Математический анализ. Третий семестр

Автор: Вячеслав Чепелин

Содержание

1. Творческий кризис Кохася

1.1. Системы Штейнера

Мудрецы и шляпы

У нас есть n мудрецов и k шляп $k \geq n$. Мудрецы стоят в ряд. Каждому мудрецу на голову надевают одну из k шляп, выбранную случайным образом. Мудрец не видит шляпу на своей собственной голове, но видит шляпы всех впереди стоящих мудрецов (тот, кто стоит последним в ряду, видит всех, кроме себя, а тот, кто стоит первым, не видит никого).

Мудрецы не могут общаться друг с другом, жестами, поворачиваться и т.д. Однако, начиная с затылка ряда (с того, кто видит больше всех), каждого мудреца по очереди спрашивают: «Какого цвета твоя шляпа?». Мудрец должен ответить одним из k возможных цветов. При этом нельзя повторять цвета. Его цель — **назвать правильный цвет**. Мудрецы могут заранее договориться об общей стратегии, чтобы максимизировать число гарантированно угаданных шляп. В этом и состоит наша задача.

Есть разные интересные простые частные решения. Для расширения кругозора тык (там с самого начало). Нас интересует нечто другое.

Идея

Что вот по-хорошему должны сделать мудрецы?
- Первый мудрец почти всегда проиграет, он не может угадать, что у него на голове
- Первый должен передать какой-то «ключ» своим коллегам перед ним и коллеги имея ключ должны угадать свой номер. То есть по факту каждый человек видит ключ(key) знает тех, кто был до него и видит тех, кто был после него:

$$key \quad 1 \quad ... \quad 3 \;\; ? \quad 5 \quad ... \quad 4$$

Мы хотим такой список, что зная $n - 1$ число, мы можем понять n-ое.

Система Штейнера

> **Определение.** **Система Штейнера** $S(t, n, \nu)$
>
> КПК вообще сделал лирическое отступление про «Конструктор Ромашку». Пример странный, так что формальное объяснение:
>
> **Система Штейнера** это набор из n —элементных подмножеств множества X из ν элементов таких, что любое t —элементное подмножество множества X содержалось ровно в одном из выбранных подмножеств.
>
> В литературе чаще используют $S(t, k, \nu)$

По факту наша задача про мудрецов свелась к $S(n - 1, n, k)$.

Бывает $S(4, 5, 11)$, не бывает $S(3, 4, 7)$

Решаем мудрецов $n = 4, k = 9$

Они берут конечное поле из 8 элементов: F_8. Мы знаем, что конечные поля существуют в F_{p^l}.

Есть $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^3$, мы умеем думать об $\mathbb{R}^3$ как о коэффициентах перед i, j, k. Возьмем идею.

Возьмем 1, ξ, ξ^2 - 3 линейно независимых векторов в $\mathbb{R}^3$. Пусть у нас выполнено:

$$\xi^3 + \xi + 1 = 0$$

У нас получается нечто из 8 точек(будем ставить 0 или 1 перед $1, \xi, \xi^2$). Почему-то они удовлетворяют аксиомам поля (можете проверить).

$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ - гипербола, если $ad - bc \neq 0$.

Будем считать, что $f : (\mathbb{R} \cup \{\infty\}) \to (\mathbb{R} \cup \{\infty\})$ - **проективная прямая**

Оно представляет все точечки, кроме асимптоты. Поэтому будем считать, что $\infty \to \frac{a}{c}, -\frac{d}{c} \to \infty$. То есть у нас биективная функция.

Теорема.
$\forall \underbrace{a, b, c}_{\text{разл.}} \in \overline{\mathbb{R}} : \forall \underbrace{A, B, C}_{\text{разл.}} \in \overline{\mathbb{R}} : \exists! f$ - дробно-линейная, такая что:

$$f(a) = A, f(b) = B, f(c) = C$$

Доказательство:
Вот она:

$$\frac{y-A}{y-B} : \frac{C-A}{C-B} = \frac{x-a}{x-b} : \frac{c-a}{c-b}$$

КПК: Единственность покажете сами

Q.E.D.

А теперь склеиваем все воедино.

- Первый мудрец видит перед собой номера шляп: b, c, d. По вышесказанной теореме существует функция, которое отображает $f(2) = b, f(3) = c, f(4) = d$. Так как она единственная Первый мудрец говорит $f(1)$
- Второй мудрец имея 3 числа из 4 восстанавливает дробно-линейную функцию, а так как она единственная то получает ту же самую. Он восстанавливает свой номер и называет его
- Остальные аналогично восстанавливают свой номер

Еще решения мудрецов

X - множество, $|X| = k > 23$

Линия - это подмножество X
1. Любые две пересек. по ≤ 1 точке
2. $\forall a, b \in X : \exists!$ линия l: $a, b \in l$
3. $|l| = 4, 5, 6$

В угоду моей психике это будет сделано позже

1.2. Канторова Лестница.

Определена на $[0, 1]^2$. Это функция, которая строится

Процесс построения итерациями:

1. **Исходное состояние:** Начинаем с горизонтального отрезка от точки (0, 0) до точки (1, 1) на плоскости.

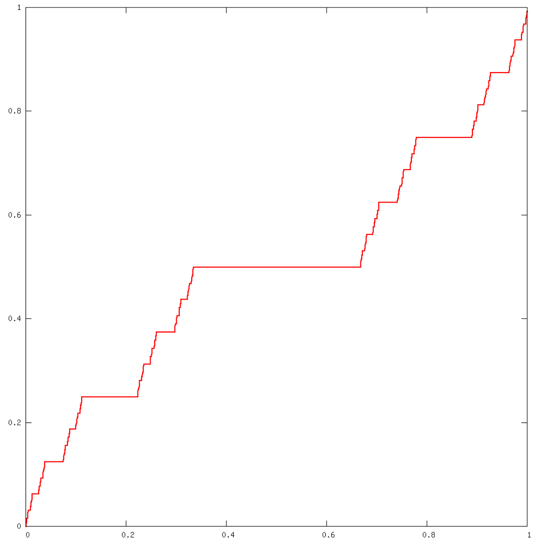
2. **Шаг 1 (n=1): Разделяем отрезок:** Делим исходный отрезок на три равные части по горизонтали (координата x). Теперь график состоит из трёх равных сегментов: восходящий, горизонтальный, восходящий.

3. **Шаг 2 (n=2): Повторяем для восходящих сегментов:** Каждый из двух наклонных сегментов, полученных на предыдущем шаге, мы обрабатываем так же, как исходный отрезок на шаге 1, но в

меньшем масштабе. Делим их на три части. На их средних третях (например, [1/9, 2/9] и [7/9, 8/9]) функция становится горизонтальной на уровнях `y = 1/4` и `y = 3/4` соответственно.

4. **Последующие шаги:** Этот процесс повторяется бесконечно. На каждом шаге `n` мы берем все `2^(n-1)` оставшихся наклонных сегментов, делим их на три части и делаем их средние трети горизонтальными на промежуточных уровнях между уже существующими.

Результат:



1.3. О смысле жизни модифицированных определений

Теорема. **Тaубера**
$\lim\limits_{x\to 1-0}\sum a_n x^n = A \in \mathbb{R}$. $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$. Тогда $\sum a_n = A$

Доказательство:
$\delta_n := \max_{k\geq n}(k a_k)$, $\delta_n \to 0$ монотонно

$$\sum_{n=0}^{N} a_n - A = \left(\sum_{n=0}^{N} a_n - \sum_{n=0}^{N} a_n x^n\right) - \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n x^n + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - A\right)$$

$$|\sum_{n=0}^{N} a_n - A| \leq \sum |a_n|(1-x^n) + \sum \frac{|n a_n| x^n}{n} + |\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - A| \leq$$

Хочу использовать оценку $1 - x^n \leq n(1-x)$:

$$\leq (1-x) N \delta_1 + \frac{\delta_{N+1}}{(N+1)(1-x)} + |\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - A|$$

Берем $\varepsilon > 0$:

Будем считать $N(1-x) < \varepsilon$, берем N, что
- $\delta_{n+1} < \varepsilon^2$
- N - большое => x близко к 1 так, что последнее слагаемое $< \varepsilon$

ну и получаем, что $\leq \varepsilon\delta_1 + \varepsilon + \varepsilon$ - определение предела

Q.E.D.

Метод суммы.

$\mathcal{F} : Q \to \mathbb{R}$. Если ряд $(\sum a_k) \in Q$, то $F\left(\sum\limits_k\right) = S$, S - сумма ряда $\sum a_k$ в смысле метода $\mathcal{F}$

Обычные требования:

- Линейность
- Перманентность, если $\sum a_k = S \Rightarrow (\sum a_k) \in Q$, $F(\sum a_k) = S$

Определение. Метод суммирования средними арифметическими или Цезаро
$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$. Давайте будем считать $\sigma_n = \frac{S_0 + \ldots + S_n}{n+1}$.
Если $\exists$ кон $\lim\limits_{n \to +\infty} \sigma_n$, то S сумма ряда в смысле метода ср. ар.

Теорема. Коши
(S_n)- вещ. последовательность $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = S$, тогда $\lim \sigma_n = S$

Доказательство:
$\forall \varepsilon > 0 : \exists N_1 : \forall n > N_1 : |S_n - S| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$|\sigma_n - S| \le \sum_{k=0}^{n} \frac{|S_k - S|}{n+1} = \sum_{k=0}^{N_1} \frac{|S_k - S|}{n+1} + \sum_{k=N_1}^{n} \frac{|S_k - S|}{n+1}$$

Выбираем $N : \forall n > N : \sum\limits_{k=0}^{N_1} \frac{|S_k - S|}{n+1} < \frac{\varepsilon}{2}$ и заметим, что у второго числители будут меньше $\frac{\varepsilon}{2}$, а идейно там написано что-то меньшее чем среднее арифметическое, откуда все меньше $\frac{\varepsilon}{2}$

Q.E.D.

2. Теория Меры

2.1. Системы множеств

Определение. Полукольцо множеств $\mathcal{P}$
X - множество. $\mathcal{P} \subset 2^X$ - **полукольцо**, если:
1. $\varnothing \in \mathcal{P}$
2. $\forall A, B \in \mathcal{P}, A \cap B \in \mathcal{P}$
3. $\forall A, B \in \mathcal{P}, \exists \underbrace{B_1, ..., B_n}_{\text{диз.}} \in \mathcal{P} : A \setminus B = \bigsqcup_{k=1}^{n} B_k$

Пример. Полукольцо ячеек в $\mathbb{R}^m$

$$a, b \in R^m : [a, b) = \{x \in \mathbb{R}^m : \forall x = 1...m : a_k \leq x_k < b_k\}$$

То есть множество таких параллелепипедов. Очевидно оно удовлетворяет всем трем аксиомам полукольца.

Еще пример
$X = \{1, ..., 6\}^m$. Покажем, что $\mathcal{P}$ - полукольцо для этого множества
1. Очевидно принадлежит.
2. $A_{c_1 c_2} \cap A_{c_5} = A_{c_1 c_2 c_5} \in P$ - работает
3. TODO

Пример. Полукольцо рациональных чисел
$[a, b)$, где $a_i, b_i \in \mathbb{Q}$

Антисвойство
$\mathcal{P}$ - полукольцо: $A, B \in \mathcal{P}$. Тогда вообще говоря $A \cup B, A \setminus B, X \setminus A, A \vartriangle B$ не лежат в $\mathcal{P}$

Свойство:
$\forall A, B_1, ..., B_k \in \mathcal{P} : \exists \underbrace{D_1, ..., D_n}_{\text{диз.}}$ - кон. количество: $A \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k} B_i \right) = \bigsqcup_{j=1}^{n} D_j$

Это доказывается по индукции

Определение. Алгебра подмножеств пространства X
$\mathcal{a} \subset 2^X$ - такой объект называется **алгеброй**, если выполнены свойства:
1. $X \in \mathcal{a}$
2. $A, B \in \mathcal{a} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{a}$

Свойства
1. $\varnothing = X \setminus X \in \mathcal{a}$
2. $A, B \in \mathcal{a} \ \Rightarrow \ A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \in \mathcal{a}$
3. $A^c = X \setminus A \in \mathcal{a}$
4. $A \cup B = (A^c \cap B^c)^c \in \mathcal{a}$
5. Всякая алгебра есть полукольцо

Пример. Тривиальный - 2^X

Пример. Хитрый, но простой
$X = \mathbb{R}^2$. $\mathcal{a}$ состоит ограниченных множеств и из дополнений ограниченных множеств.
- $\varnothing, X \in \mathcal{a}$
- Выполняется вторая аксиома:
  1. A - огр.

2. A^c - огр. +. B - огр. $\Rightarrow (A \setminus B)^c$ - огр. +. B^c - огр. $\Rightarrow A \setminus B \subset B^c \Rightarrow$ огр.

Пример. На счётность

$X =$ бесконечное множество: $\mathcal{a} = \{A \subset X : A$ НБЧС или $X \setminus A$ НБЧС$\}$

Определение. σ-алгебра $\mathcal{a}$ подмножества X

$\mathcal{a} \subset 2^X$ и выполняется:

1. $\mathcal{a}$ - алгебра
2. $\forall A_1, A_2, ... \in \mathcal{a} : \bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathcal{a}$

Свойство:

$$\forall A_1, A_2, ... \in \mathcal{a} : \bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathcal{a}$$

2.2. Объем

Определение. Конечно аддитивная функция
$X, \mathcal{P}$ - полукольцо подмножеств X, $\varphi : \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}$. φ - **конечно аддитивная функция**, если:
1. $\varphi(\varnothing) = 0$
2. $A, A_1, \ldots, A_m, A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{m} A_i$ - дизъюнктное объединение, выполнено:

$$\varphi(A) = \sum_{i=1}^{m} \varphi(A_i)$$

Определение. Объем
$X, \mathcal{P}$ - полукольцо подмножеств X, $\varphi : \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}$. φ - **объем**, если:
1. $\varphi \geq 0$
2. φ - конечно-аддитивно

Пример.
$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ возрастает и непрерывно. Давайте зададим $\mu_g[a, b) = g(b) - g(a)$ - тоже пример объема.

Теорема. Свойства
$\mu : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$, где $\mathcal{P}$ - полукольцо. Тогда выполнено:

0. $B \subset A \Rightarrow \mu B \leq \mu A$ — монотонность объема.
1. **Усиленная монотонность**: $\forall A_1, \ldots, A_n, A \in \mathcal{P} : \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i \subset A$:

$$\mu A \geq \sum_{i=1}^{n} \mu A_i$$

2. **Конечная полуаддитивность**: $\forall A_1 \ldots, A_n : A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$:

$$\mu A \leq \sum_{i=1}^{n} \mu A_i$$

3. $A, B, A \setminus B \in \mathcal{P} : \mu(B) < +\infty$. Тогда:

$$\mu(A \setminus B) \geq \mu A - \mu B$$

Доказательство:
1. $A \setminus (\bigsqcup A_i) = \bigsqcup\limits_{\text{кон.}} B_j$ - по модиф. условию кольца. Тогда по вышесказанному:

$$A = \bigsqcup A_i \cup \bigsqcup B_j$$

По конечной аддитивности объема:

$$\mu A = \sum \mu A_i + \sum \mu B_j$$

Что и требовалось показать.

2. $B_i := A \cap A_i \in \mathcal{P} : A = \bigcup\limits_{\text{кон.}} B_i$.

Теперь давайте действовать так: Обозначим за C_i - то какие части множества добавляет та или иная B_i

$$C_i = B_i \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{i-1} B_j \right)$$

Тогда $A = \bigsqcup_{i=1}^{n} C_i$. НО. Мы не можем сразу сделать вывод об объеме, так как не факт что C_i лежат у нас в полукольцо. НО каждое C_i мы можем составить из конечного числа множеств по аксиомам полукольца. Воспользуемся усиленной монотонностью и докажем требуемое.

3. Он очевиден из прошлых пунктов.

КПК: Это проверка на вашу вменяемость

Q.E.D.

2.3. Мера

Определение. Мера.
$X, \mathcal{P}$ - полукольцо: $\mu : \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}$ — **мера**, если:
1. μ - объем
2. μ - счетно-аддитивно

Замечание: Счетная аддитивность: $\forall A_1, \ldots \in \mathcal{P} : A = \bigsqcup A_i : \mu A = \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \mu A_i$

Замечание: Объем $\not\Rightarrow$ выполняется счетная аддитивность.

Теорема об эквивалентности счетной аддитивности и счетной полуаддитивности.
$\mu : \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}$ — объем. Тогда эквивалентно:
1. μ — мера, т.е μ — счетно-аддитивна
2. μ — счетно-полуаддитивна (нет дизъюнктивности): $\forall A, A_1 \ldots \in \mathcal{P},\ A \subset \bigcup A_i$:

$$\mu A \leq \sum_i \mu A_i$$

Доказательство:

1 ⇒ 2. Берем второй пункт теоремы о свойствах объема, но вместо конечного объединения по k берем счетное объединение (так как у нас теперь мера, то все хорошо) и тадам, все получается.

2 ⇒ 1. Надо проверить, что:

$$A = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i \overset{?}{\Rightarrow} \mu A = \sum_{i=1}^{\infty} \mu A_i$$

Воспользуемся усиленной монотонностью, тогда для любого n будет верно:

$$\sum_{i=1}^{n} \mu A_i \leq \mu A$$

По определению счетной полуаддитивности:

$$\mu A \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu A_i$$

Итого:

$$\sum_{i=1}^{n} \mu A_i \leq \mu A \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu A_i$$

И если перейти к пределу при $n \to +\infty$ мы сразу получим то, что требуется.

Q.E.D.

Следствие: $A \in \mathcal{P}, A_n \in \mathcal{P}, \mu A_n = 0, \mu$ - объем. Пусть $A \subset \bigcup A_n$. Тогда $\mu A = 0$

Формулировка теоремы о непрерывности меры снизу.
$\mathcal{a}$ - алгебра. $\mu : \mathcal{a} \to \overline{\mathbb{R}}$ - объем. Тогда если выполнено:
1. μ — мера
2. μ — непрерывны снизу:

$$\forall A, A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{a}, \quad A_1 \subset A_2 \subset \ldots, \quad A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

То выполнено:

$$\mu A = \lim_{i \to \infty} \mu A_i$$

Теорема о непрерывности меры сверху.

$\mathcal{a}$ — алгебра, $\mu : \mathcal{a} \to \mathbb{R}$ — *конечный* объем. Тогда эквивалентно:

1. μ — мера, т.е счетно-аддитивна
2. μ — непрерывна сверху, те:

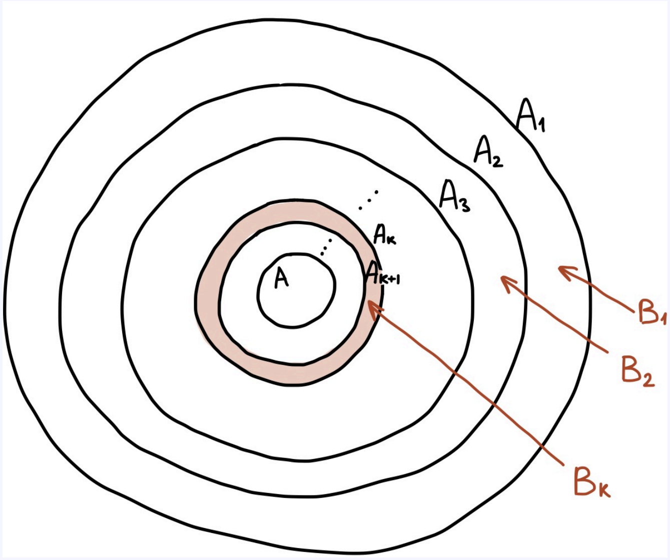
$$\forall A, A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{a}, \quad A_1 \supset A_2 \supset \ldots, \quad A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

Следует:

$$\mu A = \lim_{i \to \infty} \mu A_i$$

Доказательство:

Нарисуем упрощающий рисунок:



1 ⇒ 2

Пусть $B_k := A_k \setminus A_{k+1}$. Тогда такие B_k дизъюнктивны. Отсюда получаем, что

$$A_1 = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} B_i \sqcup A$$

Так как μ мера, то получаем, что:

$$\mu A_1 = \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} \mu B_i}_{\text{сходится}} + \mu A$$

Теперь посмотрим на «хвост» этого ряда, и аналогично первому утверждению доказательства напишем:

$$\mu A_i = \sum_{k=i}^{\infty} \mu B_k + \mu A$$

Т.к. ряд из $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu B_i$ сходится, то при $i \to +\infty$, «хвост» $\to 0$: $\sum\limits_{k=i}^{\infty} \mu B_k \underset{i \to +\infty}{\to} 0$ Делаем предельный переход в равенстве выше, и получаем:

$$\lim_{i \to \infty} \mu A_i = 0 + \mu A = \mu A$$

2 ⇒ 1.

Заметим, что из условия следует:

$$A_1 \supset A_2 \supset \ldots, \quad A = \bigcap A_k = \varnothing \Rightarrow \mu A = \lim_{i \to +\infty} \mu A_i = 0$$

Мы хотим проверить счетную аддитивность, т.е.

$$C = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} C_i \overset{?}{\Rightarrow} \mu C = \sum_{i=1}^{\infty} \mu C_i$$

Для этого введем множества A_k следующим образом:

$$A_k = \bigsqcup_{i=k+1}^{\infty} C_i = C \setminus \left(\bigsqcup_{i=1}^{k} C_i \right)$$

Так как это конечное объединение, то $\bigsqcup\limits_{i=1}^{k} C_i \in \mathcal{a}$, а значит и правая часть $\in \mathcal{a} \Rightarrow A_k \in \mathcal{a}$

Заметим также, что $\bigcap\limits_{k=1}^{+\infty} A_k = \varnothing$, т.к. все C_i дизъюнктны, то любая точка из C содержится ровно в одном C_i, а значит в $A_{k>i}$ она уже содержаться не будет (по определению A_k), и в пересечении всех A_k её тоже не будет

Отсюда следует, что мы можем применять замечание из начала доказательства.
Осталось только заметить, что:

$$C = \bigsqcup_{i=1}^{k} C_i \sqcup A_k$$

Т.к. μ — объем:

$$\mu C = \sum_{i=1}^{k} \mu C_i + \mu A_k$$

Делаем предельный переход при $k \to +\infty$

$$\mu C = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu C_i + 0$$

Q.E.D.

2.4. Продолжение меры.

Определение. Пространство с мерой

Обозначается тройкой $\left(\underbrace{X}_{\text{мн-во}}, \underbrace{\mathcal{a}}_{\sigma\text{-алг.}}, \underbrace{\mu}_{\text{мера}}\right)$

Определение. Полная мера

$\mu : \mathcal{P} \subset 2^X \to \overline{\mathbb{R}}$ — мера

μ — **полная мера**, если

$$(B \in \mathcal{P} : \ \mu(B) = 0) \Rightarrow (\forall A \subset B : \ A \in \mathcal{P}, \text{ а значит } \mu(A) = 0)$$

Формально: если в полукольце есть множество меры 0, то все его подмножества также лежат в полукольце, а значит тоже имеют меру 0

Определение. Сигма-конечная мера

$\mu : \mathcal{P} \subset 2^X \to \overline{\mathbb{R}}$ — мера (или объём)

μ — **σ-конечная мера** (или объем), если

$$\exists A_1, A_2, ... \in \mathcal{P} \quad X = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i, \ \mu(A_i) < +\infty$$

Замечание. Множество измеримо, если оно лежит в области определения меры

Теорема о лебеговском продолжении меры.

$\mathcal{P}_0 \subset 2^X$ — полукольцо: $\mu_0 : \mathcal{P}_0 \to \overline{\mathbb{R}}$ — σ-конечная мера.

Тогда $\exists\sigma$-алгебра $\mathcal{a} : \mathcal{P}_0 \subset \mathcal{a}$ и $\exists\mu$ - мера на $\mathcal{a}$ такие, что:

1. $\mu|_{\mathcal{P}} = \mu_0$, т.е. μ — продолжение μ_0 на $\mathcal{a}$
2. μ — полная мера
3. Если $\mathcal{a}_1$ - σ-алгебра, μ_1-мера, полная, $\mathcal{P} \in \mathcal{a}_1, \mu_1|_{\mathcal{P}}$, то $\mathcal{a} \subset \mathcal{a}_1, \mu_1|_a = \mu$
4. Если $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}_2 \subset \mathcal{a} : \mu_2 \ |_{\mathcal{P}} = \mu_0$, то тогда $\mu|_{\mathcal{P}_2} = \mu_2$
5. $A \in \mathcal{a}, \mu A$ - кон, то

$$\mu A = \inf\left(\sum \mu P_k, A \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} P_k, \text{где } P_k \in \mathcal{P}\right)$$

К счастью, без доказательства

Определение. μ-измеримое множество

$A \subset X$ — μ-измеримо, если $\forall E \subset X$:

$$\mu E = \mu(A \cap E) + \mu\left(A^C \cap E\right)$$

2.5. Мера Лебега.

Автор ничего не понимает и еще в будущем будет стдеть и перепечатывать доказательство. Пока так.

Лемма. Счетная аддитивность классического объема

Счетная аддитивность классического объема $\mathcal{P}^m$ — множество всех ячеек на $\mathbb{R}^m$.
μ — классический объем. Тогда μ — σ-конечная мера.

Доказательство:

1. σ-конечность очевидна: можно либо разлиновать пространство на клеточки как в тетради, либо просто взять увеличивающийся параллелепипед
2. Осталось доказать, что μ - мера. Если докажем счетную полуаддитивность, то по т. об эквив. счетной аддитивности и счетной полуадитивности, получим, что μ - мера.

$$P = [a, b),\ P_n = [a_n, b_n) :\ P \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} P_n \overset{?}{\Rightarrow} \mu P \le \sum \mu P_n$$

Далее под фразой «чуть уменьшим» вектор из $\mathbb{R}^m$ будем подразумевать небольшое уменьшение каждой из его координат. Возьмем $\varepsilon > 0$:

1. Чуть уменьшим b и получим b' :

$$[a, b'] \subset [a, b) :\ \mu(P \setminus [a, b')) < \varepsilon$$

2. Теперь для каждого P_n немного уменьшим a_n и получим a_n' :

$$(a_n', b_n) \supset [a_n, b_n) :\ \mu([a_n', b_n) \setminus P_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$$

3. Получаем, что $\underbrace{[a, b']}_{\text{компакт}} \subset \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} (a_n', b_n)$

   Т.к. это компакт, а справа стоит открытое покрытие, то по определению существует конечное подпокрытие:

$$[a, b'] \subset \bigcup_{n=1}^{N} (a_n', b_n)$$

Теперь в правую часть включения добавим часть точек, а слева уберем. Очевидно включение от этого не сломается:

$$[a, b') \subset \bigcup_{n=1}^{N} [a_n', b_n)$$

По конечной аддитивности:

$$\mu[a, b) - \varepsilon \overset{(1)}{\le} \mu[a, b') \overset{(3)}{\le} \sum_{n=1}^{N} \mu[a_n', b_n) \overset{(2)}{\le} \sum_{n=1}^{N} \left(\mu[a_n, b_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \right)$$

$$\mu[a, b) \le \varepsilon + \sum_{n=1}^{N} \mu[a_n, b_n) \le 2\varepsilon + \sum_{n=1}^{+\infty} \mu[a_n, b_n)$$

Делаем предельный переход при $\varepsilon \to 0$ и получаем ровно то, что и хотели.

Q.E.D.

Определение. Мера Лебега

Мера Лебега в $\mathbb{R}^m$ — это результат применения теоремы о продолжении лебеговском продолжении меры к класс. объему.

$(\mathbb{R}^m, \mathcal{P}, \mu_0) \rightsquigarrow (\mathbb{R}^m, \mathfrak{m}^m, \lambda)$, где μ_0 - классический объема, λ, λ_m — мера Лебега (иногда хотим указывать размерность пространства)

Свойство:

1. Объединение, пересечение (в том числе счетные) множеств, изменимые по Лебегу тоже
2. Полнота. $\lambda A = 0, B \subset A \Rightarrow \lambda B = 0$
3. Содержит все открытые и замкнутые множества в $\mathbb{R}^m$ (доказательство см ниже)
4. E — измеримо и $\lambda(E) = 0 \Rightarrow$ у E нет внутренних точек
5. $A \in \mathcal{M}^m$, тогда $\forall \varepsilon > 0$:
   - $\exists$ открытое $G_\varepsilon : A \subset G_\varepsilon : \lambda(G_\varepsilon \setminus A) < \varepsilon$
   - $\exists$ замкнутое $F_\varepsilon : A \supset F_\varepsilon : \lambda(A \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$

Доказательство:

5. Пусть $\lambda A < +\infty : \forall \varepsilon > 0 : \exists P_k : A \subset \bigcup P_k$ по пункту 5 теоремы о лебеговском продолжении меры

$$\lambda A \leq \sum \lambda P_k \leq \lambda A + \varepsilon$$

Заменим $P_k = [a_k, b_k]$ на $P_k' = (a_k - \alpha_k, b_k)$, так, чтобы $\lambda P_{k'} < \lambda P_k + \frac{\varepsilon}{2^k}$.

Возьмем $G_\varepsilon := \bigcup P_k'$ - открытое. Тогда:

$$\lambda A \leq \sum \lambda P_k' < \left(\sum \lambda P_k\right) + \varepsilon < \lambda + 2\varepsilon$$

Заметим, что тогда выбранное G_ε удовлетворяет условию.

Теперь для произвольного A: $\mathbb{R}^m = \bigsqcup Q_i$. $A \cap Q_i$. Существует открытое G_i, что $(A \cap Q_i) \subset G_i$

$$\lambda(G_i \setminus (A \cap Q_i)) < \frac{\varepsilon}{2^i}$$

TODO: тут не совсем понял, как мы такие G_i можем выбрать, ладно

$A = \bigsqcup (A \cap Q_i) \subset \bigcup G_i = G$ - открытое.

Ну и видно, что найденное G подходит условию.

Q.E.D.

Лемма. О смысле жизни множеств меры 0

$O \subset \mathbb{R}^m$ — открытое. Тогда $\exists Q_i :\ O = \bigsqcup\limits_{i=1}^{+\infty} Q_i$, где Q_i — кубические ячейки:

- можно считать, что они с рациональными координатами.
- можно даже считать, что с двоично-рациональными
- они «закопаны» внутрь области O. $Q_i \subset \overline{Q_i} \subset O$

Доказательство:

$\forall x \in O$:Возьмем $Q(x)$ - любую кубические ячейку с нужными нам из условия свойствами, в которую входит x

$$O = \bigcup_{x \in Q} Q(x) \underset{\text{шаманим}}{=} \bigcup_{i=1}^{+\infty} Q(x_i)$$

Шаманство: O — *континуальное* множество. Казалось бы, как такое посчитать. Заметим, что ячеек с двоично-рациональными координатами счетно. Так что мы просто пройдемся по ним и будем нумеровать, так что шаманство работает!

Теперь осталось сделать их дизъюнктными. Ну давайте брать лишь ту часть, которую наша ячейка добавляет и разбивать ее на ячейки, каждая из которых из очевидных соображений будет удовлетворять условию

Q.E.D.

Лемма. О смысле жизни множеств меры 0

E — измеримо, $\lambda E = 0$. Тогда $\forall \varepsilon > 0 : \exists Q_i$, такие что:

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty} Q_i \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda Q_i < \varepsilon$$

где Q_i — кубические ячейки с двоично-рациональными координатами

Замечание: Вместо кубических ячеек можно взять шары, потому что

$$Q\left(a, \frac{r}{\sqrt{m}}\right) \subset B(a,r) \subset Q(a,r) \subset B\left(a, r\sqrt{m}\right)$$

Доказательство:

Из 5го пункта продолжения меры:

$$0 = \lambda E = \inf\left\{\sum_{i=1}^{+\infty} \lambda P_i \;\middle|\; E \subset \bigcup P_i\right\}$$

Т.к. inf равен 0, то мы можем найти там сколько угодно малое значение

Подберем покрытие E параллепипедами $P_i : \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \lambda P_i < \frac{\varepsilon}{2}$

Теперь каждую ячейку P_i «поместим» в ячейку R_i с двоично-рациональными координатами, так чтобы

$$\lambda(R_i \setminus P_i) < \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}$$

Получается, что $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} \lambda R_i < \varepsilon$

Чтобы ячейки стали кубическими, аналогично прошлому лемме раздробим R_i

Q.E.D.

Пример неизмеримого по Лебегу множества

Зададим отношение $\sim$ на $\mathbb{R}$:

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$$

$\mathbb{R}/_{\sim} = A$ — т.е из каждого класса эквивалентности взяли по одной точке. Заодно можно считать, что $A \subset [0, 1]$

Заметим, что есть следующее включение:

$$[0,1] \subset \bigsqcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} (A+q) \subset [-1,2]$$

Левая часть следует из того, что если взять точку $x \in [0,1]$, представителя его класса $y \in A$ и найти $x - y$, то окажется что это значение во-первых рациональное, во-вторых $\in [-1,1]$, а т.к. мы перебираем все рациональные числа, из этого отрезка в качестве смещений, то в x мы тоже попадем
Правая часть следует из того, что смещая точки из отрезка $[0,1]$ на смечение от -1 до 1, мы всегда попадаем в отрезок $[-1,2]$

Предположим A — измеримо, тогда можем посчитать меру отрезков (воспользуемся счетной аддитивностью):

$$1 \leq \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} \lambda(A+q) \leq 3$$

Пока строго обосновывать не будем, но при сдвиге мера множества не меняется
Значит $\sum \lambda(A+q)$ — сумма счетного числа одинаковых слагаемых, соответственно есть два варианта:
1. $\lambda(A+q) = 0 \Rightarrow \sum \lambda(A+q) = 0$
2. $\lambda(A+q) \neq 0 \Rightarrow \sum \lambda(A+q) = \infty$

В обоих случаях одно из неравенств не выполняется, а значит A — неизмеримое.

Регулярность меры Лебега.
$A \in \mathcal{M}^m, \forall \varepsilon > 0:$
1. $\exists$ открытое $G_\varepsilon : A \subset G_\varepsilon : \lambda(G_\varepsilon \setminus A) < \varepsilon$
2. $\exists$ замкнутое $F_\varepsilon : A \supset F_\varepsilon : \lambda(A \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$

Доказательство:

1. а) Пусть $\lambda A < +\infty$.
   Тогда: $\lambda A = \inf\left\{\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \lambda P_k \mid A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} P_k\right\}$ по теореме о продолжении меры.

   Из технического описания мы можем выбрать элемент, который лежит сколь угодно близко к inf:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists (P_k) : \lambda A \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda P_k \leq \lambda A + \frac{\varepsilon}{2}$$

   Теперь осталось сделать каждое P_k открытым, чтобы их счетное объединение было тоже открытым, содержало A и было ограничено. На это мы оставили «запас» $\frac{\varepsilon}{2}$, как раз на то чтобы раздуть ячейки

   Немного уменьшим a_k и получим a'_k :

$$(a'_k, b_k) \supset P_k, \text{ а также } \mu((a'_k, b_k) \setminus P_k) < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$$

   Тогда наше $G_\varepsilon := \bigcup_{k=1}^{+\infty} (a'_k, b_k)$ — открытое, т.к. это счетное объединение открытых

   Очевидно, что:

   1. Т.к. $(a'_k, b_k) \supset P_k \Rightarrow A \subset G_\varepsilon \Rightarrow \lambda A \leq \lambda G_\varepsilon$
   2. $\lambda G_\varepsilon \leq \left(\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \lambda P_k\right) + \frac{\varepsilon}{2} < \lambda A + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \lambda A + \varepsilon$

   Мы получили ровно то что хотели: $\mu(G_\varepsilon \setminus A) < \varepsilon$

б) Теперь предположим, что $\mu A = +\infty$

Тогда по σ-конечности: $\mathbb{R}^m = \bigsqcup Q_i$, где Q_i — кубические ячейки

Рассмотрим A как пересечение с этой «сеткой» и для каждого пересечения будем брать свое $G_{e,j}$ такое что:

$$A = \bigsqcup_{j=1}^{+\infty} \underbrace{A \cap Q_j}_{\subset G_{\varepsilon,j}}, \quad \lambda\left(G_{\varepsilon,j} \setminus \left(A \cap Q_j\right)\right) < \frac{\varepsilon}{2^j}$$

Тогда $G_\varepsilon := \bigcup_{j=1}^{+\infty} G_{\varepsilon,j}$ — открыто, т.к. счетное объединение открытых.

2. Возьмем дополнение и проделаем все рассуждения про него. А дальше, у получившегося открытого множества возьмем дополнение и заметим, что его разница с A как раз есть ε

Q.E.D.

2.6. Произведение мер

Определение. Произведение мер
$(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$, μ, ν - сигма-конечные.

$P = \{A \times B \mid A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$ - полукольцо измеримых прямоугольников

Мера, полученная из m_0(из теоремы о произведении мер) по теореме о Лебеговском продолжении меры, на P обозначается $\mu \times \nu$.

Соответствующее пространство и сигма алгебра обозначаются:

$$(X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mu \times \nu)$$

Теорема. Произведение мер
$(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$. Тогда:
- m_0 мера на P, где $m_0(A \times B) = \mu A \cdot \nu B$
- μ, ν - сигма-конечные, откуда m_0 - сигма-конечная

Доказательство:
$x_{A \times B}(x, y) = x_{A(x)} \cdot x_{B(y)}$

$P = \bigsqcup\limits_{\text{счетно}} P_k, P = A \times B, P_k = A_k \times B_k$

TODO: ТУТ ЧТО-ТО НЕПОНЯТНОЕ

Q.E.D.

Принцип Кавальери.
$(X, \mathcal{A}, \mu)$ и $(Y, \mathcal{B}, \nu)$. Меры μ, ν - σ-конечные и полные

$m = \mu \times v$. Построим $(X \times Y, A \otimes B, m), C \in A \otimes B$

Тогда:
1. При п.в $x : C_x \in$ B, где $C_x = \{y : (x, y) \in C\}$ - «типо сечение»
2. $x \mapsto \nu(C_x)$ измеримо* на X, $* : \exists \overline{f}$ всюду совпадает с f почти везде.
3. $mC = \int_X \nu(C_x) d\mu$

Доказательство:
Замечание:
1. C измеримое $\not\Rightarrow \forall x : C_x$ - измеримо
2. $\forall x, \forall y : C_x, C^y$ измеримы $\not\Rightarrow C$ измеримое

Рассмотрим **много случаев**

Пусть D - это класс (множество) подмножеств $X \times Y$, для которых принцип верен

(1) Простой случай:

$C = A \times B$, где $A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}$. Покажем, что $C \in D$, то есть что принцип выполнен:
1. $C_x = B, x \in A$ или $C_x = \varnothing, x \notin A$. Очевидно, что это измеримо при любых x
2. $x \mapsto \nu(C_x)$ это $\nu B \chi_A(x)$
3. $m(c) = \mu A \nu B = \int_X \nu B \cdot \chi_{A(x)} d\mu$

(2) Случай дизъюнктных входящих:

E_i - дизъюнктны и $E_i \in D$. Покажем, что $E = \bigsqcup\limits_{i=1}^{+\infty} E_i \in D$, то есть что принцип выполнен:

1. $E_x = \bigsqcup\limits_{i=1}^{+\infty} (E_i)_x$ - измеримо при п.в x $(E_i)_x \Rightarrow E_x$ измеримо при почти всех x
2. $\nu E_x = \sum \nu(E_i)_x$, тогда получим, что это будет сумма неотрицательных изм. функций.

Откуда $x \mapsto \nu(C_x)$ - измеримо*

3. $\displaystyle\int_X \nu E_x \,\mathrm{d}\mu = \int_X \sum \nu(E_i)_x \,\mathrm{d}\mu \underset{\text{по т. об инт. полож рядов}}{=} = \sum_i \left(\int_X \nu(E_i)_x \,\mathrm{d}\mu \right) = \sum_i \mu E_i = mE$

(3) Случай пересечения входящих в D:

$E_i \in D, mE_i < +\infty, E_1 \supset E_2 \supset \ldots$ Заметим, что:

$(E_i)_x \subset (E_1)_x, \int \nu(E_1)_x d\mu = mE_1 < +\infty \Rightarrow \nu(E_1)_x$ п.в конечна $\Rightarrow \nu(E_i)_x$ п.в. конечна

Покажем, что $E := \bigcap\limits_{i=1}^{+\infty} E_i \in D$, то есть что принцип выполнен:

1. E_x измеримо, как пересечение измеримых
2. $\nu(E_i)_x \underset{i \to +\infty}{\to} \nu E_x$ по непрерывности меры v сверху (измеримо, как предел измеримых)
3. $\displaystyle\int_X \nu E_x \,\mathrm{d}\mu = \lim_{i \to \infty} \int_X \nu(E_i)_x \,\mathrm{d}\mu = \lim_{i \to +\infty} mE_i = mE$ - по непрерывности меры m сверху.

Промежуточный итог: $\mathcal{P} = \mathcal{A} \times \mathcal{B} : \bigcap\limits_i \bigcup\limits_j A_{ij} \in D$, где $A_{ij} \in \mathcal{P}$

(4) Множества меры 0:

$mE = 0$. Покажем, что $E \in D$

$\exists$ (почему?) $H = \bigcap\limits_i \bigcup\limits_j P_{ij}$, такой что $E \subset H, mH = 0, H \in D$ по построению

$0 = mH = \displaystyle\int_X \nu H_x d\mu \Rightarrow \nu H_x = 0$ при п.в. x

1. $\forall x : E_x \subset H_x \Rightarrow E_x$ измеримо
2. $\nu E_x = 0$
3. $\int \nu E_x d\mu = 0 = mE$

(5) Без куска меры 0:

C - измеримо, $mC < +\infty . C = H \setminus e$, где $me = 0, e \in D, H = \bigcap \bigcup P_{ij} \in D$

1. $C_x = H_x \setminus e_x$ - изм. почти везде, так как $e \subset H$
2. $x \mapsto \nu C_x = \nu H_x - \nu e_x$ - измеримо.
3. $\displaystyle\int_X \nu C_x d\mu = \int_X \nu H_x d\mu = mH = mC$

(6) Любое:

$X = \bigsqcup\limits_{i=1}^{+\infty} X_i, Y = \bigsqcup\limits_{j=1}^{+\infty} Y_j, \mu X_i < +\inf, \nu Y_i < +\infty$

$X \times Y = \bigsqcup\limits_{i,j} (X_i \times Y_j)$

$C = \bigsqcup\limits_{i,j} \big((X_i \times Y_j) \cap C \big)$ - то что внутри принадлежит по пункту 5., а итог верен по пункту 2.

Q.E.D.

Следствие о равенстве интеграла Лебега и определенного интеграла

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ - непр $f \geq 0$. Тогда:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{[a,b]} f\,\mathrm{d}\lambda_1$$

Доказательство:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda_2(\text{ПГ}([a,b], f)) = \int_{[a,b]} f(x) d\lambda_1$$

Q.E.D.

Определение. **Сечение функции**

$f : C \to \overline{\mathbb{R}}, C \subset X \times Y$

$\forall x \in X : f_x(y) = f(x, y), y \in C_x$

$\forall y \in Y : f_y(x) = f(x, y), x \in C_y$

Теорема Тоннели.

$(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$ - m, ν - σ-кон и полные, $m = \mu \times \nu$

$f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}, f \geq 0, f$ — m - изм

Тогда:

1. при п.в. $x : f_x$ - измеримо относительно σ-алгебры $\mathcal{B}$
2. $x \mapsto \varphi(x) = \int_Y f_x d\mu$ - изм* на X
3. $\int_{X \times Y} dm = \int_X \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x)$

Аналогичные рассуждения можно повторить по y.

Доказательство:

0) $f = \chi_C, C \subset X \times Y$ - изм.

$f_{x(y)} = \chi_{C_x}(y)$ при почти всех C_x изм. мн-во в $X \Rightarrow$ при этих x, f_x - измеримо.

$$\varphi(x) = \int_Y \chi_{C_x} y\,\mathrm{d}\nu(y) = \nu C_x \text{ - измеримо как функция по принципу Кавальери}$$

$$mC = \int_{X \times Y} \chi_C\,\mathrm{d}m = \int_X \nu(C_x)\,\mathrm{d}\mu = \int \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu$$

1) f - ступ. $f = \sum_k \alpha_k \left(\chi_{C_k}\right)_X$ - используем первый пункт и линейность интеграла

2) $f \geq 0$, f-изм. $f = \lim g_n$, g_n - ступ, $0 \leq g_n < f$ - по теореме о характеристики функций с помощью ступ. $g_n \leq g_{n+1}$

$$\varphi(x) = \int_Y f_X\,\mathrm{d}\nu \underset{\text{Теорема Леви}}{=} \lim_{n \to +\infty} \int (g_n)_x\,\mathrm{d}\nu$$

Обозначим $\varphi_n(x) = \int (g_n)_x\,\mathrm{d}\nu$: $0 \leq \varphi_{n(x)} \leq \varphi_{n+1}(x)$

$$\int_X \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu = \lim \int_X \varphi_n(x) d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X \left(\int_Y g_{n(x,y)}\,\mathrm{d}\nu \right) \mathrm{d}\nu =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \int_{X\times Y} g_n\,\mathrm{d}\mu = \int_{X\times Y} f\,\mathrm{d}\mu$$

Q.E.D.

<u>Определение.</u> Бета - функция

$$\mathrm{B}(s,t) = \int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1}\,\mathrm{d}x, s,t > 0$$

<u>Пример</u>
$B(s,t) = \frac{\Gamma(s)\cdot\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$

Доказательство:

$$\Gamma(s)\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\left(\int_0^{+\infty} y^{t-1}e^{-y}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

Сделаем замену $y = u - x$:

$$\int_0^{+\infty} x^{s-1}\left(\int_0^{+\infty} (u-x)^{t-1}e^{-u}\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x^{s-1}(u-x)^{t-1}e^{-u} d\lambda_2 =$$

$$= \int ...\left(\int ...dx\right) du = \int_0^{+\infty} e^u \left(\int_0^u x^{s-1}(u-x)^{t-1}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}u =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^u \int_0^1 (uv)^{s-1}\cdot u^{???}$$

дальше не распарсил свои записи, позже допишу

Q.E.D.

<u>Пример. Объем шара в $\mathbb{R}^m$</u>
Выведем привычные нам формулы для шаров в $\mathbb{R}^m$

Пусть $\alpha_m = \lambda_m(B(0,1)), \lambda_m(B(0,r)) = \alpha_m \cdot r^m$

$$\alpha_m = \int_{-1}^1 \alpha_{m-1}(1-y^2)^{\frac{n-1}{2}}\,\mathrm{d}y \underset{[t=y^2]}{=} \alpha_{m-1}\int_0^1 t^{-2}(1-t)^{\frac{m-1}{2}}\,\mathrm{d}y = \alpha_{m-1}\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{m+1}{2}\right) = \alpha_{m-1}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)}$$

$$a_m = a_{m-1}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)} = ... = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)} = \frac{\sqrt{\pi^{n+1}}\cdot\frac{3}{2}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)}$$

<u>Теорема.</u> Фубини
$(X,\mathfrak{a},\mu), (Y,\beta,\nu), m = \mu\times\nu$, μ,ν - сигма-конечные, полные.

$f : X\times Y \to \overline{R}$ сумм по мере m

1. при п.в. x : f_x - сумм. на Y

2. $x \to \varphi(x) = \int_Y f(x,y)d\nu(x)$ - сумм. на X
3. $\int_{X\times Y} dm = \int_X \varphi(x)d\mu(x) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)d\nu(y)\right)d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)d\mu(x)\right)d\nu(y)$

Следствие: $\int_C f d\mu =$ что тут кохась написали

2.7. Плотность меры относительно другой и замена переменных.

$(X, \mathcal{a}, \mu)$, $(Y, \beta,)$, $\Phi : X \to Y$

Упражнение. $\Phi^{-1}(\beta)$ - σ - алгебра.

Определение.
1. Φ - **измеримое**, если $\Phi^{-1} \subset \mathcal{a}$
2. Определим меру ν на $\beta : E \subset \beta : v(E) = \mu(\Phi^{-1}(E))$. Надо проверить, что это мера.

Определение. Взвешанный образ
$w : X \to \overline{\mathbb{R}}, w \geq 0$ и изм., $\forall E \in \beta : \nu(E) = \displaystyle\int_{\Phi^{-1}(E)} w d\mu$ - взвешанный образ меры, а само w называется весом.

Теорема.
$\Phi : X \to Y, \Phi$ - изм, $w : X \to \overline{\mathbb{R}}, w \geq 0$, изм. $\nu =$ взв. образ меры μ. $f : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ - изм., $f \geq 0$. Тогда:

$$\int_Y f(y) d\mu(y) = \int_X f(\Phi(x)) w(x) d\mu(x)$$

Доказательство:
1. $f = \chi_B, B \in \beta$

$f(\Phi(x)) = \begin{cases} 1, \Phi(x) \in B \\ 0, \Phi(x) \notin B \end{cases} = \chi_{\Phi^{-1}(B)}(x)$

$\displaystyle\int_Y f(y) d\nu(y) = \nu(B)$

$\displaystyle\int_X f(\Phi(x)) w(x) d\mu = \int_{\Phi^{-1}(B)} 1 w(x) d\mu = \nu(B)$

2. f - ступ. $f \geq 0$. Пользуемся линейностью интеграла и побеждаем
3. f - изм, $f \geq 0$, $\exists f_n \to f$, $f_n \leq f_{n+1}$ и используем теорему Леви

Q.E.D.

Следствие. $B \in \beta, f$ - сумм на Y(или на B). Тогда $\displaystyle\int_B f \, \mathrm{d}\nu = \int_{\Phi^{-1}(B)} f(\Phi(x)) w d\mu$.

Теорема. Критерий плотности
$(X, \mathcal{a}, \mu), \nu$ - еще одна мера на $\mathcal{a}$, $w \geq 0$

Тогда w - плотность ν относительно $\mu \Leftrightarrow$

$$\forall A \in \mathcal{a} : \mu A \inf_A w \leq \nu(A) \leq \mu(A) \sup_A w$$

Доказательство:
$\Rightarrow$ Очевидно.

$\Leftarrow$ Будем считать, что $\omega > 0$.

$q \in (0, 1), j \in Z : A_j = A(q^j \leq w \leq q^{j-1})$

$A = \bigsqcup A_j$

$$q^j \mu A_j \leq \nu A_j \leq \mu A_j q^{j-1}$$

TODO: дописать и расписать док-во лекция 7 1.15

Q.E.D.

Лемма о единственности плотности.

f, g - сумм: $\forall A \in \mathfrak{a} : \displaystyle\int_A f = \int_A g$. Тогда $f = g$ почти везде

Доказательство:

$h := f - g : \forall A : \int_A h = 0$. Докажем, что $h = 0$ почти везде.

Очевидно положит и отриц срезка в интеграле дадут ноль. Откуда $\displaystyle\int_X |h| = 0$, откуда $|h| = 0$ почти везде

Q.E.D.

Определение. Абсолютная непрерывность меры по отношению к мере

$(X, \mathfrak{a}, \mu), \nu$ - еще одна мера на $\mathfrak{a}$.

ν - абсолютно непрерывна по отношению к μ обозначается $v \prec \mu$, если $\mu E = 0 \Rightarrow \nu E = 0$

Теорема Радона-Никодима.

$(X, \mathfrak{a}, \mu), \nu$ - мера на $\mathfrak{a}$, μ, ν-конечные меры, причем $\nu \prec \mu$.

Тогда $\exists! f$ с точн. до п.в. $f \geq 0$, f - плотность ν относительно μ:

$$\forall A - \text{изм} : \nu A = \int_A f d\mu$$

Лемма об оценке мер образов малых кубов.

$\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m : \Phi \in C^1, \mathfrak{a} \in O$ число $c > |\det \Phi'(a)| \neq 0$

Тогда

$$\exists \delta > 0 : \forall \text{ куб } Q : a \in Q, Q \subset B(a, \delta) : \lambda\Phi(Q) < c\lambda Q$$

Доказательство:

$L = \Phi'(a)$ - обратим.

$\Phi(x) = \Phi(a) + L(x - a) + o(x - a)$

$a + L^{-1}(\Phi(x) - \Phi(a)) = x + o(x - a)$

$\psi(x) = x + o(x - a)$

$\forall \varepsilon > 0 : \exists$ шар $B_{\varepsilon(a)} : \forall x \in B_\varepsilon(a) : |\psi(x) - x| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}} |x - a|$

Пусть $Q \subset B_\varepsilon(a); a \in Q, h -$ длина стороны Q, при $x \in Q, |x - a| \leq \sqrt{m}h$ и тогда $|\psi(x) - x| \leq \varepsilon h$

Тогда при $x, y \in Q$

$|\psi(x) - \psi(y)| \leq |\psi_{i(x)} - x_i| + |x_i - y_i| + |y - \psi(y)| \leq (1 + 2\varepsilon)h$

$\Rightarrow \psi(Q) \subset$ Куб со стороной $(1 + 2\varepsilon)h$

$\lambda\psi(Q) \leq (1 + 2\varepsilon)^m \lambda Q$

$\lambda\Phi(Q) \leq |\det L|\ (1+2\varepsilon)^m \lambda Q$

Откуда уже очевидно требуемое. TODO: дописать

Q.E.D.

Лемма. Вариации на тему регулярности
$f : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ непр. $A \subset Q \subset \overline{Q} \subset O$ измеримо по Лебегу. Тогда

$$\inf_{A \subset G \subset Q - \text{ откр}} \left(\lambda(G) \sup_G f\right) = \lambda A \sup_A f$$

Теорема. Теорема о преобразовании меры Лебега при диффеоморфизме
$\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$- диффеоморфизм. Тогда:

$$\forall A \subset O, A \notin m^m : \lambda\Phi(A) = \int_A |\det \Phi'(x)|\ d\lambda(x)$$

Доказательство:
$\nu(A) = \lambda\Phi(A)$ заданно на m, проверим, что выполнен критерий плотности.

todo

Q.E.D.

Теорема.
$\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, O - область, диффеоморфизм. f изм ≥ 0, $f : O \to \overline{\mathbb{R}}$, пусть $O' = \Phi(O)$. Тогда:

$$\int_{O'} f(y) d\lambda(y) = \int_O f(\Phi(x))\ |\det \Phi'(x)| dx$$

Доказательство:

Нечего доказывать. Буквально сложите теорему о преобразовании меры Лебега при диффеоморфизме и теорема из начала параграфа.

Q.E.D.

То же утверждение верно, но и для суммируемой.

3. Интеграл

3.1. Основные определения

Определение. Разбиение множества E

Разбиением множества E называется его разбиение на конечное количество множеств, то есть:

$$E = \bigsqcup E_i$$

Определение. Ступенчатая функция

$f : X \to \mathbb{R}$ — называется **ступенчатой**, если:

$$\exists e_i : X = \bigsqcup_{\text{кон.}} e_i : \ \forall i \ f\big|_{e_i} = \text{const}$$

При этом такое разбиение называется **допустимым**.

Пример: Характеристическая функция $\chi_{e_k} = \begin{cases} 1, & x \in e_k \\ 0, & x \notin e_k \end{cases}$

Свойства

1. Если f, g — ступенчатые функции, то $\exists$ разбиение, допустимое для обоих
2. f, g — ступенчатые, $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда:

$$f + g, \ fg, \ \max(f, g), \ \min(f, g), \ |f|, \ \alpha f \text{ — ступенчатые}$$

Определение. Лебеговские множества.

Пусть есть $f : E \subset X \to \overline{\mathbb{R}}$ и $a \in \mathbb{R}$. Тогда следующие 4 множества называются **Лебеговскими**:

1. $E(f < a) = \{x \in E, \ f(x) < a\}$
2. $E(f \leq a) = \{x \in E, \ f(x) \leq a\}$
3. $E(f \geq a) = \{x \in E, \ f(x) \geq a\}$
4. $E(f > a) = \{x \in E, \ f(x) > a\}$

Замечания:

- $E(f > a) = (E(f \leq a))^c$
- $E(f \leq a) = \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} E\left(f < a + \frac{1}{n}\right)$

Определение. Измеримая функция

$(X, \mathcal{a}, \mu)$ — пространство с мерой. Возьмем $f : E \subset X \to \overline{\mathbb{R}}$, $E \in \mathcal{a}$. Тогда f — **измерима** на E, если

$$\forall a \in \mathbb{R} : \ E(f < a) \in \mathcal{a}$$

(аналогично для еще 3х случаев)

Замечание: Если f измеримо на X говорят, что X просто **измеримо**. Если $X = \mathbb{R}^m$, $\mathcal{a} = \mathcal{m}^m$, то говорят, что X **измеримо по Лебегу**

Свойства:

1. f — измерима $\Rightarrow \forall a \in \mathbb{R} : \ E(f = a) = E(f \geq a) \cap E(f \leq a)$ — измеримо
2. f — измерима $\Rightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R} : \ \alpha f$ — измерима
3. f — измерима на $E_k \Rightarrow f$ — измерима на $E = \bigcup E_k$
4. f — измерима на E, $E' \subset E$, $E' \in \mathcal{a} \Rightarrow$ измерима на E'
5. $f \neq 0$ на E, измерима $\Rightarrow \frac{1}{f}$ — измерима
6. $f \geq 0, \ \alpha > 0$ — измерима $\Rightarrow f^\alpha$ — измерима

Теорема. Об измеримости пределов и супремумов.
f_n — измеримые функции на X. Тогда:
1. $\sup f_n, \ \inf f_n$ — измеримы.
2. $\overline{\lim} f_n, \ \underline{\lim} f_n$ — измеримы.
3. Если $\forall x \quad \exists \lim\limits_{n\to+\infty}(f_n(x)) = f(x)$, то f — измерима.

Доказательство:
1) Пусть $g(x) := \sup f_n(x)$
Докажем, что

$$X(g > a) = \bigcup_n X(f_n > a)$$

Если это верно, то справа стоит счетное объединение измеримых множеств $\Rightarrow$ оно измеримо

Чтобы это показать, докажем включение в обе стороны.

Покажем, что

$$X(g > a) \subset \bigcup_n X(f_n > a)$$

Рассмотрим какой-нибудь $x \in X(g > a)$. По определению множества $X(g > a): \ g(x) > a \Rightarrow$ $\sup f_n(x) = g(x) > a$. Тогда по техническому описанию $\sup: \ \exists n: f_n(x) > a$. Значит x лежит в правой части тоже.

Покажем, что

$$X(g > a) \supset \bigcup_n X(f_n > a)$$

Рассмотрим какой-нибудь $x \in \bigcup_n X(f_n > a)$. Это значит, что $\exists n: \ x \in X(f_n > a)$.

По определению этого множества $f_n(x) > a \Rightarrow g(x) = \sup f_n(x) > a$

2) Распишем верхни предел по определению (для нижнего все будет аналогчино)
$\sphericalangle \ s_n := \sup(f_n(x), f_{n+1}(x), \ldots)$
Заметим, что по предыдущему пункту s_n — измерим (т.к. она sup измеримых)

$\overline{\lim} f_n(x) = \inf_n(s_n)$
Аналогично $\overline{\lim} f_n(x)$ — измерима, т.к. s_n измеримы

3) Очевидно: так как если $\exists \lim \Rightarrow \overline{\lim} = \lim = \underline{\lim}$

Q.E.D.

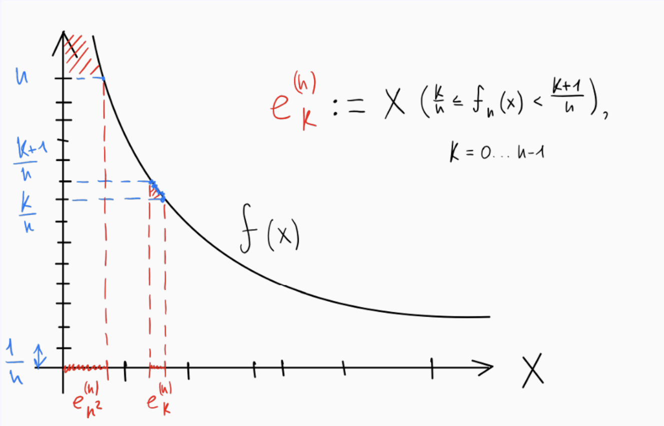
Следствие. f - измеримо $\Rightarrow |f|, f^+, f^-$ - измеримы

Теорема. Характеризация измеримых функций с помощью ступенчатых

$f: X \to \overline{\mathbb{R}}$, $f \geq 0$, f — измеримо. Тогда $\exists f_n$ — ступенчатые функции:

1. $0 \leq f_n \leq f$
2. $\forall x: \ \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$

Доказательство:



Выберем $n \in \mathbb{N}$ и нарежем ось «y» сначала на n отрезков длины 1, а потом каждый из них на отрезки длины $\frac{1}{n}$. И введем следующие обозначения:

$$e_k^{(n)} := X\left(\frac{k}{n} \le f < \frac{k+1}{n}\right),\ k = 0, 1, \dots, n^2 - 1$$

$$e_{n^2}^{(n)} = X(f \ge n)$$

Заметим, что X разбилось на $n^2 + 1$ дизъюнктных кусков: $X = \bigsqcup_k e_k^{(n)}$.

<u>Замечание:</u> Концептуально функция не обязательно убывающая, мы просто делим на куски и возможно, что $e_k^{(n)}$ будут не непрерывны, как на рисунке.

Построим теперь ступенчатую функцию g_n :

$$0 \le g_n := \sum_{k=0}^{n^2} \frac{k}{n} \cdot \chi_{e_k^{(n)}} \le f$$

Левое неравенство очевидно, т.к. каждое из слагаемых не меньше 0
Правое неравенство следует из того, что на $e_k^{(n)}$ значение функции $f \ge \frac{k}{n}$, а в сумме мы рассматриваем функцию, у которой на $e_k^{(n)}$ значение в точности равно $\frac{k}{n}$. Неравенство становится очевидным.

Найдем предельную функцию:

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = f(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{если } f(x) = +\infty, \left(\text{т.к. } \forall n:\ x \in e_{n^2}^{(n)} \Rightarrow g_n(x) = n\right) \\ f(x), & \text{если } f(x) < +\infty, \left(\text{т.к. НСНМ } n > f(x)\ x \in e_k^{(n)} \overset{(\star)}{\Rightarrow} |f(x) - g_n(x)| < \frac{1}{n}\right) \end{cases}$$

$(\star)$: Т.к. $n > f(x)$, то $k < n^2$, а по определению $e_k^{(n)}$ значения на этом множестве g_n отличаются от f не более, чем на $\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n} = \frac{1}{n}$.

Теперь определим f_n так, чтобы они были монотонными:

$$f_n(x) := \max(g_1, g_2, \dots, g_n)$$

Очевидно, что $f_n = \max(g_1, \dots, g_n)$, $0 \le f_n \le f_{n+1} \le f$ и они ступенчатые.

Q.E.D.

Todo: сверьте следствия

Следствие 1:

$f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — измеримая. Тогда $\exists f_n$ — ступенчатые, что:
1. $\forall x\ \forall n:\ |f_n| \leq |f|$
2. $\forall x:\ \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$

Доказательство:

Очевидно, что f^+, f^- — измеримы, и при этом $f^+, f^- \geq 0$. Тогда по теореме:
1. $\exists h_n$ — ступ.: $h_n \uparrow,\quad 0 \leq h_n \leq f^+,\quad \lim h_n = f^+$
2. $\exists g_n$ — ступ.: $g_n \uparrow,\quad 0 \leq g_n \leq f^-,\quad \lim g_n = f^-$

По свойству ступенчатых функций $h_n - g_n$ — тоже ступенчатая. И при этом: $h_n - g_n \to f^+ - f^- = f$
Тогда $\sphericalangle\ f_n := h_n - g_n$ и докажем что они подходят.

Второе условие выполнено за счет предпоследней строчки

Докажем первое условие, по определению срезок:

$$\forall x:\ f^+(x) = 0 \text{ или } f^-(x) = 0$$

Поэтому

$$\forall x\ \forall n:\ |f_n| = |h_n(x) - g_n(x)| = h_n(x) \text{ или } g_n(x)$$

И при этом

$$h_n(x) \leq f^+(x) \leq |f| \text{ и } g_n(x) \leq f^-(x) \leq |f|$$

Получается, что $|f_n| < |f|$ — ровно то, что надо

Q.E.D.

Следствие 2:
f, g — измеримы. Тогда fg — тоже измеримо

Доказательство:

Рассмотрим $f_n \to f,\ g_n \to g$ — ступенчатые из нашей теоремы. При этом $f_n,\ g_n$ — конечные (т.к. сутпенчатые). Тогда по свойству поточечной сходимости:

$$f_n g_n \to fg$$

(будем считать, что $0 \cdot \pm\infty = 0$)

Q.E.D.

Следствие 3:
f, g — измеримы. Считаем, что $\nexists x\ f(x) = \pm\infty,\ g(x) = \mp\infty$. Тогда $f + g$ — измеримо

Доказательство:

$\exists f_n,\ g_n$ — ступенчатые из нашей теоремы. Тогда по свойству поточечной сходимости:

$$f_n + g_n \to f + g$$

Q.E.D.

3.2. Преобразование меры Ω при сдвигах и линейных отображениях

Лемма о сохранении измеримости при непрерывном отображении .

$T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — непрерывно, $\forall E \in \mathcal{M}^m : \lambda_m E = 0$ выполняется: $\lambda T(E) = 0$. Тогда:

$$\forall A \in \mathcal{M}^m \quad : TA \in \mathcal{M}^n$$

Доказательство:

Будем брать наше оставшееся множество и по регулярности меры лебега брать $F_{e,n}$. Будем обозначать их просто замкнутое F_n внутри него и уменьшать наше ост. множество. Заметим, что тогда получится:

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \cup \mathrm{C},$$

F_n — компакт, $\lambda C = 0$.

$$TA = \bigcup_{n=1}^{\infty} T(F_n) \cup T(\mathrm{C})$$

$T\left(F_j\right)$ — компакт (как образ компакта), $\lambda T(\mathrm{C}) = 0 \Rightarrow TA$ — измеримо.

Q.E.D.

Теорема о сохранении измеримости при гладком отображении.

$O \subset \mathbb{R}^m$ - открытая. $\Phi : O \to \mathbb{R}^m$, $\Phi \in C^1$

Тогда $\forall A \subset O$ - измеримых по Лебегу $\Phi(A)$ тоже измеримо по Лебегу

Доказательство:

Φ - непрерывно. Откуда достаточно проверить, что $\lambda A = 0 \Rightarrow \lambda\Phi(A) = 0$. Тогда сработает предыдущая лемма и мы победим.

По лемме о структуре открытых множеств:

$$\lambda E = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \underset{\text{кубы}}{(Q_k)} : A \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} Q_k : \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda Q_k < \varepsilon$$

Рассмотрим два случая:

1. Пусть $A \subset \underbrace{\overline{P}}_{\substack{\text{замкн.} \\ \text{пар-ед}}} \subset O$. Т.к. $\overline{P}$ — компакт, а Φ' — непрерывно, то она достигает своего максимума:

$$L := \max_{x \in \overline{P}} \|\Phi'(x)\|$$

Тогда по теореме Лагранжа:

$$\forall x, y \in \overline{P} : \ |\Phi(x) - \Phi(y)| \leq L \cdot |x - y|$$

Отсюда следует следующие включение для образа шара:

$$\Phi(B(x_0, r)) \subset B(\Phi(x_0), Lr)$$

Покроем наше начальное множество кубами (по лемме так можно), а затем каждый куб поместим в шар такого радиуса, чтобы он лежал в нем целиком

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty} Q(x_i, r_i) \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty} B(x_i, r_i\sqrt{m}) \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty} Q(x_i, r_i\sqrt{m})$$

Также по лемме о стр. открытых множеств нам известно, что :

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \lambda Q(x_i, r_i) \le \varepsilon \Rightarrow \sum_{i=1}^{+\infty} Q(x_i, r_i\sqrt{m}) \le \varepsilon \cdot \sqrt{m}^m$$

Теперь посмотрим, что происходит с образом:

$$\Phi(A) \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty} \Phi(B(x_i, r_i\sqrt{m})) \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty} B(\Phi(x_i), Lr_i\sqrt{m}) \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty} Q(\Phi(x_i), Lr_i\sqrt{m})$$

По счетной полуаддитивности:

$$\mu\Phi(A) \le \sum_{i=1}^{+\infty} \mu Q(\Phi(x_i), Lr_i\sqrt{m}) = L^m \sum_{i=1}^{+\infty} \mu Q(\Phi(x_i), r_i\sqrt{m}) \le L^m \cdot \varepsilon \cdot \sqrt{m}^m$$

Т.к. $L^m \cdot \sqrt{m}^m$ — контанта, то можем на нее забить и получить, что

$$\mu\Phi(A) < \varepsilon \Rightarrow \mu\Phi(A) = 0$$

Идея: мы берем искомое множество, берем покрытие его шариками. Шарики перекидываем в прообраз, их ограничиваем сверху шариками, а их параллелепипедами, чтобы оценить меру.

2. Общий случай, то есть $A \subset O$

$O = \bigsqcup Q_i$ — где, Q_i — кубические ячейки (мы так можем сделать по лемме о структуре (смысле жизни) открытых множеств)

Тогда $\overline{Q_i} \in O$, а значит работает пункт 1:

$$\left.\begin{matrix} A = \bigsqcup (A \cap Q_i) \\ \lambda(A \cap Q_i) = 0 \end{matrix}\right\} \overset{\text{по пункту 1.}}{\Rightarrow} \lambda\Phi(A \cap Q_i) = 0 \Rightarrow \Phi A = \bigcup \Phi(A \cap Q_i) \Rightarrow \lambda\Phi(A) = 0$$

Q.E.D.

<u>Теорема о мерах, инвариантных относительно сдвигов.</u>

μ — мера на $\mathfrak{M}^m$

1. Пусть μ — инвариантна, относительно сдвигов, т.е:

$$\forall A \in \mathfrak{M}^m \ \forall v \in \mathbb{R}^m \quad \mu(A) = \mu(A + v)$$

2. Для любого ограниченного $A \in \mathfrak{M}^m$: $\mu(A) < +\infty$

Тогда

$$\exists k \in [0, +\infty] \quad \mu = k \cdot \lambda \quad (\Leftrightarrow \forall A \in \mathfrak{M}^m : \ \mu A = k \cdot \lambda A)$$

<u>Лемма</u>

$(X, \mathcal{A}, \_), (X', \mathcal{A}', \nu')$ — два пространства с мерой. $T : X \to X'$ — биекция. Тогда

$$\nu := \nu' \circ T, \quad (\nu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}) \text{ — мера}$$

Доказательство:

Проверим счетную аддитивность $A = \bigsqcup A_k$

Тогда должно быть:

$$\nu A = \nu'(TA) = \nu'\left(T\left(\bigsqcup A_k\right)\right) = \nu'\left(\bigsqcup TA_k\right) = \sum \nu'(TA_k) = \sum \nu A_k$$

Получается счетная аддитивность есть, значит ν — мера

Q.E.D.

Теорема. (Инвариантность относительно ортогонального преобразования)

$T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ - линейное отображение, ортогонально. Тогда:

$$\forall A \in \mathfrak{m}^m : T(A) \in \mathfrak{m}^m \quad \text{и} \quad \lambda A = \lambda T(A)$$

Доказательство:

1. $T(A) \in \mathfrak{m}^m$ по теореме 1, так как T - гладкая функция.
2. У нас сохранение меры $\mu A = \lambda(T(A))$, так как T биективно (? это вроде как следует из того, что оно ортогонально, но я чет сомневаюсь) При этом μ инвариантна относительно сдвигов:

$$\mu(A + \nu) = \lambda(T(A + \nu)) = \lambda(T(A) + T\nu) + \lambda(T(A)) = \mu A$$

Заметим также, что T шар с центром в 0 переводит в шар с центром в 0 того же радиуса

$$T(B(0, r)) = B(0, r)$$

Откуда $\lambda T(B(0, r)) = \mu B(0, r)$. Уже откуда получаем, что $\mu < +\infty$ на любом ограниченном. Откуда выполнена теорема о мерах, инвариантных относительно сдвигов и в данном случае $k = 1$.

Q.E.D.

Теорема о преобразовании меры Лебега при линейном отображении.

$V \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$

Тогда

$$\forall E \in \mathcal{M}^m \quad V(E) \in \mathcal{M}^m \quad \text{и} \quad \lambda(V(E)) = |\det V| \cdot \lambda E$$

Доказательство:

Рассмотрим два случая:

1. $\det V = 0 \Rightarrow \dim(\mathrm{Im}\, V) \le m - 1$. А тогда $\lambda(Im\, V) = 0 \Rightarrow \lambda(VE) = 0$. Получили, что хотели
2. $\det V \neq 0$ Пусть $\mu E := \lambda V(E)$ — мера инвариантная относительно сдвигов $\Rightarrow \exists k : \mu = k\lambda$
   Найдем k. Пусть $E :=$ единичный куб на векторах g_i. $V(g_i) = s_i h_i$ (по предыдущей лемме), тогда $V(E)$ — параллелепипед, порожденный векторами $s_i h_i$. Посчитаем:

$$\mu E = \lambda V(E) = (s_1 ... s_m) \quad \lambda E = 1$$

   Получили, что $k = |\det V|$

Q.E.D.

3.3. Сходимость по мере и сходимость почти везде

Определение. Множество полной меры
E — **множество полной меры** в $X \Rightarrow \mu(X \setminus E) = 0$

Теорема. Измеримость функции непрерывной на множестве полной меры
$E \subset \mathbb{R}^2, e \subset E, \lambda_{m(e)} = 0$ $f : E \to \mathbb{R}$ непрерывны на $E' = E \setminus e$.

Тогда f измеримая.

Доказательство:
$E'(f < a) = H$ - открытое подмножество в E' по топологическому определению

$\exists G$ - открытое в $\mathbb{R}^m$ такое что $H = G \cap E'$

$$E(f < a) = E'(f < a) \cup e(f < a)$$

$E'(f < a)$ — измеримое, $e(f < a)$ - подмножество e, имеющего $\lambda e = 0$.

Q.E.D.

Определение. Свойство, выполняющееся почти везде
$(X, \mathcal{A}, \mu)$, $E \in \mathcal{A}$, $w(x)$ — высказывание, зависящее от x, $w(x)$ выполняется (истинно) **почти везде**, если

$$\mu e = 0, \text{ где } e = \{x \in E \mid \ w(x) - \text{ложно}\}$$

Свойства:

Пусть $\forall n$ задано высказывание $\omega_n(x)$ и оно выполняющееся почти везде.
Тогда мегаутверждение $w(x) := w_1(x) \wedge w_2(x) \wedge \ldots$ — выполняющееся почти везде.

Определение. Сходимость почти везде
$f, f_n : E \to \overline{\mathbb{R}}$, $f_n \to f$ **почти везде**, если:

$$\mu\{x \in E \mid \ f_n(x) \nrightarrow f(x)\} = 0$$

Свойства:
1. $f_n, f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, μ — полная, $f_n \to f$ почти везде на X и $\forall n$ f_n — измеримая, тогда f — измерима
2. μ — полная мера, f — измерима, g — еще одна функция и $f = g$ почти везде, тогда g — измерима

Определение. Сходимость по мере
$(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мерой, $f_n, f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — измеримы, почти везде конечны.

Тогда $f_n \to f$ **по мере** μ (при $n \to +\infty$)

$$f_n \underset{\mu}{\Longrightarrow} f : \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \mu X(|f_n - f| \geq \varepsilon) \to 0$$

Теорема Лебега о сходимости почти везде и сходимости по мере.
$f_n, f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — измеримы, почти всюду конечны, $f_n \to f$ — почти всюду, $\mu X < +\infty$

Тогда:

$$f_n \underset{\mu}{\Longrightarrow} f$$

Доказательство:

Подменим f_n, f — на множествах меры 0, так чтобы $f_n \to f$ всюду и f, f_n — конечны

- Рассмотрим частный случай:
  $f_n \to 0 \quad \forall x$ последовательность $f_n(x)$ — монотонна по n, и тогда $f \equiv 0$:

$$X(|f_n - f| \geq \varepsilon) = X(|f_n| \geq \varepsilon) \supset X(|f_{n+1}| \geq \varepsilon) \supset \dots$$

$$\bigcap_n X(|f_n| \geq \varepsilon) = \varnothing \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\mu X(|f_n| \geq \varepsilon) \to 0}_{\text{по непрерывности сверху}}$$

- Общий случай:
  $f_n \to f$
  $\varphi_n(x) := \sup_{k \geq n} |f_k(x) - f(x)|$

  Заметим, что: $\forall x: \ \varphi_n(x) \to 0$, причем $\varphi_n \geq 0$ и монотонна, тогда по частному случаю:

$$X(|f_n - f| \geq \varepsilon) \subset X(\varphi_n \geq \varepsilon)$$

$$\mu X(|f_n - f| \geq \varepsilon) \leq \mu X(\varphi_n \geq \varepsilon) \to 0$$

Q.E.D.

Теорема Рисса.

$(X, \mathcal{A}, \mu)$, $f_n, f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — измеримы, почти всюду конечны, $f_n \underset{\mu}{\Longrightarrow} f$ - сходимость по мере

Тогда $\exists n_k$ - строго возрастающая последовательность, по которой $f_{n_k} \to f$ почти везде при $k \to \infty$

Доказательство:

По определению сходимости по мере:

$$\forall k: \ \mu X\left(|f_n - f| \geq \frac{1}{k}\right) \to 0$$

Тогда возьмем n_k так, чтобы:

$$\forall n > n_k : \mu X\left(|f_n - f| \geq \frac{1}{k}\right) < \frac{1}{2^k}$$

Очевидно, что такие n_k существуют из-за предела. Будем считать, что $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$

Проверим, что $f_{n_k} \to f$ почти всюду. Введем вот такие множества:

$$E_k = \bigcup_{j=k}^{+\infty} X\left(\left|f_{n_j} - f\right| \geq \frac{1}{j}\right)$$

$$E_1 \supset E_2 \supset \dots$$

$$\begin{cases} E_0 = \bigcap\limits_{k=1}^{+\infty} E_k \\ \mu E_k \leq \sum\limits_{j=k}^{+\infty} \mu X\left(\left|f_{n_j} - f\right| \geq \frac{1}{j}\right) \leq \sum \frac{1}{2^i} = \frac{2}{2^k} \to 0 \end{cases}$$

Откуда по непрерывности сверху $\mu E_0 = 0$

Проверим, что для всех x не в E_0 $f_{n_k}(x) \to f(x)$:

$\exists n, x \notin E_n$, т.е. при

$$\forall j \geq n : \left| f_{n_j}(x) - f(x) \right| < \frac{1}{j}$$

А это определение сходимости.

Q.E.D.

3.4. Интеграл Лебега и все с ним связанное.

У нас есть $(X, \mathcal{A}, \mu)$

Определение. Интеграл ступенчатой функции (Альфа версия)

$f = \sum \lambda_k \chi_{E_k}, f \geq 0, X = \bigsqcup_{\text{кон}} E_k$

Полагаем:

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu := \sum \underbrace{\lambda_k \mu E_k}_{0 \cdot \infty = 0} \in [0, +\infty]$$

Свойства

1. Интеграл не зависит от разложения

   $f = \sum \tilde{\lambda}_j \chi_{F_j}$

   Тогда $f = \sum\limits_{k,j} \widetilde{\lambda}_k \chi_{E_k \cap F_j}$

   $\int_X f = \sum\limits_{k,j} \lambda_k \mu(E_k \cap F_j)$
2. $f \leq g \Rightarrow \int_X f \leq \int_X g$

Определение. Интеграл неотрицательной измеримой функции (Бета версия)

f - измерима, $f \geq 0$

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu := \sup_{0 \leq \underbrace{g}_{\text{ступ.}} \leq f} \left(\int_X g \, \mathrm{d}\mu \right)$$

Замечания

1. Если f - ступ., то в силу свойства 2.
2. $f \geq 0 \Rightarrow 0 \leq \int_X f \, \mathrm{d}\mu \leq +\infty$
3. g - ступ., $g \leq f \Rightarrow \int_X g \leq \int_X f$

Определение. Суммируемая функция

f — суммируемая функция, если $\displaystyle\int_X f^+, \int_X f^-$ — конечны (положительная и отрицательная срезка)

Определение. Интеграл суммируемой функции

f - измерима и суммируемая функция, $f^+ = \max(f, 0)$, $f^- = \max(-f, 0)$. Тогда:

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu := \int_X f^+ \, \mathrm{d}\mu - \int_X f^- \, \mathrm{d}\mu$$

Определение. Интеграл по подмножеству

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ - пространство с мерой, $E \in \mathcal{A}$, f - измерима на X

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu := \int_X f \chi_E \, \mathrm{d}\mu$$

Здесь f — суммируема на E, если $\int_E f^+, \int_E f^-$ конечны

Замечания

α - определение: f - ступ., $\int_E f = \sum \lambda_k \mu(E_k \cap E)$

β - определение: $\int_E f = \sup_{0 \leq \underbrace{g}_{\text{ступ., на E}} \leq f} \left(\int_E g \, \mathrm{d}\mu \right)$

Свойства

1. Монотонность (по функции):

   f, g — суммируемы, $f \leq g$. Тогда $\int_X f \leq \int_X g$

   Доказательство
   1. $f, g \geq 0$ - очевидно
   2. f, g - любого знака - TODO просто расписать неравенства

   ### Замечание
   f - сумм. $\Leftrightarrow \int |f|$ - конечен
   - $\Leftarrow$: $f^+, f^- \leq |f|$
   - $\Rightarrow$: $|f| = f^+ + f^-$ - интегрируем, но пока не умеем :(

2. $\int_E 1 \, \mathrm{d}\mu = \mu E$, $\int_E 0 \, \mathrm{d}\mu = 0$
3. $\mu E = 0$, f - изм. $\Rightarrow \int_E f \, \mathrm{d}\mu = 0$
4. $\int_E (-f) \, \mathrm{d}\mu = -\int_E d \, \mathrm{d}\mu$

   $\alpha > 0$, $\int_E \alpha f \, \mathrm{d}\mu = \alpha \int_E f \, \mathrm{d}\mu$
5. $\int_E f \, \mathrm{d}\mu$ - существует $\Rightarrow \left| \int_E f \, \mathrm{d}\mu \right| \leq \int_E |f| \, \mathrm{d}\mu$

   Доказательство: $-|f| \leq f \leq |f|$
6. f - изм. на E, $\mu E < +\infty$, $a \leq f \leq b$

   Тогда $a\mu E \leq \int_E f \, \mathrm{d}\mu \leq b\mu E$

   Следствие: $\mu E < +\infty$, f - изм., огр. $\Rightarrow f$ - сумм.
7. f - сумм. на $E \Rightarrow f$ - почти везде конечен на E

   Суть доказательства: если f больше нуля и интеграл по E конечен и равен супремуму интегралов ступенчатых функций на E. Если мера множества бесконечности f - $\tilde{E}$ больше нуля, то $g := n\chi_{\tilde{E}}$

Лемма

$A = \bigsqcup A_k$ — измеримо, $g \geq 0$ — ступенчатая. Тогда:

$$\int_A g \, \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} g \, \mathrm{d}\mu$$

Доказательство:

Т.к. g — ступенчата, предствим ее в виде $g = \sum\limits_{\text{кон}} \lambda_i \chi_{E_i}$, где E_i — допустимое разбиение

Тогда найдем интеграл:

$$\int_A g = \sum_{i,\ \text{кон.}} \lambda_i \mu(E_i \cap A) = \sum_{i,\ \text{кон.}} \lambda_i \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(E_i \cap A_k) =$$

$$= \sum_i \sum_k \lambda_i \mu(E_i \cap A_k) \overset{(\star)}{=} \sum_k \sum_i \lambda_i \mu(E_i \cap A_k) = \sum_k \int_{A_k} g \, \mathrm{d}\mu$$

$(\star)$: в прошлом семестре обсуждалось, что в рядах можно переставлять слагаемые, если все слагаемые неотрицательные, а у нас именно такие

Q.E.D.

Счетная аддитивность интеграла (по множеству).

$A = \bigsqcup A_k$ — измеримо, $f \geq 0 : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — измерима на A: Тогда:

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f \, \mathrm{d}\mu$$

Доказательство:

Давайте докажем два неравенства $(\leq), (\geq)$.

$(\leq)$:

$\sphericalangle$ ступенчатую функцию g: $0 \leq g \leq f$:

$$\int_A g = \sum \int_{A_i} g \leq \sum \int_{A_i} f$$

По определению интеграла для измеримой функции:

$$\int_A f = \sup_g \int_A g \leq \sum \int_{A_i} f$$

$(\geq)$:

1. $\sqsupset A = A_1 \sqcup A_2$

   Возьмем ступенчатые функции g_1, g_2 с общим разбиением E_k :

   $$0 \leq g_1 \leq f \cdot \chi_{A_1} \quad 0 \leq g_2 \leq f \cdot \chi_{A_2}$$

   Т.е. функция g_1 тождественный 0 вне A_1, а на A_1 : $g_1 \leq f$. Аналогично для g_2

   Найдем их явное представление:

   $$g_1 = \sum \lambda_i' \chi_{E_i} \quad g_2 = \sum \lambda_i'' \chi_{E_i}$$

   Тогда очевидно, что когда мы их сложим, они будут меньше f на всем A (т.к. A_1, A_2 — дизъ. то ровно одна из g_1, g_2 на ней $\neq 0$, а каждая из них по отдельности меньше f)

   $$0 \leq g_1 + g_2 \leq f \cdot \chi_A$$

   Проинтегрируем все это дело:

   $$\int_{A_1} g_1 + \int_{A_2} g_2 \overset{(\star)}{=} \int_A (g_1 + g_2) \leq \int_A f$$

   $(\star)$: равенство станет очевидным, если написать интеграл по определению

   Теперь перейдем к sup по g_1 :

   $$\int_{A_1} f + \int_{A_2} g_2 \leq \int_A f$$

   И перейдем к sup по g_2 :

   $$\int_{A_1} f + \int_{A_2} f \leq \int_A f$$

2. $\sqsupset A = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i$ — доказывается индукцией по 1-му пункту

3. $A = \bigsqcup_{i=1}^{+\infty} A_i = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \ldots \sqcup A_n \sqcup B_n$, где $B_n = \bigsqcup_{i=n+1}^{+\infty} A_i$

$$\int_A f = \sum_{i=1}^{n} \int_{A_i} f + \int_{B_n} f \geq \sum_{i=1}^{n} \int_{A_i} f$$

Делаем предельный переход при $n \to +\infty$ и получаем нужное нам неравенство

Q.E.D.

Теорема. Леви
$(X, \mathcal{A}, \mu)$, f_n — измеримо (на X),$\forall n : 0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ почти везде
$f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ — почти везде определена. Тогда:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu = \int_X f \, \mathrm{d}\mu$$

Доказательство:
f — измеримо по т. об измеримости $\sup$, $\lim$.

$(\leq)$:

$$f_n \leq f \Rightarrow \int_X f_n \leq \int_X f \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \leq \int_X f$$

$(\geq)$:
Заметим, что нам достаточно доказать, что

$$\forall \text{ ступ. } 0 \leq g \leq f : \quad \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \geq \int_X g$$

Этого нам хватит, т.к. мы сделаем справа переход к $\sup$ по g и получим наше неравенсвто

И еще трюк: нам достаточно проверить, что

$$\forall c \in (0,1) \quad \lim \int_X f_n \geq c \cdot \int_X g$$

Чтобы, проверив это свойство, понять то что мы хотим доказать, то надо просто перейти к $\sup$ по c

Теперь начнем это доказывать:

$$E_n = X(f_n \geq cg) \quad \bigcup E_n = X,$$

Сделаем оговорку, что на множествах меры 0, мы подменим наши функции на нулевые (уже так делали). Интеграл и предел это не почувствует, а значит мы не ничего не сломаем, но при этом получим такое сильное условие.

$$\ldots \subset E_n \subset E_{n+1} \subset \ldots$$

$$\int_X f_n \geq \int_{E_n} f_n \geq c \cdot \int_{E_n} g,$$

перейдем к пределу (так как интегралы возрастают):

$$\lim \int_X f_n \geq \underbrace{\lim c \int_{E_n} g = c \cdot \int_X g}_{\substack{\text{непрерывность снизу} \\ v : E \mapsto \int_E g}}$$

Q.E.D.

<u>Теорема.</u> Линейность интеграла Лебега

$f, g \geq 0$ — измеримы на E

Тогда:

$$\int_E f + g = \int_E f + \int_E g$$

Доказательство:

1. f, g — ступенчатые, то есть $f = \sum \alpha_k \chi_{E_k}$, $g = \sum \beta_k \chi_{E_k}$, где E_k — общее допустимое разбиение

$$\int_E f + g = \sum (\alpha_k + \beta_k)\mu(E_k \cap E) = \sum \alpha_k \mu(E_k \cap E) + \sum \beta_k \mu(E_k \cap E) = \int_E f + \int_E g$$

2. f, g — измеримы
   $\exists$ ступ. $f_n : 0 \leq f_n \leq f_{n+1} \quad f_n \to f$
   $\exists$ ступ. $g_n : 0 \leq g_n \leq g_{n+1} \quad g_n \to g$

$$\int_E f + g \xleftarrow[n \to +\infty]{\text{т. Леви}} \int_E f_n + g_n \overset{}{\underset{\text{1й пункт}}{=\!=\!=}} \int_E f_n + \int_E g_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\text{т. Леви}} \int_E f + \int_E g$$

Q.E.D.

<u>Теорема об интегрировании положительных рядов.</u>

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мерой

$u_n \geq 0 : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — измеримо на E

Тогда:

$$\int_E \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) \mathrm{d}\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E u_n(x) \, \mathrm{d}\mu(x)$$

Доказательство:

$S_n(x) = u_1(x) + \ldots + u_n(x)$ — эта последовательность монотонно неубывающая, сделаем предельный переход:

$$S_n \to S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

тогда, по теореме Леви:

$$\int_E S_n \to \int_E S$$

Распишем левую часть по линейности:

$$\int_E S_n = \sum_{k=1}^n \int_E u_k$$

Ну а тогда:

$$\int_E S \leftarrow \int_E S_n = \sum_{k=1}^n \int_E u_k \to \sum_{n=1}^\infty \int_E u_n$$

$$\int_E \sum_{n=1}^\infty u_n = \sum_{n=1}^\infty \int_E u_n$$

Q.E.D.

Пример:
(x_n) — вещественная последовательность
$\sum a_n$ — абс. сходящийся числовой ряд
Тогда:

$$\sum \frac{a_n}{\sqrt{|x - x_n|}} \text{ абс. сходится при п.в. } x \in \mathbb{R}$$

Доказательство:

Нам достаточно доказать эту сходимость п.в. на $\forall A : [-A, A]$
По следствию:

$$\int_{[-A,A]} \frac{|a_n|}{\sqrt{|x - x_n|}} \, d\lambda_m \underset{\substack{\text{этот переход}\\\text{будет док. позже}}}{=\!=\!=} |a_n| \int_{-A}^{A} \frac{dx}{\sqrt{|x - x_n|}} \overset{(\star)}{\leq}$$
$$\overset{(\star)}{\leq} |a_n| \int_{-A-x_n}^{A-x_n} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} \overset{(\star\star)}{\leq} |a_n| \int_{-A}^{A} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} = 2 \cdot |a_n| \int_0^A \frac{dx}{\sqrt{|x|}} = 4\sqrt{A}|a_n|$$

$(\star)$: Замена переменной $x \mapsto x - x_n$
$(\star\star)$: Это становится очевидно, если построить график

Так как $|a_n|$ — сходится, то по следствию предыдущей теоремы, исходный ряд абсолютно сходится

Q.E.D.

Хотим подумать над тем как связана сходимость по мере и интегральная сходимость.

В правую сторону сработает, а вот в левую нет.

Теорема Лебега о мажорированной сходимости по мере.
$(X, \mathfrak{a}, \mu), f_n, f$ — изм., п.в. кон $f_n \underset{\mu}{\Rightarrow} f$

Пусть существует $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$:
1. $\forall n : |f_n(x)| \leq g(x)$ п.в
2. g - суммируема

Тогда $\int_X |f_n - f| \, d\mu \to 0$ и уж тем более $\int_X f_n \, d\mu \to \int_X f \, d\mu$

Доказательство:
Упростим жизнь
1. Пусть мера конечная, то есть $\mu X < +\infty$

Зафиксируем $\varepsilon > 0 : X_n = X(|f_n - f| \geq \varepsilon)$. Мы знаем, что $\mu X_n \to 0$

$$\int_X |f_n - f| \, d\mu = \int_{X_n} + \int_{X_n^c} \leq \int_{X_n} 2g d\mu + \int_{X_n^c} \varepsilon d\mu$$

Расширим немного наш диапазон:

$$\int_{X_n} 2g d\mu + \int_{X_n^c} \varepsilon d\mu < \int_{X_n} 2g d\mu + \int_X \varepsilon d\mu$$

НСНМ по абсолютной непрерывности интеграла:

$$\int_{X_n} 2g d\mu + \int_X \varepsilon d\mu \underset{\text{НСНМ}}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon \mu X = \varepsilon \cdot \text{const}$$

2. Докажем теперь для случая $\mu X = +\infty$

Загадка: Пусть g - суммируемое. $g \geq 0 : \forall \varepsilon > 0 : \exists A \subset X : \mu A < +\infty : \int_{X \setminus A} g < \varepsilon$

Ну давайте решим загадку:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \text{ ступ. } h : 0 \leq h \leq g \text{ и тогда для нее выполнено: } \int_X h > \int g_X - \varepsilon$$

Возьмем $A = X(h \neq 0)$, тогда:

$$0 \leq \int_{X \setminus A} g \overset{\text{так как h = 0}}{\underset{\text{на этом мн.}}{=}} \int_{X \setminus A} g - h \leq \int_X g - h < \varepsilon$$

Откуда загадка показана. Вернемся к док-ву:

$$\int_X | \; f_n - f \; | \; d\mu = \int_A + \int_{A^c} \leq \int_A |f_n - f| + \int_{A^c} \overset{(\star)}{\underset{\text{НСНМ}}{<}} \varepsilon + 2\varepsilon$$

$(\star)$ в данном случае интеграл по мн-ву A удовлетворяет первому пункту, с помощью него и оценим сверху его как ε

Q.E.D.

<u>Теорема Лебега о мажорированной сходимости по интегралу.</u>
$(X, \mathcal{A}, \mu), f_n, f -, f_n, f : X \to \overline{\mathbb{R}}, f_n \to f$ п.в

Пусть: $\exists g : X \to \overline{\mathbb{R}}$:
1. $\forall n \mid f_n| \leq g$ п.в
2. g - сумм

Тогда $\int_X |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu \to 0$ и уж тем более $\int_X f_n \to \int_X f$

Доказательство:

f_n, f - суммы, как в прошлой теореме. Введем:

$$h_n = \sup(|f_n - f|, |f_{n+1} - f|, \ldots)$$

Заметим, что h_n убывающая и $0 \leq h_n \leq 2g$. Хочу теорему Леви, а для нее нужна возрастающая

КПК 🙂: Хи-хи, сделаем маленькую хитрость

Будем рассматривать $2g - h_n$. Заметим, что они будут возрастать и ≥ 0.А значит можно применить теорему Леви:

$$\int_X 2g - h_n \underset{n\to\infty}{\to} \int_X 2g \Rightarrow \int_X h \to 0 \text{ и! } \int_X |f_n - f| \leq \int_X h$$

Откуда и получили, что нам надо.

Q.E.D.

Теорема Фату.

$(X, \mathcal{A}, \mu)$, $f_n \geq 0$ измеримо $f_n \to f$ п.в и $\exists C > 0 \ \forall n: \quad \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu < C$

Тогда

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu \leq C$$

Доказательство:

$$g_n = \inf(f_n, f_{n+1}, ...)$$

Заметим, что $g_n \leq g_{n+1}$, $g_n \to \underline{\lim} f_n = f$ почти везде

$$\int_X g_n \leq \int_X f_n \leq C$$

$$\int f \underset{\text{по т. Леви}}{\leq} C$$

Q.E.D.

Замечание: $f_n = nK_{[0,\frac{1}{m}]}$, при $n \to \infty$ стремится к нулю. $\int_{\mathbb{R}} f_n = 1$, $\int_{\mathbb{R}} f = 0$

Замечание: Можно ли убрать условие $f_n \geq 0$. Возьмем $h_n = -f_n$ и и проиграли

Следствие: В условии теоремы можно заменить $f_n \to f$ п.в на фразу $f_n \underset{\mu}{\Rightarrow} f$ и теорема будет работать.

Следствие (от которого едет крыша): $f_n \geq 0$ - изм. Тогда: $\int_X (\underline{\lim} f_n) \, \mathrm{d}\mu \leq \underline{\lim} \left(\int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \right)$

Доказательство

Давайте введем g_n — из доказательства теоремы Фату

Выберем (n_k) : $\int_X f_{n_k} \to \underline{\lim} \int_X f_n$, при этом

$$\int_X \underline{\lim} f_n \xleftarrow[\text{т. Леви}]{} \int_X g_{n_k} \leq \int_X f_{n_k} \xrightarrow[\text{из усл. выше}]{} \underline{\lim} \int_X f_n$$

Q.E.D.

4. Функциональные последовательности и ряды

4.1. Равномерная сх-сть посл. функций

Посл-ть функций $\mathcal{N} \to \mathcal{F}$ или $n \to f_n$

Определение. **Поточечная сходимость последовательностей функций**

$f_0, f_n : E \subset X \to \mathbb{R}$

f_n сходится поточечно к f_0 на множестве E, если

$$\forall x \in E : \exists \lim_{n \to +\infty} f_{n(x)} = f_0(x)$$

$$\forall x \in E \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \quad \forall n > N \quad |f_n(x) - f_0(x)| < \varepsilon$$

Определение. **Равномерная сходимость последовательностей функций**

f_n сх-ся к f_0 равномерно на множестве E, если

$$a_n := \sup_{x \in E} |f_n(x) - f_0(x)| \to 0$$

Обозначается $f_n \underset{n \to +\infty}{\rightrightarrows} f_0$

Замечание: из равномерной сходимости следует поточечная.

$\mathcal{F} := \{f : X \to \mathbb{R} - \text{огр}\}$

Тогда $\rho(f_1, f_2) = \sup\limits_{x \in X} |f_1(x) - f_2(x)|$ - это метрика!

Теорема. **Стокс, Зайдель**

$f_n, f_0 : X \to \mathbb{R}, c \in X, f_n$ - непр. в c. $f_n \rightrightarrows f_0$ на X. Тогда f_0 - непр. в c.

Доказательство:

$$|f_0(x) - f_0(c)| \le |f_0(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(c)| + |f_n(c) - f_0(c)|$$

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n > N : \sup_X |f_n(x) - f_0(x)| < \varepsilon$$

Заметим, что тогда правую часть неравенства можно оценить сверху при предельном переходе благодаря вышесказанным неравенствам.

$$|f_0(x) - f(c)| \le \underbrace{|f_0(x) - f_n(x)|}_{(\star)} + \underbrace{|f_n(x) - f_n(c)|}_{(\star\star)} + \underbrace{|f_n(c) - f_0(c)|}_{(\star)} < \varepsilon$$

Так как f_n непрерывна в $c \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists U(c) : \quad \forall x \in U(c) \quad |f_n(x) - f_n(c)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Выполнена $(\star\star)$
Так как $f_n \rightrightarrows f$ на $\quad X \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \quad \forall n > N \quad \forall x \in X \quad |f_0(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Выполнены $(\star)$
Итого мы получили:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists U(c) : \quad \forall x \in U(c) \quad |f_0(x) - f(c)| < \varepsilon$$

Q.E.D.

Следствие: $f_n \rightrightarrows f$ на X, $f_n \in C(X)$. Тогда $f \in C(x)$

Замечание: Теорема верна для случая X - топологическое пространство

Замечание: Для доказательства непрерывности в c мы могли попросить окрестность точки, что $f_n \rightrightarrows f$

Теорема.
X — компакт, $f_1, f_2 \in C(X) : \rho(f_1, f_2) = \max\limits_X |f_1 - f_2|$

Тогда $C(X)$ — полное МП

Доказательство:

$f_n \in C(X)$ - фундаментальная.

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall m, n : \sup_X |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

$$\forall x_0 : \forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall m, n : |f_{n(x_0)} - f_{m(x_0)}| < \varepsilon$$

Последовательность $f_n(x_0)$ - фунд. Откуда $\exists \lim f_n(x_0) = f(x_0)$

В формуле с переделом перейдем m к $+\infty$.

$\forall x_0 : \forall \varepsilon : \exists N : \forall m, n > N : |f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \varepsilon$

Это перейдет в :

$$\forall x_0 : \forall \varepsilon : \exists N : \forall n > N : |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Q.E.D.

Следствие: Критерий Больцано-Коши для расходимости: $\forall \varepsilon > 0 : \exists : \forall$

4.2. Предельный переход под знаком интеграла

$f_n = nx^{n-1}(1 - x^n), x \in [0, 1] : \forall x : \lim f_n(x) = f_0(x) \equiv 0$

$\int_0^1 f_{n(x)} = \frac{1}{2} \neq \int_0^1 f_1(x)$

Теорема.
$f_n \in C([a, b]), f_n \rightrightarrows f$. Тогда:

$$\int_a^b f_n \to \int_a^b f$$

Доказательство:
f - непрерывная на $[a, b]$ по одной из прошлых теорем

$$|\int_a^b f_n - \int_a^b f| \leq \int_a^b |f_n - f| \leq \max(|f_n - f|)(b - a)$$

Ну и все.

Q.E.D.

Следствие: правило Лейбница

$f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$, f, f'_y - непр на $[a, b] \times [c, d]$

$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y)dx, y \in [c, d]$

Тогда Φ - дифф по y на $[c, d]$ и $\Phi'_y = \int_a^b f'_y(x, y)dx$

Правило Лейбница.

$f : X \times \langle c, d\rangle \to \mathbb{R}$

1. $\forall y \in \langle c, d\rangle, x \mapsto f(x, y)$ сумм.
2. $\forall$почти всех $x, \forall y : \exists f'_y(x, y)$
3. f'_y удовлетворяет $L_{\text{loc}}(y_0)$

Тогда:

$$\Phi(y) = \int_X f(x, y) d\mu(x) \text{ дифф в } \ y_0 \quad \Phi'(y_0) = \int_X f'_y(x, y_0) d\mu(x`)$$

Теорема. **О предельном переходе под знаком производной**

$f_n \in C^1(\langle a, b\rangle)$, $f_n \to f_0$ на $\langle a, b\rangle$, $f'_n \rightrightarrows \varphi$ на $\langle a, b\rangle$. Тогда

$$f_0 \in C^1(\langle a, b\rangle) \quad \text{ и } \quad f'_0 = \varphi \text{ на } \langle a, b\rangle$$

То есть:

$$\begin{array}{rcl} f_n & \to & f_0 \\ \frac{d}{dx}\downarrow & & \downarrow \\ f'_n & \rightrightarrows & \varphi \end{array}$$

Доказательство:

$x_0, x_1 \in \langle a, b\rangle, \quad f'_n \rightrightarrows \varphi$ на $[x_0, x_1]$. Тогда $\displaystyle\int_{x_0}^{x_1} f'_n(x)\,\mathrm{d}x \quad \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{x_0}^{x_1} \varphi(x)\,\mathrm{d}x$, тк $f_n(x_1) - f_n(x_0) \longrightarrow f_0(x_1) - f_0(x_0)$

$\displaystyle\int_{x_0}^{x_1} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = f_0(x_1) - f_0(x_0)$ - при всех $x_0, x_1 \in \langle a, b\rangle$ по теореме Барроу. Откуда:

f_0 — первообразная φ; $\quad f'_0 = \varphi$

Q.E.D.

4.3. Расходимость и сходимость функций рядов

Определение. Ряд сходится поточечно

ряд $\sum f_n(x)$ сходится поточечно к сумме $S(x)$, если:

$$\forall x : \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = S(x)$$

Определение. Ряд сходится равномерно

ряд $\sum f_n(x)$ сходится равномерно на E к сумме $S(x)$, если:

$$S_{N(x)} \underset{X \in E}{\rightrightarrows} S(x)$$

Замечание. Если ряд $\sum f_n(x)$ равномерно сходится, то $f_n(x) \rightrightarrows 0$

Теорема. Признак Вейерштрасса

$\sum u_n(x), x \in X$

$\exists c_n$ - вещественная последовательность, что $\forall x \in X : |u_n(x)| \leq c_n$

И пусть $\sum c_n$ сходится. Тогда:

$\sum u_n(x)$ равномерно сходится на X

Доказательство:

Для $x = x_0 : |u_n(x_0)| \leq c_n, \sum c_n$ сходится, откуда $\sum u_n$ (абсолютно) сходится

$\sup_{x \in X} | \sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} u_n(x)| \leq \sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} c_n \to 0$, при $n \to \infty$

Q.E.D.

Критерий Больцано-Коши для расходимости последовательностей.

$\forall \varepsilon : \exists N : \forall n, m > N : \forall x \ |f_n(x) - f_{m(x)}| < \varepsilon$

Теорема 1 (Тосса - кого-то).

$u_n(x) : X -$ м.п $\to \mathbb{R}, x \in X, u_n$ - непрерывна в x_0.

$s(x) = \sum u_n(x)$ - сходится поточечно. Пусть еще $\sum u_n(x)$ - сходится

TODO

Теорема 2.

TODO

Теорема 3.

TODO

Теорема 2 со штрихом.

$u_n \in C(a,b), \sum u_{n(x)}$ - равномерно сходится на $[a,b]$, $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_{n(x)}$. Тогда:

$$\int_a^b S(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b u_{n(x)} dx$$

Доказательство:
Сделать замену $f_n \to S_n$ и посмотреть на прошлую теорему

Q.E.D.

Замечание: По теореме 1 $S(x)$ непрерывна

Теорема 3 со штрихом о дифференцировании ряда по параметру.
$u_n \in C^1(\langle a, b\rangle)$
1. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = S(x)$ - в смысле поточечной сходимости
2. $\sum u'_{n(x)} = \varphi(x)$ в смысле равномерной сходимости на $(\langle a, b\rangle)$

Тогда $S(x) \in C^1(\langle a, b\rangle)$ и $S'(x) = \varphi(x), x \in \langle a, b\rangle$

Доказательство:
Из теоремы 3. $\varphi \to \varphi, f_n \to S_n, f \to S$

Q.E.D.

Теорема 4 со штрихом о почленном предельном переходе в суммах.
$u_{n(x)} : E \subset X - \text{м.п} \to \mathbb{R}$, x_0 - предельная точка E
1. $\exists$ конечный $\lim\limits_{x \to x_0} u_n(x) = a_n$
2. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ равномерно сходится на E

Тогда:
1. $\sum a_n$ сходится
2. $\lim\limits_{x \to x_0} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_{n(x)} = \sum a_n$

Доказательство:
Из теоремы 4. Хаха нет

$S_n^a = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k, S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_n(x)$

Достаточно проверить, что S_n^a - фундаментальная или что выполнено:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n, m = n + p > N : |S_n^a - S_{n+p}^a| < \varepsilon$$

Для этого

$$|S_{n+p}^a - S_n^a| \leq |S_{n+p}^a - S_{n+p}(x)| + |S_{n+p}(x) - S_n(x)| + |S_n(x) - S_n^a|$$

$\forall \varepsilon > 0 : \exists N_1 : \forall n > N_1 : \forall x : |S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$

А теперь надо, чтобы края были меньше $\frac{\varepsilon}{3}$, а это очевидно достигается из того, что $\lim u_n(x) = a_n$

TODO кажется, что то что написано выше очевидно, но кохась зачем-то расписал на доске, стоит ли вставлять это в конспект?

Q.E.D.

Теорема 4.
$f_n : E \subset X \to \mathbb{R}$, x_0 - предельная точка E

1. $f_n(x) \underset{x \to x_0}{\to} A_n$
2. $f_n(x) \underset{n \to +\infty}{\rightrightarrows} S_x$ равномерно на E

Тогда:
1. $\exists \lim\limits_{n \to +\infty} A_n = A \in \mathbb{R}$
2. $S(x) \underset{x \to x_0}{\to} A$

Доказательство:
Из теоремы 4 со штрихом. $u_1 = f_1, u_2 = f_2 - f_1$ и так далее, $a_k = A_k - A_{k-1}$

Q.E.D.

Теорема 4 с двумя штрихами.
$f : E \times G \to \mathbb{R}, E \subset X, G \subset Y, x_0, y_0$ - предельная точка G

1. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x, y) =: h(y)$ - существует и конечна при всех $y \in G$
2. $\lim\limits_{y \to y_0} f(x, y) =: r(x)$ - существует и конечна при всех $x \in E$
3. 1 или 2 равномерно сходится

Тогда $\exists \lim\limits_{y \to y_0} h(y), \exists \lim\limits_{x \to x_0} r(x)$ и они равны

P.S. Это повторение одного и того же разными словами уже начинает надоедать

Теорема. Признак Дирихле равномерной сходимости ряда
$\sum a_n(x) b_n(x), x \in X$
1. Частичные суммы ряда $\sum a_n$ равномерно ограничена, те:

$$\exists C_A : \forall N : \forall x \in X : |\sum_{n=1}^{N} a_n(x)| \leq C_A$$

2. $b_n \underset{n \to +\infty}{\rightrightarrows} 0$ равномерно на X

   $b_n \to 0$ монотонно по n при каждом фиксированном x

Тогда $\sum a_n(x) b_n(x)$ равномерно сходится на X

Доказательство:
$A_N(x) = a_1(x) + \ldots + a_N(x)$

Суммирование по частям:

$$\sum_{k=N}^{M} a_k b_k = A_M b_M - A_{N-1} b_N + \sum_{k=N}^{M-1} (b_k - b_{k+1}) A_k$$

Для ряда будем проверять равномерную сходимость по критерию Коши

$$|\sum_{k=N}^{M} a_k(x) b_{k(x)}| \leq |A_M b_M| + |A_{N-1} b_N| + \sum_{k=N}^{M-1} |(b_k - b_{k+1}) A_k| \leq C_A \left(|b_M| + |b_N| + \sum_{k=N}^{M-1} |b_k - b_{k+1}| \right)$$

$$\leq C_A(|b_m| + |b_N| + |b_M| + |b_N|)$$

$\forall \varepsilon > 0 : \exists N_1 : \forall x, \forall M, N > N_1 : |b_M(x)| \leq \frac{\varepsilon}{4C_A}, |b_N(x)| \leq \frac{\varepsilon}{4C_A}$ и тогда будет выполнено $|\sum\limits_{k=N}^{M} a_k(x) b_k(x)| \leq \varepsilon$

Q.E.D.

Теорема. Признак Абеля

$\sum a_n(x), b_n(x), x \in X$

1. $\sum a_n(x)$ - равномерно сходится на $x \in X$
2. $b_n(x)$ - равномерно ограничено на X

$b_n(x)$ монотонно по n

Тогда $\sum a_n(x) b_n(x)$ равномерно сходится на X

Доказательство признака Абеля аналогично признаку Дирихле

4.4. Степенные ряды.

Определение. Степенной ряд
$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n, a_n \in \mathbb{C}, z_0 \in \mathbb{C}$

$B(z_0, r)$ - шар в комплексной плоскости

Теорема о круге сходимости.
$\sum a_n(z-z_0)^n$. Тогда есть 3 взаимоисключаемых варианта
1. ряд (A) сходится при всех $z \in \mathbb{C}$
2. ряд сходится только при $z = z_0$
3. $\exists R \in (0, +\infty)$ при $|z-z_0| < R$ ряд абсолютно сходится, при $|z-z_0| > R$ расходится

Доказательство:
Изучим ряд на абсолютную сходимость. $\sum |a_n|\ |z-z_n|^n$

Признак Коши: $\overline{\lim}\ \sqrt[n]{|a_n\|z-z_n|^n} = |z-z_n|\,\overline{\lim}\ \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, тогда ряд асболютно сходится

Возьмем $R = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\ \sqrt[n]{|a_n|}}$

Заметим, что ряд будет расходиться при $|z-z_0| > R$.

Тогда получаем как раз наши 3 случая:

- $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\ \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty \ \Rightarrow\ z = z_0 \quad$ — случай 1
- $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\ \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \ \Rightarrow\ z \in \mathbb{C} \quad$ — случай 2
- Иначе $|z-z_0| < \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\ \sqrt[n]{|a_n|}}$

R — **радиус сходимости степенного ряда** (A)

Q.E.D.

Теорема о непрерывности степенного ряда.
(A) — степенной ряд
R — радиус сходимости (A)
$0 < R \leq +\infty \Rightarrow$

1. *Равномерная сходимость ряда:*

$$\forall r \in (0, R): \quad \text{ряд } (A) \text{ — равномерно сходится в } \overline{B(z_0, r)}:$$

$$\sup_{z\in B(z_0,r)} \left| \sum_{n\geq N} a_n(z-z_0)^n \right| \underset{N\to+\infty}{\to} 0$$

2. *Непрерывность функции степенного ряда:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n \text{ —непрерывна в } B(z_0, R)$$

Доказательство:
1. *Признак Вейерштрасса:*

$$\exists (c_n): \ \forall x, n: \ |u_n(x)| \leq c_n \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \text{ — сходится } \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \text{ — сходится}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left(\underbrace{\underbrace{(z_0 + r)}_{(\star)} - z_0}_{<R} \right)^n \text{ — сходится абсолютно по теореме о круге сходимости } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| r^n \text{ — сходится } \Rightarrow (A) \text{ равномерно сходится по Вейерштрассу}$$

$(\star)$ – мы подставили вместо z самую правую точку на замкнутом шаре

2. Возьмём $z: \ |z - z_0| < r < R$
   В $B(z_0, r)$ есть равномерная сходимость ряда (A)
   По Стоксу-Зайдлю f непрерывна в z.

Q.E.D.

Лемма.
$w, w_0 \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}, |w| \leq r, \ |w_0| \leq r$. Откуда:

$$|w^n - w_0^n| \ \leq \ n r^{n-1} |w - w_0|$$

Доказательство:
$|w^n - w_0^n| = |w - w_0| \cdot \left| w^{n-1} + w^{n-2} \cdot w_0 + \ldots + w \cdot w_0^{n-2} + w_0^{n-1} \right| \ \leq \ |w - w_0| \cdot r^{n-1} n$

Q.E.D.

Теорема. О дифференцировании степенного ряда
$A = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$, $A' = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$, $f(z) = A$, $R \in (0, +\infty]$ — радиус сходимости $(A) \Rightarrow$

1. R — радиус сходимости A'
2. $\forall z \in B(z_0, R): \ f'(z) = A'$

Доказательство:

1. Вместо A' рассмотрим $(z - z_0) A' = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n a_n (z - z_0)^n$. Заметим, что он имеет тот же радиус сходимости, что и A'

$$R' = \frac{1}{\overline{\lim} \ \sqrt[n]{n|a_n|}} = \frac{1}{\overline{\lim} \ \sqrt[n]{n} \cdot \overline{\lim} \ \sqrt[n]{a_n}} = R$$

2. Возьмём $a \in B(z_0, r), \ r < R$

$$f'(a) = \lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \lim_{z \to a} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{(z - z_0)^n - (a - z_0)^n}{(z - z_0) - (a - z_0)} = \begin{bmatrix} w = z - z_0 \\ w_0 = a - z_0 \end{bmatrix} = \lim_{w \to w_0} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{w^n - w_0^n}{w - w_0}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{По лемме : } \left|a_n \frac{w^n - w_0^n}{w - w_0}\right| \le |a_n| n r^{n-1} \\ r < R: \ \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |a_n| n r^{n-1} \text{ — сходится}\end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{w^n - w_0^n}{w - w_0} \text{ — равномерно сходится по Вейерштрассу}$$

По теореме о предельном переходе в суммах :

$$\lim_{w \to w_0} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{w^n - w_0^n}{w - w_0} = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{w \to w_0} a_n \frac{w^n - w_0^n}{w - w_0} = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n w_0^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (a - z_0)^{n-1}$$

Q.E.D.

Следствие 1. $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_n)^n, 0 < R < +\infty$. Тогда $f \in C^{+\infty}(B(z_0, R))$ и все ее производные можно найти почленным дифференцированием

Следствие 2. $f(x) = \sum a_n (x - x_0)^n$, $x_0 \in \mathbb{R}, a_n \in \mathbb{R}$. Тогда $F(x) = \frac{a_n}{n+1} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left((x - x_0)^{n+1}\right) + \text{C}$ имеет тот же радиус сходимости R и выполняется

$$\int_{x_0}^{x} f(x) dx = F(x)$$

где константа равна 0.

Радиус сходимости понятно почему. А интеграл равен потому что:

$$\int_{x_0}^{x} f(t) \, \mathrm{dt} = \int_{x_0}^{x} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (t - x_0)^n \, \mathrm{dt} \overset{\text{по равномерной}}{\underset{\text{сходимости}}{=}} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_{x_0}^{x} (t - x_0)^n \, \mathrm{dt} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{(x - x_0)^{n+1}}{n+1}$$

Пример: $f(x) = \operatorname{arcctg} x, \ x \in (-1, 1)$

$$f'(x) = -\frac{1}{1 + x^2} = -1 + x^2 - x^4 + \dots$$

$$f(x) = \int_0^x f'(x) \, \mathrm{d}x = C - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \dots$$

$$f(0) = \frac{\pi}{2} \ \Rightarrow \ f(x) = \frac{\pi}{2} - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \dots$$

4.5. Экспонента как функция комплексной переменной

$z \in \mathbb{C}, \exp(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$

Свойства:

1. $\exp(0) = 1$
2. $\exp'(z) = \exp(z)$
3. $\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})$
4. $\exp(v + w) = \exp(v) \cdot \exp(w)$

Доказательство:

1. $$\exp(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{0^n}{n!} = 1$$
2. $$\exp'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \exp(z)$$
3. $$\overline{\exp(z)} = \overline{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\overline{z}^n}{n!} = \exp(\overline{z})$$
4. $$\exp(v) \cdot \exp(w) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{v^n}{n!}\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{w^k}{k!}\right) \overset{(\star)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{n} \frac{v^j w^{n-j}}{j!(n-j)!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{n} \frac{v^j w^{n-j} n!}{j!(n-j)!} \overset{(\star\star)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(v+w)^n$$

   $(\star)$: Сделали суммирование по диагоналям

   $(\star\star)$: Свернули сумму по биному Ньютона

Вернемся к свойствам

5. $x \in \mathbb{R} : \exp(ix) = \text{Cos } x + i \text{ Sin } x, \exp(-ix) = \text{Cos } x - i \text{ Sin } x$

1. $\text{Cos } x = \frac{\exp(ix) + \exp(-ix)}{2}, \text{Sin } x = \frac{\exp(ix) - \exp(-ix)}{2i}$
2. $\text{Cos } x = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{2k!}, \text{Sin } x = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$
3. $T(x) = \exp(ix) = e^{ix}$

4.6. Метод Абеля суммирования рядов

Теорема Абеля.

$c_n \in \mathbb{C}, \sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n$ — сходится, $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$, $x \in (-1, 1)$. Тогда:

$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n$$

Доказательство:

Идейно мы хотим показать непрерывность в точке в $x = 1$

$c_n x^n$ — непрерывно на $[0, 1]$ (в том числе в 1), $f(x)$ задана на $[0, 1)$

Докажем равномерную сходимость $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ на $[0, 1]$, по признаку Абеля:

1. $''c_n(x)'' = c_n$ — равномерно сходится (так как сходится и не зависит от x)
2. $''b_n(x)'' = x^n$ — при фиксированном x монотонна по n, и стремится к 0

b_n равномерно ограничена: $(\exists M := 1 : \ \forall x \in X \ \ \forall n \ \ |x^n| < M)$

Q.E.D.

Следствие.

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n = A$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n = B$, $c_n := a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$ — суммирование по диагоналям

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n = C = A \cdot B$

4.7. Ряды Тейлора

Определение.

$f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$. f - разлагается в степенной ряд в окрестности x_0. То есть:

$$\exists u(x_0) : f(x) = \sum c_n (x - x_0)^n, \text{при } x \in U(x_0)$$

Замечание: Тогда $f \in C^\infty(U(x_0))$

Единственность разложения функции в ряд.

Разложение в точке x_0 функции f единственно.

Доказательство:

Посмотрим на c_n, заметим, что они однозначно задаются: $c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$. А это то, что нам и надо

Q.E.D.

Определение. **Ряд Тейлора**

$f \in C^\infty(U(x_0))$. Тогда назовем $\sum \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ - формальным рядом Тейлора функции в точке x_0

Замечания:

1. Ряд Тейлора может сходиться не к функции.
2. Ряд Тейлора может расходиться при $x \neq x_0$

TODO: пример функции с расход рядом Тейлора (последние 10 минут 11 лекции)

Пример:

$e^x = \sum \frac{x^n}{n!}$, и синус, косинус с большой буквы теперь у нас совпадают с нашими!!!

Теорема. Разложение бинома в ряд Тейлора

$$(1+x)^\sigma = 1 + \sigma x + \frac{\sigma(\sigma-1)}{2!}x^2 + \ldots + \binom{\sigma}{n}x^n + \ldots \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\sigma}{n}x^n = S(x)$$

Доказательство:

При $|x| < 1 : S(x)$ — сходится по признаку Даламбера:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\sigma - n}{n+1}x\right| = \left|\left(\frac{\sigma+1}{n+1} - 1\right)x\right|, \quad \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \;<\; 1$$

Покажем, что: $S'(x)(1+x) = \sigma S(x)$

$$S'(x) = \sigma + \frac{\sigma(\sigma-1)}{2}\cdot 2x + \binom{\sigma}{3}\cdot 3x + \binom{\sigma}{n+1}\cdot(n+1)x^n + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty}\binom{\sigma}{n}\cdot x^{n-1}n$$

$$xS'(x) = \sigma x + \frac{\sigma(\sigma-1)}{2}\cdot 2x^2 + \binom{\sigma}{3}\cdot 3x^3 + \binom{\sigma}{n}\cdot nx^n + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty}\binom{\sigma}{n}x^n n$$

$$\binom{\sigma}{n+1}\cdot(n+1) + \binom{\sigma}{n}\cdot n = \binom{\sigma}{n}\left(\frac{(n+1)(\sigma-n)}{n+1} + n\right) = \sigma\binom{\sigma}{n}$$

$$\text{Введем: } f(x) = \frac{S(x)}{(1+x)^\sigma}$$

$$f'(x) = \frac{S'(x)(1+x)^\sigma - \sigma(1+x)^{\sigma-1}S(x)}{(1+x)^{2\sigma}} = \frac{S'(x)(1+x) - \sigma S(x)}{(1+x)^{\sigma+1}} = 0 \Rightarrow f(x) = C$$

Откуда: $f(0) = 1 \Rightarrow f(x) = 1$

Q.E.D.

4.8. Лирическое отступление

Определение. Локальная ???
$f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}, (X, \mathcal{a}, \mu), a \in Y$ - м.п., $f \in L_{\text{loc}}(a)$, если:

$$\exists g(x) \text{ - сумм}, \exists U(a) : \forall y \in U(a) : \forall \text{ п.в. } x : |f(x,y)| \leq g(x)$$

Теорема Лебега о мажорированной сходимости.
$f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}} : \forall y : x \to f(x,y)$ измеримо.

1. При почти всех $x : \exists \lim\limits_{y \to y_0} f(x,y) = \varphi(x)$
2. $f \in L_{\text{loc}}(y_0)$

Тогда

$$\lim_{y \to y_0} \int_X f(x,y) d\mu(x) = \int_X \varphi(x) d\mu(x)$$

Доказательство: По Гейне очев (нет, дайте кто-нибудь док-во)

Теорема. Правило Лейбница
$f : X \times \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$
1. $\forall y : x \mapsto f(x,y)$ суммируема
2. при п. в.$x : \forall y : \exists {f'}_y(x,y)$
3. f'_y - удовлетворяют $L_{\text{loc}}(y_0)$

Тогда функция $\mathcal{J}(y) = \int_X f(x,y) d\mu(x)$ - дифф. y_0 и $J'(y_0) = \int_X f'_y d\mu$

Доказательство:

Введем $F(x,h) = \frac{f(x, y_0 + h) - f(x, y_0)}{h}$.

$$\frac{J(y_0 + h) - J(y_0)}{h} = \int_X F(x,h) d\mu(x) \xrightarrow[h \to 0]{s\star} \int f'_y(x, y_0) d\mu(x)$$

$\star$ - здесь мы пользуемся прошлой теоремой. Нам надо проверить удовлетворению L_{loc} у F:

$$|F(x,h)| \underset{\text{по т Лагранжа}}{=} |f'_y(x, y_0 + \theta h)| \leq g(x)$$

Q.E.D.

Следствие 1. $\arcsin x = x + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

Теорема. Теорема о разложимости функции в ряд Тейлора
$f \in C^\infty(x_0 - h, x_0 + h)$ Тогда равноосильно
1. f раскладывается в ряд в $V(x_0)$
2. $\exists \delta, C, A > 0 : \ \forall n \in \mathbb{N} : \forall x : |x - x_0| < \delta : \left|f^{(n)}(x)\right| \leq C A^n n!$

Доказательство:

$2 \Rightarrow 1$

$$f(x) = \sum^n \frac{f^{(k)}}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\overline{x})}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

Все что надо проверить, это то, что $r_n \to 0$:

$$|r_n| \leq \frac{CA^{n+1}(n+1)!}{(n+1)!} \ |x-x_0|^{n+1} = C(A\ |x-x_0|)^{n+1} \underset{|x-x_0|\ < \frac{1}{2A}}{\longrightarrow} 0$$

Аккуратно, про окрестности и дельту сказать и все

1 => 2: Возьмем $x_1 \neq x_0$, $x_1 \in \dot{V}(x_0)$

$\left| \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x_1-x_0)^n \right| \ \leq \ C$ – ограничено, так как ряд сходится

$\left|f^{(n)}(x_0)\right| \leq \frac{Cn!}{|x_1-x_0|^n} = CB^n n!$, $B = \frac{1}{|x_1-x_0|}$

Пусть теперь $|x-x_0| < \frac{1}{2B}$

$$f^{(n)}(x) = \left(\sum \frac{f^{(k)}}{k!}(x-x_0)^k\right)^{(m)} \ \leq \left|\sum_{k=m}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} k(k-1)...(k-m+1)|x-x_0|^{k-m}\right| \ \leq$$

$$\leq \sum_{k=m}^{+\infty} \frac{\left|f^{(k)}(x_0)\right|}{k!} k(k-1)...(k-m+1)|x-x_0|^{k-m} \ \leq$$

$$\leq \ \sum_{k=m}^{+\infty} \frac{CB^k k!}{k!} k(k-1)...(k-m+1)|x-x_0|^{k-m} =$$

$$= CB^m \sum \frac{k!}{(k-m)!}(B\ |x-x_0|)^{k-m} = \frac{cB^m m!}{(1-(B|x-x_0|))^{m+1}}$$

Q.E.D.

5. Векторные поля и криволинейный интеграл

5.1. Начало

$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ — непрерывна

$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \gamma_2'(t) \\ \vdots \\ \gamma_m'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_m'(t) \end{pmatrix}$ — для удобства обозначений координатные функции будут x_i вместо γ_i

Тогда γ — кусочно гладкая, если существует дробление

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b : \ \forall t \in \{1, \ldots, n\} : \ \gamma|_{[t_{k-1}, t_k]} \text{ — гладкая}$$

Определение. Векторное поле в $\mathbb{R}^m$

$V : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ (непрерывное) — векторное поле

По смыслу, у нас есть пространство, и каждой точке этого пространства сопоставлен какой-то вектор (типо магнитное поле)

Определение. Интеграл векторного поля по кусочно-гладкому пути

$O \in \mathbb{R}^m$ — область, γ — кусочно-гладкий путь $[a, b] \to O$, $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_m(t))^T$

$V : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ непрерывное — векторное поле.

Тогда интеграл векторного поля V вдоль пути γ равен:

$$I(V, \gamma) := \int_\gamma V_1 \, \mathrm{d}x_1 + V_2 \, \mathrm{d}x_2 + \ldots + V_m \, \mathrm{d}x_m := \int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, \mathrm{d}t \overset{(\star)}{=}$$
$$\overset{(\star)}{=} \int_a^b V_1(x_1(t), x_2(t), \ldots x_m(t)) x_1'(t) + V_2(x_1(t), \ldots x_m(t)) x_2' + \ldots + V_m(\ldots) x_m' \, \mathrm{d}t =$$
$$= \int_a^b \sum_{k=1}^m V_k(x_1(t), \ldots, x_m(t)) \, \mathrm{d}x_k(t)$$

$(\star)$: просто расписали покоординатно V и γ

Свойства:

1. Линейность по полю
$$I(\alpha V_1 + \beta V_2, \gamma) = \alpha I(V_1, \gamma) + \beta I(V_2, \gamma)$$
2. Аддитивность интеграла при дроблении пути:

   $\gamma : [a, b] \to O$, $c \in (a, b)$. Тогда:
$$I(V, \gamma) = I\big(V, \gamma_{[a,c]}\big) + I\big(V, \gamma_{[c,b]}\big)$$
3. Замена параметра: $\varphi : [p, q] \to [a, b] \in C^1$, $\varphi(p) = a$, $\varphi(q) = b$, $\gamma : [a, b] \to O$, $\quad \tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$. Тогда
$$I(V, \gamma) = I(V, \tilde{\gamma})$$

   Доказательство:

$$\int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle \,\mathrm{d}t = \begin{pmatrix} t := \varphi(\tau) \\ \mathrm{d}t = \varphi'(\tau)d\tau \end{pmatrix} = \int_p^q \langle V(\gamma(\varphi(\tau))), \gamma'(\varphi(\tau))\rangle \varphi'(\tau)\,\mathrm{d}\tau =$$

$$= \int_p^q \langle V(\tilde{\gamma}(\tau)), \gamma'(\varphi(\tau)) \cdot \varphi'(\tau)\rangle \,\mathrm{d}\tau = \int_p^q \langle V(\tilde{\gamma}(\tau)), \tilde{\gamma}'(\tau)\rangle \,\mathrm{d}\tau = I(V, \tilde{\gamma})$$

4. Объединение носителей:

   $\gamma_1 : [a, b] \to O$, $\gamma_2 : [c, d] \to O$
   $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$ – т.е. конец первого пути начинается с началом второго
   Определим «произведение» путей:

   $\gamma := \gamma_2\gamma_1$, если:

   $$\gamma : [a, b + d - c] \to O : \;\; \gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [a, b] \\ \gamma_2(t - b + c), & t \in [b, b + d - c] \end{cases}$$

   Тогда наше свойство имеет вид:

   $$I(V, \gamma) = I(V, \gamma_1) + I(V, \gamma_2)$$

5. Противоположный путь:

   $\gamma : [a, b] \to O$ – путь
   Тогда противположный путь к γ (обозначается γ^-):

   $$\gamma^- : [a, b] \to O, \quad \gamma^-(t) := \gamma(a + b - t)$$

   Тогда интегралы по противоположным путям равны с точностью до знака:

   $$I(V, \gamma^-) = -I(V, \gamma)$$

6. Оценка интеграла по пути: $|I(V, \gamma)| \leq \max_{t\in[a,b]}|V(\gamma(t))| \cdot l(\gamma(t))$

   Доказательство:

   Длина пути: $l(\gamma(t)) := \displaystyle\int_a^b |\gamma'(t)| \,\mathrm{d}t$
   $M := \max_{t\in[a,b]}|V(\gamma(t))|$

   $$|I(V, \gamma)| = \left|\int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle \,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |\langle V(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle| \,\mathrm{d}t \underset{\text{КБШ}}{\leq} \int_a^b |V(\gamma(t))| \cdot |\gamma'(t)| \,\mathrm{d}t \leq$$

   $$\leq \int_a^b M \cdot |\gamma'(t)| \,\mathrm{d}t = M \int_a^b |\gamma'(t)| = M \cdot l(\gamma(t))$$

5.2. Потенциальное векторное поле

Определение. Потенциальное векторное поле
$V : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — потенциальное векторное поле если,

$$\exists f : O \to \mathbb{R} \in C^1(O) : \ \forall x \in O : \ \nabla f(x) = V(x)$$

f называется потенциалом V

Теорема. Обобщенная формула Ньютона - Лейбница
$V : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $f : O \to \mathbb{R}$ — потенциал V, $\gamma : [a, b] \to O : \begin{cases} \gamma(a)=A \\ \gamma(b)=B \end{cases}$ — кусочно гладкий.

Тогда

$$\int_\gamma \sum_{k=1}^m V_k \, \mathrm{d}x_k = f(B) - f(A)$$

Доказательство:
1. γ — гладкий путь.

$$\int_\gamma \sum_{k=1}^m V_k \, \mathrm{d}x_k = \int_a^b V_1(x_1(t), ..., x_m(t))x_1'(t) + V_2 x_2'(t) + ... + V_m x_m'(t) \, \mathrm{d}t =$$
$$= \int_a^b \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1(t), ..., x_m(t)) \cdot x_i'(t) \, \mathrm{d}t =$$
$$= \int_a^b (f(x_1(t), ..., x_m(t)))_t' \, \mathrm{d}t = f(x) \Bigg|_{x=\gamma(a)}^{x=\gamma(b)} = f(B) - f(A)$$

2. γ — кусочно-гладкий и понятно что делать (просто разбить на несколько интегралов и телескоп)

Q.E.D.

Определение. Независимость от пути
Интеграл векторного поля не зависит от пути в области O, если $\forall A, B \in O : \forall \gamma_1, \gamma_2$ из A в B:

$$I(V, \gamma_1) = I(V, \gamma_2)$$

Замечание. Для потенциальных полей так и есть)

Теорема.
V - векторное поле в $O \subset \mathbb{R}$, тогда эквивалетно:
1. V - потенциально
2. Интеграл V не зависит от выбора пути.
3. $\forall$ кусочно-гладкого пути γ, замкнутого $\int_X \sum v_i dx_i = 0$

Доказательство:
$1 \Rightarrow 2$ по обобщенной формуле Ньютона-Лейбница.

$2 \Leftrightarrow 3$ - разбейте кусочно гладкий путь на 2, интегралы будут равны, а если развернуть то по свойству 5, мы получим, что интеграл по петле будет как раз нулю. Так же можно просто взять противоположный путь.

$2 \Rightarrow 1:$
Фиксируем $A \in O$, $\forall x \in O$ возьмем путь γ_x из A в x. (тут надо показать почему связное, открытое линейно-связно)

$\sphericalangle\ f(x) := \displaystyle\int_{\gamma_x} \sum V_k\, \mathrm{d}x_k$ — является ли потенциалом?

Достаточно проверить, что $\frac{\partial f}{\partial x_1} = V_1(x)$ при $x \in O$.

$$\frac{f(x+he_1)-f(x)}{h} \overset{(\star)}{=} \frac{1}{h}(I(V,\gamma_x\gamma_0) - I(V,\gamma_x)) = [\text{свойство объединения носителей}] =$$
$$= \frac{1}{h} I(V,\gamma_0) = \frac{1}{h}\int_0^1 \langle V(x+the_1), he_1\rangle = \int_0^1 V_1(x+the_1) \overset{(\star\star)}{=} V_1(x+\tilde{t}he_1) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} V_1(x)$$

$(\star)$: здесь мы дополнительно рассмотрели прямолинейный путь γ_0 из в x в $x+he_1$
Формальное его оприсание:

$$\gamma_0 : [0,1] \to O, \quad \gamma_0(t) = x + the_1 \quad \gamma_0' = he_1$$

$(\star\star)$: здесь применили теорему о среднем, поэтому $\tilde{t}$ — какая-то точка между 0 и 1, а множитель $(b-a)$ из формулировки теоремы с википедии равен $1-0=1$

Q.E.D.

5.3. Локальный потенциал в поле

Лемма. Необходимое дифф условие потенциальности
V - гладкое, потенциальное в. поле. Тогда:

$$\forall x \in O : \forall k, i, j : \frac{\partial V_k}{\partial x_j} = \frac{\partial V_j}{\partial x_k}$$

Доказательство:
Идейно это вторая производная

Q.E.D.

Теорема. Лемма Пуанкаре
$O \subset \mathbb{R}^m$ - выпуклая область. $V \in C^1(O)$ удовлетворяет $\forall x \in O : \forall k, i, j : \frac{\partial V_k}{\partial x_j} = \frac{\partial V_j}{\partial x_k}$.

Тогда V - потенциально.

Доказательство:
Возьмем точку $A \in O$. Рассмотрим пути м формулу задания путей: $\sphericalangle\ \gamma_x(t)$ — прямолинейный путь из A в x.
Формальное описание:

$$\gamma : [0, 1] \to O : \ \gamma_x(t) = A + t(x - A) \ \Rightarrow \ \gamma' = x - A$$

Рассмотрим следующую функцию, и проверим, что она потенциал:

$$f(x) := \int_{\gamma_x} \sum V_k \,\mathrm{d}x_k = \int_0^1 \langle V, \gamma' \rangle \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \underbrace{\sum_{k=1}^m V_k(A + t(x - A))}_{(2^\star)} \underbrace{(x_k - A_k)}_{(1^\star)} \,\mathrm{d}t$$

TODO: что тут раскрылось и как

Чтобы проверить является ли f потенциалом, найдем частные производные:

$$\frac{\partial f}{\partial x_l} \overset{(1)}{=} \int_0^1 V_l(A + t(x - A)) + \sum_{k=1}^m (V_k)'_l(A + t(x - A)) \cdot t(x_k - A_k) \,\mathrm{d}t \overset{(2)}{=}$$

$$\overset{(2)}{=} \int_0^1 V_l(\ldots) + \sum (V_l)'_k(\ldots) \cdot t(x_k - A_k) \,\mathrm{d}t \overset{(3)}{=} \int_0^1 (tV_l(A + t(x - A)))'_t \,\mathrm{d}t = tV_l(A + t(x - A)) \Big|_{t=1}^{t=0} = V_l(x)$$

(1): *Почему можем дифференцировать по функции внутри интеграла?* Нужно, чтобы функция была непрерывна вместе со своей производной, тогда мы сможем использовать формулу Лейбница - (о производной интеграла по параметру). Но только концы интеграла не зависят от переменной. А тогда мы просто воспользуемся правилом дифференцирования произведений и продифференцируем сначала $(1^\star)$, а потом $(2^\star)$
(2): По условию $(V_k)'_l = (V_l)'_k$
(3): Заметим, что $(tV_l(A + t(x - A)))'_t = V_l(A + t(x - a)) + t \cdot \sum (V_l)'_k(A + t(x - a))(x_k - A_k)$

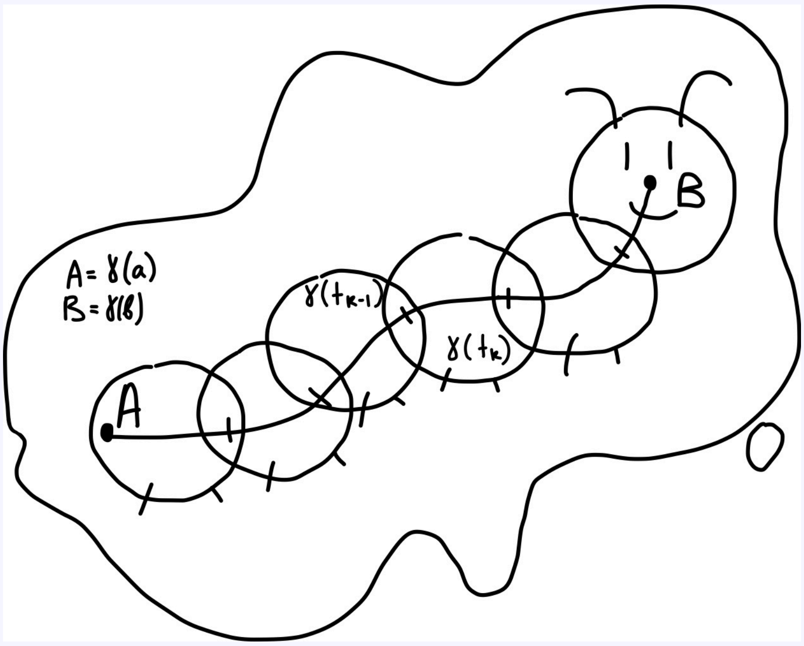
Q.E.D.

Определение. Локально потенциальное векторное поле
V - локальная потенциальность в поле, если $\forall x : \exists U(x)$, V - потенциальная на $U(x)$

Следствие: Если в Лемме Пуанкаре взять $O \subset \mathbb{R}^m$ - область. Тогда V локально-потенциально

Лемма. О гусенице
$\gamma : [a, b] \to O \subset \mathbb{R}^m$ — непрерывный. Тогда
1. $\exists$ дробление $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$
2. $\exists$ шары $B_1, B_2, ..., B_n \subset O$, такие, что $\gamma([t_{k-1}, t_k]) \subset B_k$

Доказательство:



$\forall c : [a, b]$. Возьмем $B_c := B(\gamma(c), r_c) \subset O$ с каким-нибудь радиусом

Рассмотрим следующие величины:

$$\tilde{\alpha}_c := \inf(\alpha \in [a, c] : \gamma([\alpha, c]) \subset B_c)$$

$$\tilde{\beta}_c := \sup(\beta \in [c, b] : \gamma([c, \beta]) \subset B_c)$$

Идейно это момент входа и выхода из шара.

Заузим: $\tilde{\alpha}_c < \alpha_c < c < \beta_c < \tilde{\beta}_c$

$c \mapsto (\alpha_c, \beta_c)$ - открытые покрытия

Замечание: надо быть аккуратно с границами. Полуинтервалы открыты на пространстве из нашего отрезко

Отрезок компактен, а значит существует конечное подпокрытие:

$$[a, b] \subset \bigcup_{\text{кон.}} (\alpha_k, \beta_k)$$

Прочистим наше конечное покрытие: будем выкидывать по одному отрезку, пока существуют отрезки, при удалении которых каждая точка $[a, b]$ остается покрытой.
После совершения такой операции:

$$\forall \left(\alpha_{c_k}, \beta_{c_k}\right) \exists d_k \in [a, b] : d_k \notin \bigcup_{i \neq k} \left(\alpha_{c_i}, \beta_{c_i}\right)$$

Для определенности можно считать, что $d_1 < d_2 < \ldots < d_n$

1. Кусок отрезка $[a, d_1]$ лежит в интервале $\left(\alpha_{c_1}, \beta_{c_1}\right)$, т.к. это первый интервал, значит он должен содержать a
2. Окрестность точки d_2 лежит в интервале $\left(\alpha_{c_2}, \beta_{c_2}\right)$, все точки на интервале (d_1, d_2) лежат в каких-то интервалах из покрытия, при чем могут лежать только в $\left(\alpha_{c_1}, \beta_{c_1}\right)$ и $\left(\alpha_{c_2}, \beta_{c_2}\right)$, иначе была бы точка d_3 где-то между d_1 и d_2.
   Из того, что интервалы пересекаются, делаем вывод, что между d_1 и d_2 есть точка лежащая и в $\left(\alpha_{c_1}, \beta_{c_1}\right)$ и в $\left(\alpha_{c_2}, \beta_{c_2}\right)$, назначим её t_1, то есть $t_1 \in (\alpha_{c_1}, \beta_{c_1}) \cap (\alpha_{c_2}, \beta_{c_2})$
3. Аналогичным образом назначаем $t_2, t_3, \ldots$.

Q.E.D.

<u>Определение.</u> Похожие пути

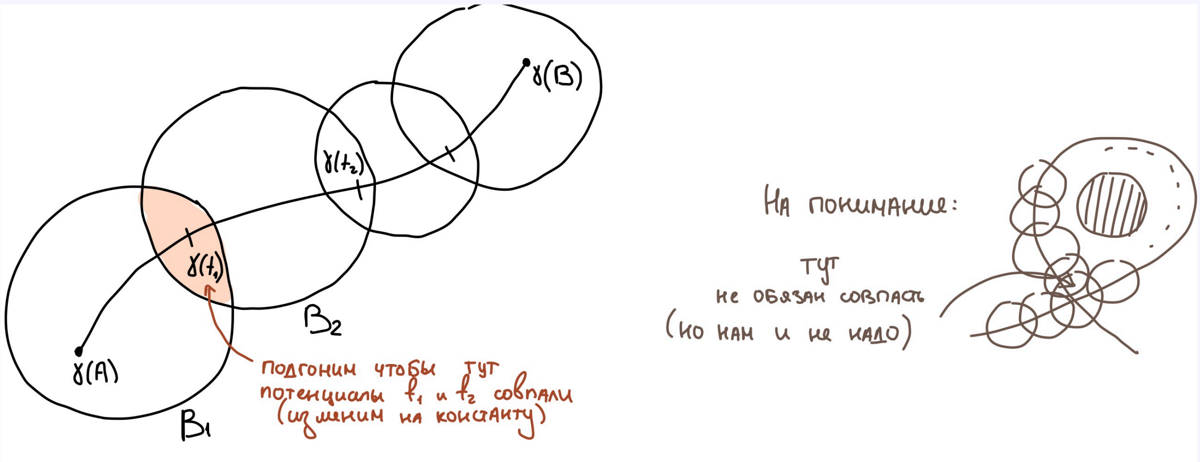
$\gamma, \tilde{\gamma} : [a, b] \to O$ - непр. Назовем их похожими, если они имеют общую гусеницу

<u>Лемма.</u> Равенство интегралов с похожими путями

V — локально потенциальное векторное поле, $\gamma, \tilde{\gamma}$ — кусочно-гладкие похожие пути, $\gamma(a) = \tilde{\gamma}(a)$, $\gamma(b) = \tilde{\gamma}(b)$. Тогда

$$\int_\gamma \sum V_k \, \mathrm{d}x_k = \int_{\tilde{\gamma}} \sum V_k \, \mathrm{d}x_k$$

Доказательство:



Берем общую гусеницу. В каждом шаре B_k есть некоторый потенциал f_k, но они могут отличаться на константу. Поэтому подгоним потенциалы в соседних шарах, чтобы выполнялось:

$$f_k(\gamma(t_k)) = f_{k+1}(\gamma(t_k))$$

Здесь мы «склеили» потенциалы в точке $\gamma(t_k)$ при помощи констант

Тогда

$$\int_\gamma \sum V_k \,\mathrm{d}x_k = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}} \sum V_k \,\mathrm{d}x_k = \sum_{i=1}^n f_i(\gamma(t_i)) - f_i(\gamma(t_{i-1})) \overset{(\star)}{=} f_n(\gamma(t_n)) - f_1(\gamma(t_0)) =$$
$$= f_n(\tilde{\gamma}(t_n)) - f_1(\tilde{\gamma}(t_0)) = \ldots = \int_{\tilde{\gamma}} \sum V_k \,\mathrm{d}x_k$$

$(\star)$: это телескопическая сумма, т.к. мы специально подогнали так потенциалы, чтобы соседние сокращались

Q.E.D.

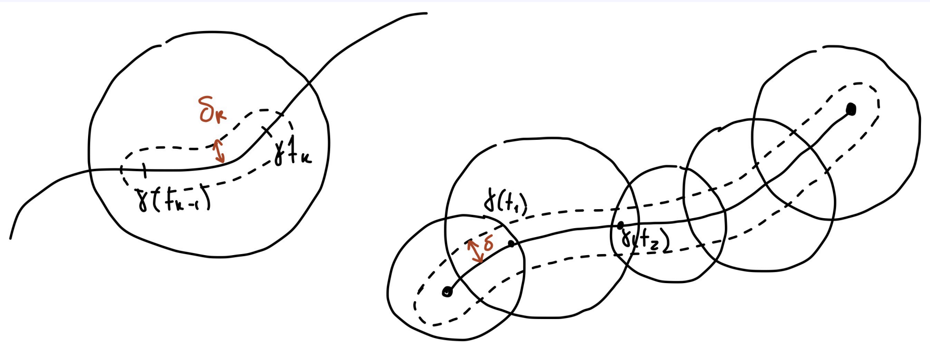
Есть другой вариант: использовать петли

Лемма.
$\gamma[a, b] \to O$ - непр. Тогда $\exists \delta > 0$: - такое, что:

$$\forall \tilde{\gamma}\tilde{\tilde{\gamma}} : [a, b] \to O \forall t \in [a, b] : |\tilde{\gamma}(t) - \gamma(t)| < \delta, |\tilde{\tilde{\gamma}}(t) - \gamma(t)| < \delta$$

то γ,$\tilde{\gamma}$ и $\tilde{\tilde{\gamma}}$ похожие

Доказательство:



Берем любую гусеницу пути γ
Рассмотрим множество $\gamma([t_{k-1}, t_k])$ — компакт (т.к. непрерывный образ компакта), а также лежит в B_k
Тогда $\exists \delta_k$: δ_k-окрестность$\left(\gamma\left(\left[t_{k_1}, t_k\right]\right)\right) \subset B_k$

Например подойдет:

$$\delta_k := \frac{\mathrm{dist}(S_k, \gamma([t_{k-1}, t_k]))}{2}$$

Т.к. таких δ_k — конечно, то можено взять минимум: $\delta := \min_k \delta_k$ - это будет нашей δ из условия леммы.

Теперь поймем, что это ровно то, что было нужно:

$\gamma(t_k) \in B_k$, тогда все точки отстоящие от $\gamma(t_k)$ меньше чем на δ тоже будут лежать в B_k. Получается, что для всех путей δ-близких к γ, исходная гусеница так же будет и их гусеницей. Тогда мы нашли общую гусеницу у всех таких путей, что и хотели сделать.

Q.E.D.

Определение. Интеграл ЛПВЛ по непрерывному пути

γ - путь(непр). V - лнвп. Берем $\gamma > 0$ из прошлой леммы. Берем $\tilde{\gamma}$ - кус. гл. путь $\forall t : |\gamma(t) - \tilde{\gamma}(t)| < \delta$. Тогда

$$I(V, \gamma) := I(V, \tilde{\gamma})$$

Корректность очевидно из похожести, но почему такой кус. гладкий существует?

6. Хуй знает где

Определение. Борелевская сигма-алгебра
$\mathcal{B}$ — **борелевская** σ-алгебра в $\mathbb{R}^m$ — минимальная σ-алгебра, содержащая все открытые множества

$B \in \mathcal{B}$ — называется **борелевским множеством**

Следствия:
1. $\forall A \subset \mathcal{M}^m\ \exists B, C$ — борелевские, такие что $B \subset A \subset C, \quad \lambda_m(C \setminus A) = \lambda_m(A \setminus B) = 0$

   Доказательство:

   $B := \bigcup_n F_{\frac{1}{n}} \quad C := \bigcap_n G_{\frac{1}{n}}$
2. $\forall A \in \mathcal{M}^m$ представимо в виде $A = B \cup N$, где B — борелевское, а $\lambda N = 0$
3. Регулярность меры Лебега

Определение. Мера Лебега-Стилтьеса
$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ возрастает. $\mu g([a, b)) := g(b - 0) - g(a - 0)$ - сигма-конечная мера

Применим теорему о Лебеговском продолжении меры. Получим σ-алгебру $\mathcal{A}, \mu_g : A \to \overline{\mathbb{R}}$, сигма-конечная и полная

$\mu_g|_{P^1}$ - это мера Лебега Стилтьеса

7. Информация о курсе

Поток — y2024.

Группы M3238-M3239.

Преподаватель — Кохась Константин Петрович.

Уже по традиции здесь будут мои announcements:

01.10.2025 - нам пизда