $a - \varepsilon$ и $a + \varepsilon$. А вышесказанные дроби положит, потому что у нас начиная с какого-то места монотонен y и $a > 0$. Поэтому:

$$a - \varepsilon < \frac{x_n - x_N}{y_n - y_N} < a + \varepsilon$$

Что я получил? Устремим $n \to \infty$ и получим по условию, что $a - \varepsilon \le \dfrac{x_N}{y_N} \le a + \varepsilon$

2) $a = +\infty$. Аналогично, только смотрим на предел с одной стороны

3) $a = [-\infty, 0)$, поменяем у $y_n := -y_n$, тогда все стало положительным = счастье.

4) $a = 0$. Считаем, что x_n, y_n монотонны (строго) с какого-то момента. Тогда дробь $\dfrac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} \to 0$ с какого-то момента. Тогда $\dfrac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n} \to +\infty$, вернемся к пункту 1 и выиграем.

Q.E.D.

Замечание. Для неопределенности вида $+\infty, +\infty$ теорема верно (обе посл. монотонны). (Загадка)

Теорема (Гаусса)

Хотим доказать сумму $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Доказательство:

1) $x_n = 1 + 2 + \ldots + n$, Хочу найти y_n такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = 1$. О чем нам говорит теорема Штольца? Что если y будет таким, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = 1$, то такой y_n нам подходит

$y_n = n^2$ не подходит, $y_n = \dfrac{n^2}{2}$ подходит и дает в пределе 1. Мы доказали, что $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ эквивалетно n^2. Но это еще не то, что нам надо

2) $x_n = 1 + 2 + \ldots + n - \dfrac{n^2}{2}$, хотим опять по теореме Штольца найти чему это эквивалентно. $\lim \dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim \dfrac{\frac{1}{2}}{y_n - y_{n-1}} = 1$. О, возьму $y_n = \dfrac{n}{2}$. И все хорошо.

$1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n^2}{2} + \dfrac{n}{2} + o(n)$. Пока это тупик.

Q.E.D.

Доказательство 2:

$f(x) = x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n$.

$f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + x^n$

$xf'(x) = x + \ldots + nx^n = (x\dfrac{d}{dx})f(x)$

$(x\dfrac{d}{dx})^N f(x) = 1^N x + 2^N x^2 + \ldots + n^N x^n$

Заметим, что $f(x) = \dfrac{x^{n+1} - 1}{x - 1} - 1$. Хочу посчитать значение функции в единице:

$$\left((x\frac{d}{dx})^N f(x)\right)(1) = \left((x\frac{d}{dx})^N \left(\frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}\right)\right)(1)$$

Заметим, что после N раз дифференцирования знаменатель будет $(x-1)^{N+1}$. Но я хочу посчитать значение функции в точке 1. Мы не можем так сделать, но заметим, что наша функция непрерывна, откуда мы знаем, что у нее есть предел в этой точке. Применим $n+1$ раз правило Лопиталя идеологически???????

Замечание от Славы. Да именно такое говорит Константин Петрович на лекции в связи с чем этот конспект хочется забросить и мне хочется выброситься в окно. Так что со всех респект и уважение, что я сижу и разбираю.

Так что же тут подразумевал Константин Петрович? У нас знаменатель будет $(x-1)^{N+1}$. Но значение функции в точке 1 у нас есть.

Из непрерывности мы знаем, что $(1^N x + 2^N x^2 + \ldots + n^N x^n)(1) = \lim\limits_{x\to 1}(1^N x + 2^N x^2 + \ldots + n^N x^n)$. И та наша формула, которую мы свернули с помощью геом. прогрессии ведет себя точно так же в окрестностях единицы. Также на самом деле числитель этой функции просто имеет множитель $(x-1)^{N+1}$. Поэтому мы можем думать, что мы ищем $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^{N+1}\cdot h(x)}{(x-1)^{N+1}}$. Поэтому применим $N+1$ раз правило Лопиталя и знаменатель пропадет. Что мы получили? Мы получим, что теперь мы ищем предел по какой-то другой(непрерывной (тк многочлен)) функции при $x \to 1$. Значит, что мы можем просто посчитать значение в точке 1. Это то, что Константи Петрович назвал идеологически применить правило Лопиталя. То есть надо умножить нашу дробь на знаменатель N раз ее продифференцировать и поделить на производную N-ой степени знаменателя:

$$= \frac{1}{(N+1)!}(\frac{d}{dx})^N\left((x-1)^{N+1}\left((x\frac{d}{dx})^N\left(\frac{x^{n+1}-1}{x-1}\right)\right)\right)$$

Дальше подставляете $N=1$ и все, ищите значение этой фигни в точке 1 и ваша жизнь прекрасна.

Q.E.D.

1.4 Определенный интеграл.

def: **Фигура** - это ограниченное подмножество в R^2. ε - множество всех возможных фигур.

$\sigma : \varepsilon \to [0, +\infty)$ — назовем **площадью**, если:

1. Аддитивно: $A_1, A_2 \in \varepsilon, A_1 \cap A_2 = \varnothing, \sigma(A_1 \cup A_2) = \sigma(A_1) + \sigma(A_2)$
2. Нормировка: $\sigma([a, b] \times [c, d]) = (b - a)(d - c)$.

Замечание. Площади существуют.

Замечание.

1. Она обладает монотонностью по включению: $A \subset B, \sigma(A) \leq \sigma(B)$, так как: $B = A + (B \setminus A) \Rightarrow \sigma(B) = \sigma(A) + \sigma(B \setminus A)$.
2. σ(вертик отрезок) $= 0$, так как его площадь всегда меньше окружающего его прямоугольника с шириной и высотой $= \forall \varepsilon > 0$.

def: $\sigma : \varepsilon \to [0, +\infty)$ — **ослабленная площадь**, если выполнено:

1. монотонна.
2. нормирована.
3. ослабленная аддитивность: Есть $E \in \varepsilon : l$ - вертик. прямая L^- - левая полуплоскость, L^+ - правая полуплоскость (замкнутая полуплоскость), тогда $E_1 = E \cap L^-, E_2 = E \cap L^+ : \sigma(E) = \sigma(E_1) + \sigma(E_2)$

Пример осл. площади:

1. $\sigma(A) = \inf(\sum \sigma(P_k), \text{где } A = \bigcup\limits_{\text{конеч}} P^k, \text{где } P_k \text{ - прямоугольник})$
2. $\sigma(A) = \inf(\sum \sigma(P_k), \text{где} A = \bigcup P^k, \text{где } P_k \text{ - прямоугольник})$

todo: написать отличие.

def: **Срезка** - $f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$.

1. положительная — $f^+ = \max(f, 0)$
2. отрицательная — $f^- = \max(-f, 0)$

todo: вставить рисунок

def: $f : [a, b] \to \mathbb{R}, f \geq 0$ ПГ $(f, [a, b]) = \{(x, y) : x \in [a, b], y \in [0, f(x)]\}$.

def: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f - непр., σ- осл. адд площадь, тогда **определенный интегралом** f по отрезку $[a, b]$ назовем:

$$\int\limits_a^b f = \int\limits_a^b f(x)dx = \sigma(\Pi\Gamma(f^+, [a, b])) - \sigma(\Pi\Gamma(f^-, [a, b]))$$

Простейшие свойства:

1. Если $f \geq 0$ на $[a, b]$, тогда $\int\limits_a^b f \geq 0$

2. Если $f = c$ (константа), тогда $\int\limits_a^b c = c \cdot (b - a)$
3. $\int\limits_a^b (-f) = -\int\limits_a^b f$
4. $\int\limits_a^a f = 0$

Свойства интеграла:

1. Аддитивность по промежутку: $\forall c \in [a, b] : \int\limits_a^b = \int\limits_a^c + \int\limits_c^b$
2. Монотонность: $f \leq g$ - непр., то $\int\limits_a^b f(x) \leq \int\limits_a^b g(x)$.

   Говорят: Проинтегрируем неравенство $f \leq g$, на отрезке $[a, b]$.
3. $(b - a) \min_{[a,b]} f \leq \int\limits_a^b f \leq (b - a) \max\limits_{[a,b]} f$

   Делается с помощью монотонности и интегрирования $\min_{[a,b]} f \leq f \leq \max_{[a,b]}$А
4. $\left| \int\limits_a^b f(x)dx \right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|dx$

   Проинтегрируем $-|f| \leq f \leq |f|$ и получим то, что хотим.
5. **Теорема о среднем**

   Функция $f \in C([a, b])$. Тогда $\exists c \in [a, b]$, что:

   $$\int\limits_a^b f = f(c)(b - a)$$

   Доказательство:

   $a = b$ - скучно. Если $a \neq b$, напишем неравенство п.3:

   $$\min f \leq \frac{1}{b - a} \int\limits_a^b f \leq \max f$$

   А мы знаем, что функция непрерывна, тогда по теореме о промежуточном значении:

$$\exists\, c = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f$$

.

Q.E.D.

Интеграл с переменным верхним пределом - $\Phi : [a,b] \to R : \Phi(x) = \int\limits_a^x f$

Интеграл с переменным нижним пределом - $\psi : [a,b] \to R : \psi(x) = \int\limits_x^b f$

для $f \in C([a,b])$.

Теорема (Барроу)

В усл. определений. Доказать, что Φ дифф на $[a,b]$, $\Phi'(x) = f(x)$.

Доказательство:

$y > x : \lim\limits_{y\to x+0} \dfrac{\Phi(y)-\Phi(x)}{y-x} = \lim\limits_{y\to x+0} \dfrac{\int_a^y f - \int_a^x f}{y-x} = \lim\limits_{y\to x+0} \dfrac{1}{y-x}\int\limits_x^y f = \lim\limits_{y\to x+0} f(c),$
где c лежит между x, y из теоремы о среднем.

Получим, что правосторонняя производна равна $f(x)$. Аналогично про левостороннюю. Откуда производная это $f(x)$.

Q.E.D.

Замечание Мы построили первообразную для функции f.

Теорема (формула Ньютона-Лейбница)

$f \in C([a,b])$, F - первообразная f на $[a,b]$. Тогда

$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$

Доказательство:

$F = \Phi + c$, по теореме 2. Поэтому сделаем некоторые преобразования:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \Phi(b) = \Phi(b) - \Phi(a) = (F(b) - c) - (F(a) - c) = F(b) - F(a)$$

Q.E.D.

Следствие: Этот определенный интеграл не зависит от выбора σ.

Замечание: Откажемся от соглашения $a \le b$ и введем для $d < c$:

$$\int\limits_c^d = -\int\limits_d^c = F(d) - F(c)$$

Микротеорема (Линейность интеграла)

Для $f, g \in C([a,b])$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, выполнено:

$$\int\limits_a^b \alpha f + \beta g = \alpha \int\limits_a^b f + \beta \int\limits_a^b g$$

Доказательство:

$(\alpha F + \beta G)\Big|_a^b = \alpha F\Big|_a^b + \beta G|_a^b$ из линейности неопредел. интеграла. Q.E.D.

Теорема (Интегрирование по частям)

$f, g \in C^1([a,b])$. Тогда $\displaystyle\int\limits_a^b fg' = fg\Big|_a^b - \int\limits_a^b f'g$

Доказательство:

Из теоремы о свойствах неопределенного интеграла:

$$fg = \text{првобр}(fg' + f'g) \Rightarrow \int\limits_a^b (fg' + f'g) = fg\Big|_a^b$$

Q.E.D.

Теорема (о замене переменных)

$f \in C(\langle a,b\rangle),\ \varphi\langle\alpha,\beta\rangle \to \langle a,b\rangle,\ \varphi \in C^1,\ [p,q] \subset \langle\alpha,\beta\rangle$. Тогда:

$$\int\limits_p^q f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int\limits_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f(x)dx$$

Доказательство:

F - первообразная f, тогда $F(\varphi(t))$ - первообразная $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ и все получается.

Q.E.D.

Замечание. Может показаться, что множество $\varphi([p,q])$ шире $[\varphi(p), \varphi(q)]$.

Замечание. Может быть, что $\varphi(p) > \varphi(q)$

I_f - среднее значение f на $[a,b]$ $\displaystyle\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f$

Теорема (Неравенство Чебышёва)

$f, g \in C([a,b])$ обе возрастают. Тогда $I_f \cdot I_g \leq I_{fg}$, то есть

$$\int_a^b f \cdot \int_a^b g \leq (b-a) \int_a^b fg$$

Доказательство:

Тк функции возрастают, то $\forall x, y \in [a,b] : (f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geq 0$.

$$f(x)g(x) - f(y)g(x) - f(x)g(y) + f(y)g(y) \geq 0$$

Давайте зафиксируем y и проинтегрируем по x и поделю на $b-a$. Получу:

$$I_{fg} - f(y)I_g - I_f g(y) + f(y)g(y) \geq 0$$

Давайте зафиксируем x и проинтегрируем по y и поделю на $b-a$. Получу:

$$I_{fg} - I_f I_g - I_g I_f + I_{fg} \geq 0$$

Q.E.D.

Пример (Ш. Эрмит)

Пусть мы хотим посчитать $H_n = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^n \cos t dt$

$\displaystyle\int_a^b fg' = fg\Big|_b^a - \int_a^b f'g$. Воспользуюсь этим в дальнейших рассуждениях

$$H_n = \left[\begin{array}{l} f = \left(\dfrac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^n \\ g = \cos t \end{array} \right] = \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^n \sin t \Big|_{\pi/2}^{\pi/2} + \frac{2}{(n-1)!} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} t(\frac{\pi^2}{4} - t^2)^{n-1} \sin t dt$$

я не хочу это писать 1:30 2 лекция

$H_n = (4n-2)H_{n-1} - \pi^2 H_{n-2} = P(\pi^2)$ - многочлен, от π^2, где $\deg P \leq n$.

Теорема (Пи иррационально)

π - иррационально. Проверим, что π^2 иррационально.

Доказательство:

Пусть $\pi^2 = \dfrac{p}{q}$. Тогда $q^n H_n = \dfrac{q^n}{n!} \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^n \cos t \; dt = q^n P(\pi^2)$ - целое число. А слева неотрицательная функция.

$0 < q^n H_n \leq \dfrac{q^n}{n!} 4^n \pi = \dfrac{(4q)^n}{n!} \pi \to 0$, но с другой стороны, оно должно быть целым. Противоречие.

Q.E.D.

def: $f : [a.b] \to \mathbb{R}$ **кусочно-непрерывной**, если

$\exists A \ = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset [a, b]$. Такая функция будет непрерывны на $[a, b]$, кроме этих точек, а в них происходят скачки.

def: $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ - **почти первообразная** функции f, если:

F - непр и $\exists A = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset [a, b]$. $\forall x \in [a, b] \backslash A : \exists F'(x) = f(x)$ и $\forall x \in A : \exists F'_+(x), F'_-(x)$

f - кусочно-непрерывно на $[a, b]$. $x_0 = a, x_n = b$. Положим $\int\limits_a^b = \sum\limits_{i=1}^{n+1} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f\Big|_{[x_{i-1}, x_i]}$

Утверждение. Если f - кусочно - непрерывна тогда: $\int\limits_a^b f = F(b) - F(a)$.

Утверждение очевидно по определению.

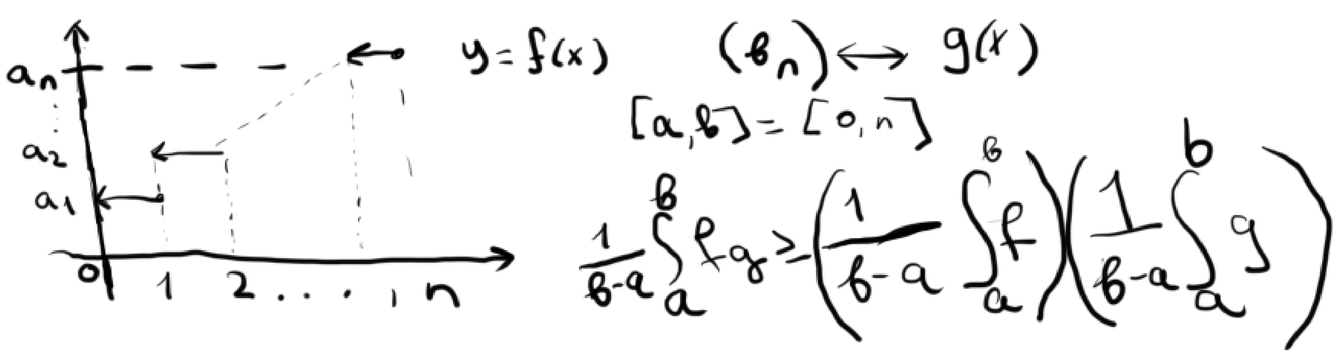
Следствие: Все теоремы, использующие в доказательство только формулу Ньютона-Лейбница у нас уже доказаны!

Пример (Неравенство Чебышева для сумм)

$a_1 \leq \ldots \leq a_n, b_1 \leq \ldots \leq b_n$.

Тогда $\left(\frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i\right) \geq \left(\frac{1}{n} \sum a_i\right) \left(\frac{1}{n} \sum b_i\right)$

Доказательство:



Возьмем доску Константина Петровича для лучшего понимания. Давайте возьмем две функции $f(x)$, $g(x)$, как показано на рисунке. Вспомним, что у нас есть неравенство Чебышева, которое записано на правой стороне доски. Тогда очевидно подстановкой в него наших $f(x), g(x)$ и $a = 0, b = n$, мы получим нужное неравенство. Q.E.D.

1.5 Приложение к определенным интегралам.

Введем некоторые обозначения:

Segm($[a, b]$) - множество всевозможных отрезков, лежащих в $[a, b]$

$\mathit{\Phi}$: Segm($[a, b]$) $\to \mathbb{R}$ - **функция для промежутка**.

Введем **аддитивные функции для промежутка**:

$$\forall[p, q] \in \text{Segm}[a, b] : \forall c \in (p, q) : \mathit{\Phi}([p, c]) + \mathit{\Phi}(c, q) = \mathit{\Phi}([p, q])$$

def: $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $\mathit{\Phi}$: Segm($\langle a, b\rangle$) $\to \mathbb{R}$ - а.ф.п:

f - **плотность** $\mathit{\Phi}$: $\forall\Delta \in$ Segm($\langle a, b\rangle$) :$inf_\Delta f \cdot len(\Delta) \le \mathit{\Phi}(\Delta) \le sup_\Delta f \cdot len(\Delta)$

Теорема(о вычисл. а.ф.п.по ее плотности)

Дана плотность $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $\mathit{\Phi}$: Segm($\langle a, b\rangle$) - а.ф.п., f - непр.

Тогда $\forall\Delta \in$ Segm($\langle a, b\rangle$), $\mathit{\Phi}(\Delta) = \int\limits_\Delta f$

Доказательство:

Н.У.О. считаем, что $\Delta = [a, b]$. Тогда возьмем $F(x)$, такую что:

$$F(x) = \left[\begin{array}{c} 0, x = a \\ \mathit{\Phi}([a, x]), x \in (a, b) \end{array}\right.$$

Проверим, что F - первообразная f:

$F'_+(x) = \dfrac{F(x + h) - F(h)}{h} = \dfrac{\mathit{\Phi}([a, x + h]) - \Phi([a, x])}{h} = \dfrac{\mathit{\Phi}(x, x + h)}{h} \in [\min f, \max f]$ на промежутке $x + x_0$ из ее плотности

Получили, что правосторонняя производная F и левосторонняя производная F существуют и при этом совпадают.

Q.E.D.

Пример: Площадь криволинейного сектора.

$[a, b] \subset [0, 2\pi)$

$\rho : [a, b] \to \mathbb{R}, \rho > 0$

$\varphi \in [a, b] \to (\varphi, \rho(\varphi))$

Введем определение: **Сектор** $[\alpha, \beta] = \{(\varphi, r) \subset R^2 : \varphi \in [\alpha, b], 0 \le r \le p(\varphi)\}$

$\mathit{\Phi} : \Delta = \sigma$(Сектора), $\Delta \in$ Segm($[a, b]$)

Теорема (Площадь криволинейного сектора).

В указанных условия, а также $\rho : [a, b] \to \mathbb{R}, \rho > 0$ и непрерывна. $[\alpha, \beta] \in \mathrm{Segm}([a, b])$. Тогда выполнено:

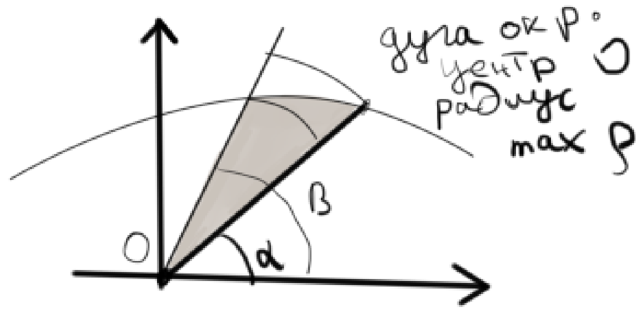
$$\Phi([\alpha, \beta]) = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)\, d\varphi$$

Доказательство:

Если мы докажем, что $\frac{1}{2}\rho^2(\varphi)$ - плотность Φ, тогда по предыдущей теореме, мы получим, что данная формула будет верна. Будем опрделять определение плотности.

$\Delta = [\alpha, \beta]$, откуда Сектор$[\alpha, \beta] \subset$ Криволинейного вектора$(O, \max \rho, [\alpha, \beta])$.

Криволинейный вектор в в данном случае подразумевает сектор окружности, нарисованный на чертеже. Так же на нем вы видите серым - Сектор$[\alpha, \beta]$.



Как мы знаем из геометрии: площадь сектора окружности $= \dfrac{\alpha}{2}R^2$.

Откуда из монотонности площади:

$$\Phi([\alpha, \beta]) \leq \sigma(\text{Крив. вектор}) = \frac{1}{2}(\beta - \alpha)(\max_{[a,b]} \rho)^2$$

Аналогично можно оценить нижним сектором. То есть:

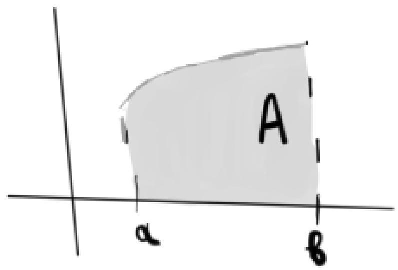
$$\frac{1}{2}(\beta - \alpha)(\min_{[a,b]} \rho)^2 \leq \Phi([\alpha, \beta]) \leq \frac{1}{2}(\beta - \alpha)(\max_{[a,b]} \rho)^2$$

Откуда это и правда плотность, поэтому верно.

Q.E.D.

Кохась: хочу эксперимент

$\sigma(\Pi\Gamma(f, [a, b])) = \int\limits_{a}^{b} f\, dx$, где $f \geq 0, f$ - непрерывно. $\gamma(t) = \begin{pmatrix} x = x(t) \\ y(x) = y(t) \end{pmatrix}$, $\gamma : [p, q] \to R^2$.



Замечание от Славы: вообще $x(t)$ должно монотонно возрастать, иначе странные загагулины будут давать одну и ту же площадь, но КПК про это ничего не сказал.

Причем γ - гладкое изображение (дифференцируема столько раз сколько надо).

Получилась какая-то кривая (как на рисуночке сверху), и я хочу смотреть подграфики такой кривой. Тогда:

$$\sigma A = \int\limits_a^b "y(x)" dx = \begin{bmatrix} x = x(t) \\ y = y(t) \end{bmatrix} = \int\limits_p^q y(t)x'(t)dt$$

Теперь мы умеем вычислять интегралы не только в декартовых координатах.

Научимся искать площадь криволинейного сектора, если он задан параметрически (x(t); y(t)), переведём в полярные координаты:

$$\begin{cases} \varphi = \arctan(\frac{y}{x}) \\ \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$

Теперь сделаем замену в формуле с полярными координатами:

$$\sigma(\text{сектор}[\alpha; \beta]) = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho(\phi)^2 d\phi = \frac{1}{2}\int_{t_\alpha}^{t_\beta} (x(t)^2 + y(t)^2) \cdot \frac{1}{1 + \frac{y(t)^2}{x(t)^2}} \cdot \frac{y'(t)x(t) - y(t)x'(t)}{x(t)^2} dt =$$
$$= \frac{1}{2}\int_{t_\alpha}^{t_\beta} y'(t)x(t) - y(t)x'(t)dt$$

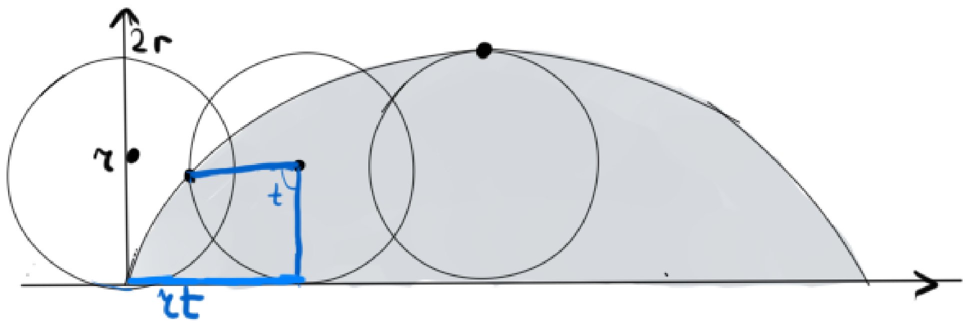
В первом случае мы параметрически задавали $y(x)$, теперь давайте аналогично зададим $x(t)$:

$$\sigma A = \int_c^d x(y)dy = \int_{t_c}^{t_d} x(t)y'(t)dt$$

Пример:

$\begin{cases} x(t) = r(t - \sin(t)), r \in R \\ y(t) = r(1 - \cos(t)), t \in [0, 2\pi] \end{cases}$ - путь, который описывается данной формулой - **циклоид**.

Фиксируем точку в нуле и катим окружность по нашему полю. Мы знаем, что x монотоннен



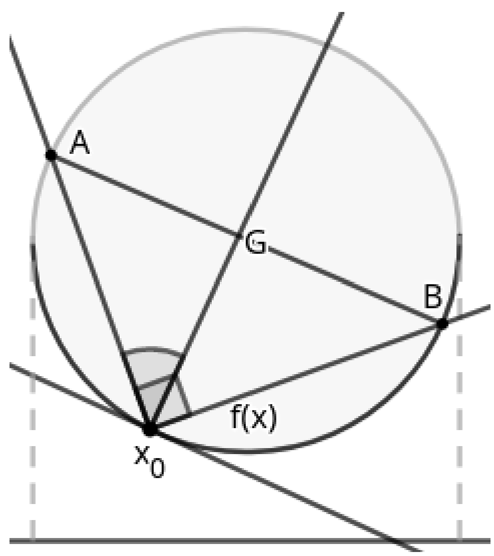
И теперь я хочу найти площадь серого подграфика:

$$S = \int_0^{2\pi r} y(x)dx = \begin{bmatrix} x(t) = r(t - \sin t) \\ y(t) = r(1 - \cos t) \end{bmatrix} = \int_0^{2\pi} r^2(1 - \cos t)^2 dt = r^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 = 3\pi r^2$$

Пример (Изопериметрическое неравентсво.)

$G \subset \mathbb{R}^2$ - выпукло, замкнуто, ограниченно.

Пусть $\operatorname{diam}(G) = \sup\limits_{a,b \in G} (\rho(a,b))$ - диаметр. $\operatorname{diam}(G) = d$. Тогда: $\sigma(G) \leq \dfrac{\pi}{4} d^2$.



1. G выпукло и замкнуто, поэтому возьмём "нижнюю оболочку" как выпуклую функцию (выделена черным), по лемме она не дифференцируема в не более чем счётном множестве точек.
2. Возьмём точку, в которой есть производная, а значит есть и касательная.
3. Теперь введём новую систему координат (полярную), в которой вот эта точка будет $(0, 0)$, а касательная будет проходить под углом $\pi/2$ (перпендикулярно)
4. Теперь найдём площадь G по формуле для площади сектора (от $-\pi/2$ до $\pi/2$) в полярных координатах.
5. $\rho(\varphi) = \max(r : (\varphi, r)_{max} \in G)$ - непрерывна, потому что у нас выпуклое множество: если бы расстояние не было бы непрерывно, тогда из-за скачка появился бы отрезок, соединяющий две точки множества, но не лежащий в этом множестве.

После всего вышесказанного найдем площадь G, пусть $\overline{\varphi} = \varphi + \dfrac{\pi}{2}$, тогда:

$$\sigma(G) = \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho^2(\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{2}\left(\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} + \int\limits_{\frac{-\pi}{2}}^{0}\right) = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \rho^2(\varphi)\,d\varphi + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \rho^2\left(\overline{\varphi} - \frac{\pi}{2}\right)\,d\overline{\varphi} =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \rho^2(\varphi) + \rho^2(\varphi - \frac{\pi}{2})d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} "AB^2" d\varphi \leq \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} d^2 d\varphi = \frac{d^2\pi}{4}$$

AB это гипотенуза в прямоугольном треугольнике, заданном сторонами под углами фи и фи-пи/2, пример такой показан на рисунке.

Теорема (обобщ. теорема о плотности)

$\varPhi : Segm(\langle a, b\rangle) \to \mathbb{R}$ - а.ф.п. $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ - непрерывно.

Пусть $\forall \Delta \in Segm(\langle a, b\rangle)$ заданы m_Δ, M_Δ - функции от сегмента:

1. $m_\Delta \cdot l(\Delta) \leq \varPhi(\Delta) \leq M_\Delta \cdot l(\Delta)$
2. $\forall x \in \Delta : m_\Delta \leq f(x) \leq M_\Delta$
3. $\forall$ фикс. $x \in \langle a, b\rangle$, $M_\Delta - m_\Delta \to 0$, при $l(\Delta) \to 0$ и $x \in \Delta$

Тогда f - плотность $\varPhi$.

Доказательство:

Н.у.о мы работаем на $[a, b]$. $F(x) = \begin{cases} \varPhi([a, x]), x > a \\ 0, x = a \end{cases}$

Напишем то, что нам дает условие в конкретной точке x:

$$m_\Delta \leq \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq M_\Delta, \text{ где } \Delta = [x, x+h], h > 0$$

$$m_\Delta \leq f(x) \leq M_\Delta$$

Вычтем из одного другое:

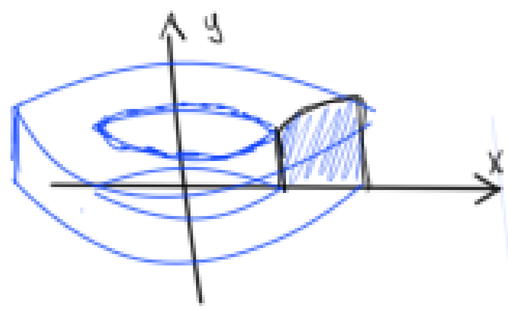
$$\left|\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x)\right| \leq M_\Delta - m_\Delta$$

Устремим h к нулю и получим, что $M_\Delta - m_\Delta \to 0$. Откуда $\left|\dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x)\right| \to 0$, а это $f(x) = F'_+(x)$. Аналогично $f(x) = F'_-(x)$.

Q.E.D.

1.48 - 4 лекция - кохась рассказывает интересную историю про отрубленные пальцы

Пример (Объем вращения фигур)



$a > 0, b > 0, f > 0$. Вращаем ПГ$(f[a,b])$ вокруг оси Oy. Получается вот что-то такое(см рисунок). Хочу найти объем этой фигуры

$\Phi([a,b]) = Vol(\{(x,y,z) : a^2 \le x^2+y^2 \le b^2, 0 \le z \le f(\sqrt{x^2+y^2})\})$. Тогда выполнено:

$$\Phi([a,b]) = 2\pi \int\limits_a^b xf(x)dx$$

Доказательство:

A_1 - прямоугольник, такой что его высота $= \min\limits_{(a,b)} f$. $A_1 = [a,b] \times [0, \min f]$

$Vol A_1 = \pi b^2 \min f - \pi a^2 \min f$

A_2 - прямоугольник, такой что его высота $= \max\limits_{(a,b)} f$. $A_2 = [a,b] \times [0, \max f]$

$Vol A_2 = \pi b^2 \max f - \pi a^2 \max f$.

$\forall \Delta$ положим $m_\Delta = \pi \min_\Delta f \cdot \min(2x)$, $M_\Delta = \pi \max_\Delta f \cdot \max 2x$, $x \in \Delta$

Тогда: как мы только что доказали:

$$\Phi(\Delta) \le Vol(A_2(\Delta)) = \pi \max f \cdot (\overline{b}+\overline{a})(\overline{b}-\overline{a}) \le M_\Delta(\overline{b}-\overline{a}) \le M_\Delta l(\Delta)$$

Выше в формуле подразумеваются текущие $\overline{a}, \overline{b}$ для Δ. Аналогично для m_Δ.

При $x \in \Delta : m_\Delta \le \pi f(x) 2x \le M_\Delta$ - очевидно.

Фиксируем $x : M_\Delta - m_\Delta \to 0$ при $\Delta \to 0$ - очевидно. Откуда выполнено условие теоремы о плотности а это то, что нам и требовалось.

Q.E.D.

Пути:

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^m$. То есть $t \to (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \ldots, \gamma_m(t)) = \gamma(t)$. Мы обычно думаем, что они непрерывны

$\lim\limits_{\tau \to 0} \dfrac{\gamma(t+\tau)-\gamma(t)}{\tau}$ - интересно как меняется.

$\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t), \ldots, \gamma_m'(t))$ - **вектор скорости**.

Носитель пути - траектория пути.

def: Функция l, заданная на множестве гладких путей (непрерывны, дифференцируемы) называется длиной пути, если выполняются следующие условия:

1. $l \geq 0$
2. аддитивна: $\forall [a,b]$, $\forall \gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ для любого $c \in [a,b] : l(\gamma) = l(\gamma\Big|_{[a,c]}) + l(\gamma\Big|_{[c,b]})$
3. $\gamma, \overline{\gamma}$ — два пути. $C_\gamma, C_{\overline{\gamma}}$ — носители пути.

   Если $\exists T : C_\gamma \to C_{\overline{\gamma}}$ — сжатие $(\forall M, N : \rho(T(M), T(N)) \leq \rho(M,N))$, то $l(\overline{\gamma}) \leq l(\gamma)$
4. γ - линейный путь, то $l(\gamma) = \rho(A,B)$, где A - начало, B - конец.

А такая штука вообще существует?

Замечание: Из свойства 3 следует, что длина хорды меньше длины дуги.

Замечание: При растяжении длина пути растет.

Замечание: Длина пути не меняется при движениях пространства R^m (очевидно из свойства 3).

Теорема:

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ - C^1 - непрерывно дифференцируемо. Тогда $l(\gamma) = \int\limits_a^b ||\gamma'(t)||dt$.

Доказательство:

Считаем γ - инъективный.

$[p,q] \in Segm[a,b] : \varPhi([p,q]) = l(\gamma\Big|_{[p,q]})$. Проверим $||\gamma'(t)||$ - плотность $\varPhi$.

$\Delta : \forall i = 1, \dots, m : m_i(\Delta) = \min_\delta |\gamma_i'(t)|$, $M_i(\Delta) = \max |\gamma_i'(t)|$.

Возьму $m_\Delta = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^m m_i^2(\Delta)}$, $M_\Delta = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^m M_i^2(\Delta)}$. Проверяем 1, 2, 3 из обобщенной теоремы о плотности. 2 и 3 очевидно выполнены.

Проверим 1: $m_\Delta l(\Delta) \leq \varPhi(\Delta) \leq M_\Delta l(\Delta)$. Завожу $\overline{\gamma} : \Delta \to R^m$ - линейный путь: $\gamma(t) = (M_1(\Delta)t, M_2(\Delta)t, \dots, M_m(\Delta)t)$. Строю $T : C_\gamma \to C_{\overline{\gamma}}$, такое, что $\gamma(t) \to \overline{\gamma}(t)$. Проверим, что это растяжение. Давайте считать расстояние. $\rho(\gamma(t_0), \gamma(t_1)) = \sqrt{\sum\limits_{i=1} (\gamma_i(t_0) - \gamma_i(t_1))^2}$. По теореме Лагранжа:

$$\sqrt{\sum_{i=1} (\gamma_i(t_0) - \gamma_i(t_1))^2} = \sqrt{\sum \gamma_i'(\tau_i)(t_0 - t_1)^2} = \sqrt{\sum \gamma_i'(\tau_i)} |t_0 - t_1| \leq M_{[t_0,t_1]} |t_0 - t_1|$$

$$\leq M_\Delta |t_0 - t_1| = \rho(T(\gamma(t_0)), T(\gamma(t_1)) = \rho(\overline{\gamma}(t_0), \overline{\gamma}(t_1))$$

Откуда выполнен пункт один и выполнена обобщенная теорема о плотности.

Q.E.D.

Примеры:

1. В $\mathbb{R}^2 : \gamma(t) = (x(t), y(t))$ - обычные декартовы.

$$l = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

2. $\mathbb{R}^2$, полярные координаты $r(t)$,$\varphi(t)$

$$l = \int_a^b \sqrt{((r(t)\cos\varphi(t))')^2 + ((r(t)\sin\varphi(t))')^2} = \int_a^b \sqrt{r(t)^2 + r'(t)^2} dt$$

3. Длина графика $x(t) = t, y(t) = f(t)$.

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$$

Вернемся к вопросу существованию такой штуки.

Существование длины пути - Супремум длин вписанных ломаных. Разбиваю отрезок на n кусочков и считаю сумму длины ломанных: $a = x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$

Теперь будем рассматривать пути в $\mathbb{R}^1$.

$l(\gamma) = \sup(\sum \gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b)$.

Замечание: $\gamma \in C^1 : l(\gamma) = \int\limits_a^b |\gamma'(t)| dt$.

def: Пусть f - любая из $[a, b] \to \mathbb{R}$. Тогда **вариация функции** на $[a, b]$:

$$\mathrm{Var}_a^b f = \sup(\sum_{k=1}^n |f(t_k) - f(t_{k-1})|)$$

где $\tau = \{t_0, \ldots, t_n\}$ — дробление отрезка

Пример: $f(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \\ 0, x \in \mathbb{R}, x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$, $\mathrm{Var}_a^b f = +\infty$

Если для f выполнено: $\mathrm{Var}_a^b f < +\infty$, то она называется **ограниченной** вариации.

Экскурсия в зоопарк.

Кривая Пеано - это путь в $\mathbb{R}^2$, такой, что я сначала разбиваю отрезок $[0, 1]$ на 4 равных части так, что отображение первой части отрезка находится в части 1(см рисунок), второй части отрезка в части 2 и так далее. Потом повторяю то же самое в каждом квадратике. Потом повторяю то же самое в каждом квадратике квадратика и так далее. Изображение внизу описывает это построение поэтапно.

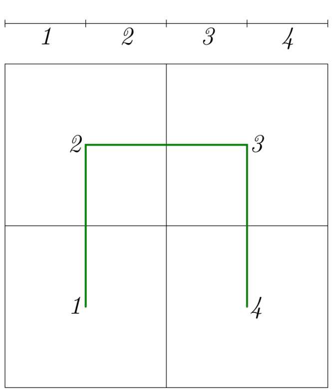


Fig. 1.

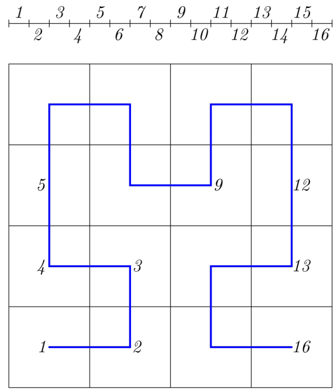


Fig. 2.

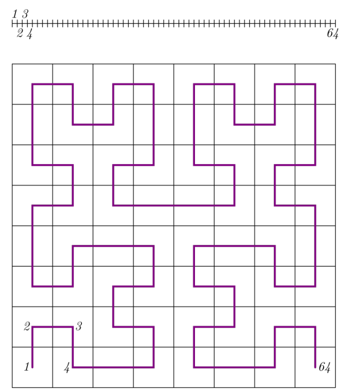
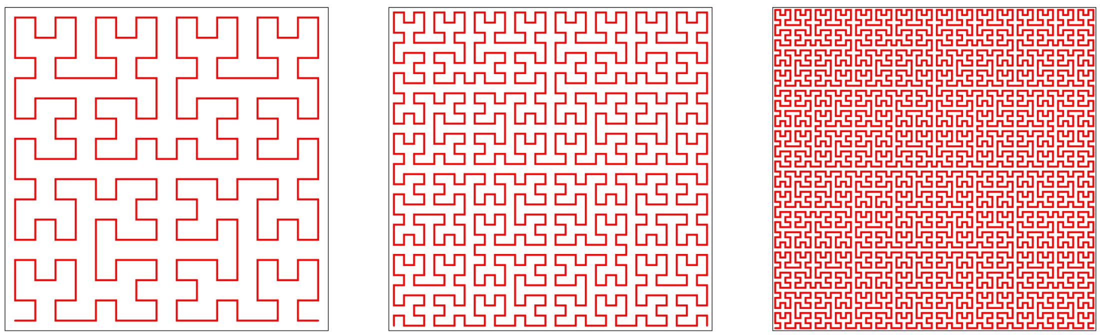


Fig. 3.



Заметим, что у нас биекция между $\mathbb{R}$ и в $\mathbb{R}^2$.

1.6 Верхний и нижний пределы последовательностей

def: (x_n) - вещ. последовательность $L \in \mathbb{R}$ - **частичный предел** $x_n : \exists (n_k) : n_1 < n_2 < \ldots : \lim\limits_{n\to\infty} x_{n_k} = L$.

def: x_n - вещ. последовательность. Рассмотрим $y_n = \sup(x_n, x_{n+1}, \ldots), z_n = \inf(x_n, x_{n+1}, \ldots)$. y_n - **верхне огибающая**, z_n - **нижне огибающая**.

y_n - не возрастает, z_n - не убывает. $\forall n : z_n \leq x_n \leq y_n$

Если изменить конечное число членов последовательности, то y_n, z_n изменятся конечное число раз.

Верхний предел последовательности— $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \lim y_n \in \overline{R}$

Нижний предел последовательности— $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \lim y_n \in \overline{R}$

Теорема (о свойствах верхнего и нижнего предела)

$(x_n), (\overline{x_n})$ — произвольные вещ последовательности

1. $\underline{\lim} x_n \leq \overline{\lim} x_n$
2. Если $\forall n : x_n \leq \overline{x_n}$, то $\overline{\lim} x_n \leq \overline{\lim}\overline{x_n}$ и $\underline{\lim} x_n \leq \underline{\lim}\overline{x_n}$

   Замечание от Славы: На самом деле здесь можно сказать, что $\exists N$ начиная с которого выполнено $x_n \leq \overline{x_n}$, но КПК почему-то решил так ввести это свойство.
3. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \geq 0$. Тогда $\overline{\lim} \lambda x_n = \lambda \overline{\lim} x_n$ и $\underline{\lim} \lambda x_n = \lambda \underline{\lim} x_n$. (Считаем $0 \cdot \infty = 0$)
4. $\overline{\lim}(-x_n) = -\underline{\lim} x_n$
5. $\overline{\lim}(x_n + \overline{x}_n) \leq \overline{\lim} x_n + \overline{\lim}\overline{x}_n$
6. Пусть $t_n \to l \in \mathbb{R}$. Тогда $\overline{\lim}(x_n + t_n) = \overline{\lim}(x_n) + l$ и $\underline{\lim}(x_n + t_n) = \underline{\lim}(x_n) + l$
7. $t_m \to l > 0 (l \in \mathbb{R})$. Тогда $\overline{\lim}(t_n x_n) = l\overline{\lim}(x_n)$ и $\underline{\lim}(t_n x_n) = l\underline{\lim}(x_n)$

Доказательство:

1. т.к. $\forall n : z_n \leq x_n \leq y_n$, то используем теорему о предельном переходе и получим то, что нам надо.
2. Используем теорему о предельном переходе и получим то, что нам надо.
3. Очевидно из свойств предела.
4. Очевидно из свойств супремума.
5. $\sup(x_n + \overline{x_n}, \ldots) \leq \sup(x_n, \ldots) + \sup(\overline{x}_n, \ldots)$ - первое значение в паре не больше $\sup(x_n, \ldots)$, второе не больше $\sup(\overline{x}_n, \ldots)$.
6. $\forall \varepsilon > 0 : \exists N_0 : \forall k > N_0 : x_k + l - \varepsilon < x_k + t_k < x_k + l + \varepsilon$ - верно из условия.

   Возьмем $N > N_0$ при $n \geq N$ выполнено, откуда перейдем к супремумам множеств:

   $$y_N + l - \varepsilon \leq \sup(x_N + t_N, x_{N+1} + t_{N+1}, \ldots) \leq y_N + l + \varepsilon$$

   Устремлю N к бесконечностти:

   $$\overline{\lim} y_n + l - \varepsilon \leq \lim \sup(...) \leq \overline{\lim} y_n + l + \varepsilon$$

7. Аналогично прошлому пункту.

Q.E.D.

Теорема (техническое определение верхнего предела).

(x_n) - произвольная вещ. последовательность.

1. $\overline{\lim} x_n = +\infty \Leftrightarrow x_n$ - не ограничено сверху
2. $\overline{\lim} x_n = -\infty \Leftrightarrow x_n \to -\infty$.
3. $\overline{\lim} x_n = l \Leftrightarrow$
   (a) $\forall \varepsilon > 0 : \exists : \forall n > N : x_n < l + \varepsilon$
   (b) $\forall \varepsilon > 0$ неравенство $l - \varepsilon \leq x_n$ выполнено для бесконечного множества x-ов

Доказательство:

1. Очевидно.
2. $x_n \leq y_n$ Тогда по теореме о предельном переходе(или двух городовых) $x_n \to -\infty$. А в обратную сторону очевидно из определения предела.
3. $\Rightarrow \forall \varepsilon : \exists N : \forall n > N : x_n \leq y_n < \varepsilon + l$ - пункт а доказан просто определением предела y_n.

   $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n > N : l - \varepsilon < y_n$.

   Тогда по техническому описанию супремума $\exists k \geq n : l - \varepsilon < x_k \leq y_n$. Потом возьмите $n > k$ и так далее. Мы научились делать бесконечное кол-во таких k-шек, откуда пункт б доказан.

   $\Leftarrow y_n$ - убывающая. Если мы имеем а, то $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n > N : x_n < l + \varepsilon$. Из этого следует $y_n \leq l + \varepsilon$. И благодаря пункту б у нас выполнено техническое описание супремума то есть $y_n \to l$

Q.E.D.

Теорема

$\exists \lim(x_n) = L \in \overline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \underline{\lim} x_n = \overline{\lim} x_n = L$.

Доказательство:

$L = +\infty$ - см прошлую теорему. Аналогично с $-\infty$.

$L \in \mathbb{R}$. В правую сторону очевидно из технического описания. В левую сторону: $z_n \leq x_n \leq y_n$ по теореме о двух городовых верно.

Q.E.D.

Теорема о характеризации верхнего предела как частичного

(x_n) - вещ последовательность. Тогда:

1. Если $l \in \overline{\mathbb{R}}-$ частичный предел x_m, то $\underline{\lim} x_n \leq l \leq \overline{\lim} x_n$
2. $\exists n_k, m_k : x_{n_k} \to \overline{\lim} x_n, x_{m_k} \to \underline{\lim} x_n$

Доказательство:

1. $x_{n_k} \to l$: $z_{n_k} \leq x_{n_k} \leq y_{n_k}$. Устремим к $+\infty$ и получис то, что надо.

2. Очевидно из технического описания супремума и техн. описания верхнего предела (будем выбирать все более и более близкие к l).

Q.E.D.

1.7 Интегральные суммы.

def: $[a, b]$ **дробление** отрезка $[a, b]$ (на n частей):

$x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$.

Ранг дробления(мелкость) - $\max |x_k - x_{k-1}|$

Оснащение дробления - $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\} : \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$

Пусть задана $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Тогда **Риманова сумма**: $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$.

Теорема(об интеграле, как о пределе частичных сумм)

$f \in C([a, b])$. Тогда $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall$ дробления $(x_0, \ldots, x_m)$ ранга $< \delta$. Тогда $\forall$ оснащ.:

$$\left| \int\limits_a^b f(x)dx - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right| < \varepsilon$$

Доказательство:

Используем теорему Кантора о равномерной непрерывности:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x, \overline{x} \in [a, b] : |x - \overline{x}| < \delta : |f(x) - f(\overline{x})| < \varepsilon$$

$$\int\limits_a^b f(x)dx - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx - f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx - \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(\xi_i)dx = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x) - f(\xi_i))dx$$

Теперь возьму δ и ϵ из теоремы Кантора, возьму любое дробление ранга меньше δ, получу, что $|x_i - \xi_i| < \delta$ и $|\xi_i - x_{i-1}| < \delta$. Откуда выполнено теорема Кантора и разность $|f(x) - f(\xi_i)| < \varepsilon$. Откуда:

$$\left| \int\limits_a^b f(x)dx - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} |(f(x) - f(\xi_i))|dx \leq \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \varepsilon dx = \varepsilon(b - a)$$

Откуда по теореме о бюрократном учете получим искомое.

Q.E.D.

$w(\delta) = \sup\limits_{t, x \in [a, b], |x - t| < \delta} |f(t) - f(x)|$ — **модуль непрерывности**.

Теорема (об интегральной сумме центральных прямоугольников)

$f \in C^2([a, b])$, $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, $\delta = max(x_i - x_{i-1}), \xi_i = \dfrac{(x_{i-1} + x_i)}{2}$.

Тогда:

$$\left|\sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - \int_a^b f(x)dx\right| \leq \frac{\delta^2}{8}\int_a^b |f''(x)|dx$$

Теорема (формула трапеций)

в тех же условиях:

$$\left|\sum_{i=1}^{n}(\frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2}(x_i - x_{i-1})) - \int_a^b f(x)dx\right| \leq \frac{\delta^2}{8}\int_a^b |f''(x)|dx$$

Доказательство:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)(x-\xi_i)'dx = f(x)(x-\xi_i)\Big|_{x_{i-1}}^{x_i} - \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)(x-\xi_i)dx =$$

$$= (f(x_i) + f(x_{i-1}))\cdot\frac{x_i - x_{i-1}}{2} + \frac{1}{2}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(x)((x-x_{i-1})(x_i - x))'dx =$$

$$= [\psi_i(x) = (x - x_{i-1})(x_i - x)] = ... + \frac{1}{2}f'(x)\psi_i(x)\Big|_{x_{i-1}}^{x_i} - \frac{1}{2}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f''(x)\psi_i(x)dx$$

Тогда:

$$\left|\sum \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2}(x_i - x_{i-1}) - \int_a^b f(x)dx\right| = \left|\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f''(x)\psi_i(x)dx\right|$$

Заметим, что $\psi(x)$, которая является функцией из частей $\psi_i(x)$ будет непрерывной, откуда я могу ее интегрировать и сделать замену на нее:

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f''(x)\psi(x)dx\right| = \left|\frac{1}{2}\int_a^b f''(x)\psi_(x)dx\right| \leq \frac{1}{2}\int_a^b |f''(x)\psi(x)|\,dx \leq \frac{\delta^2}{8}\int_a^b |f''(x)|dx$$

Q.E.D.

Формула Эйлера - Маклорена (простейшая)

$f \in C^2([m,n])$, $m, n \in \mathbb{R}$. Тогда:

$$\sum_{i=m}^{n} f(i) - \frac{1}{2}f(m) - \frac{1}{2}f(n) = \int_m^n f(x)dx + \frac{1}{2}\int_m^n f''(x)\{x\}(1 - \{x\})dx$$

Доказательство:

Очевидно :)

Это буквально прошлая теорема, просто надо очень долго пялится в формулу. $\psi(x) = (1 - \{x\})\{x\}$. Попяльтесь в формулу и тоже поймете.

Q.E.D.

Примеры:

$f(x) = x^p$ $(p > -1)$

$$1^p + 2^p + \ldots + n^p = \int\limits_1^n x^p dx + \frac{1}{2}(n^p + 1) + \frac{1}{2}\int\limits_1^n p(p-1)x^{p-2}\{x\}(1 - \{x\}) =$$

$$= \frac{n^{p+1}}{p+1} - \frac{1}{p+1} + \frac{n^p}{2} + \frac{1}{2} + O(\max(1, n^{p-1}) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + O(max(1, n^{p-1}))$$

Торжественный момент, применим формулу для $p = 1$:

$1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n^2}{2} + \dfrac{n}{2} + 0$ — Мы доказали теорему Гаусса.

Применим формулу для $p = -1$:

$1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n} = \ln n + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2n} + \displaystyle\int\limits_1^n \dfrac{1}{x^3}\{x\}(1 - \{x\})dx$

$1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n} = \ln n + \gamma + o(1)$. Причем $\gamma \in [\dfrac{1}{2}, \dfrac{5}{8}]$ - **Постоянная Эйлера**

Формула Валлиса

$I_n = \displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\dfrac{\pi}{2}, n - \text{четная} \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!}, n - \text{неч} \end{cases}$

КПК: Используйте формулу интегрирования по частям. Двойной факториал - одной четности

$x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$\sin^{2k+1} x \leq \sin^{2k} x \leq \sin^{2k-1} x$ - очевидное неравенство. Проинтегрируем по $0, \dfrac{\pi}{2}$, получим:

$$\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \leq \frac{(2k-1)!!}{2k!!} \cdot \frac{\pi}{2} \leq \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}$$

$$\left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)^2 \frac{1}{2k+1} \leq \frac{\pi}{2} \leq \left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)^2 \frac{1}{2k}$$

Правая часть - левая часть $\left(\dfrac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)^2 (\dfrac{1}{2k} \cdot \dfrac{1}{2k+1}) \leq \dfrac{\pi}{2} \cdot \dfrac{1}{2k} \to 0$

Получили, что левая и правые величины стремятся к $\frac{\pi}{2}$.

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)^2\frac{1}{k}=\pi$$ — **Формула Валлиса**

Формула Стирлинга

Воспользуемся формулой Эйлера - Маклорена для $f(x)=\ln x$:

$$\ln 1+\ln 2+\ldots+\ln n=\int\limits_1^n \ln x dx+\frac{\ln n}{2}-\frac{1}{2}\int\limits_1^n\frac{1}{x^2}\{x\}(1-\{x\})dx=$$

$$n\ln n-n+1+\frac{\ln n}{2}-\frac{1}{2}\int\limits_1^n\frac{1}{x^2}\{x\}(1-\{x\})dx=n\ln n-n+\frac{\ln 2}{2}+C_1+o(1)$$

А давайте теперь возвем экспоненту от правой и левой части:

$$n!=e^{n\ln n}e^{-n}e^{\frac{\ln n}{2}}e^{C_1+o(1)}$$

Получили, что $n!\sim\dfrac{n^n}{e^n}\sqrt{n}\cdot c$, где $c=e^{C_1}$.

А теперь давайте сочетать и найдем эту c.

$(2k)!!=k!\cdot 2^k,(2k-1)!!=\dfrac{(2k)!}{k!\cdot 2^k}$. С учетом этого воспользуемся формулой Валлиса:

$$\sqrt{\pi}=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)\frac{1}{\sqrt{k}}=\lim_{k\to\infty}\frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k)!}\frac{1}{\sqrt{k}}=\lim_{k\to\infty}\frac{2^{2k}k^{2k}e^{-2k}k\cdot c^2}{(2k)^{2k}e^{-2k}\sqrt{2k}\cdot c}\frac{1}{\sqrt{k}}=\frac{c}{\sqrt{2}}$$

Откуда $c=\sqrt{2\pi}$

$n!\sim\dfrac{n^n}{e^n}\sqrt{n}\cdot\sqrt{2\pi}$ — **Формула Стирлинга**

1.8 Несобственные интегралы.

def: **Допустимая функция** на $[a, b) : (-\infty < a < b \leq +\infty)$

$\forall A \in (a, b) : f$ - кусочно непрерывная на $[a, A]$

def: $\Phi(A) := \int\limits_a^A f(x)dx$

Если $\exists \lim\limits_{A \to b-0} \Phi(A) \in \overline{R}$ - этот предел называется **несобственным интегралом**

Если этот предел конечен, то говорят, что несобственный интеграл сходится, иначе - расходится.

Свойства:

1. **Критерий Больцана-Коши** (сходимости несобственного интеграла):

   $\int\limits_a^b f(x)dx$ — сходящаяся $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists \Delta \in (a, b) : \forall A, B \in \Delta, |\int\limits_A^B f| < \varepsilon$

   Оно тривиально (так сказал КПК).

   Следствие: Если $\exists A_n, B_n \to b - 0 : \int\limits_{A_n}^{B_n} f \not\to 0$, то $\int\limits_a^b f$ - расходится.

2. Аддитивность на промежутке:

   f - допустима на $[a, b)$, $c \in (a, b)$. Тогда $\int\limits_a^c, \int\limits_c^b$ сходятся или расходятся одновременно и в случаях сходимости $\int\limits_a^b f = \int\limits_a^b f + \int\limits_c^b f$

   Доказательство:

   $\int\limits_a^A f$, где $c < A < b : \int\limits_a^A f = \int\limits_a^c + \int\limits_c^A$, если в одной части предел сработает, то в другой.

   Q.E.D.

   Если $\int\limits_a^b f$ сходится, то $\int\limits_c^b f \to 0$, при $c \to b - 0$.

3. f, g - доп на $[a.b)$, $\int\limits_a^b f, \int\limits_a^b g$ - сходятся, $\lambda \in \mathbb{R}$:

Тогда $\int\limits_a^b f+g = \int\limits_a^b f + \int\limits_a^b g, \int\limits_a^b \lambda f = \lambda \int\limits_a^b f$

4. f, g допустимы на $[a, b)$: $\int\limits_a^b g, \int\limits_a^b f$ - существует в $\mathbb{R}$, $f \leq g$. Тогда $\int\limits_a^b f \leq \int\limits_a^b g$.
5. f, g - дифф. на $[a, b)$, f', g' - допустимы, тогда:
$$\int\limits_a^b fg' = fg\Big|_a^b - \int\limits_a^b f'g$$
(если существуют два предела из трех)
6. $\varphi : [\alpha, \beta) \to \langle A, B\rangle, \varphi \in C$. Пусть $\exists \varphi(\beta - 0) \in \overline{\mathbb{R}}, f \in C(\langle A, B\rangle)$. Тогда:
$$\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi)\varphi' dt = \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta-0)} f(x)dx$$

В целом несобственные интегралы очень похожи на обычные.

Признаки сравнения сходимости несобственного интеграла.

Лемма:

Пусть f допустима на $[a, b), f \geq 0, \mathit{\Phi}(A) = \int\limits_a^A f$. Тогда $\int\limits_a^b$ - сходящаяся, то $\mathit{\Phi}$ ограниченная.

Доказательство:

$\mathit{\Phi}$ монотонно возрастает. Раз $\int\limits_a^b$ сходится, то $\mathit{\Phi}$ ограниченно.

Q.E.D.

Признак сравнения.

$g \geq 0, f \geq 0$ допустимы на $[a, b)$

1. $f \leq g$, если g сходится, то f очевидно сходится и если f расходится, то g тоже расходится.
2. $\lim\limits_{x \to b-0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = e \in (0, +\infty)$, то $\int\limits_a^b f, \int\limits_a^b g$ сходятся и расходятся одновременно.
3. $\lim\limits_{x \to b-0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$, то выполнен пункт 1, если предел бесконечность, то поменяйте f, g местами.

Доказательство:

Пусть $\Phi(A) = \int\limits_a^A f, \Psi(A) = \int\limits_a^A g$. Все 3 пункта тривиально доказываются через предельные переходы и сходимость.

Q.E.D.

Соглашение. $\int\limits_0^{+\infty} f(x)dx$, $\nexists \lim\limits_{x\to+0} f(x)$ и f непрерывно на $(0,+\infty)$ и например в $x_0 = 10$ непрерывность ломается (разрыв второго рода).

В таком случае $\int\limits_0^{+\infty} = \int\limits_0^{5} + \int\limits_5^{10} + \int\limits_{10}^{15} + \int\limits_{15}^{+\infty}$

Пример:

$\int\limits_{10}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta}$. Мы хотим понять при каких α и β сходится.

1. Случай $\alpha > 1$. "Удавим логарифм!"(гениальные формулировки КПК). Пусть $\alpha = 1 + 2a$, где $a > 0$. Тогда:
$$\frac{1}{x^{1+2a}(\ln x)^\beta} = \frac{1}{x^{1+a}} \cdot \frac{1}{x^a (\ln x)^\beta}.$$
Это означает, что существует $x_0 > 10$ такое, что для всех $x > x_0$:
$$\frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} < 1.$$
Интеграл от $\frac{1}{x^{a+1}}$ сходится. Второй множитель меньше 1, начиная с некоторого x_0, откуда интеграл сходится с некоторого x_0, откуда он в целом сходится.
2. $\alpha < 1$. Тогда $\alpha = 1 - 2a$, $a > 0$.
$$\frac{1}{x^{1-a}} \cdot \frac{1}{x^{-a}(\ln x)^\beta}.$$
Левая дробь расходится, а поскольку $x^{-a} \to 0$ при $x \to \infty$, то весь второй множитель будет неограниченно возрастать, что усиливает расходимость интеграла.
3. $\alpha = 1$. Откуда мы можем просто поменять переменные $\int\limits_{10}^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^\beta} = \int\limits_{\ln 10}^{+\infty} \frac{d(\ln x)}{(\ln x)^\beta}$. А это уже тривиально.

КПК: Устроим экскурсию в кунст камеру

Пример:

Гамма функция Эйлера — $\Gamma(t) = \int\limits_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} dx, t \in (0, +\infty)$

1) При $t > 0$ интеграл сходится.

Доказательство:

$$\int\limits_0^{+\infty} = \int\limits_0^1 + \int\limits_1^{+\infty}$$

Посмотрим на первый интеграл.

1. Если $t \geq 1$, то интеграл собственный и все ок
2. Если $0 < t < 1$. $x^{t-1}e^{-x} \xrightarrow{x\to 0} x^{t-1} \cdot 1$ и сходится к нулю и все оки супер чики пуки.

Посмотрим на второй интеграл. С ним тоже все ок.

Q.E.D.

2) $\Gamma(t)$ непрерывна, потому что $\Gamma(t)$ - выпуклая функция. А почему она выпуклая? Посмотрим на функцию $t \to x^{t-1}e^{-x}$. Вторая производная (по t) больше нуля, откуда она выпуклая. Тогда и $\Gamma(t)$ выпуклая, а отсюда непрерывная. Мы просто пишем неравенство выпуклой функции и интегрируем его.

3) $\forall t > 0 : \Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$, в частности $\Gamma(n+1) = n(n-1)\dots 1 = n!$

$$\Gamma(t+1) = \int\limits_0^{+\infty} x^t e^{-x} dx = x^t(-e^{-x})\Big|_0^{+\infty} + t\int\limits_0^{+\infty} x^{t-1}e^{-x}dx = t\Gamma(T)$$

4) $t\Gamma(t) \sim 1$, $\Gamma(t) \sim \frac{1}{t}$ при $t \to 0$

5) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ - **Интеграл Эйлера - Пуассона**. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ — точнее вот он.

Доказательство:

$$1 - x^2 \leq e^{-x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}$$

Это неравентство эквивалентно $e^t \geq (1+t)$, а эта на самом деле очевидно из выпуклости экспоненты.

Возведем в степень n:

$$(1-x^2)^n \leq e^{-nx^2} \Leftrightarrow \int\limits_0^1 (1-x^2)^n dx \leq \int\limits_0^1 e^{-nx^2}dx$$

А также:

$$e^{-nx^2} \leq \frac{1}{(1+x^2)^n} \Leftrightarrow \int\limits_0^{+\infty} e^{-nx^2}dx \leq \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}dx$$

Давайте заметим, что делая замену левого на $\cos t$, а справа на $\operatorname{tg} t$ и мы получим формулу Валлиса. То есть получается:

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \leq \int\limits_0^{+\infty} e^{-nx^2}dx \leq \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\frac{\pi}{2}$$

Умножу все на корень из n. В интеграле сделаю замену и выскачет наш интеграл Эйлера Пуассона. В середине выражение перестанет зависить от n.

По краям же мы можем посчитать по пределу из формулы Валлеса.

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \leq \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

А это именно то, что от нас требуется.

Q.E.D.

def: f допустима на $[a, b)$ $\int\limits_a^b f$ - **абсолютно сходится**, если:

1. $\int\limits_a^b f$ сходится.
2. $\int\limits_a^b |f|$ сходится.

Замечание от Славы. От слова abs - по модулю.

Напомним пару функций: $f^+ = \max(f, 0)$, $f^- = \max(-f, 0)$

Теорема.

f - допустима на $[a, b)$. Тогда эквивалетно:

1. $\int\limits_a^b f$ - абсолютно сходится.
2. $\int\limits_a^b |f|$ - сходится
3. $\int\limits_a^b f^+, \int\limits_a^b f^-$ - оба сходятся.

Доказательство:

Из первого второе тривиально. Из второго третье очевидно по сравнению: $0 \leq f^+ \leq |f|$ и $0 \leq f^- \leq |f|$. Из третьего первое очевидно из $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$

Q.E.D.

Пример:

$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$. Хотим понять, когда сходится, а когда абсолютно сходится.

1) $p > 1$ интеграл очевидно сходится.

2) $p \leq 0$ интеграл расходится и абсолютно тоже расходится.

3) $1 \geq p > 0$ интеграл абсолютно расходится, но сходится.

Тут все тривиально. Не знаю что тут Кохась полчаса объяснял. Если что 7-ая лекция 1.50 +- до 2.15

Замечание. $\int\limits_a^b$ - несобств. Если он сходится, то отсюда вообще никак не следует, что $f(x) \to 0$.

Замечание. $\int\limits_a^b f$ - абсолютно сходится, не следует что $f(x) \to 0$.

Пример:

$\int\limits_1^{+\infty} x(\sin(x^3))dx = \frac{1}{3} \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin y}{\sqrt[3]{y}}$ - сходится.

Теорема (Признак Абеля-Дирихле)

1. f - допустима на $[a, b)$. $F(A) = \int\limits_a^A f(x)dx$ - ограничена на $[a, b)$. $\exists k : \forall A \in [a, b) : |\int\limits_a^A f(x)| \leq K$

   Пусть есть $g \in C^1([a, b))$, g - монотонна и $g(x) \to 0$ при $x \to b$. Тогда $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx$ - сходится.

2. f - допустима на $[a, b)$, $\int\limits_a^b f(x)dx$ - сходится. $g \in C^1([a, b))$, g - монотонна и ограничена на $[a, b)$. Тогда $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx$ - сходится.

Доказательство:

В первом случае интегрируем по частям. $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = F(x)g(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b F(x)g'(x)dx$. Заметим, что в правой части и то, и то конечно. (правый интеграл абсолютно сходится).

$$\int\limits_a^b F(x)g'(x)dx \le K\int\limits_a^b |g'(x)|dx = signg \cdot K \cdot g\Big|_a^b$$

Во втором случае тоже.

Пример (Интеграл Дирихле)

$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$

Доказательство:

$$\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}.$$

Проинтегрируем 0 до π. Все косинусы дают нулевой интеграл

$$0 = \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}dx - \frac{\pi}{2}$$

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{x}dx = \int\limits_0^{\pi(n+\frac{1}{2})} \frac{\sin y}{y}dy \to \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$$

По признаку Дирихле этот интеграл сходится. Устремив n к бесконечности получим то, что нужно доказать. Теперь осталось показать, что $\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{x}dx - \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}dx$ стремится к нулю.

$$= \int\limits_0^{\pi} \sin(n+\frac{1}{2})x\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\right)$$

Пусть то, что в больших скобках это $h(x)$.

1. Очевидно, что $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = 0$. (Тут надо расписать тейлора в нуле до 3-4 степени)
2. Доопределим $h(x) = 0$. Тогда h - дифф. в точке ноль. (Аналогично)

Тогда мы можем сделать интегрирование по частям.

$$= \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\cos(n+\frac{1}{2})xh(x)\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\int\limits_0^{\pi}\cos(n+\frac{1}{2})xh'(x)dx$$

Откуда, заметим, что каждое из выражений стремится к нулю при $n \to \infty$, откуда победили

1.9 Интегрирование асимптотического ряда.

$\varphi : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, при $x \to a, \varphi_{k+1} = o(\varphi_k)$

$$f = \sum_{k=0}^{n} c_k\varphi_k + o(\varphi_n)$$

Если такое ассимпт. разложение существует $\forall n$, то $f \sim \sum\limits_{k=1}^{+\infty} c_k\varphi_k$

Замечание: Это формальная запись, ряд не предполагается сходящимся.

Замечание: $f \neq g$ могут иметь одно и то же асимптотическое разложение: $\forall n : f - g = o(\varphi_n)$. Пример: $e^{-\frac{1}{x^2}}$ и $\mathbb{O}$ функция.

Лемма (об интегрировании асимпт. равенств)

$f, g \in C[a, b)$, $g \geq 0$, интеграл $\int\limits_a^b g(x)dx = +\infty$. Пусть $F(x) = \int\limits_a^x f, G(x) = \int\limits_a^x g$

Тогда из соотношений при $x \to b - 0$:

1. $f \sim g \Rightarrow F(x) \sim G(x)$
2. $f = O(g) \Rightarrow F = O(G)$
3. $f = o(g) \Rightarrow F = o(G)$

Доказательство:

1. $F \sim G$ - это правило Лопиталя. $g \geq 0, f \sim g \Rightarrow f \geq 0$ в окрестности $b \Rightarrow \int\limits_a^b f = +\infty$.

$$\lim \frac{F(x)}{G(x)} = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right] = \lim \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

2. $f = O(g) \Leftrightarrow \exists M : \exists x_0 \in [a, b) : \forall x \geq x_0 : |f(x)| \leq M|g(x)|$. Тогда при $x > x_0$:

$$|\int\limits_{x_0}^{x} f| \leq M\int\limits_{x_0}^{x} g$$

Пусть $\int\limits_a^{x_0} |f| = c_1 > 0$. Выберем x_1 так, что $\int\limits_a^{x_1} g(x) = \alpha > 0$. Тогда для $x > x_1$:

$$|\int\limits_a^x f| \leq \int\limits_a^{x_0} |f| + \int\limits_{x_0}^{x} |f| \leq c_1 \cdot 1 + M\int\limits_{x_0}^{x} g \leq \frac{c_1}{\alpha}\int\limits_a^{x_1} g + M\int\limits_x^{x_0} g \leq$$

$$\leq \left(\frac{c_1}{\alpha} + M\right)\int\limits_a^x g$$

Заметим, что тк $\int\limits_a^b g = +\infty$, то α я мог выбирать сколь угодно большую. Выберу ее такой, что $\dfrac{c_1}{\alpha}$ очень маленькое и получу то, что от нас и требовалось

3. $f = o(g)$. Фиксируем $\varepsilon > 0 : \exists x_0 : \forall x > x_0 : |\int\limits_{x_0}^{x} f| < \dfrac{\varepsilon}{2}\int\limits_{x_0}^{x} g$.

   Выбираем c_1, потом x_1, делаем аналогично

Q.E.D.

Лемма 2. $\varphi_n \in C[a, b)$ - шкала асимпт. разложения при $x \to b - 0$, $\varphi_n \geq 0$.

$\varPhi_n(x) = \int\limits_x^b \varphi$ - сх. $\forall n$.

Тогда $\varPhi_n$ тоже шкала и если $f \in C[a, b) : F(x) = \int\limits_x^b f$ сх., $f \sim \sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n\varphi_n$, то $F(x) \sim \sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n\varPhi_n$.

Доказательство:

Следует из правил Лопиталя:

$$\lim_{x\to b-0} \frac{\varPhi_{m+1}(x)}{\varPhi(x)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to b-0} \frac{-\varphi_{n+1}(x)}{-\varphi_n(x)} = 0$$

Покажем, что асимптотическое разложение:

$$\lim_{x\to b-0} \frac{F(x) - \sum\limits_{k=1}^{n} c_k\varPhi_k}{\varPhi_n} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to b-0} \frac{f(x) - \sum\limits_{k=1}^{n} c_k\varphi_k}{\varphi_n} = 0$$

Q.E.D

2 Ряды.

2.1 Определения.

def: Пусть дана вещ. последовательность (a_n).

Выражение вида $S_N = \sum\limits_{n=1}^{N} a_n$ — **частичная сумма ряда**.

Если $\exists \lim\limits_{N\to+\infty} S_n = L \in \overline{\mathbb{R}}$, то говорят, что L - **сумма ряда** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

В случае L конечного будем называть ряд **сходящимся**. В случае $L = \infty$ или не существования предела ряда, будем называть ряд **расходящимся**.

Замечание. $a_n = S_n - S_{n-1}$.

Примеры:

1. $(a_n) : a_n \equiv 0$, то сумма 0 - сходится
2. $(a_n) : a_n \equiv 1$, то сумма $+\infty$ - расходится
3. $(a_n) : a_n = (-1)^n$, то предела нет и расходится.
4. $a_n = q^n$. $S_N = 1 + \ldots + q^N = \dfrac{q^{N+1} - 1}{q - 1}$.

   Заметим, что это будет сходиться при $q < 1$ и $\xrightarrow{n\to+\infty} \dfrac{1}{1-q}$.

$\sum\limits_{n=k}^{+\infty} a_n$ - k-ый остаток ряда.

Свойства рядов:

1. $\sum a_n, \sum b_n$ - сх. $c_n = a_n + b_n$.
   Тогда $\sum c_n$ - сходится и $\sum c_n = \sum a_n + \sum b_n$
2. $\sum a_n$ - сходится $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \sum \lambda a_n$ - сходится и $\sum \lambda a_n = \lambda \sum a_n$.
3. $\sum a_n$ - сходится, то любой остаток ряда сходится
4. Если какой-нибудь остаток ряда сходится, то ряд сходится
5. Ряд сходится $\Leftrightarrow r_n \to 0$.

Теорема (грабли) (необходимое условие сходимости)

$\sum a_n$ - сходится. Тогда $a_n \to 0$

Доказательство:

Да если бы камень умел думать, да если бы он не думал, он бы сходу сделал доказательство.

$a_n = S_n - S_{n-1}$. Правое стремится к 0, значит и левое стремится к 0.

Q.E.D.

Замечание. В ОБРАТНУЮ СТОРОНУ НЕ РАБОТАЕТ!!!

Теорема (критерий Больцано-Коши)

$\sum a_n$ - сходится $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n > N : \forall k \in \mathbb{N} : |\sum\limits_{i=n+1}^{n+k} a_n| < \varepsilon$

Доказательство:

$\exists \lim S_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n > N : \forall k : |S_{n+k} - S_n| < \varepsilon$

Q.E.D.

2.2 Сходимость положительных рядов

Лемма: $a_n \geq 0$. Тогда $\sum a_n$ - сходится $\Leftrightarrow S_n$ - ограниченная. Очевидно.

Теорема (Признак сравнения)

Есть $a_k \geq 0, b_k \geq 0$

1. $\forall n : a_n \leq b_n$. Тогда, если b сходится $\Rightarrow a$ сходится. Если a расходится, то b расходится.
2. $\dfrac{a_n}{b_n} \to l$. Если $l \in (0, +\infty)$, тогда a,b сходятся расходятся одновременно. Если $l = 0$, то выполнено утв. из пункта 1. Если $l = +\infty$, то выполнено утв. из пункта 1 наоборот
3. Начиная с некоторого места $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$, то см утв. пункт 1.

Доказательство:

Док-во 1 и 2 случая аналогичны интегралам, в 3 возьмём с некоторого N до n эти частные и перемножим, получим $a_n \leq b_n \cdot (a_N / b_N)$

Q.E.D.

Замечание: $\forall n$ можно заменить на $\exists N_0 : \forall n > N_0$

Теорема (Признак Коши)

$\sum a_n, a_n \geq 0, K_n = \sqrt[n]{a_n}$

lite:

1. $\exists q \in (0,1)$, $K_n \leq q$. Тогда $\sum a_n$ - сходится
2. $K_n \geq 1$ для бесконечного множества номеров. Тогда $\sum a_n$ - расходится

pro:

$K = \overline{\lim} K_n$

1. $K > 1$ ряд расходится.
2. $K < 1$ ряд сходится

Замечание $K = 1$ - признак не работает.

Доказательство:

Сводим к признаку сравнения:

lite:

1. $K_n \leq q \Leftrightarrow a_n \leq q^n$. А q^n сходится (геом. прогрессия)
2. $K_n \geq 1 \Rightarrow a_n \geq 1$ для бесконечного числа членов $\Rightarrow$ расходится

pro:

1. $K > 1$ из технического описания верхнего предела, существует бесконечное много $\sqrt[n]{a_n} > 1 \Rightarrow$ сводим к второму пункту light
2. Опять пользуемся техническим описанием, что $\sqrt[n]{a_n} < 1 \Rightarrow \sum a_n$ - сходится.

Теорема (Признак Даламбера)

$a_n > 0 : D_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$

lite:

1. $\exists q \in (0, 1) : D_n \leq q$ НСНМ. Тогда $\sum a_n$ - сходится
2. $D_n \geq 1$ НСНМ. Тогда $\sum a_n$ - расходится.

pro: $D := \lim D_n$

1. $D > 1$: Ряд расходится
2. $D < 1$: Ряд сходится

Замечание: $D = 1$ не работает.

Доказательство:

lite:

1. Перемножим эти D_n, получим $a_N \leq q^N \cdot const$ - сход
2. $a_{n+1} \geq a_n$ - возрастает $=>$ не стремится к 0 - не сход

pro:

1. Берём точку между D и 1 получаем, что не стремится к 0
2. Берём точку между 1 и D по lite1 сход

Q.E.D.

Признак (Раабе)

$a_n > 0$. $R_n := n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1)$

light:

1. $\exists r > 1$: НСНМ $R_n \geq r \Rightarrow$ Ряд $\sum a_n$ сходится
2. $R_n \leq 1$ НСНМ $\Rightarrow$ Ряд $\sum a_n$ расходится

pro:

$R := \lim R^n$

1. $R > 1$: ряд сходится
2. $R < 1$: расходится.

Доказательство:

TODO

Q.E.D

Теорема (Интегральный признак Коши)

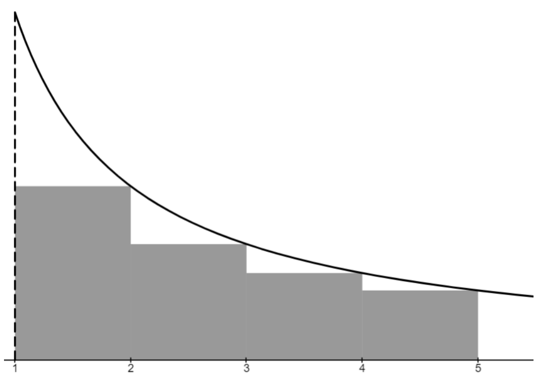
f - непрерывная на $[1, +\infty)$, монотонна, $f \geq 0$. Тогда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(n)$ и $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ сходятся и расходятся одновременно.

Доказательство:

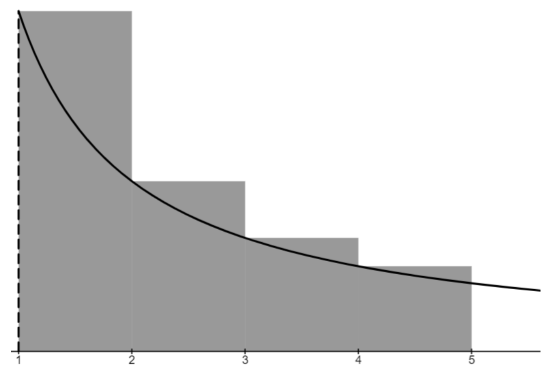
Рассмотрим случай убывания f.

Тогда у нас существует $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A \geq 0$. Если $A > 0$, то очевидно и сумма и интеграл расходятся (не забываем что функция монотонная).

Теперь рассмотрим случай, когда $A = 0$. Давайте оценим наш интеграл снизу и сверху:



(a) Снизу



(b) Сверху

Теперь подробнее, что нам дает такое разбиение: (на примере левой картинки)

$$\int\limits_1^{+\infty} f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_k^{k+1} f(x) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_k^{k+1} f(k+1) \geq \sum_{n=2}^{N} f(n)$$

Доказав аналогичное неравенство для правого получим:

$$\sum_{n=1}^{N} f(n) \geq \int\limits_1^{N} f(x)dx \geq \sum_{n=2}^{N} f(n)$$

А отсюда уже следует равносильность схождения.

Q.E.D.

Замечание: ФУНКЦИЯ ДОЛЖНА БЫТЬ МОНОТОННА.

Пример:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^p (\ln n)^q}$$

Как мы показывали ранее мы знаем, когда соотв. интеграл сходится и расходится.

Абсолютная сходимость.

a_n - любого знака. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}$ — абсолютная сходимость если:

1. $\sum a_n$ - сходится
2. $\sum |a_n|$ - сходится

Пример:

$$\frac{1}{1+x^2} \leq 1 - x^2 + x^4 - \dots (-1)^N x^{2N} + \frac{(-1)^{N+1} x^{2N+2}}{1+x^2}$$

Проинтегрируем по $[0, 1]$, получим:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{(-1)^N}{2N+1} + \int\limits_0^1 \frac{(-1)^{N+1} x^{2N+2}}{1+x^2} dx$$

Интеграл справа по модулю $\leq$ интеграла по модулю $\leq$ интеграла если выкинуть из знаменателя $x^2 \leq \dfrac{1}{2N+3}$, что стремится к нулю.

Ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ - не сходится абсолютно (по инт пр Коши, отрицание критерия Больцано-Коши и по признакам сравнения)

Такая формула называется суммой **Грегори-Лейбница**.

Теорема.

a_n — любого знака. Тогда эквивалентно:

1. $\sum a_n$ - абсолютная сходимость.
2. $\sum |a_n|$ - сходится.
3. $\sum a_n^+, \sum a_n^-$ - оба сходятся. Где $a_n^+ = \max(a_n, 0), a_n^- = \max(-a_n, 0)$

Доказательство: смотри теорему в интегралах

2.3 Сходимость рядом с произвольными знаками слагаемых

Теорема (Признак Лейбница)

$c_1 \geq c_2 \geq \ldots \geq 0$ (т.е монотонность). Пусть $c_n \to 0$. Тогда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}c_n$ - сходится.

Доказательство:

И давайте все синие квадратики подвинем налево. Тогда мы получим, что такая сумма будет ограничена. Но мы доказали, что $(c_1-c_2)+(c_3-c_4)+\ldots$ сходится. Осталось проверить нечетные частичные суммы. $S_{2n+1} = S_{2n} + c_{2n+1}$ и именно если $c \to 0$, то S_{2n+1} стремится к тому же и мы победили.

Более формальное доказательство:

Пусть $S_{2k} = c_1 - c_2 + \ldots + c_{2k-1} - c_{2k}$. Тогда посмотрим на четные суммы:

1. $S_{2k} \leq S_{2k+2}$, тк добавили что-то неотрицательное.
2. $S_{2k} \leq c_1 : S_{2k} = c_1 - (c_2 - c_3) - (c_4 - c_5) - (c_{2k-2} - c_{2k-1}) - c_{2k} \leq c_1$

Значит существует предел S_{2k}. И используйте концовку прошлой.

Q.E.D.

Секретное приложение к признаку Лейбница

$c_1 \geq c_2 \geq \ldots \geq 0$, $c_n \to 0$

$|\sum\limits_{n=N}^{+\infty}(-1)^{n+1}c_n| \leq c_N$

Доказательство: см. теорему выше.

Пример:

1. $\sum \dfrac{(-1)^n}{n+\sin n}$ сходится по признаку Лейбница
2. $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$ этот ряд не удовл. признаку Лейбница, тк не монотонна

Очень грустная картинка.

Преобразование Абеля (суммирование по частям).

$\sum\limits_{n=1}^{N} a_n b_n = A_N b_N + \sum\limits_{n=1}^{N-1} A_n(b_n - b_{n+1})$, где $A_n = a_1 + \ldots + a_n$

Доказательство: Раскройте сумму и получите magic. (не забудьте проверить края)

Теорема (признак Абеля и Дирихле)

1. (a) Пусть частичные суммы последовательности a_n - ограниченны: $\exists C_A : \forall n : a_1+\ldots+a_n \leq C_A$.

   (b) Пусть b_n - монотонна, $b_n \to 0$

Тогда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ - сходится

2. (a) Ряд $\sum a_n$ - сходится.

   (b) b_n - монотонна и ограничена. $\exists C_B : \forall$

   Тогда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ - сходится.

Доказательство:

1. $\sum\limits_{n=1}^{N} a_n b_n = A_N b_N + \sum\limits_{n=1}^{N-1} A_N (b_n - b_{n+1})$

   A_N - ограниченная и b_N - бесконечно малая.

   Ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} A_N (b_n - b_{n+1})$ - сходится, потому что он сходится абсолютно. А абсолютно он сходится, потому что:

$$\sum_{n=1}^{N-1} |A_N||b_n - b_{n+1}| \leq C_A \sum |b_n - b_{n+1}|$$

   - разности под модулем одного и того же знака, поэтому

$$= C_A |b_1 - b_N| \leq C_A \cdot 2C_B$$

2. $\exists$ кон. $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = \beta$. Разложу ряд и получу:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \beta + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (b_n - \beta)$$

   Правильна ли формула? Не всегда, только если пределы есть.

   Заметим, что $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \beta$ сходится по усл. 1. А вторая сумма сходится по признаку Дирихле (первому пункту нашей теоеремы). Откуда imметт предел и мы победили.

Q.E.D.

Пример:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n^\alpha}, \alpha > 0$$

$$|\sin 1 + \sin 2 + \ldots + \sin n| = |\operatorname{Im}(e^i + e^{2i} + \ldots + e^{ni})| \leq \operatorname{Im} |e^i \frac{e^{ni} - 1}{e^i - 1}| \leq \frac{2}{e^i - 1} = C_A$$

Откуда ограничены частичные суммы и $b_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$ монотонна и $b_n \to 0$, то выполнен признак Дирихле, откуда победили.

Пример: смерть монстра

2.4 Свойства сходящихся рядов.

Сюжет I — группировка слагаемых.

3 прикола:

$$1 - 1 + 1 - \ldots \to ???$$

$$(1 - 1) + (1 - 1) + \ldots \to 0$$

$$1 + (-1 + 1) + \ldots \to 1$$

Так что группировка если работает, то работает очень хитро.

$\sum a_k = (a_1 + \ldots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + \ldots + a_{n_2}) + \ldots$. И теперь я каждую скобоку заменю на b_i.

Теорема

Используя обозначения выше:

1. $\sum a_k$ - сходится. Тогда $\sum b_k$ - сходится и имеет ту же сумму.
2. $\forall k : a_k \geq 0$, то $\sum a_k, \sum b_k$ имеют одинаковые суммы (или одновременно расходятся)

Доказательство:

$S_k^{(b)} = S_{n_k}^{(a)}$

Q.E.D.

Замечание:

Ряд (B) сходится, скобки имеют ограниченный размер:

$$\exists M : \forall k \quad n_k - n_{k-1} < M, \quad a_n \to 0$$

Тогда ряд (A) сходится к той же сумме:

$$S_n^{(A)} = S_k^{(B)} + \underbrace{a_{n_k+1} + \cdots + a_n}_{\text{неполная скобка}}$$

Доказательство:

Пусть $n_k \leq n < n_{k+1}$. Тогда:

$$\lim_{n \to +\infty} S_n^{(A)} = \lim_{n \to +\infty} S_k^{(B)} + \underbrace{\Delta_k}_{\to 0}$$

Докажем, что $\Delta_k \to 0$:

$$\Delta_k = a_{n_{k+1}} + \cdots + a_n \implies |\Delta_k| \leq |a_n| + |a_{n-1}| + \cdots + |a_{n-M+1}|$$

Так как $a_n \to 0$, то для любого $\epsilon > 0$ существует k, начиная с которого:

$$|a_{n-M+1}| < \frac{\epsilon}{M} \implies |\Delta_k| < \epsilon$$

Q.E.D.

def: $\sum a_k, \sum b_k$. Ряд (B) - **перестановка** ряда A, если $\exists \omega : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ биекция и $b_k = a_{\omega(k)}$.

Теорема:

Ряд (A) - абс. сходится $\Rightarrow$ Ряд (B) абс. сходится и имеет ту же самую сумму.

Доказательство:

1) Рассмотрим случай $\forall k : a_k \geq 0$. Посмотрим на какую-то частичную сумму B:

$$S_n^{(B)} = b_1 + \ldots + b_n = a_{\omega(1)} + a_{\omega(2)} + \ldots + a_{\omega(n)}$$

Возьмем самую большую омегу $W = \max(w(1), \ldots, w(n))$.

Заметим, что сумма $a_{\omega(i)}$, будет меньше $S_W^{(A)}$, потому что из суммы $S_W^{(A)}$ (возможно) выкинули какие-то элементы и получили нашу сумму(а элементы положительные).

$S_n^{(B)} \leq S_W^{(A)}$. Устремим в бесконечность и получим $S^{(B)} \leq S^{(A)}$.

Аналогично для $S^{(A)} \leq S^{(B)}$ (обратная перестановка).

Откуда для неотрицательных рядов при перестановке сумма не меняется.

2) Вернемся к общему случаю, a_n - произвольного знака.

Посмотрим на a_n^+, a_n^-, они перестановки b_n^+, b_n^-.

По первому пункту $\sum a_n^+ = \sum b_n^+, \sum a_n^- = \sum b_n^-$, ну и понятно что тогда ряд b абсолютно сходится

Q.E.D

Теорема (Риман)

$\sum a_n$ - сходится, не абсолютно. Тогда:

1. $\forall S \in \overline{R} : \exists$ перестановка ряда $a_n : \sum b_n = S$
2. $\exists$ перестановка: $\nexists \lim\limits_{n \to +\infty} S_n^{(b)}$

Доказательство:

Разобьем наши элементы на две кучки: с положительными и отрицательными элементами ряда. Они обе бесконечные, так как ряд не сходится абсолютно.

Хочу ряд с суммой 2025

Чтобы набрать сумму конечную сумму 2025 будем действовать следующим образом:

1. берем элементы с наименьшими индексами из положительной кучки, пока сумма впервые не станет больше 2025.
2. берем элементы с наименьшими индексами из отрицательной кучки, пока сумма впервые не станет меньше 2025.
3. Возвращаемся к пункту 1

Пересекать 2025 мы будем каждый раз, но при этом ряд сходится, поэтому каждый раз отклонение от 2025 будет все меньше и меньше, т.е. в пределе ряд будет ровно 2025.

Чтобы дойти до бесконечности, каждый раз увеличивайте подъем, а чтобы не получить предела поднимайтесь выше 2025, опускайтесь ниже 2006.

Q.E.D.

Суммируемое семейство чисел.

<u>**def:**</u> Ω - счетное множество $(a_w)_{w\in\Omega}$, $a_\omega \geq 0$ при всех w

$\sum\limits_{w\in\Omega} a_w = \sup\limits_{W\in\Omega}(\sum\limits_{w\in W} a_w) \in \overline{R}$, где W - конечные множества.

Или можно еще вводить по-другому: $\varphi : \mathbb{N} \to \Omega$ - биекция, то тогда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_{\varphi(n)} = S$

<u>**def:**</u> Ω - счетное $(a_w)_{w\in\Omega}$ - <u>**суммируемое семейство**</u>, если $\sum\limits_{w\in\Omega} |a_w| < +\infty$

<u>**Теорема.**</u>

$(a_w)_{w\in\Omega}$ - сумм. семейство. Тогда:

$$\forall\varphi\mathbb{N} \to \Omega : \sum_{n=1}^{+\infty} a_{\varphi(n)} = \sum_{w\in\Omega} a_w^+ - \sum_{w\in\Omega} a_w^-$$

Доказательство: очевидно из Теоремы о перестановке слагаемых.

<u>**def:**</u> <u>**Произведение рядов**</u> $(\sum a_n)(\sum b_k)$

$\gamma : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $n \to (\varphi(n), \psi(n))$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} b_{\psi(n)}$ называется <u>**произведением (γ - произведением)**</u>.

<u>**Теорема (Коши)**</u>

Пусть $\sum a_n = A, \sum b_n = B$, где $A, B \in \mathbb{R}$ и оба ряда сходятся абсолютно.

Тогда $\forall\gamma$ произведение $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} b_{\psi(n)}$ сходится абсолютно и к сумме AB.

Доказательство:

$\sum |a_n| = A^* \in \mathbb{R}, \sum |b_n| = B^* \in \mathbb{R}$. Проверим: $\sum a_{\varphi(n)} b_{\psi(n)}$ - абсолютно сходится.

$$\sum_{n=1}^{N} |a_{\psi(n)} b_{\psi(n)}| \leq \left(\sum_{n=1}^{K} |a_{\varphi(n)}|\right) \left(\sum_{n=1}^{L} |b_{\varphi(n)}|\right) \leq A^* \cdot B^*$$

Сходимость теперь есть. А теперь благодаря прошлой теореме по суммируемым семействам получаем, что нам не важно как мы умножаем!

Чтобы показать, что сумма ряда сходится, будем смотреть на суммы по <u>квадратам</u>:

$$\sum_{1\leq k\leq n; 1\leq l\leq n} S_N^{(a)} S_N^{(b)} \to AB$$

Q.E.D.

3 Функции и отображения в $\mathbb{R}^m$.

3.1 Напоминание.

Вводим норму: $||x|| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_m^2}$.

Скал. произведение $\langle x, y\rangle = \sum\limits_{i=1}^{m} x_i y_i$.

Другие напоминания можете посмотреть в конспекте первого семестра

$f : D \subset R^m \to \mathbb{R}$, a - пр. точка D.

Метрический предел:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \qquad \forall\varepsilon > 0 : \exists\delta > 0 : \forall x \in D : |x - a| < \delta : |f(x) - L| < \varepsilon$$

Суррогатные пределы

def: $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}$, a - пр. точка D_1, b - пр. точка D_2. $(D_1 \backslash \{a\}) \times (D_2 \backslash \{b\}) \subset D$.

$f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

1. Если $\forall x \in D_1 \backslash \{a\} : \exists \lim\limits_{y\to b} f(\langle x, y\rangle) = \varphi(x)$ - обозначу.

   То $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x)$ - **повторный предел** $\lim\limits_{x\to a}(\lim\limits_{y\to b} f(\langle x, y\rangle))$

2. Если $\forall y \in D_2 \backslash \{b\} : \exists \lim\limits_{x\to a} f(\langle x, y\rangle) = \psi(y)$ - обозначу.

   То $\lim\limits_{y\to b} \psi(y)$ - **повторный предел** $\lim\limits_{y\to b}(\lim\limits_{x\to a} f(\langle x, y\rangle))$

3. **Двойной предел** $\lim\limits_{x\to a; y\to b} f(x, y) = L$:

   $$\forall W(L) : \exists U(a) : \exists V(b) : \forall x \in U(a) \cap D_1 : \forall y \in V(b) \cap D_2 : f(x, y) \in W(L)$$

   Очевидно, если существует метрический, то существует и двойной, но в обратную не работает.

4. **Предел по направлению**.

   $f : U(a, b) \to \mathbb{R}$. Возьму $L =$ прямая с направляющим v:

   $$\lim_{t\to 0} f(a + tv_1, b + tv_2)$$

   В будущем мы будем считать, что он нормированный

5. **Предел вдоль кривой**

   $\gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \to U(a, b), \gamma(0) = (a, b)$ - непр.(??? Кохась ничего не сказал)

   $$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f|_\gamma = \lim_{t\to 0} f(x(t), y(t))$$

Теорема (о двойном и повторном пределе)

$D_1, D_2 \subset \mathbb{R}$, a - пр. точка D_1, b - пр. точка D_2. $(D_1 \backslash \{a\}) \times (D_2 \backslash \{b\}) \subset D$.

$f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Пусть:

1. $\lim\limits_{x \to a; y \to b} f(x, y) = A \in \overline{R}$.
2. $\forall x \in D_1 \backslash \{a\} : \exists \lim\limits_{y \to b} f(\langle x, y \rangle) = \varphi(x)$

   Тогда $\exists \lim\limits_{x \to A} \varphi(x) = A$.

Доказательство:

$A \in \mathbb{R}$. Напишем определение двойного предела:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists U(a) : \exists V(b) : \forall x \in U(a) \cap D_1 : \forall y \in V(b) \cap D_2 : |f(x, y) - A| < \varepsilon$$

Устремим y к b и получим:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists U(a) : \forall x \in U(a) \cap D_1 : |\varphi(x) - A| \leq \varepsilon$$

А это определение предела.

Q.E.D.

def: $\mathcal{A} : R^m \to R^n$ **линейное отображение**, если:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \forall n, v \in R^m : \mathcal{A}(\alpha n + \beta v) = \alpha \mathcal{A}(n) + \beta \mathcal{A}(v)$$

При $n = 1$ мы будем говорить линейный функционал, иначе линейный оператор.

Линейные отображения образуют линейное пространство. Как мы знаем из линейной алгебры: у них есть матрицы.

Теорема.

$\mathcal{A} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ - линейный оператор. Тогда экв:

1. $\mathcal{A}$ - обратима
2. $\mathcal{A}(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^m$
3. $\det A \neq 0$

3.2 Дифференцирование.

def: **Бесконечно малая** $\varphi : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $a \in IntE, \varphi$ - б.м. в точке a, если $\varphi(x) \xrightarrow{x \to a} \mathbb{O}$

def: $o(h), h \to 0, \varphi : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, 0 \in IntE : \varphi(h) = o(h)$, при $h \to 0$, если $\dfrac{\varphi(h)}{|h|} \to \mathbb{O}$

Замечание: $o(h)$ эквивалентно $o(|h|)$. Также можно вводить аналогично прошлому семестру (через существование б. м.).

def: $F : E \subset R^m \to R^n, a \in Int(E)$. Говорят, что F **дифференцируема в точке** a, если существует линейный оператор $L : \mathbb{R}^m \to R^n : \exists$ б.м. при стремлении к нулю $\alpha : R^m \to R^n$:

$$F(a + h) = F(a) + Lh + \alpha(h) \cdot |h|$$

$\exists B(a, r) < R$, при $h \in R^m : |h| < r$

Соглашение: для наших бесконечно малых, считаем, что $\alpha(0)$

def: Оператор L называется **производным оператором** отображения F в точке a или просто **производная**.

def: Матрица оператора L называется **матрицей Якоби** (отображения f в точке a).

def: $h \to Lh$ - **дифференциал**.

Лемма (Единственность производной)

Производный оп. определен однозначно.

Доказательство:

В терминах определения, возьмем $\forall u \in \mathbb{R}^m : h = tu, t \in \mathbb{R}$ - маленькое

$$F(a + tu) = F(a) + t \cdot Lu + o(t), t \to 0$$

$$Lu = \frac{F(a + tu) - F(a)}{t} - \frac{o(t)}{t}$$

Возьму пределы по t:

$$Lu = \lim_{t \to 0} \frac{F(a + tu) - F(a)}{t}$$

Получилось, что L задается однозначно.

Q.E.D.

Лемма (о дифференцируемости отобр. и его коорд. функций)

$F : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, a \in IntE, F = (f_1, \ldots, f_n)$. Тогда:

1. F - дифф. в $a \Leftrightarrow$ все f дифф. в a.
2. Строки матрицы Якоби отображения F в точке a - это матрицы Якоби координатной функции.

Доказательство:

Замечание от Кохася: Это зоология какая-то. На нее надо сидеть смотреть и медитировать.

$$F(a+h) = F(a) + Lh + \alpha(h)|h|$$

Как будет в координатах:

$$\begin{pmatrix} f_1(a+h) \\ \vdots \\ f_n(a+h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(a) \\ \vdots \\ f_n(a) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix} \cdot h + \begin{pmatrix} \alpha_1(h)|h| \\ \vdots \\ \alpha_n(h)|h| \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_1(a+h) \\ \vdots \\ f_n(a+h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(a) \\ \vdots \\ f_n(a) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \langle l_1, h\rangle \\ \vdots \\ \langle l_n, h\rangle \end{pmatrix} \cdot + \begin{pmatrix} \alpha_1(h)|h| \\ \vdots \\ \alpha_n(h)|h| \end{pmatrix}$$

А теперь просто смотрим на получившиеся строчки и получаем то, что надо

Q.E.D.

deff: $f: E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, a \in IntE$

Фиксируем $k \in \{1 \dots m\}$

$$\varphi_k(n) = f(a_1, \dots a_{k-1}, n, a_{k+1}, \dots, a_m), n \in U(a_k) \subset \mathbb{R}$$

$$\varphi_k'(a_k) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1, \dots a_{k-1}, a_k + t, a_{k+1}, \dots, a_m) - f(a_1, \dots, a_m)}{t}$$

- это называется **частная производная**, или частная производная по параметру x_k.

Обозначается $\frac{\delta f}{\delta x_k}(a), f_k', f_{x_k}', D_k f$. Частный = partial в литературе.

Теорема (необходимое условие дифференцируемости)

$f: E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, a \in IntE, f$ - дифф. в a.

Тогда $\exists f_{x_1}'(a), \dots \exists f_{x_m}(a)$ и матрица Якоби $f'(x) = (f_{x_1}', f_{x_2}', \dots, f_{x_m}')$.

Доказательство:

$f'(x) = (l_1, \dots, l_m)$

$$f(x) = f(a) + l_1(x_1 - a_1) + \dots + l_m(x_m - a_m) + \varphi(x)|x-a|$$

$$x = \big(n, 0, 0, \dots, 0\big) + a$$

$$f(a_1 + n, a_2, \dots, a_m) = f(a) + l_1 n + \overline{\varphi}(n) \cdot |n|$$

Тогда $l_1 = \frac{\delta f}{\delta x_1}(a)$

Аналогично другие.

Q.E.D.

Следствие: $F : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ - дифф в a $F'(a) = \left(\dfrac{\delta f_i}{\delta x_j}(a)\right), i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, n$

Теорема (достаточное условие дифференцируемости)

$f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, B(a, r) \subset E$. $\exists$ кон $f'_{x_1}, \ldots, f'_{x_m}$ во всех точках шара и все они непрерывны в a. Тогда f дифференцируема в точке a.

Доказательство:

$m = 2:$

$$f(x_1, x_2) - f(a_1, a_2) = (f(x_1, x_2) - f(x_1, a_1)) + (f(x, a_2) - f(a_1, a_2))$$

Используем теорему Лагранжа. Выражение преобразуется в:

$$f'_{x_2}(x_1, \overline{x_2})(x_2 - a_2) + f'_{x_1}(\overline{x}_1, a_2)(x_1, a_1) =$$

$$f'_{x_1}(a_1, a_2)(x_1 - a_1) + f'_{x_2}(a_1, a_2)(x_2 - a_1) +$$

$$+(f'_{x_1}(\overline{x_1}, a_2) - f'_{x_1}(a_1, a_2)) \cdot \frac{(x_1 - a_1)}{|x_- a|} \cdot |x - a| + (f'_{x_2}(a_1, \overline{x_2}) - f'_{x_2}(a_1, a_2)) \cdot \frac{x_2 - a_2}{|x - a|} \cdot |x - a| =$$

$$= f'_{x_1}(a_1, a_2)(x_1 - a_1) + f'_{x_2}(a_1, a_2)(x_2 - a_1) + \alpha_1(x)|x - a| + \alpha_2(x)|x - a|$$

$\alpha_1(x), \alpha_2(x)$ бесконечно малые при $x \to a$, это следует из непрерывности и того, что $\overline{x_i}$ зажаты между x_i и a_i(что следует из теоремы Лагранжа)

Q.E.D.

3.3 Правила дифференцирования.

def: Линейность дифференцирования.

$f, g : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, дифф. в $a \in IntE$.

Тогда $\forall \lambda \in \mathbb{R} : f + g, \lambda f$ дифф. в a:

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a) \quad (\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$$

Доказательство:

Возьмите 2 определения и сложите(умножьте).

Q.E.D.

def: Производная композиции

Лемма (об оценке нормы линейного отображения)

$\mathcal{A} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ линейный оператор $A = (a_{ij})$.

Тогда $\forall x \in \mathbb{R}^m : |Ax| \leq C_A|x|$, где $C_a = \sqrt{\sum\limits_{i,j} a_{ij}^2}$

Доказательство:

$$|Ax|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j|^2 \leq \sum_i (\sum_j |a_{ij}|^2) \cdot (\sum_j |x_j^2|) = |x|^2 \sum_i \sum_j |a_{ij}|^2$$

Q.E.D.

Теорема.

$F : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, G : I \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$, $F(E) \subset I$.

Пусть $a \in IntE, F(a) \in IntI$, F - дифф в a, G дифф в $b = f(a)$.

Тогда $G \cdot F$ дифф. в a :

$$(G \cdot F)'(a) = G'(F(a)) \cdot F'(a)$$

Доказательство:

Дано:

$$F(a+h) = F(a) = F'(a)h + \alpha_1(h)|h|$$

$$G(b+k) = G(b) + G'(b)k + \alpha_2(k)|k|$$

Теперь аналогично теореме из прошлого семестра, хотим найти $G(F(a+h))$:

$$G(F(a+h)) = G(F(a) + F'(a)h + a_1(h)|h|)$$

Мы знаем, что $F(a) = b$, пусть $k = F'(a)h + \alpha_1(h)|h|$:

$$G(F(a+h)) = G(F(a)) + G'(F(a))(F'(a)h + \alpha_1(h)|h|) + \alpha_2(k)|F(a)h + \alpha_1(h)|h|| =$$

$$= G(F(a)) + G'(F(a))F'(a)h + (G'(F(a))\alpha_1(h)|h| + \alpha_2(k)|F'(a)h + \alpha(h)|h||)$$

Посмотрим на первое выражение:

$$|h||G'(F(a))\alpha_1(h)| \le |h|C_{G(F(a))}|\alpha(h)|$$

Оно бесконечно малое при $h \to 0$ на норму h. Посмотрим на второе выражение:

$$|\alpha_2(k)||F'(a)h + \alpha_1(h)|h|| \le (C_{F'(a)} + |\alpha_1(h)|)|\alpha_2(k)||h|$$

Оно бесконечно малое при $h \to 0$ на норму h. Откуда получаем то, что нам надо.

Q.E.D.

Замечание: $(H \cdot G \cdot F)'(a) = H'(G(F(a)))G'(F(a))F'(a)$

Лемма (Дифференцирование "произведений")

$F, G : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, \lambda : E \to \mathbb{R}$, $a \in IntE$, а также F, G, λ- дифф. в a.

Тогда $\lambda F, \langle F, G\rangle$ - дифф. a:

1. $(\lambda F)'(a)h = (\lambda'(a)h)F(a) + \lambda(a)(F'(a)h)$
2. $(\langle F, G\rangle)'(a)h = \langle F'(a)h, G(a)\rangle + \langle F(a), G'(a)h\rangle$

Доказательство:

1. Рассмотрим каждую координатную функцию $n = 1$.
$$\lambda F(a+h) - \lambda F(a) = (\lambda(a) + \lambda'(a)h + \alpha(h)|h|)(F(a) + F'(a)h + \beta(h)|h|) - \lambda(a)F(a) =$$
$$\lambda'(a)hF(a) + \lambda(a)F'(a)h + \lambda(a)\beta(h)|h| + \lambda'(a)hF'(a)h + \dots$$
Осталось показать, что все кроме первых двух бесконечно малые, а это очевидно.

   Теперь вместо координатных смотрим на все, дифференцируемость следует из теоремы о дифф. отобр и коорд функций, а формула получается сложеним формул
2. $$\langle F, G\rangle'(a)h = (\sum_{i=1} f_i g_i)'h = \sum_{i=1} (f_i g_i)'h = \sum((f_i'(a))hg_i(a) + f_i(a) \cdot (g'(a)h))$$
А это как раз то, что от нас и хотят

Q.E.D.

Теорема(Лагранжа для векторозначных функций)

$F : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, непр. на $[a, b]$, дифф на $[a, b]$.

Тогда $\exists c \in (a, b) : |F(b) - F(a)| \le |F'(c)||b - a|$

Доказательство:

$\varphi(t) = \langle F(b) - F(a), F(t) - F(a)\rangle$

$\varphi(a) = 0, \varphi(b) = |F(b) - F(a)|^2$, $\varphi'(t) = \langle F(b) - F(a), F'(t)\rangle$

$\varphi(b) - \varphi(a) = \varphi'(c)(b - a)$ по теореме Лагранжа.

$|F(b) - F(a)|^2 =< F(b) - F(a), F'(c) > |b - a| \le |F(b) - F(a)||F'(c)||b - a|$

Откуда получаем нужное неравенство.

Q.E.D.

3.4 Градиент

def: $f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ дифф. в точке $a \in IntE$

$f(a+h) = f(a) + \langle L, h \rangle + o(h)$, $h \to 0$, Тогда L - **градиент** функции f в точке a.

Обозначается $grad_a f, grad\, f(a), \nabla f(a) = (f'_{x_1}(a), \dots, f'_{x_m}(a))$

def: $v \in \mathbb{R}^m$. Производная f по вектору v:

$$\frac{\delta f}{\delta v}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}$$

def: $v \in \mathbb{R}^m, v$ - нормирована. Производная f по вектору в таком будет случае называться по направлению.

Теорема (Экстремальное свойство градиента)

$f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, a \in IntE$, f дифф. в точке a. $\nabla f(a) \neq 0$.

Тогда $l = \dfrac{\nabla f(a)}{|\nabla f(a)|}$ - это направление наискорейшего возр. функции f, то есть:

$$\forall h \in \mathbb{R}^m, |h| = 1 : -|\nabla f(a)| \leq \frac{\delta f}{\delta h}(a) \leq |\nabla f(a)|$$

Доказательство:

$$\frac{\delta f}{\delta h}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(a) + \langle \nabla f(a), th \rangle + \alpha(t)|t| - f(a)}{t} = \langle \nabla f(a), h \rangle$$

По КБШ:

$$|\langle \nabla f(a), h \rangle| \leq |\nabla f(a)| \cdot |h| = |\nabla f(a)|$$

Q.E.D.

3.5 Формула Тейлора

def: $f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, a \in IntE.\ k, l \in \{1, \dots, m\}$

$\forall x \in U(a) : \exists \dfrac{\delta f}{\delta x_k}(a)$

Если $\exists$ частная производная $\dfrac{\delta\left(\dfrac{\delta f}{\delta x_k}\right)}{\delta x_l}(a)$, то она называется **частной производной 2 порядка** f по параметрам x_k, x_l в точке a. Обозначается $\dfrac{\delta^2 f}{\delta x_l \delta x_k}(a), f''_{x_k x_l}, f''_{kl}$

Теорема (Независимость частных производных от порядка дифференцирования)

$f : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $B((x_0, y_0), r) \subset E$, в этом шаре $\exists f''_{xy}, f''_{yx}$ и они непрерывны.

Тогда $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$.

Доказательство:

Рассмотрим $\Delta^2 f(h, k) = f(x_0 + h, y_0 + h) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + h) + f(x_0, y_0)$

$\alpha(h) = \Delta^2 f(h, k)$, при фикс. k

Воспользуемся Лагранжем для функций с одной переменной и получим:

$$\alpha(h) = \alpha(h) - \alpha(0) = \alpha'(\overline{h})h = (f'_x(x_0 + \overline{h}, y_0 + k) - f'_x(x_0 + h', y_0))h =$$

Давайте воспользуемся Лагранжем для второй переменной и получу:

$$= f''_{xy}(x_0 + \overline{h}, y_0 + \overline{k})hk$$

Аналогично $\beta(k) = f''_{yx}(x_0 + \overline{\overline{h}}, y_0 + \overline{\overline{k}})kh$

Получаем, что фикс h, k $f''_{yx}(x_0 + \overline{\overline{h}}, y_0 + \overline{\overline{k}})kh = f''_{xy}(x_0 + \overline{h}, y_0 + \overline{k})hk$

Устремим $h, k \to 0$, воспользуемся непрерывностью и получим искомое нами выражение.

Q.E.D.

def: **Класс функций** $C^r(E), r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}, E \subset \mathbb{R}^m$ - откр. — такое множество $f : E \to \mathbb{R}$, у которых существуют все частные производные порядка до r включительно, и все эти производные непрерывны.

Замечание: Если $f \in C^n(E)$, тогда $\forall k \le n, \forall x \in E, \forall i_1, \dots, i_k : \forall j_1, \dots, j_k$ - наборы чисел от $1, \dots, n$, отличающиеся перестановкой выполняется:

$$\frac{\delta^k f}{\delta x_{i_1} \dots \delta x_{i_k}} = \frac{\delta^k f}{\delta x_{j_1} \dots \delta x_{j_k}}$$

Делаете транспозиции, пользуйтесь теоремой, приводите к тривиальной и получаете то что надо

def: **Мультиндекс** (для R^m) - набор чисел $k = (k_1, \dots, k_m), k_i \in Z_+$

Введем некоторые определения:

1. $|k| = k_1 + \ldots + k_m$ - высота мультиндекса
2. $x \in \mathbb{R}^m : x^k = x_1^{k_1} \ldots x_m^{k_m}$
3. $k! = k_1! \ldots k_m!$
4. $f^{(k)}(a) = \dfrac{\delta^{|k|} f}{(\delta x_1)^{k_1} \ldots (\delta x_m)^{k_m}}(a)$

Лемма (полиномиальная формула)

$a_i \in \mathbb{R}$

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_m)^r = \sum_{i_1=1}^{r} \sum_{i_2=1}^{r} \ldots \sum_{i_m=1}^{r} a_{i_1} \ldots a_{i_m} = \sum_{j, |j|=r} \frac{r!}{j!} a^j = \sum_{j_1 + \ldots + j_m = r} \frac{r!}{j_1! \ldots j_m!} a_1^{j_1} \ldots a_m^{j_m}$$

Доказательство:

Индукция по r. База $r = 1$ тривиальна.

Пусть верно для r, докажем для $r + 1$:

$$(a_1 + \ldots + a_m)^{r+1} = (a_1 + \ldots + a_m) \cdot (a_1 + \ldots + a_m)^r = (a_1 + \ldots + a_m) \sum_{j, |j|=r} \frac{r!}{j!} a^j =$$

$$= \sum_{j_1 + \ldots + j_m = r} \frac{r!}{j_1! \ldots j_m!} a_1^{j_1+1} \ldots a_m^{j_m} + \ldots + \sum_{j_1 + \ldots + j_m = r} \frac{r!}{j_1! \ldots j_m!} a_1^{j_1} \ldots a_m^{j_m+1} =$$

Переобозначим все переменные и запихнем $+1$ в степени в переменную:

$$= \sum_{j_1 + \ldots + j_m = r+1,\, j_1 \geq 1} \frac{r! j_1}{j_1! \ldots j_m!} a_1^{j_1} \ldots a_m^{j_m} + \ldots + \sum_{j_1 + \ldots + j_m = r+1,\, j_m \geq 1} \frac{r! j_m}{j_1! \ldots j_m!} a_1^{j_1} \ldots a_m^{j_m} =$$

Главный фокус: Из-за того, что в числителе у нас j_i, мы можем продлить наше суммирование на случай $j_i = 0$. Да добавятся, слагаемые, но они будут нулями. Сделаем:

$$= \sum_{j_1 + \ldots + j_m = r+1} \frac{r! j_1}{j_1! \ldots j_m!} a_1^{j_1} \ldots a_m^{j_m} + \ldots + \sum_{j_1 + \ldots + j_m = r+1} \frac{r! j_m}{j_1! \ldots j_m!} a_1^{j_1} \ldots a_m^{j_m} =$$

$$= \sum_{j_1 + \ldots + j_m = r+1} \frac{r!(j_1 + \ldots + j_m)}{j_1! \ldots j_m!} a_1^{j_1} \ldots a_m^{j_m} = \sum_{j_1 + \ldots + j_m = r+1} \frac{(r+1)!}{j_1! \ldots j_m!} a_1^{j_1} \ldots a_m^{j_m}$$

Q.E.D.

Лемма (Лемма о дифференцировании сдвига):

$f : F \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, f \in C^r(E), a \in E, h \in R^m, \forall t \in [-1, 1], a + th \in E, \varphi(t) = f(a + th)$

Тогда $\forall l \leq r :$

$$\varphi^{(l)}(t) = \sum_{j, |j|=l} \frac{l!}{j!} h^j \frac{\delta^{|j|} f}{\delta x^j}(a + th)$$

Замечание: Эквивалентная запись: $\sum\limits_{j,|j|=l} \dfrac{l!}{j!} h^j f^{(j)}(a+th)$

Доказательство:

$$\varphi^{(l)}(t) = \sum_{j_1=1}^{n} \dots \sum_{j_l=1}^{n} \frac{\delta^l f}{\delta x_{j_1} \dots \delta x_{j_l}}(a+th) h_{j_1} \dots h_{j_k}$$

Если долго смотреть, то можно увидеть что-то очень похожее на полиномиальную формулу:

$$\sum_{j_1=1}^{n} \dots \sum_{j_l=1}^{n} h_{j_1} \dots h_{j_k}$$

Но у нас еще есть какие-то константы. Станет ли от них хуже? При одинаковом наборе стоит одинаковая константа (по теореме о независимости частных производных от порядка). То есть это константа просто для конкретного $h_{j_1} \dots h_{j_k}$ вынесется за "скобку". Поэтому в данном случае мы можем применить полиномиальную формулу, которая даст нам в точности, что надо

Q.E.D.

Теорема (Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа)

$f \in C^{r+1}(E), x \in B(a, R) \subset E$ - откр. Тогда $\exists t \in (0,1)$:

$$f(x) = \sum_{k,|k| \le r} \frac{f^{(k)}}{k!}(x-a)^k + \sum_{k,|k|=r+1} \frac{f^{(k)}(a+t(x-a))}{k!}(x-a)^j$$

Замечание: Это выглядит п**дец как страшно

Доказательство:

$\varphi(t) = f(a+th)$, где $h = x - a$

Воспользуемся формулой Тейлора из первого семестра:

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1!}1 + \frac{\varphi''(0)}{2!}1^2 + \dots + \frac{\varphi^{(r)}(0)}{r!}1^r + \frac{\varphi^{(r+1)}(t)}{(r+1)!}1^{r+1} = f(x)$$

Теперь заметим, что $\varphi(0) = f(a)$, а теперь заменим по лемме о дифференцировании каждую из производных и получим нашу формулу

Замечание: TODO: в угоду малого времени полной формулы не будет

Q.E.D.

Замечание: Мы использовали только, что $[a, x] \subset E$

Теорема (Формула Тейлора с остатком в форме Пеано)

$$f(x) = \sum_{k,|k| \le r} \frac{f^{(k)}}{k!}(x-a)^k + o(|x-a|^r)$$

Доказательство:

Нам надо показать, что последняя сумма в остатке Лагранжа это $o(|x-a|^r) = o(|h|^r)$. Будем показывать для изначального остатка (с h).

Посмотрим на $\varphi^{(r+1)}$:

$$\varphi^{(r+1)}(t) = \sum_{j,|j|=r+1} \frac{r+1!}{j!} h^j f^{(j)}(a+th)$$

Любая производная f степени $r+1$- непрерывна и ограниченна, у нас конечное число слагаемых - ограниченных.

Откуда из-за этого они по модулю $\leq M|h^j| = M|h_1^{k_1} \cdot h_m^{k_m}| = o(|h|^r)$

Покажем, что $M|h_1^{k_1} \cdot h_m^{k_m}| = o(|h|^r)$

$\dfrac{|h_1^{k_1} \cdot \ldots h_m^{k_m}|}{|h|^r} = \dfrac{|h_1|^k}{|h|^k} \cdot \ldots \cdot \dfrac{|h_m|^{k_m}}{|h|^{k_m}} \cdot |h| \to 0$, при $h \to 0$

Откуда получили, что нам надо

Q.E.D.

def: **Дифференциал** f в точке a

Отображение $(a, h) \to \dfrac{\delta f}{\delta x_1}(a) h_1 + \ldots + \dfrac{\delta f}{\delta x_m}(a) h_m$

Традиционный образ: $h \leftrightarrow dx = (dx_1, \ldots dx_m)$: $df(a) = f'_{x_1}(a)dx_1 + \ldots + f'_{x_m}(a)dx_m$

Дифференциал l-ого порядка: $d^l f(a) = l! \sum_{k,|k|=l} \dfrac{l!}{k!} f^{(k)}(a)(dx)^k$

Конструктивное определение l-ого дифференциала: см лекция 13 1:50

3.6 Линейные отображения.

def: $Lin(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ = множество линейных отображений $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$.

Беру $\mathcal{A} \in Lin(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) : ||A|| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, |x|=1} |Ax|$.

Замечание: В случае $\mathbb{R}^m$ шар $|x| = 1$ - компактен, тогда $\sup \Leftrightarrow \max$

Замечание: $||A|| \leq \sqrt{\sum a_{ij}^2}$

Замечание: $\forall x \in \mathbb{R}^m : |Ax| \leq ||A|||x|$

Замечание: Если $\exists C > 0 : \forall x \in \mathbb{R}^m : |Ax| \leq C|x|$, то $||A|| \leq C$

Лемма(об условиях, эквивалентных непрерывности линейного оператора)

X, Y - нормированные пространства $A \in Lin(X, Y)$. Тогда эквив:

1. A - ограничен, т.е. $||A|| < +\infty$
2. A непр. в $x_0 = 0$
3. A непр на X
4. A - равномерно непрерывно: $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 : |x_1 - x_2| < \delta : |Ax_1 - Ax_2| < \varepsilon$

Доказательство:

1. $4 \Rightarrow 3 \Rightarrow 2 :$ - Очевидно, мы просто упрощаем условие.
2. $2 \Rightarrow 1 :$

   Для $\varepsilon = 1 : \exists \delta : \forall x : |x| < \delta : |Ax| < 1$. Значит $||A|| \leq \dfrac{1}{\delta}$ - ограниченно
3. $1 \Rightarrow 4 :$ Считаем, что оператор $A \neq \mathbb{O}$

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta := \frac{\varepsilon}{||A||} : \forall x_1, x_2 : |x_2 - x_1| < \delta :$$

$$|Ax_1 - Ax_2| = |A(x_1 - x_2)| \leq ||A|||x_1 - x_2| < ||A|| \frac{\varepsilon}{||A||} = \varepsilon$$

Q.E.D.

Теорема (о пространстве линейных отображений)

1. $A \to ||A||$ является нормой в пространстве $Lin(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, те
   (a) $||A|| \geq 0$ и $||A|| = 0 \Leftrightarrow A = 0$
   (b) $\forall \alpha \in \mathbb{R} : ||\alpha A|| = |\alpha| \cdot ||A||$
   (c) $||A + B|| \leq ||A|| + ||B||$
2. $A \in Lin(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n), B \in Lin(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^l)$, тогда $||BA|| \leq ||B|| \cdot ||A||$

Доказательство:

1) 1.a, 1.b - Очевидно

1.в. Докажем: $\forall x : |x| = 1 :$

$$|(A+B)x| \le |Ax| + |Bx| \le ||A|||x| + ||B|||x| = (||A|| + ||B||)|x|$$

Откуда $||A+B|| \le ||A|| + ||B||$

2) $|BAx| \le ||B|||Ax| \le ||B||||A|||x| \Rightarrow ||BA|| \le ||B|| \cdot ||A||$

Q.E.D.

Теорема (Лагранжа для отображений)

$F : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ - дифф на D - открытое.

$a, b \in D, [a, b] \subset D,\ [a, b] = \{a + t(b-a), t \in [0, 1]\}$.

Тогда $\exists \theta \in (0, 1) : c := a + \theta(b-a) :$

$$|F(b) - F(a)| \le ||F'(c)|||b-a|$$

Доказательство:

$f(t) = F(a + t(b-a)), t \in [0, 1]$— векторозначная функция.

$f'(t) = F'(a + t(b-a)) \cdot (b-a)$

Воспользуемся т. Лагранжа для f :

$$|f(1) - f(0)| \le |f'(\theta)|, \theta \in (0, 1)$$

$$|F(b) - F(a)| \le |F'(a + \theta(b-a)) \cdot (b-a)| \le ||F'(c)|| \cdot |b-a|$$

Q.E.D.

def: $\Omega_m := \{A \in Lin(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m) : \exists A^{-1}\}$

Лемма.

$B \in Lin(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$, пусть $\exists C > 0 : \forall x : |Bx| \ge C|x|$, тогда $B \in \Omega_m : ||B^{-1}|| \le \dfrac{1}{C}$

Доказательство:

Видим, что $rgB = n$, откуда $\exists B^{-1}$. $y = Bx, x = B^{-1}y$, заменим и получим:

$$|y| \ge C|B^{-1}y| \Leftrightarrow |B^{-1}y| \le \frac{1}{C}|y|$$

Откуда $||B^{-1}|| \le \dfrac{1}{C}$.

Q.E.D.

Следствие: $A \in \Omega_m \Rightarrow |Ax| \ge \dfrac{1}{|A^{-1}|}|x|$

Доказательство: $|x| = |A^{-1}Ax| \le ||A^{-1}|||Ax|$.

Теорема (об обратимости линейного отображения, близкого к обратимому)

$L \in \Omega_m$ - обратимый. $M \in Lin(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$, $||L - M|| < \dfrac{1}{||L^{-1}||}$

Тогда:

1. $M \in \Omega_m$
2. $||M^{-1}|| \leq \dfrac{1}{\dfrac{1}{||L^{-1}||} - ||L-M||}$
3. $||L^{-1} - M^{-1}|| \leq \dfrac{||L^{-1}||}{||L^{-1}||^{-1} - ||L-M||} \cdot ||L-M||$

Доказательство:

$$|Mx| \geq |Lx| - |(M-L)x| \geq \frac{1}{|L^{-1}|}|x| - ||M-L|||x| = \left(\frac{1}{||L^{-1}||} - ||M-L||\right)|x|$$

По лемме выше доказаны пункт 1, 2.

Покажем, что выполнен еще пункт 3:

$$M^{-1} - L^{-1} = M^{-1}(L-M)L^{-1}$$

$$||M^{-1} - L^{-1}|| \leq ||M^{-1}|| \cdot ||L-M|| \cdot ||L^{-1}|| \leq \frac{1}{\dfrac{1}{||L^{-1}||} - ||L-M||} \cdot ||L^{-1}|| \cdot ||L-M||$$

Откуда уже верно искомое.

Q.E.D.

Следствие: Непрерывность вычисления обратного оператора.

Отображение $\Omega_m \to \Omega_m : L \to L^{-1}$ непрерывно.

Доказательство:

Возьму точку $A \in \Omega_m$. Хочу показать непрерывность в точке A. Буду доказывать непрерывность по Гейне. Пусть B_k - последовательность. $B_k \to A$, хочу показать $B_k^{-1} \to A_k^{-1}$.

По предыдущей теореме:

$$||B_k^{-1} - A^{-1}|| \leq \frac{||A^{-1}||}{||A^{-1}||^{-1} - ||B_k - A||} \cdot ||B_k - A|| \to 0$$

$||B_k - A||$ - бесконечно малая, $\dfrac{||A^{-1}||}{||A^{-1}||^{-1} - ||B_k - A||}$ - ограниченная.

Q.E.D.

Теорема о непрерывно дифференцируемых отображениях

$F : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ - дифф на D - откр.

Тогда равносильно:

1. $F \in C^1(D)$, т.е. все $\dfrac{\delta F_i}{\delta x_j}$ - непрерывно.
2. $F' : D \to Lin(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ - непр.

   Замечание: Сопоставляем точке, производный оператор в ней

Доказательство:

1. I $\Rightarrow$ II

$$||F'(x) - F'(x_0)|| = || \left(\frac{\delta F_i}{\delta x_j}(x) - \frac{\delta F_i}{\delta x_j}(x_0) \right)_{ij} || \leq \sqrt{\sum_{i,j} \left(\frac{\delta F_i}{\delta x_j}(x) - \frac{\delta F_i}{\delta x_j}(x_0) \right)^2}$$

   Напишем определение непрерывности:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x : |x - x_0| < \delta : |\frac{\delta F_i}{\delta x_j}(x) - \frac{\delta F_i}{\delta x_j}(x_0)| < \varepsilon$$

   Причем это определение сразу при всех i, j.

   Получим, что $\leq \varepsilon\sqrt{mn}$, а это то, что нам надо.

2. II $\Rightarrow$ I

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x : |x - x_0| < \delta : ||F'(x) - F'(x_0)|| < \varepsilon$$

   Возьму e_k - базисные вектора(на k-ой позиции стоит 1, в остальных 0).

   Тогда:

$$|(F'(x) - F'(x_0))(e_j)| \leq ||F'(x) - F'(x_0)|| \cdot |h| < \varepsilon \cdot |1|$$

   Теперь посмотрим, что у нас с левой стороны:

$$|(F'(x) - F'(x_0))(e_j)| \geq |\sqrt{\sum_i \left(\frac{\delta F_i}{\delta x_j}(x) - \frac{\delta F_i}{\delta x_j}(x_0) \right)^2}| \Leftrightarrow |\frac{\delta F_i}{\delta x_j}(x) - \frac{\delta F_i}{\delta x_j}(x_0)| < \varepsilon$$

   Для текущего j и для любого i.

Q.E.D.

3.7 Экстремумы.

def: $f : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$

1. x_0 — **точка локального максимума**: $\exists U(x_0) \forall x \in U(x_0) \cap D : f(x_0) \geq f(x)$
2. x_0 — **точка строгого локального максимума**, если заменить знак $\geq$ на $>$
3. x_0 — **точка (строгого) локального минимума**, если заменить знак на $\leq$ $(<)$
4. x_0 — **экстремум**, если выполнено хотя бы одно из пунктов $1 - 3$

Теорема (Ферма)

$f : D \in \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, x_0 \in Int(D), x_0$ - точка локального экстремума, f дифф в x_0

Тогда:

$$\forall l \in \mathbb{R}^m, |l| = 1 : \frac{\delta f}{\delta l}(x_0) = 0$$

Доказательство:

$g(t) = f(x_0 + tl), t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

$t = 0$ - локальный экстремум g, тогда по одномерной теореме Ферма $g'(0) = 0 = \dfrac{\delta f}{\delta l}(x_0)$

Q.E.D.

Следствие 1: необходимое условие сходимости:

x_0 - экстремум, тогда градиент равен 0

Следствие 2: Теорема Ролля.

$K \subset \mathbb{R}^m$ - компактно, f непр. на K, $f : K \to \mathbb{R}, f$ дифф на $IntK, f|_{\delta K} = const$ - значение f на всех граничных точкахх совпадают.

Тогда $\exists x_0 \in IntK, grad(f)(x_0) = 0$

Доказательство:

Существует максимум и минимум f на K по теореме Вейерштрасса (о непр. образе компакта). Пусть наибольшее и наименьшее значение достигаются на границе. Но тогда они равны и $f = const$ на всем K. Иначе есть где-то посередине. Это точка будет очевидно экстремумом и по необходимому условию градиент будет 0.

Q.E.D.

def: $h \in \mathbb{R}^m$, $Q(h) = \sum\limits_{ij} a_{ij} h_i h_j$ - **квадратичная форма.**

1. $\forall h \neq 0 : Q(h) > 0$ — положительно опр. форма
2. $\forall h \neq 0 : Q(h) < 0$ — отрицательно опр. форма
3. $\exists h : Q(h) > 0, \exists \tilde{h} : Q(\tilde{h}) < 0$ — незнакоопределеная форма
4. есть полуопределенные - те, где существует вектор с нулем.

Лемма(об оценке квадратичной формы и об эквивалентных нормах)

1. Q - положит. определенная кв. форма. Тогда $\exists\delta_Q > 0 : \forall h : |Q(h)| \geq \gamma_Q|h|^2$
2. $p : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ - норма. Тогда $\exists c_1, c_2 > 0$:

$$\forall x : c_1|x| \leq p(x) \leq c_2|x|$$

Доказательство:

1. $\gamma_Q := \min_{|h|=1} Q(h)$ он достигается по теореме Вейерштрасса

   $\forall h \neq 0 : Q(h) \geq \gamma_Q|h|^2,\ \dfrac{Q(h)}{|h|^2} = Q(\dfrac{h}{|h|}) \geq \gamma_Q$
2. $c_1 = \min_{|h|=1} p(h), c_2 = \max_{|h|=1} p(h)$, аналогичным образом получим:

$$c_2 \geq \frac{p(h)}{|h|} = p\left(\frac{h}{|h|}\right) \geq c_1$$

Осталось доказать непрерывность $p(x)$, чтобы показать, что у нас компакт:

$$|p(x)-p(y) \leq p(x-y) = p(\sum(x_k-y_k)e_k) \leq \sum p((x_k-y_k)e_k) \leq \sum |x_k-y_k|p(e_k) \leq ||x-y||\sqrt{\sum p(e_k)^2}$$

Q.E.D.

Теорема(Достаточное условие экстремума)

$f : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, f \in C^2(D), D$ — открытое

$x_0 \in D : f'_{x_1}(x_0) = 0, \dots, f'_{x_m}(x_0) = 0$ или по-другому $gradf(x_0) = 0$, $Q(h) := d^2f(x_0, h)$

Тогда:

1. Если $Q(h)$ — положительна опр., то x_0 - локальный min
2. Если $Q(h)$ — отрицательна опр., то x_0 - локальный max
3. Если $Q(h)$ — неопр., то x_0 — не экстремум.
4. Если $Q(h)$ — положительно опр. вырожденная, то x_0 может быть и min, и не экстремумом (недостаточно информации)
5. Аналогично для отрицательно опр. вырожденной

Доказательство:

Пункт 1:

Напишем формулу Тейлора в точке x_0 для f:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + df(x_0, th) + \frac{1}{2}d^2f(x_0 + \theta h, h)$$

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{1}{2}d^2f(x_0 + \theta h, h) = \frac{1}{2}Q(h) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\delta^2 f}{\delta x_i^2}(x_0 + \theta h) - \frac{\delta^2 f}{\delta x_i^2}(x_0)\right) \cdot h_i^2 + \ldots =$$

А что у нас осталось? Осталось выписать для $i \neq j$ сумму. Оценим ее $\alpha(h)|h|^2$

Остается:

$$= \frac{1}{2}Q(h) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\delta^2 f}{\delta x_i^2}(x_0+\theta h) - \frac{\delta^2 f}{\delta x_i^2}(x_0)\right) \cdot h_i^2 + \alpha(h)|h|^2 = \frac{1}{2}Q(h) + \beta(h)|h|^2 \geq \left(\frac{1}{2}\gamma_Q + \alpha(h)\right)|h|^2 > 0$$

Пункт 2: Аналогично

Пункт 3:

$\exists h \in \mathbb{R}^m : Q(h) > 0 : \exists \tilde{h} : Q(\tilde{h}) < 0$, тогда точка x_0 не точка экстремума.

$f(x_0 + th) = f(x_0) + df(x_0, th) + \frac{1}{2}d^2 f(x_0 + \theta th, th)$

Аналогично пункту 1, будем устремлять $t \to 0$.

Получим, что вдоль направления h:$f(x_0) < f(x_0 + t \cdot h)$, а вдоль направления $\tilde{h} : f(x_0) > f(x_0 + t \cdot \tilde{h})$, поэтому x_0 — не экстремум

Пункт 4: TODO: лекция 15, начало

Q.E.D.

Замечание: чтобы понять, что Q - кв. форма, распишите по определению

4 Творческий кризис Кохася и 1.5 дня до экзамена

4.1 Диффеоморфизм

def: $f : O_1 \subset R^m \to O_2 \subset \mathbb{R}^m$, O_1, O_2 - открытое. f - **диффеоморфизм** между O_1, O_2, если

1. f - биекция
2. f - дифф.
3. f^{-1} - дифф.

def: Область = открытое связное множество (лин. связное)

Естественно требовать, чтобы O_1, O_2 были областями.

Лемма (о бесконечно малых в определении дифф-ти) или по-другому

Лемма (о приближенных значениях дифференцируемого отображения)

$F : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ (O - открыто - ?)

1. F - дифф. в x_0, $\det F'(x_0) \neq 0$ (т.е $F'(x_0)$ - обратимый). Тогда:

$$\exists c > 0, \delta > 0 : \forall h : |h| < \delta : |F(x_0 + h) - F(x_0)| > c|h|$$

2. $F \in C^1(O, \mathbb{R}^m)$. Тогда:

$$|F(x_0 + h) - F(x_0) - F'(x_0)h| \leq M \cdot |h|$$

где $M = \sup\limits_{x \in [x_0, x_0+h]} ||F'(x) - F'(x_0)||$

Доказательство:

1. Пусть F - линейное отображение (линейный оператор). У него производный оператор это матрица F. Воспользуемся этим и получим:

$$\forall h : h = F^{-1}Fh : |h| \leq ||F^{-1}|||Fh| = ||F^{-1}|||F(x+h) - F(x)|$$

То есть $|F(x+h) - F(x)| \geq |h| \cdot \dfrac{1}{||F^{-1}||} = |h| \cdot c$

Теперь общий случай:

$$|F(x_0 + h) - F(x_0)| = |F'(x_0)h + \alpha(h)|h|| \geq c \cdot |h| - |\alpha(h)| \cdot |h|$$

Откуда $\exists \delta : \forall h : |h| < \delta : (\alpha(h)) < \dfrac{c}{2}$ и $c \cdot |h| - |\alpha(h)| \cdot |h| \geq \dfrac{c}{2}|h|$

2. $T(x) = F(x) - F'(x_0)x$, $T'(x) = F'(x) - F'(x_0)$

$$|F(x_0 + h) - F(x_0) - F'(x_0)h| = |T(x_0 + h) - T(x_0)| \leq \sup_{x \in [x_0, x_0+h]} ||F'(x) - F'(x_0)|| \cdot |h|$$

В конце мы воспользовались теоремой Лагранжа:

$$|F(x_0 + h) - F(x_0)| \leq \sup_{x \in [x_0, x_0+h]} ||F'(x)|| \cdot |h|$$

Q.E.D.

Теорема (о сохранении области)

$F : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, дифф, $\forall x : \det F'(x) \neq 0$, O - открыто. Тогда $F(O)$ - открыто.

Доказательство:

$x_0 \in O, y_0 = F(x_0) \in F(O)$, мы хотим проверить, что y_0 - внутренняя точка.

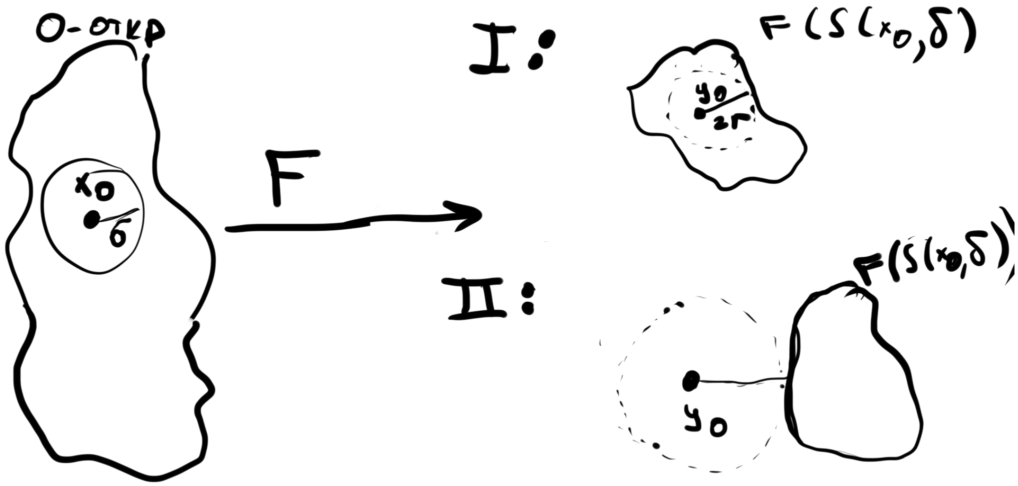
По Лемме выше п.1 $\exists c, \delta > 0 : \forall h \in \overline{B}(o, \delta) : |F(x_0 + h) - F(x_0)| \geq C|h|$. Возьмем шар замкнутый (мы можем так сделать, просто описав этот шар, открытым размера чуть больше)

В частности: при $h : |h| \leq \delta : F(x_0 + h) \neq F(x_0)$.

Введу $r := \frac{1}{2} dist(y_0, F(S(x_0, \delta))$, где $S(x_0, \delta)$ - сфера: $\{x_0 + h, |h| = \delta\}$.

Так теперь давайте немного остановимся и разъясним че происходит:

$dist := \inf(\rho(y_0, z), z \in (F(S)))$. При этом у нас непрерывная функция на компакте, следовательно переводит компакт в компакт, а по теореме Вейерштрасса минимум на компакте будет достигаться, то есть inf можно заменить на min. Может возникнуть 2 случая: y_0 лежит внутри или снаружи $F(S)$ и в обоих случае на рисунке показано это расстояние:



При этом $r > 0$, так как $F(x_0 + h) \neq F(x_0)$. Теперь покажем, что $B(y_0, r) \subset F(O)$.

Докажем: $\forall y : |y - y_0| < r : \exists x \in B(x_0, \delta) : F(x) = y$.

Как только я это проверю, мы сразу получим, что $B(y_0, r) \subset F(O)$.

Рассмотрим $g(x) = |F(x) - y|^2$ - функция на шаре $\overline{B(x_0, \delta)}$

Этот шар — компакт и достигает своего минимума внутри шара: при $x \in S(x_0, \delta) : g(x) > r^2$, при $x = x_0 : g(x) < r^2$.

Тогда точка min удовлетворяет теореме Ферма:

$$g(x) = \sum_{i=1}^{m} (F_i(x) - y_i)^2$$

. Тогда напишем необходимое условие экстремума:

$$\begin{cases} \dfrac{\delta g}{\delta x_1} = 0 : \sum\limits_{i=1}^{m} 2(F_i(x) - y_i)\dfrac{\delta F_i(x)}{\delta x_1} = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{\delta g}{\delta x_m} = 0 : \sum\limits_{i=1}^{m} 2(F_i(x) - y_i)\dfrac{\delta F_i(x)}{\delta x_m} = 0 \end{cases}$$

$$F'(x) \cdot 2(F(x) - y) = 0$$

А значит, так как $\det F' \neq 0$, то $F(x) = y$ и мы нашли такой x.

Q.E.D.

Замечание 1: F - непр, O - связно, $F(O)$ - связно.

Замечание 2: Непрерывность: $\forall$ откр. O' $F^{-1}(O)$ - откр.

Следствие о сохранении области для отображений в пространство меньшей размерности:

$F : O$ - откр. $\subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$, $l < m$, $\forall x : rgF'(x) = l, F \in C^1(O)$. Тогда $F(O)$ - откр.

Доказательство:

Пусть ранг реализуется на столбцах $x_1, \dots, x_l$. Построим отображение

$$\overline{F}(x) = \begin{pmatrix} F(x_1) \\ \vdots \\ F(x_l) \\ x_{l+1} \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

Возьмем $U(x_0)$, что матрица $\det \overline{F}'(x)$ будет иметь блочно диагональный вид и определитель не ноль, откуда определитель не ноль, можем применить теорему, для нее будет верно сохранение области, получим открытую в $\mathbb{R}^m$ и в первом семестре была теорема, что открытое в $\mathbb{R}^m$ будет открытым в $\mathbb{R}^l$

TODO: причесать русский язык

Q.E.D

Теорема (о гладкости обратного изображения)

$F : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m : F \in C^r, \det F' \neq 0$ в O, открыто.

Допустим F - обратимо. Тогда $F^{-1} \in C^r$

Доказательство:

На экзамене не просят TODO: 15 лекция 2:33

Q.E.D.

Теорема (о локальной обратимости)

$F \in O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m, x_0 \in O$, O - открытое. $F \in C^1$

Пусть $\det F'(x_0) \neq 0$. Тогда $\exists U(x_0) : F\Big|_{U(0)}$ - диффеоморфизм.

Доказательство:

По лемме о приближенных значениях дифференцируемого отображения, по пункту 1 выбираем c, по пункту 2 выбираем $U(x_0) = B(x_0, r) \subset O$ так, чтобы:

1. $\det F'(x) \neq 0$, при $x \in U(x_0)$
2. $||F'(x) - F'(x_0)|| < \dfrac{c}{4}$, при $x \in U(x_0)$

Замечание от Славы: Почему такая окрестность существует? По теореме о непрерывно дифференцируемых отображений, наше отображение F' непрерывно. Из-за этого есть окрестность, которая удовлетворяет нашим условиям.

Проверяемость обратимость F на $U(x_0)$: $x, y \in U(x_0), y = x + h : F(y) \neq F(h)$

$$F(y) - F(x) = F(x+h) - F(x) = (F(x+h) - F(x) - F'(x)h) + (F'(x)h - F'(x_0)h) + F'(x_0)h$$

Возьмем норму и воспользуемся: $|a + b + c| = |c| - |b| - |a|$:

$$|F(x+h) - F(x)| = |F'(x_0)h| - |(F(x+h) - F(x) - F'(x)h)| - |(F'(x)h - F'(x_0)h)| + \geq$$

$$\geq c \cdot |h| - M \cdot |h| - ||F'(x) - F'(x_0)|| \cdot |h| \geq c \cdot |h| - M \cdot |h| - \frac{c}{4} \cdot h$$

Оценили с помощью леммы и выбора окрестности. Оценим наше M сверху

$$M := \sup_{z \in [x, x+h]} ||F'(z) - F'(x)|| \leq \sup_{z \in [x, x+h]} ||F'(z) - F'(x_0)|| + \sup_{z \in [x, x+h]} ||F'(x_0) - F'(x)|| \leq \frac{c}{4} + \frac{c}{4}$$

Откуда $|F(y) - F(x)| = |F(x+h) - F(x)| > 0$, откуда $F(x) \neq F(y)$

Откуда F обратимо в данной окрестности. По теореме о гладкости обратного изображения, получаем нужные нам условия для диффеоморфизма. Победили

Q.E.D.

Формулировка теоремы о локальной обратимости в терминах систем уравнений

$$f_i \in C_1 : \begin{cases} f_1(x) = y_1^0 \\ \vdots \\ f_m(x) = y_n^0 \end{cases}$$

Пусть x_0 - решение этой системы и оказалось $F'(x_0) \neq 0$. Тогда $\exists V(y_0) : \forall y \in V(y_0) : \exists\, x$ близкий к x_0, который является решением вашей системы.

def: $F : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n, F \longleftrightarrow F(x, y)$, где $x \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^n$.

Теорема (о неявном отображении)

$F : O \subset \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n, F \in C^r, (a, b) \in O, F(a, b) = 0$. Пусть $\det F'_y(a, b) \neq 0$

Тогда:

1. $\exists$ откр $P \subset \mathbb{R}^n$, $a \in P$
2. $\exists$ откр $Q \subset \mathbb{R}^n$, $b \in Q$
3. $\exists! \varphi : P \to Q, \varphi \in C^r : \forall x \in P : F(x, \varphi(x)) = 0$

5 Информация о курсе

Поток — y2024.
Группы M3138-M3139.
Преподаватель — Кохась Константин Петрович.

Сенко учит мат. анализ и ты учи!