

Линейная алгебра

Леонид Альжанов, Вячеслав Чепелин и другие

Оглавление

1	Аналитическая геометрия	5
1.1	Элементы векторной алгебры	5
1.1.1	Основные определения	5
1.1.2	Система координат на плоскости и в пространстве	9
1.1.3	Преобразования в ДСК	12
1.1.4	Скалярное произведение векторов	14
1.1.5	Векторное произведение векторов	17
1.1.6	Смешанное произведение векторов	19
1.2	Прямая на плоскости, плоскость и прямая в пространстве	22
1.2.1	Линейное уравнение	22
1.2.2	Способы задания	24
1.2.3	Проекция точки на плоскость и прямую	32
1.3	Кривые второго порядка (КВП)	34
1.3.1	Канонические уравнения КВП	34
1.3.2	Приведение КВП к каноническому виду	42
2	Линейная алгебра	45
2.1	Основные алгебраические структуры	45
2.1.1	Операции, группа, кольцо, поле	45
2.1.2	Линейное пространство, алгебра, свойства.	46
2.1.3	Нормированные линейные пространства и алгебры.	47
2.1.4	Отношение эквивалентности, фактор-структуры.	47
2.2	Линейное пространство комплексных чисел	48
2.2.1	Основные определения	48
2.2.2	Комплексные = алгебра с нормой.	49
2.2.3	Основные действия с комплексными числами	49
2.2.4	Экспоненциальная форма и её свойства. Формулы Эйлера и Муавра	50
2.2.5	Некоторые функции комплексной переменной	51
2.3	Линейные пространства.	53
2.3.1	Основные определения.	53
2.3.2	Порождающая (полная) система векторов. Базис и размерность линейного пространства	55
2.3.3	Координаты вектора. Изоморфизм линейного пространства	57
2.3.4	Линейное подпространство. Ранг системы векторов	61
2.3.5	$L_1 + L_2, L_1 \cap L_2$, формула Грассмана, $L_1 \oplus L_2$ (прямая сумма)	62
2.3.6	Фактор пространство лин. пространства	66

2.4	Матрицы	68
2.4.1	Основные понятия	68
2.4.2	Основные операции с матрицами	69
2.4.3	Операция транспонирования	70
2.4.4	Обратная матрица	71
2.4.5	Ранг матрицы	71
2.5	Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)	74
2.5.1	Основные определения и понятия, теорема Кронекера-Капелли.	74
2.5.2	Структура общего решения СЛОУ и СЛНУ. ФСР. Альтернатива Фред-гольма.	75
2.5.3	Метод Гаусса решения СЛНУ	77
2.5.4	Нахождение обратной матрицы методом Гаусса.	79
2.5.5	Геометрическая интерпретация СЛАУ	80
2.5.6	Матрица перехода от старого базиса к новому. Связь координат вектора в разных базисах.	81
2.6	Определители.	83
2.6.1	Антисимметричные полилинейные формы. Определитель системы векторов произвольного лин. пр-ва.	83
2.6.2	Определитель матрицы. Две формулы	85
2.6.3	Свойства определителя	86
2.6.4	Формула для обратной матрицы. Теорема Крамера.	89
2.6.5	Теорема Лапласа	90
2.6.6	Второе определение ранга матрицы.	92
2.6.7	Определитель n -ого порядка.	94

3 Информация о курсе.

97

Глава 1

Аналитическая геометрия

1.1 Элементы векторной алгебры

1.1.1 Основные определения

V — пространство геометрических векторов.

Геометрический (свободный) вектор \vec{a} — направленный отрезок в пространстве.

Длина (модуль) вектора $|\vec{a}| = |\overrightarrow{AB}| = AB$ — длина отрезка, на котором строится вектор.

Нулевой вектор $\vec{0}$ — имеет длину ноль, начало совпадает с концом.

Вектор независим от точки приложения (его начала)

$\vec{a} \parallel \vec{b} \xLeftrightarrow{def}$ они лежат на одной или параллельных прямых $\xLeftrightarrow{def} \vec{a}, \vec{b}$ коллинеарны.

$$\forall \vec{a} : \vec{0} \parallel \vec{a}$$

\Uparrow и \Downarrow — обозначение сонаправленности и разнонаправленности векторов.

$$\vec{a} = \vec{b} \xLeftrightarrow{def} \begin{cases} \vec{a} \Uparrow \vec{b} \\ |\vec{a}| = |\vec{b}| \end{cases}$$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - компланарны \xLeftrightarrow{def} лежат или параллельны одной плоскости.

$$\vec{a}_0 \text{ — орт вектора } \vec{a} \xLeftrightarrow{def} \begin{cases} \vec{a}_0 \Uparrow \vec{a} \\ |\vec{a}_0| = 1 \end{cases}$$

Вектора можно складывать: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$. Строится по правилу треугольника или параллелограмма.

Вектора можно умножать на скаляр: $\vec{c} = \vec{a} \cdot \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$.

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\lambda|$$

$$\lambda > 0 : \vec{a} \Uparrow \vec{c}$$

$$\lambda < 0 : \vec{a} \Downarrow \vec{c}$$

$$\lambda = 0 : \vec{c} = \vec{0}$$

Вектора можно вычитать: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-1) \cdot \vec{b} = \vec{c}$.

У $(V, “+”, “\cdot \lambda”)$ есть свойства:

1. $\forall \vec{a}, \vec{b} : \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
2. $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} : (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
3. $\exists \vec{0} : \forall \vec{a} : \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
4. $\forall \vec{a} : \exists (-\vec{a}) : \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$
5. $\forall \lambda \in \mathbb{R} : \forall \vec{a}, \vec{b} : \lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$
6. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \forall \vec{a} : (\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$
7. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \forall \vec{a} : (\lambda\mu)\vec{a} = \mu(\lambda\vec{a}) = \lambda(\mu\vec{a})$
8. $\forall \vec{a} : 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$

Всё это доказывается из школьной геометрии. Эти свойства (аксиомы) линейного пространства $\Rightarrow (V, “+”, “\cdot \lambda”)$ — линейное пространство.

$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in V, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} \Rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{v}_i = \vec{v}$ — линейная комбинация векторов $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$, или \vec{v} разложен по векторам $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$.

$\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{v}_i = \vec{0}$ — нулевая линейная комбинация.

Линейная комбинация — тривиальная $\xLeftrightarrow{def} \forall i \in \{1, \dots, n\} : \lambda_i = 0$

Система векторов $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ — линейно независимая \xLeftrightarrow{def} все её нулевые линейные комбинации — тривиальные. То есть система векторов $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ — линейно независимая $\xLeftrightarrow{def} \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{v}_i = \vec{0} \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\} : \lambda_i = 0$. Пример: $\forall a, b : a \nparallel b \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$ — линейно-независимы

Система векторов $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ — линейно зависима \xLeftrightarrow{def} существует её нулевая нетривиальная линейная комбинация. То есть система векторов $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ — линейно зависима $\xLeftrightarrow{def} \exists \lambda_i \neq 0 : \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{v}_i = \vec{0}$. Пример: $\forall a, b : a \parallel b \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$ — линейно-зависимы

Свойства линейной зависимости:

1. $\vec{0} \in \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\} \Rightarrow \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ — линейно зависима система.

Пусть $\vec{v}_k = \vec{0}$. Возьмём $\lambda_k = 1$, а $\forall i \neq k : \lambda_i = 0$. Значит $\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{v}_i = 0\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + \dots + 1\vec{v}_k + \dots + 0\vec{v}_n = 1 \cdot \vec{0} = \vec{0}$ *Q.E.D*

2. $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ — линейно зависима система $\Rightarrow \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n, \vec{v}_{n+1}, \vec{v}_{n+2}, \dots, \vec{v}_{n+m}$ — линейно зависима система.

Возьмём $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, создающие нулевую нетривиальную линейную комбинацию, а $\forall i \in \{n+1, n+2, \dots, n+m\}$ возьмём $\lambda_i = 0$. Тогда $\sum_{i=1}^{n+m} \lambda_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{v}_i = 0\vec{v}_{n+1} + 0\vec{v}_{n+2} + \dots + 0\vec{v}_{n+m} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$ *Q.E.D*

3. В линейно зависимой системе $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ есть вектор, который можно выразить линейной комбинацией других, то есть $\exists \vec{v}_k : v_k = \sum_{i=1, i \neq k}^n \mu_i \vec{v}_i$.

Возьмём $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, создающие нулевую нетривиальную линейную комбинацию $\Rightarrow \exists \lambda_k \neq 0 \Rightarrow \lambda_k \vec{v}_k = \sum_{i=1, i \neq k}^n \lambda_i \vec{v}_i \Rightarrow$ возьмём $\mu_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_k} \Rightarrow v_k = \sum_{i=1, i \neq k}^n \mu_i \vec{v}_i$ *Q.E.D*

Базис прямой — любой ненулевой вектор на этой прямой.

def: Базис плоскости — любая упорядоченная пара неколлинеарных векторов в данной плоскости. Базис пространства — любая упорядоченная тройка некопланарных векторов в этом пространстве.

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ — базис пространства.

def: $\vec{x} = \sum_{i=1}^3 \vec{e}_i x_i, x_i \in \mathbb{R} \Rightarrow (x_1, x_2, x_3)$ — координаты \vec{x} относительно базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Аналогично для плоскости и прямой.

1. $\forall \vec{x} \parallel L \exists! x_1 \in \mathbb{R} : \vec{x} = x_1 \vec{e}_1$, где \vec{e}_1 — базис прямой L .

Пусть $O \in L$. Приложим к O начала векторов \vec{x} и \vec{e}_1 . $\vec{x}_1 \parallel \vec{e}_1 \Leftrightarrow \exists! x \in \mathbb{R} : \vec{x} = x_1 \vec{e}_1$ *Q.E.D.*

$$\vec{e}_1 \uparrow \vec{x} : x_1 > 0$$

$$\vec{e}_1 \downarrow \vec{x} : x_1 < 0$$

$$\vec{x} = \vec{0} : x_1 = 0$$

2. $\forall \vec{x} \parallel \alpha \exists! x_1, x_2 \in \mathbb{R} : \vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2$, где \vec{e}_1, \vec{e}_2 — базис плоскости α .

Аналогично, пусть $O \in \alpha$. Приложим к O начала векторов \vec{x}, \vec{e}_1 и \vec{e}_2 .

(a) $\vec{x} = \vec{0} : \vec{x} = 0\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2$.

(b) $\vec{x} \neq \vec{0}$: пусть B — конец \vec{x} . Проведём $L_2 \parallel \vec{e}_2, B \in L_2$.

Проведём $L_1 \parallel \vec{e}_1, O \in L_1$. $A = L_1 \cap L_2$. $\vec{x} = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{OA} \parallel \vec{e}_1 \Rightarrow (\text{по пункту 1}) \Rightarrow \exists! x_1 \in \mathbb{R} : \overrightarrow{OA} = x_1 \vec{e}_1 \\ \overrightarrow{AB} \parallel \vec{e}_2 \Rightarrow (\text{по пункту 1}) \Rightarrow \exists! x_2 \in \mathbb{R} : \overrightarrow{AB} = x_2 \vec{e}_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 \text{ Q.E.D.}$$

3. $\forall \vec{x} \in V \exists! x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} : \vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3$, где $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ — базис V .

Пусть $O \in V$. Приложим к O начала векторов $\vec{x}, \vec{e}_1, \vec{e}_2$ и \vec{e}_3 . $\alpha(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

(a) $\vec{x} = \vec{0} : \vec{x} = 0\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3$.

(b) $\vec{x} \neq \vec{0}$: пусть B — конец \vec{x} . Проведём $L \parallel \vec{e}_3, B \in L$. $A = L \cap \alpha$. $\vec{x} = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{OA} \parallel \vec{a} \Rightarrow (\text{по пункту 2}) \Rightarrow \exists! x_1, x_2 \in \mathbb{R} : \overrightarrow{OA} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 \\ \overrightarrow{AB} \parallel \vec{e}_3 \Rightarrow (\text{по пункту 1}) \Rightarrow \exists! x_3 \in \mathbb{R} : \overrightarrow{AB} = x_3 \vec{e}_3 \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3$$

Q.E.D

То есть, любой вектор может быть разложен по базису, и единственным образом.

Следствия:

$$1. \vec{a} = \sum_{i=1}^3 a_i \vec{e}_i, \vec{b} = \sum_{i=1}^3 b_i \vec{e}_i : \vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \forall i \in \{1, 2, 3\} : a_i = b_i$$

$$2. \vec{a} + \vec{b} = \vec{c} = \sum_{i=1}^3 c_i \vec{e}_i \Leftrightarrow \forall i \in \{1, 2, 3\} : c_i = a_i + b_i$$

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \sum_{i=1}^3 a_i \vec{e}_i + \sum_{i=1}^3 b_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^3 (a_i + b_i) \vec{e}_i = \sum_{i=1}^3 c_i \vec{e}_i \Leftrightarrow \forall i \in \{1, 2, 3\} : c_i = a_i + b_i \text{ Q.E.D.}$$

$$3. \lambda \vec{a} = \vec{c} = \sum_{i=1}^3 c_i \vec{e}_i \Leftrightarrow \forall i \in \{1, 2, 3\} : c_i = \lambda a_i$$

$$\vec{c} = \lambda \vec{a} = \lambda \sum_{i=1}^3 a_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^3 (\lambda a_i) \vec{e}_i = \sum_{i=1}^3 c_i \vec{e}_i \Leftrightarrow \forall i \in \{1, 2, 3\} : c_i = \lambda a_i$$

Q.E.D

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : \begin{bmatrix} \vec{a} = \lambda \vec{b} \\ \vec{b} = \lambda \vec{a} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \forall i \in \{1, 2, 3\} : \begin{bmatrix} a_i = \lambda b_i \\ b_i = \lambda a_i \end{bmatrix} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \lambda - \text{коэффициент пропорциональности.}$$

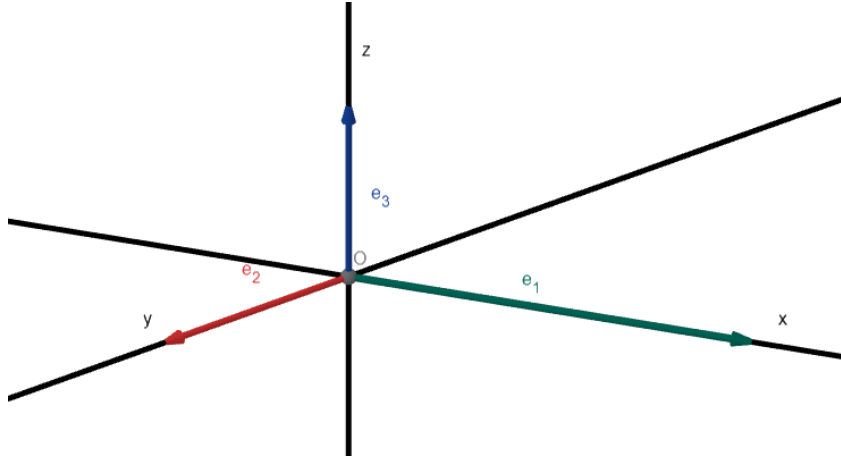
$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots, \vec{v}_n$ — коллинеарны \Rightarrow они линейно зависимы в пространстве.

1.1.2 Система координат на плоскости и в пространстве

Говорят, что в пространстве введена декартова система координат (ДСК), если зафиксирована $(\cdot)O$ (начало координат) и базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$

Оси координат — прямые, содержащие базисные вектора, приложенные к точке O .

Ox - абсцисс, Oy - ординат, Oz - аппликат



Координатами точки M в ДСК $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ называются координаты вектора \vec{OM} в базисе $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

Если вам даны 2 точки: $A(a_1, a_2, a_3), B(b_1, b_2, b_3)$, то $\vec{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$, т.к. $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$

Задача: Даны 2 точки: $A(a_1, a_2, a_3), B(b_1, b_2, b_3)$ и точка $M = (m_1, m_2, m_3)$, делящая отрезок AB в отношении $\frac{AM}{MB} = \lambda > 0$. Найти координаты точки M через A, B, λ .

$$AM = \lambda MB \Leftrightarrow |\vec{AM}| = \lambda |\vec{MB}| \Rightarrow \vec{AM} = \lambda \vec{MB}$$

$$\forall i = 1, 2, 3 : m_i - a_i = \lambda(b_i - m_i) \Leftrightarrow m_i = \frac{\lambda b_i + a_i}{1 + \lambda}$$

Откуда координаты точки M найдены и задача решена.

В дальнейшем будем работать с ортогональной д.с.к., где $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ попарно ортогональны и нормированы ($|\vec{e}_i| = 1$).

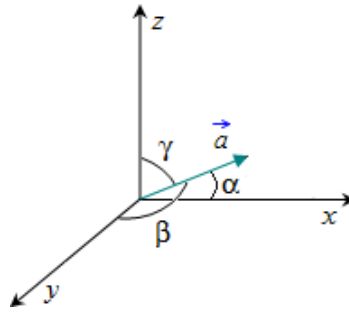
Длина вектора в ортонормированной декартовой системе координат равна квадратному корню суммы квадратов координат:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\sum_{i=1}^3 a_i^2}$$

$\vec{a} = \sum_{i=1}^3 a_i \vec{e}_i$ - разложение по координатам.

$\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ - называется ортом, причем $\vec{a}_0 = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$.

Такие косинусы называются направляющими.

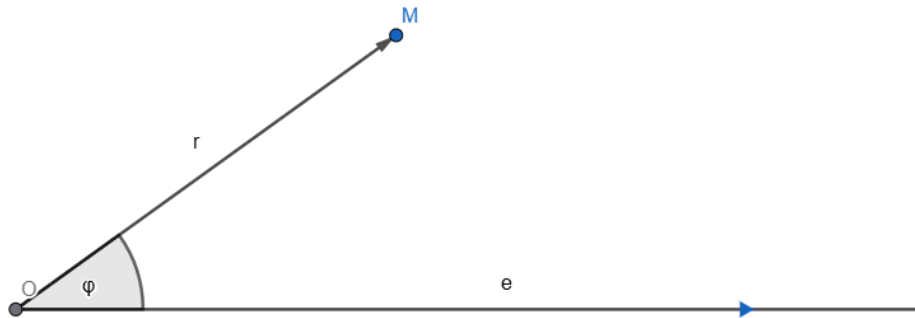


Причем $a_1 = |a| \cdot \cos \alpha$, $a_2 = |a| \cdot \cos \beta$, $a_3 = |a| \cdot \cos \gamma$

В трёхмерном пространстве сумма квадратов косинусов углов между радиус-вектором точки и осями координат равна единице:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

Полярная система координат на плоскости — это точка (начало системы координат O) и луч, исходящий из неё, на плоскости. При этом координатами точки до какой-либо точки M являются длина $r = |\overrightarrow{OM}|$ и угол, который составляет вектор \overrightarrow{OM} с выбранным лучом, равный φ . У точки ноль нет полярных координат, считают, что у нее $r = 0$.



При этом выбор диапазона угла φ неоднозначен.

Связь между декартовыми и полярными координатами: Обычно ДСК связывают с ПСК так: центр общий, а полярный луч — положительное направление Ox . Тогда:

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$$

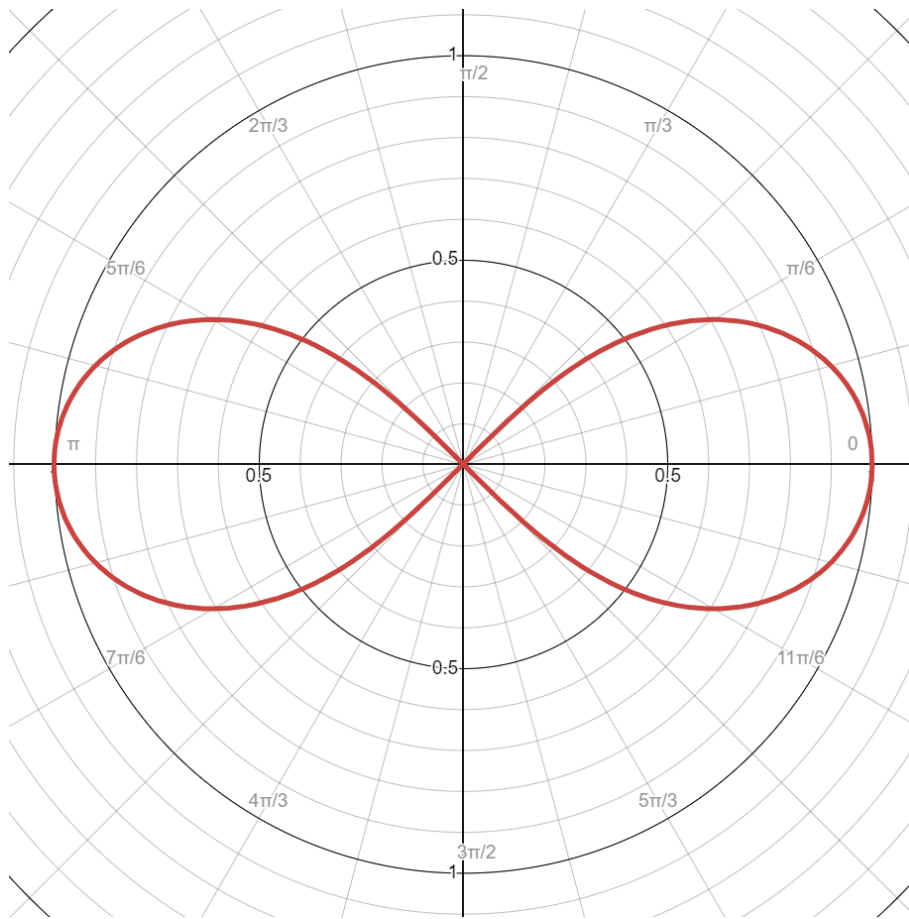
Обратно:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \varphi = \arctan \frac{y}{x} + \pi k$$

(при этом выбор k неоднозначен - зависит от диапазона и в какой четверти лежит точка)

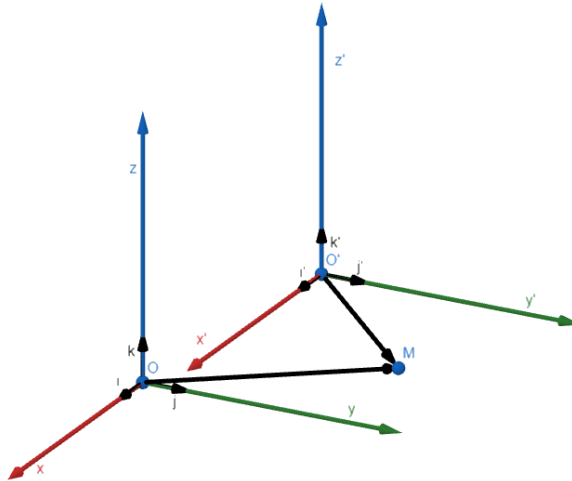
Пример: Лемниската Бернулли

$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$. Но приведя в п.с.к: $r^4 = r^2(\cos^2 x - \sin^2 x) \leftrightarrow r = \sqrt{\cos(2x)}$. В такой форме можно нарисовать эскиз графика:



1.1.3 Преобразования в ДСК

а) Параллельный перенос

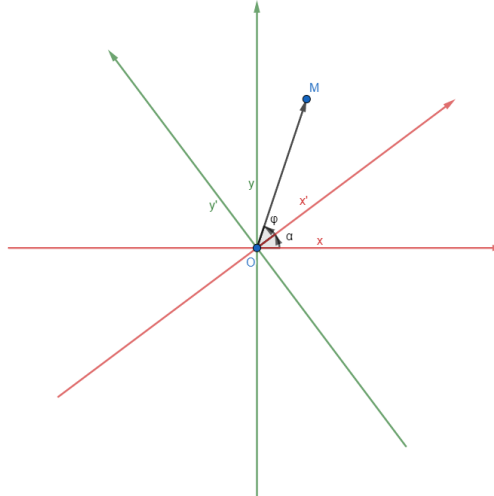


Введем новую ДСК с центром в $O' = (x_0, y_0, z_0)$. Заметим, что $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$. Тогда:

$$M = (x, y, z) \text{ (в старой)} = (x', y', z') \text{ (в новой)} = (x_0 + x', y_0 + y', z_0 + z') \text{ (в старой)}$$

б) Поворот

- На плоскости:



Введем новую ДСК, повернутую на α . (r, φ) п.с.к в $Ox'y'$

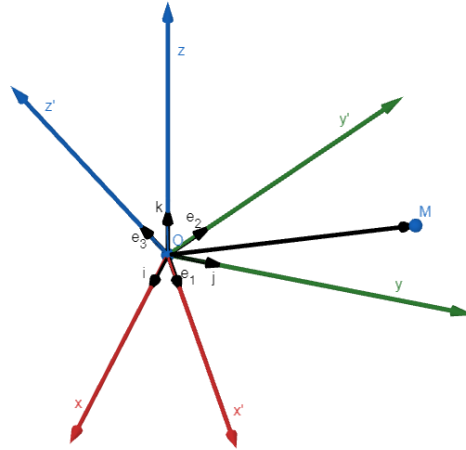
$$M = (x, y) = (r \cos(\varphi + \alpha), r \sin(\varphi + \alpha)) = (x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, x' \sin \alpha + y' \cos \alpha)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \text{ — Матрица поворота.}$$

- В пространстве:



Создадим новую ДСК, повернутую в пространстве. Базис $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \rightarrow \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Оси $x, y, z \rightarrow x', y', z'$. Оба базиса попарно ортогональны и нормированы.

$m = 1, 2, 3 : \vec{e}_m = (\cos \alpha_m, \cos \beta_m, \cos \gamma_m)$ - направляющие косинусы.

$$\begin{aligned}
 M = (x, y, z) &= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \\
 &= x'(\cos \alpha_1 \vec{i} + \cos \beta_1 \vec{j} + \cos \gamma_1 \vec{k}) + \\
 &+ y'(\cos \alpha_2 \vec{i} + \cos \beta_2 \vec{j} + \cos \gamma_2 \vec{k}) + \\
 &+ z'(\cos \alpha_3 \vec{i} + \cos \beta_3 \vec{j} + \cos \gamma_3 \vec{k}) = \\
 &= \vec{i}(x' \cos \alpha_1 + y' \cos \alpha_2 + z' \cos \alpha_3) + \\
 &+ \vec{j}(x' \cos \beta_1 + y' \cos \beta_2 + z' \cos \beta_3) + \\
 &+ \vec{k}(x' \cos \gamma_1 + y' \cos \gamma_2 + z' \cos \gamma_3)
 \end{aligned}$$

Т.к. координаты точки задаются единственным способом, то:

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha_1 + y' \cos \alpha_2 + z' \cos \alpha_3 \\ y = x' \cos \beta_1 + y' \cos \beta_2 + z' \cos \beta_3 \\ z = x' \cos \gamma_1 + y' \cos \gamma_2 + z' \cos \gamma_3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \alpha_2 & \cos \alpha_3 \\ \cos \beta_1 & \cos \beta_2 & \cos \beta_3 \\ \cos \gamma_1 & \cos \gamma_2 & \cos \gamma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

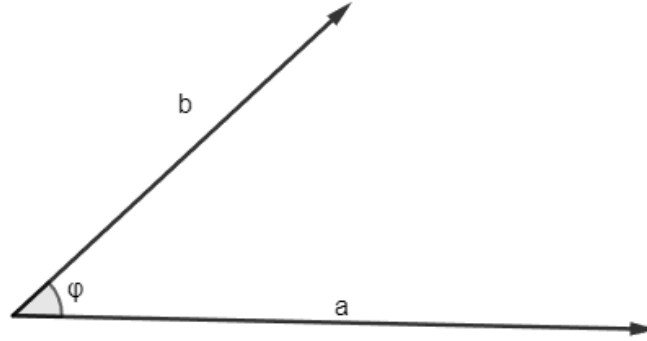
Столбцы в этой матрице - координаты $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

1.1.4 Скалярное произведение векторов

“ \cdot ” : $V_3 \times V_3 \rightarrow \mathbb{R}$

$\vec{a}, \vec{b} \in V_3 \rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} \in \mathbb{R}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \varphi; \varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b})$



Свойства: $(\forall \vec{a}, \vec{b} \in V_3)$

1. Симметричность: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

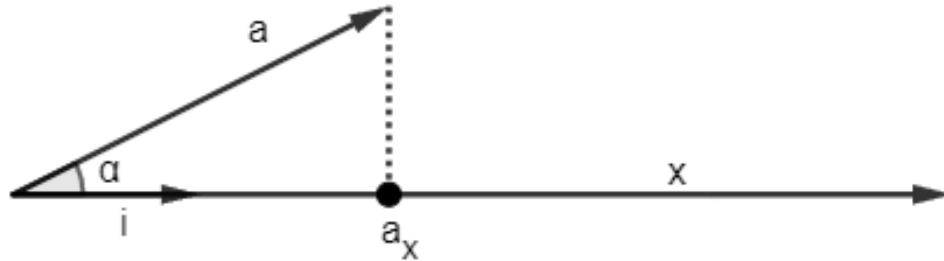
Очевидно

2. Аддитивность по 1-му аргументу: $\forall \vec{a}_1, \vec{a}_2 \in V_3 : (\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \cdot \vec{b} = \vec{a}_1 \cdot \vec{b} + \vec{a}_2 \cdot \vec{b}$

$\text{proj}_{\vec{b}} \vec{a}$ — Проекция \vec{a} на направление \vec{b} .

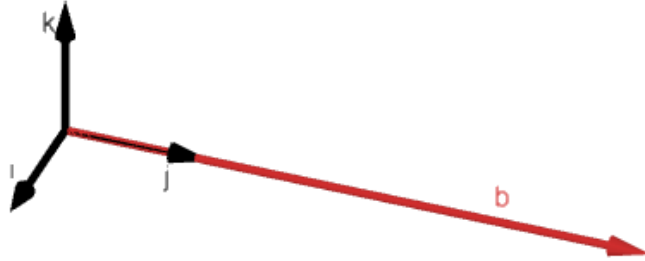
$\text{proj}_{\vec{b}} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \varphi; \varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b}) \in [0, \pi]$

$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) \Rightarrow a_x = |\vec{a}| \cos \alpha; \alpha = \angle(\vec{a}, \vec{i})$



$$a_x = \text{proj}_{\vec{i}} \vec{a} = \vec{i} \cdot \vec{a}, a_y = \text{proj}_{\vec{j}} \vec{a} = \vec{j} \cdot \vec{a}, a_z = \text{proj}_{\vec{k}} \vec{a} = \vec{k} \cdot \vec{a}$$

Выберем ДСК таким образом, что $\vec{i} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ — орт вектора \vec{b}



$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$$

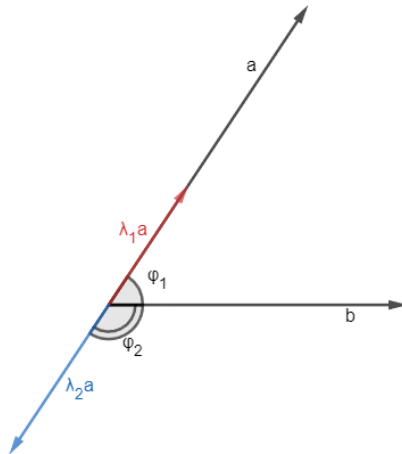
$$(\vec{a})_x = \text{proj}_{\vec{i}} \vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{i} = (\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \cdot \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{1}{|\vec{b}|} ((\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \cdot \vec{b})$$

$$m = 1, 2 : (\vec{a}_m)_x = \text{proj}_{\vec{i}} \vec{a}_m = \vec{a}_m \cdot \vec{i} = \vec{a}_m \cdot \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{1}{|\vec{b}|} (\vec{a}_m \cdot \vec{b})$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{a} &= \frac{1}{|\vec{b}|} ((\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \cdot \vec{b}) \\ \vec{a} &= \vec{a}_1 + \vec{a}_2 = \frac{1}{|\vec{b}|} (\vec{a}_1 \cdot \vec{b}) + \frac{1}{|\vec{b}|} (\vec{a}_2 \cdot \vec{b}) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{1}{|\vec{b}|} ((\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \cdot \vec{b}) = \frac{1}{|\vec{b}|} (\vec{a}_1 \cdot \vec{b}) + \frac{1}{|\vec{b}|} (\vec{a}_2 \cdot \vec{b}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \cdot \vec{b} = \vec{a}_1 \cdot \vec{b} + \vec{a}_2 \cdot \vec{b} \quad Q.E.D$$

3. Однородность по 1-му аргументу: $\forall \lambda \in \mathbb{R} : (\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b})$



$$|\lambda \vec{a}| = |\lambda| |\vec{a}|$$

$$\lambda > 0 : (\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = |\lambda \vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi_1 = \lambda (|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi_1) = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$\lambda < 0 : (\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = |\lambda \vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi_2 = -\lambda (|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi_2) = \lambda (|\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\pi - \varphi_2)) = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$\lambda = 0 : (\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{0} \cdot \vec{b} = 0 = 0(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

Q.E.D.

$$4. \vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0. \vec{a} \cdot \vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$$

Очевидно

$$\left. \begin{array}{l} 2. \\ 3. \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Скалярное произведение линейно по 1-му аргументу.}$$

$$\left. \begin{array}{l} 1. \\ 2. \\ 3. \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Скалярное произведение линейно по 2-му аргументу.} \Rightarrow \text{Скалярное произведение ли-}$$

нейно по всем своим аргументам.

Координатное представление:

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

$$\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}$$

$$\vec{b} = b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}$$

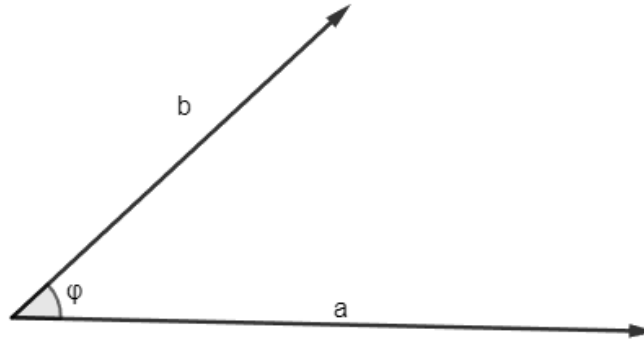
$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}) \cdot (b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}) = (\text{пользуясь 1. - 4.}) = \\ &= a_1 b_1 (\vec{i} \cdot \vec{i}) + a_1 b_2 (\vec{i} \cdot \vec{j}) + a_1 b_3 (\vec{i} \cdot \vec{k}) + \\ &+ a_2 b_1 (\vec{j} \cdot \vec{i}) + a_2 b_2 (\vec{j} \cdot \vec{j}) + a_2 b_3 (\vec{j} \cdot \vec{k}) + \\ &+ a_3 b_1 (\vec{k} \cdot \vec{i}) + a_3 b_2 (\vec{k} \cdot \vec{j}) + a_3 b_3 (\vec{k} \cdot \vec{k}) = \\ &= (\text{все слагаемые кроме диагональных — нули}) = \\ &= a_1 b_1 (\vec{i} \cdot \vec{i}) + a_2 b_2 (\vec{j} \cdot \vec{j}) + a_3 b_3 (\vec{k} \cdot \vec{k}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \end{aligned}$$

1.1.5 Векторное произведение векторов

$$“\times” : V_3 \times V_3 \rightarrow V_3$$

$$\vec{a}, \vec{b} \in V_3 \rightarrow \vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{a} \times \vec{b} \in V_3$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \stackrel{def}{\iff} \begin{cases} \vec{c} \perp \vec{a}, \vec{b} \text{ (плоскости, в которой лежат } \vec{a}, \vec{b}) \\ \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ — правая тройка (определяется по правилу правой руки)} \\ |\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \varphi; \varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b}) \end{cases}$$



$\vec{a} \nparallel \vec{b}$. Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$

Свойства: $(\forall \vec{a}, \vec{b} \in V_3)$

1. Антисимметричность: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

Очевидно

2. Аддитивность по 1-му аргументу: $\forall \vec{a}_1, \vec{a}_2 \in V_3 : (\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \times \vec{b} = \vec{a}_1 \times \vec{b} + \vec{a}_2 \times \vec{b}$

Доказательство см. в 1.6

3. Однородность по 1-му аргументу: $\forall \lambda \in \mathbb{R} : (\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$

Очевидно

4. $|\vec{a} \times \vec{b}| = S(\text{параллелограмм, построенный на } \vec{a}, \vec{b})$

Очевидно

$$\left. \begin{array}{l} 2. \\ 3. \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Векторное произведение линейно по 1-му аргументу.}$$

Координатное представление:

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}$$

$$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3) = b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}$$

$$\vec{c} = (c_1, c_2, c_3) = c_1 \vec{i} + c_2 \vec{j} + c_3 \vec{k}$$

$$\begin{aligned}
\vec{a} \times \vec{b} &= (a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}) \times (b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}) = (\text{пользуясь 1. - 4.}) = \\
&= a_1b_1(\vec{i} \times \vec{i}) + a_1b_2(\vec{i} \times \vec{j}) + a_1b_3(\vec{i} \times \vec{k}) + \\
&+ a_2b_1(\vec{j} \times \vec{i}) + a_2b_2(\vec{j} \times \vec{j}) + a_2b_3(\vec{j} \times \vec{k}) + \\
&+ a_3b_1(\vec{k} \times \vec{i}) + a_3b_2(\vec{k} \times \vec{j}) + a_3b_3(\vec{k} \times \vec{k}) = \\
&= (\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}; \\
&\vec{i} \times \vec{j} = -(\vec{j} \times \vec{i}) = \vec{k}; \\
&\vec{k} \times \vec{i} = -(\vec{i} \times \vec{k}) = \vec{j}; \\
&\vec{j} \times \vec{k} = -(\vec{k} \times \vec{j}) = \vec{i}) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \vec{i}A_{11} + \vec{j}A_{12} + \vec{k}A_{13} = \\
&= \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)
\end{aligned}$$

1.1.6 Смешанное произведение векторов

$$V_3 \times V_3 \times V_3 \rightarrow \mathbb{R}$$

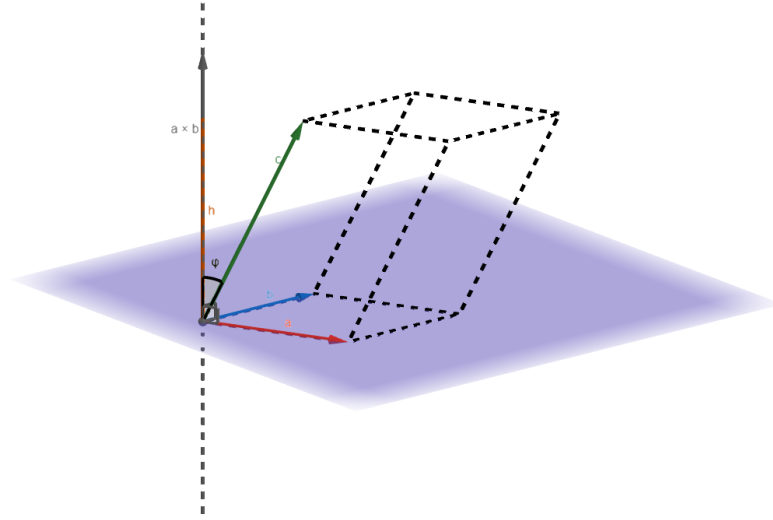
Обозначения нет, вектора ставятся друг к другу без дополнительных знаков.

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_3 \rightarrow \vec{a}\vec{b}\vec{c} \in \mathbb{R}$$

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} \stackrel{\text{def}}{=} (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

Свойства:

1. $|\vec{a}\vec{b}\vec{c}| = V(\text{параллелепипед, построенный на } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, причём $\vec{a}\vec{b}\vec{c} > 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ — правая тройка}$, $\vec{a}\vec{b}\vec{c} < 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ — левая тройка}$.



$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$, пусть $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$, $\vec{c} \neq \vec{0}$ (Если какой-либо вектор — нулевой, то и произведение, и объём — тоже нулевые)

Пусть $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ (Иначе и произведение, и объём равны нулю)

Построим $\vec{a} \times \vec{b}$

- $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — правая тройка $\Leftrightarrow \varphi = \angle(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) < 90^\circ \Leftrightarrow \cos \varphi > 0 \Leftrightarrow \vec{a}\vec{b}\vec{c} > 0$
- $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — левая тройка $\Leftrightarrow \varphi = \angle(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) > 90^\circ \Leftrightarrow \cos \varphi < 0 \Leftrightarrow \vec{a}\vec{b}\vec{c} < 0$

$V := V(\text{параллелепипед, построенный на } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) =$
 $= S(\text{параллелограмм, построенный на } \vec{a}, \vec{b}) \cdot h$, где h - высота параллелограмма.

$$h = |\text{proj}_{\vec{a} \times \vec{b}} \vec{c}| = |\vec{c}| \cos \varphi$$

$$S(\text{параллелограмм, построенный на } \vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

$$V = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cos \varphi = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}| \text{ Q.E.D.}$$

2. $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b}$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — правая тройка $\Leftrightarrow \vec{a}\vec{b}\vec{c} = V(\text{параллелепипед, построенный на } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, а объём не зависит от того, какой вектор выбрать первым, значит:

$$V = \vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b}$$

То же самое, если $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — левая тройка, но со знаком минус.

3. Аддитивность по первому (с 2., по любому) аргументу: $(\vec{a}_1 + \vec{a}_2)\vec{b}\vec{c} = \vec{a}_1\vec{b}\vec{c} + \vec{a}_2\vec{b}\vec{c}$

$$(\vec{a}_1 + \vec{a}_2)\vec{b}\vec{c} = (\text{по 2.}) = \vec{b}\vec{c}(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot (\vec{a}_1 + \vec{a}_2) = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}_1 + (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}_2 = \vec{b}\vec{c}\vec{a}_2 + \vec{b}\vec{c}\vec{a}_1 =$$

$$(\text{по 2.}) = \vec{a}_1\vec{b}\vec{c} + \vec{a}_2\vec{b}\vec{c} \text{ Q.E.D.}$$

4. Однородность по первому (с 2., по любому) аргументу: $(\lambda\vec{a})\vec{b}\vec{c} = \lambda(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$

$$(\lambda\vec{a})\vec{b}\vec{c} = (\text{по 2.}) = \vec{b}\vec{c}(\lambda\vec{a}) = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot (\lambda\vec{a}) = \lambda((\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}) = \lambda(\vec{b}\vec{c}\vec{a}) = (\text{по 2.}) = \lambda(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) \text{ Q.E.D.}$$

Координатное представление:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

по свойству определителя и скалярного произведения.

Доказательство аддитивности векторного произведения:

$$\forall \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{b} \in V_3$$

$$(\vec{a}_1 + \vec{a}_2)\vec{b}\vec{c} = ((\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a}_1\vec{b}\vec{c} + \vec{a}_2\vec{b}\vec{c}$$

$$\text{Пусть } \vec{c} = \vec{i}. \text{ Тогда: } (\vec{a}_1 + \vec{a}_2)\vec{b}\vec{c} = ((\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \times \vec{b}) \cdot \vec{i} = ((\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \times \vec{b})_x$$

$$m = 1, 2 : (\vec{a}_m \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{a}_m \times \vec{b}) \cdot \vec{i} = (\vec{a}_m \times \vec{b})_x$$

$$(\vec{a}_1 + \vec{a}_2)\vec{b}\vec{c} = \vec{a}_1\vec{b}\vec{c} + \vec{a}_2\vec{b}\vec{c} \Leftrightarrow ((\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \times \vec{b})_x = (\vec{a}_1 \times \vec{b})_x + (\vec{a}_2 \times \vec{b})_x$$

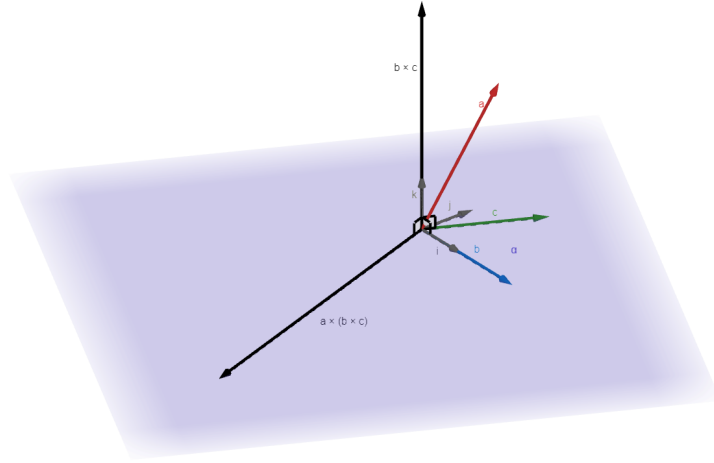
Повторим то же самое, но с $\vec{c} = \vec{j}$ и $\vec{c} = \vec{k}$.

$$\left. \begin{aligned} ((\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \times \vec{b})_x &= (\vec{a}_1 \times \vec{b})_x + (\vec{a}_2 \times \vec{b})_x \\ ((\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \times \vec{b})_y &= (\vec{a}_1 \times \vec{b})_y + (\vec{a}_2 \times \vec{b})_y \\ ((\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \times \vec{b})_z &= (\vec{a}_1 \times \vec{b})_z + (\vec{a}_2 \times \vec{b})_z \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow (\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \times \vec{b} = (\vec{a}_1 \times \vec{b}) + (\vec{a}_2 \times \vec{b}) \text{ Q.E.D.}$$

Двойное векторное произведение («бац минус цаб»)

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$\bullet \vec{b} \nparallel \vec{c}:$$



Проведём плоскость $\alpha(\vec{b}, \vec{c}) \Rightarrow \vec{b} \times \vec{c} \perp \alpha$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \perp \vec{b} \times \vec{c} \Rightarrow \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \in \alpha$$

Введём ДСК, где $\vec{i} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$, $\vec{j} \in \alpha$, $\vec{k} \perp \alpha$. Тогда:

$$\vec{b} = (b_1, 0, 0); \vec{c} = (c_1, c_2, 0); \vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

$$\vec{b} \times \vec{c} = (b_1, 0, 0) \times (c_1, c_2, 0) = (0, 0, b_1 c_2)$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (a_1, a_2, a_3) \times (0, 0, b_1 c_2) = (a_2 b_1 c_2, -a_1 b_1 c_2, 0)$$

$$\vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{b}a_1 c_1 + \vec{b}a_2 c_2 - \vec{c}a_1 b_1 = (b_1(a_1 c_1 + a_2 c_2) - c_1 a_1 b_1, -c_2 a_1 b_1, 0) = (a_2 b_1 c_2, -a_1 b_1 c_2, 0) = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \text{ Q.E.D.}$$

• $\vec{b} \parallel \vec{c}$:

$$\vec{b} \times \vec{c} = \vec{0}$$

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} : \vec{b} = \lambda \vec{c}$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) = \lambda \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{c}) \\ \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{c}(\vec{a} \cdot \lambda \vec{c}) = \lambda \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{c}) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{0} = \vec{b} \times \vec{c} \text{ Q.E.D.}$$

1.2 Прямая на плоскости, плоскость и прямая в пространстве

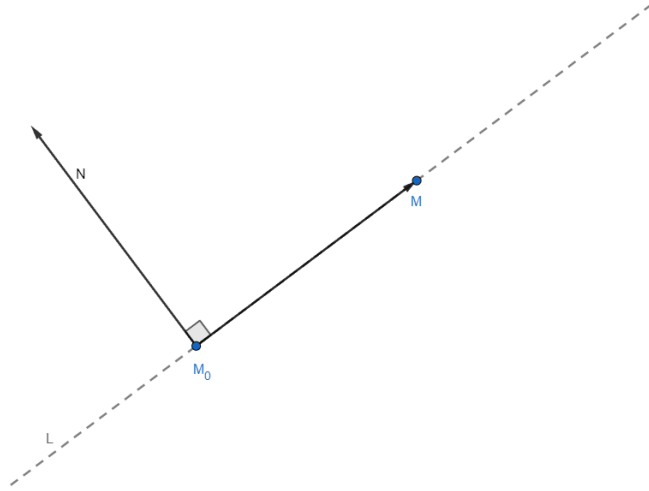
1.2.1 Линейное уравнение

На плоскости (в пространстве) в ДСК Oxy ($Oxyz$) уравнение $Ax + By + C = 0$, $A^2 + B^2 \neq 0$ ($Ax + By + Cz + D = 0$, $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$) — алгебраическое уравнение первого порядка или линейное уравнение.

Любое линейное уравнение на плоскости (в пространстве) определяет прямую (плоскость), и наоборот, любая прямая (плоскость) на плоскости (в пространстве) может быть описана линейным уравнением.

Доказывать будем для прямой в плоскости. Доказательство для прямой в пространстве полностью аналогично.

1. Уравнение \rightarrow прямая:



$Ax + By + C = 0$, $A^2 + B^2 \neq 0$ Не умаляя общности, пусть $B \neq 0$. Тогда $M_0(x_0, y_0) = (0, \frac{-C}{B})$ — удовлетворяет уравнению.

Пусть $M(x, y) \neq M_0$ — тоже удовлетворяет уравнению. Тогда $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$.

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$$

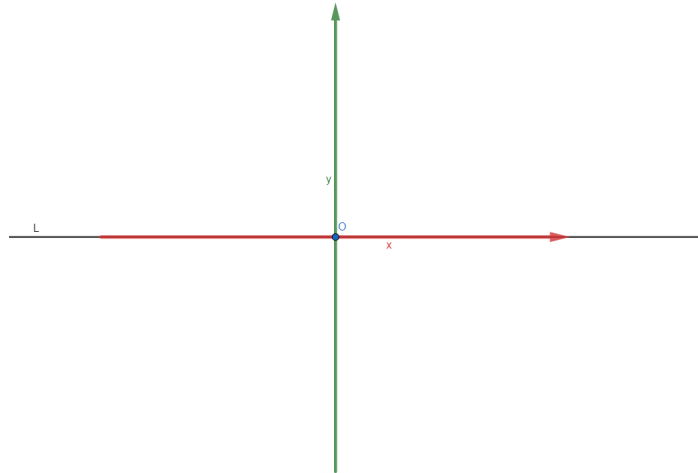
$$\vec{N} := (A, B) \neq 0$$

$$\begin{aligned} M_0(x_0, y_0) = (0, \frac{-C}{B}) &\Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{N} = 0 \Leftrightarrow \vec{N} \perp \overrightarrow{M_0M} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \forall M(x, y), \text{ удовлетворяющих } A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 : M \in L \perp \vec{N}, M_0 \in L \end{aligned}$$

И наоборот, если $M \in L$, то $\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{N} \Rightarrow M$ удовлетворяет $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$

$Ax + By + C = 0$ Определяет прямую L и никакую другую, т.к. Если $M \notin L$, то $\overrightarrow{M_0M} \not\perp \vec{N} \Rightarrow M$ не удовлетворяет $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ Q.E.D.

2. Прямая \rightarrow уравнение:

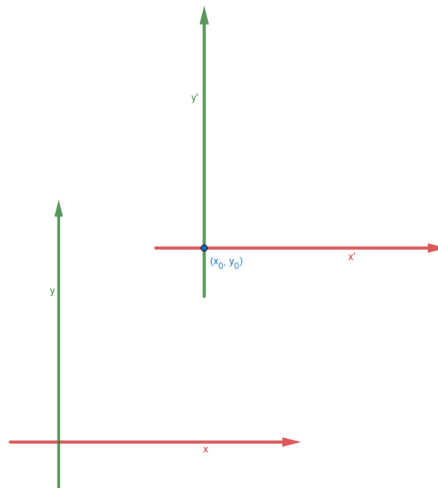


Пусть L — прямая на плоскости.

Введём ДСК так, чтобы L совпала с Ox . Тогда очевидно, что линейное уравнение $y = 0$ содержит все точки L .

Если есть ДСК, в которой L задаётся линейным уравнением, то в любой другой ДСК L будет задаваться линейным уравнением. Любые две ДСК связаны поворотом и сдвигом, значит нужно доказать, что при повороте и сдвиге линейное уравнение остаётся линейным уравнением.

- Сдвиг:



$$x = x' + x_0$$

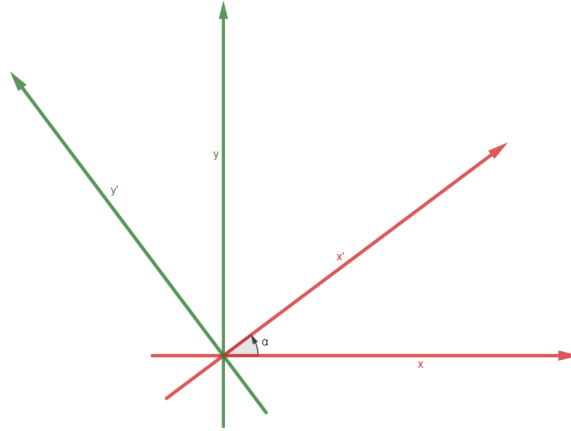
$$y = y' + y_0$$

$$A(x' + x_0) + B(y' + y_0) + C = 0 \Rightarrow Ax' + By' + (Ax_0 + By_0 + C) = 0$$

$$C' := (Ax_0 + By_0 + C)$$

$$Ax + By + C' = 0 - \text{тоже линейное уравнение.}$$

- Поворот:



$$x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha$$

$$y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha$$

$$A(x' \cos \alpha - y' \sin \alpha) + B(x' \sin \alpha + y' \cos \alpha) + C = 0 \Rightarrow (A \cos \alpha + B \sin \alpha)x' + (B \cos \alpha - A \sin \alpha)y' + C = 0$$

$$A' := A \cos \alpha + B \sin \alpha$$

$$B' := B \cos \alpha - A \sin \alpha$$

$$A'^2 + B'^2 = A^2 + B^2 \neq 0, \text{ значит } A'x + B'y + C = 0 - \text{ тоже линейное уравнение.}$$

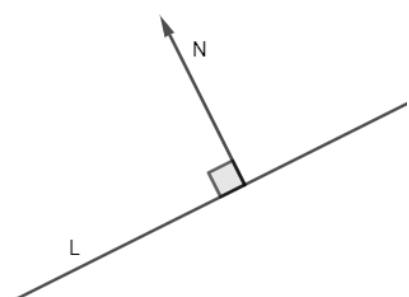
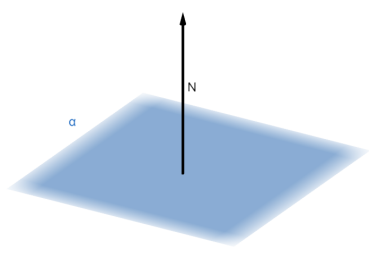
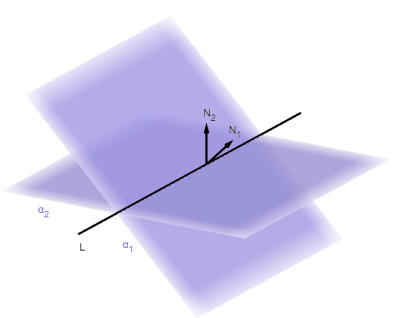
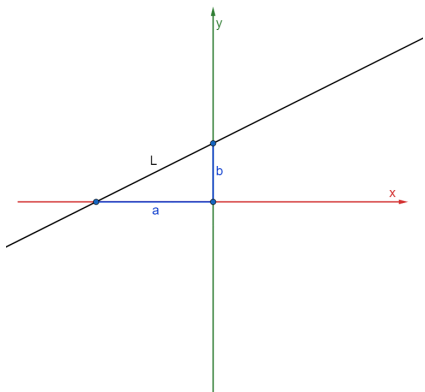
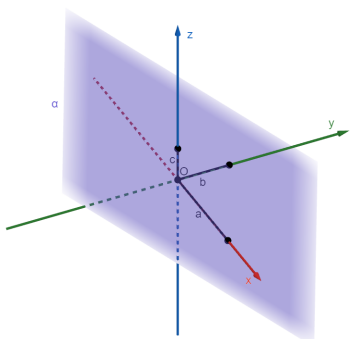
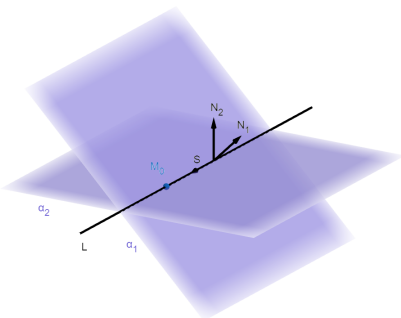
Значит если прямая задаётся линейным уравнением в ДСК, то в любой другой ДСК эта прямая будет задаваться линейным уравнением *Q.E.D.*

$Ax + By + C = 0, A^2 + B^2 \neq 0$ — Общее уравнение прямой на плоскости, $\vec{N} = (A, B)$ — Вектор нормали.

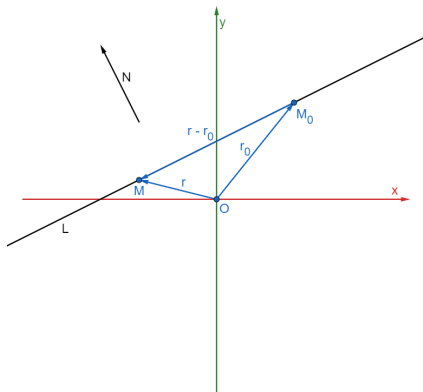
$Ax + By + Cz + D = 0, A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ — Общее уравнение плоскости в пространстве, $\vec{N} = (A, B, C)$ — Вектор нормали.

1.2.2 Способы задания

Прямая в плоскости	Плоскость в пространстве	Прямая в пространстве
--------------------	--------------------------	-----------------------

<p>Общее уравнение:</p>  <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> $Ax + By + C = 0$ </div> <p> $A^2 + B^2 \neq 0$ $\vec{N} = (A, B)$ — нормаль. $\vec{N} \perp L$. $C = 0 \Leftrightarrow 0 \in L$ </p>	<p>Общее уравнение:</p>  <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> $Ax + By + Cz + D = 0$ </div> <p> $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ $\vec{N} = (A, B, C)$ — нормаль. $\vec{N} \perp \alpha$. $C = 0 \Leftrightarrow 0 \in \alpha$ </p>	<p>Пересечение плоскостей:</p>  <p> $L = \alpha_1 \cap \alpha_2$ <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> $L : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ </div> $A_i^2 + B_i^2 + C_i^2 \neq 0$ $\vec{N}_1 \nparallel \vec{N}_2$ </p>
<p>Уравнение в отрезках:</p>  <p> $(0, 0) \notin L$ <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ </div> $a^2 + b^2 \neq 0$ </p>	<p>Уравнение в отрезках:</p>  <p> $(0, 0, 0) \notin \alpha$ <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ </div> $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ </p>	<p>Пересечение плоскостей \rightarrow каноническое уравнение:</p>  <p> $\vec{s} \perp \vec{N}_1, \vec{s} \perp \vec{N}_2$ $\vec{s} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2$ Пусть $M_0 = (x_0, y_0, 0) = L \cap Oy$ Тогда решим систему: <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> $L : \begin{cases} A_1x_0 + B_1y_0 + D_1 = 0 \\ A_2x_0 + B_2y_0 + D_2 = 0 \end{cases}$ </div> Если не получилось, то $M_0 = (x_0, 0, z_0) = L \cap Oz$ Снова не получилось: $M_0 = (0, y_0, z_0) = L \cap Oz$ </p>

Уравнение через нормаль и точку:



$$M_0(x_0, y_0) \in L$$

$$\vec{N}(A, B) \perp L$$

$$M(x, y) \in L$$

$$\vec{r}_0 = \overrightarrow{OM_0} = (x_0, y_0)$$

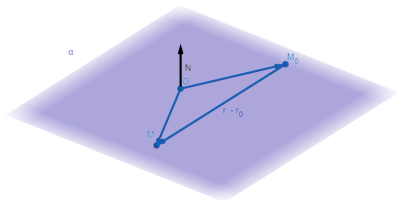
$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = (x, y)$$

$$\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0 \perp \vec{N} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{N} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

Уравнение через нормаль и точку:



$$M_0(x_0, y_0, z_0) \in \alpha$$

$$\vec{N}(A, B, C) \perp \alpha$$

$$M(x, y, z) \in \alpha$$

$$\vec{r}_0 = \overrightarrow{OM_0} = (x_0, y_0, z_0)$$

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = (x, y, z)$$

$$\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0 \perp \vec{N} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{N} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

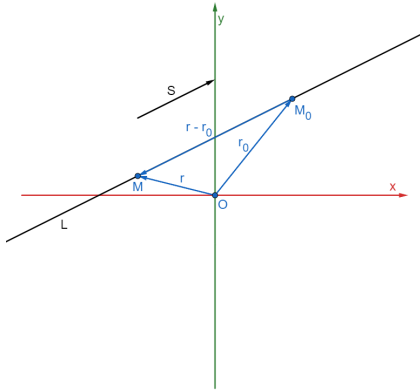
Каноническое уравнение \rightarrow пересечение плоскостей:

$$L : \begin{cases} m(x - x_0) - l(y - y_0) = 0 \\ n(x - x_0) - l(z - z_0) = 0 \end{cases}$$

Где $(l, m, n) = \vec{s}$ - направляющий вектор прямой L ,

$$(x_0, y_0, z_0) = M_0 \in L$$

Каноническое / параметрическое уравнение:

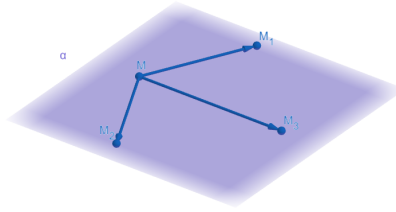


$$\begin{aligned}
 &M_0(x_0, y_0) \in L \\
 &\vec{s}(l, m) \parallel L \\
 &M(x, y) \in L \\
 &\vec{r}_0 = \overrightarrow{OM_0} = (x_0, y_0) \\
 &\vec{r} = \overrightarrow{OM} = (x, y) \\
 &\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0 \parallel \vec{s} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} : \vec{r} - \vec{r}_0 = t\vec{s} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \boxed{\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = t}
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{s}}$$

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + tl \\ y = y_0 + tm \end{cases}}$$

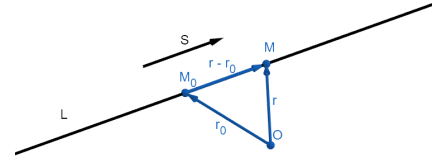
Условие принадлежности четырёх точек плоскости:



$M, M_1, M_2, M_3 \in \alpha$:

$$\boxed{\overrightarrow{MM_1}\overrightarrow{MM_2}\overrightarrow{MM_3} = 0}$$

Каноническое / параметрическое уравнение:



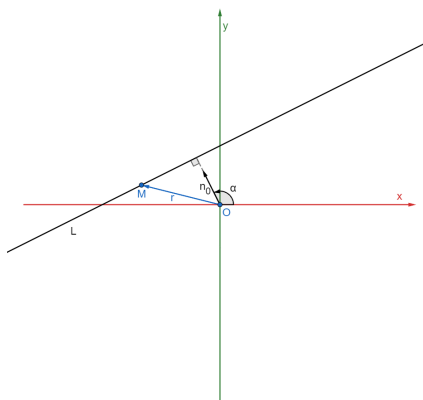
$$\begin{aligned}
 &M_0(x_0, y_0, z_0) \in L \\
 &\vec{s}(l, m, n) \parallel L \\
 &M(x, y, z) \in L \\
 &\vec{r}_0 = \overrightarrow{OM_0} = (x_0, y_0, z_0) \\
 &\vec{r} = \overrightarrow{OM} = (x, y, z) \\
 &\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0 \parallel \vec{s} \Leftrightarrow
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} = t \in \mathbb{R}}$$

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{s}}$$

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + tl \\ y = y_0 + tm \\ z = z_0 + tn \end{cases}}$$

Нормальное уравнение:



$$O(0,0) \notin L$$

$$p = \text{dist}(O, L) > 0$$

$$\vec{n}_0 \perp L, |\vec{n}_0| = 1$$

\vec{n}_0 направлен в сторону L если его приложить к O

$$\vec{n}_0 = (\cos \alpha, \sin \alpha)$$

$$M(x, y) \in L$$

$$p = \text{proj}_{\vec{n}_0} \vec{r} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\vec{r} \cdot \vec{n}_0 - p = 0}$$

$$\boxed{x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0}$$

$$L: Ax + By + C = 0, A^2 + B^2 \neq 0$$

$$\vec{N} = (A, B) \perp L \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{n}_0 = \frac{\pm \vec{N}}{|\vec{N}|} =$$

$$= \pm \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right)$$

$$C > 0: \text{“} - \text{”}$$

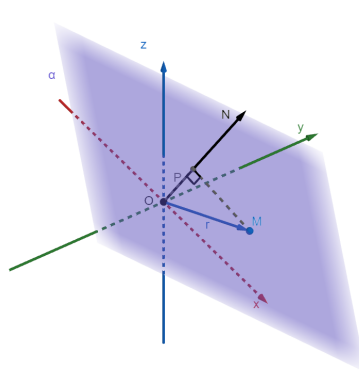
$$C < 0: \text{“} + \text{”}$$

$$\cos \alpha = \frac{\pm A}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$\sin \alpha = \frac{\pm B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$p = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Нормальное уравнение:



$$O(0,0,0) \notin L$$

$$p = \text{dist}(O, \alpha) > 0$$

$$\vec{n}_0 \perp \alpha, |\vec{n}_0| = 1$$

\vec{n}_0 направлен в сторону α если его приложить к O

$$\vec{n}_0 = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

$$M(x, y, z) \in \alpha$$

$$p = \text{proj}_{\vec{n}_0} \vec{r} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\vec{r} \cdot \vec{n}_0 - p = 0}$$

$$\boxed{x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0}$$

$$\alpha: Ax + By + Cz + D = 0, A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$$

$$\vec{N} = (A, B, C) \perp L \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{n}_0 = \frac{\pm \vec{N}}{|\vec{N}|}$$

$$D > 0: \text{“} - \text{”}$$

$$D < 0: \text{“} + \text{”}$$

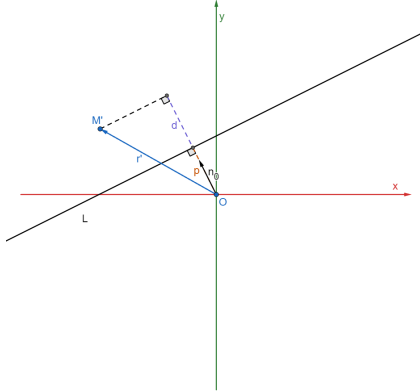
$$\cos \alpha = \frac{\pm A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\cos \beta = \frac{\pm B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\cos \gamma = \frac{\pm C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$p = \frac{|D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Расстояние от точки до прямой:



$$M(x', y')$$

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM'} = (x', y')$$

L задана нормальным уравнением

$\text{proj}_{\vec{n}_0} \vec{r} - p = \delta$ — отклонение
 $\delta > 0$, если M' и O лежат по разные стороны от L

$\delta < 0$, если M' и O лежат по одну сторону от L

$$d = \text{dist}(M', L) = |\delta| =$$

$$= |\vec{r} \cdot \vec{n}_0 - p| =$$

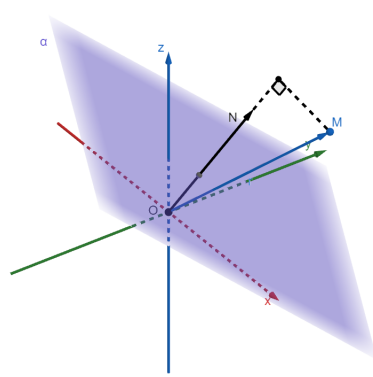
$$= |x' \cos \alpha + y' \sin \alpha - p| =$$

$$L: Ax + By + C = 0$$

$$d = \frac{|Ax' + By' + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Работает даже если $O \in L$

Расстояние от точки до плоскости:



$$M(x', y', z')$$

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM'} = (x', y', z')$$

α задана нормальным уравнением

$\text{proj}_{\vec{n}_0} \vec{r} - p = \delta$ — отклонение
 $\delta > 0$, если M' и O лежат по разные стороны от α

$\delta < 0$, если M' и O лежат по одну сторону от α

$$d = \text{dist}(M', \alpha) = |\delta| =$$

$$= |\vec{r} \cdot \vec{n}_0 - p| =$$

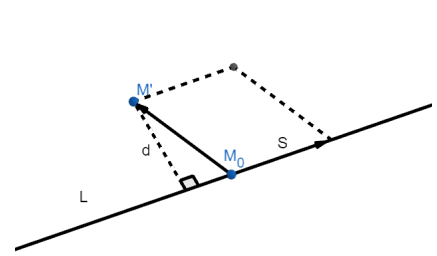
$$= |x' \cos \alpha + y' \cos \beta + z' \cos \gamma - p| =$$

$$\alpha: Ax + By + Cz + D = 0$$

$$d = \frac{|Ax' + By' + Cz' + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Работает даже если $O \in \alpha$

Расстояние от точки до прямой:



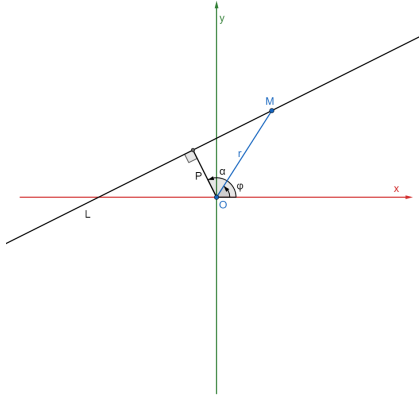
$$d = \text{dist}(M', L) =$$

$$= h(\text{параллелограмма, построенного на } \vec{s} \text{ и } \overrightarrow{M_0M'}) =$$

$$= \frac{|\vec{s} \times \overrightarrow{M_0M'}|}{|\vec{s}|}$$

где $M_0 \in L$ — точка на прямой

Полярное уравнение:



$O(0,0) \notin L$

(Если $O \in L$, то L распадается на 2 луча и точку O)

$M(x, y) \in L$

$(x, y) \leftrightarrow (\varphi, r)$:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$

L задана нормальным уравнением:

$$\begin{aligned} x \cos \alpha + y \sin \alpha - p &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow r \cos \varphi \cos \alpha - r \sin \varphi \sin \alpha - p &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow r \cos(\varphi - \alpha) - p &= 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\boxed{r = \frac{p}{\cos(\varphi - \alpha)}}$$

$$r > 0$$

$$p > 0$$

$$\cos(\varphi - \alpha) > 0$$

Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве:

$$\alpha : Ax + By + Cz + D = 0, A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$$

$$L : \vec{s} = (l, m, n), M_0(x_0, y_0, z_0)$$

$$\bullet \begin{cases} L \parallel \alpha \\ L \subset \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \vec{s} \perp \vec{N} \Leftrightarrow \vec{s} \cdot \vec{N} = 0 \Leftrightarrow$$

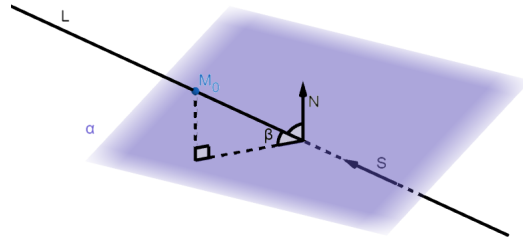
$$\Leftrightarrow Al + Bm + Cn = 0$$

$$\bullet L \subset \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{s} \cdot \vec{N} = 0 \\ M_0 \in \alpha \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Al + Bm + Cn = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \end{cases}$$

$$\bullet \begin{cases} L \parallel \alpha \\ L \not\subset \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Al + Bm + Cn = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0 \end{cases}$$

$$\bullet L \cap \alpha = Q:$$



$$Q(x_Q, y_Q, z_Q) \in L \Leftrightarrow \begin{cases} x_Q = x_0 + lt_Q \\ y_Q = y_0 + mt_Q \\ z_Q = z_0 + nt_Q \end{cases}$$

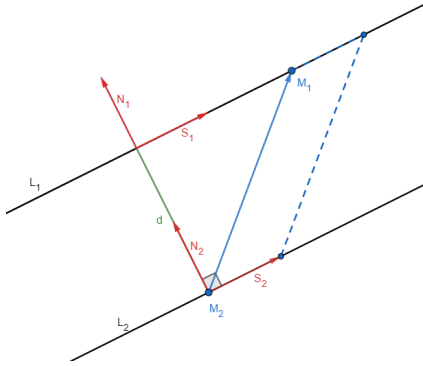
$$Q \in \alpha \Leftrightarrow A(x_0 + lt_Q) + B(y_0 + mt_Q) + C(z_0 + nt_Q) + D = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{t_Q = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Al + Bm + Cn}}$$

$$\sin \angle(L, \alpha) = \cos(90^\circ - \angle(L, \alpha)) = \cos \angle(\vec{N}, \vec{s}) =$$

$$= \boxed{\frac{|\vec{N} \cdot \vec{s}|}{|\vec{N}| |\vec{s}|}}$$

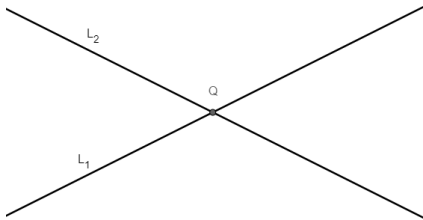
Взаимное расположение прямых на плоскости: $\bullet L_1 \parallel L_2$:



$$\begin{aligned} L_1 \parallel L_2 &\Leftrightarrow \vec{N}_1 \parallel \vec{N}_2 \Leftrightarrow \vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} \\ d = \text{dist}(L_1, L_2) (\text{парам. ур.}) &= h(\text{параллелограмма, построенного на } \vec{s}_2 \text{ и } \overrightarrow{M_2 M_1}) = \\ &= \frac{|\vec{s}_2 \times \overrightarrow{M_2 M_1}|}{|\vec{s}_2|} = \\ &= \text{dist}(M_1, L_2) \end{aligned}$$

$$\bullet L_1 = L_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

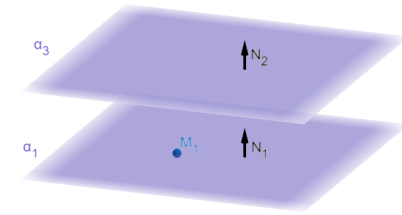
$$\bullet L_1 \cap L_2 = Q:$$



$$\begin{aligned} L_1 \cap L_2 &\Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \\ Q: \begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 \end{cases} \\ \Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} &= A_1 B_2 - A_2 B_1 \neq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \exists! Q \end{aligned}$$

Взаимное расположение плоскостей в пространстве:

$\bullet \alpha_1 \parallel \alpha_2$:



$$\alpha_1 \parallel \alpha_2 \Leftrightarrow \vec{N}_1 \parallel \vec{N}_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

$$d = \text{dist}(\alpha_1, \alpha_2)$$

$$M_1 \in \alpha_1 \Rightarrow d = \text{dist}(M_1, \alpha_2)$$

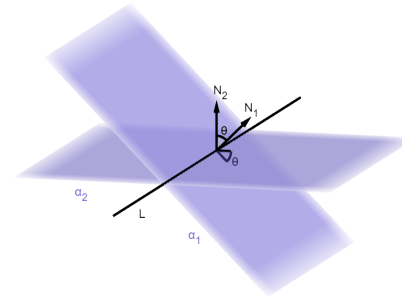
α_1, α_2 заданы нормальным уравнением:

$$d = \begin{cases} |P_1 - P_2|, \vec{n}_{01} = \vec{n}_{02} \\ P_1 + P_2, \vec{n}_{01} = -\vec{n}_{02} \end{cases}$$

$\bullet \alpha_1 = \alpha_2$:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$$

$\bullet \alpha_1 \cap \alpha_2 = L$:



$$L: \begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \\ \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2} \\ \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2} \end{cases}$$

$$\theta = \angle(\alpha_1, \alpha_2)$$

$$|\cos \theta| = \frac{|\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2|}{|\vec{N}_1| |\vec{N}_2|}$$

Взаимное расположение прямых в пространстве:

$$\bullet \begin{cases} L_1 \parallel L_2 \\ L_1 = L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

$$\bullet L_1 = L_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2 \\ M_1 \in L_2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2 \parallel \overrightarrow{M_1 M_2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} \\ \frac{l_1}{x_1 - x_2} = \frac{m_1}{y_1 - y_2} = \frac{n_1}{z_1 - z_2} \end{cases}$$

$$\bullet \begin{cases} L_1 \parallel L_2 \\ L_1 \neq L_2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2 \\ M_1 \notin L_2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2 \\ \vec{s}_1 \nparallel \overrightarrow{M_1 M_2} \end{cases}$$

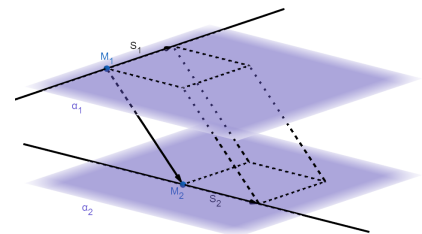
$$d = \text{dist}(L_1, L_2) = \frac{|\vec{s} \times \overrightarrow{M_1 M_2}|}{|\vec{s}|}$$

$$\bullet L_1 \cap L_2 = Q \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{s}_1 \nparallel \vec{s}_2 \\ \vec{s}_1 \vec{s}_2 \overrightarrow{M_1 M_2} = 0 \end{cases}$$

$$\cos \angle(L_1, L_2) = \frac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|}{|\vec{s}_1| |\vec{s}_2|}$$

$\bullet L_1, L_2$ скрещиваются:

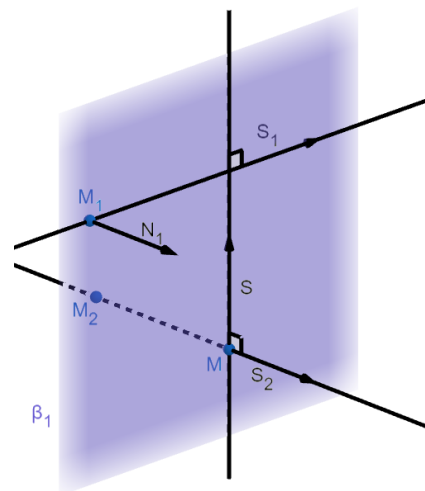


$$\vec{s}_1 \vec{s}_2 \overrightarrow{M_1 M_2} \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists \alpha_1, \alpha_2: \begin{cases} L_1 \subset \alpha_1 \\ L_2 \subset \alpha_2 \end{cases}$$

$dist(L_1, L_2) = dist(\alpha_1, \alpha_2) = h$ (параллелепипед, построенный на $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \overrightarrow{M_1M_2}$) =

$$= \frac{|\vec{s}_1 \vec{s}_2 \overrightarrow{M_1M_2}|}{|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2|}$$



$$L(M, \vec{s}) : \begin{cases} L \perp L_1 \\ L \perp L_2 \end{cases}$$

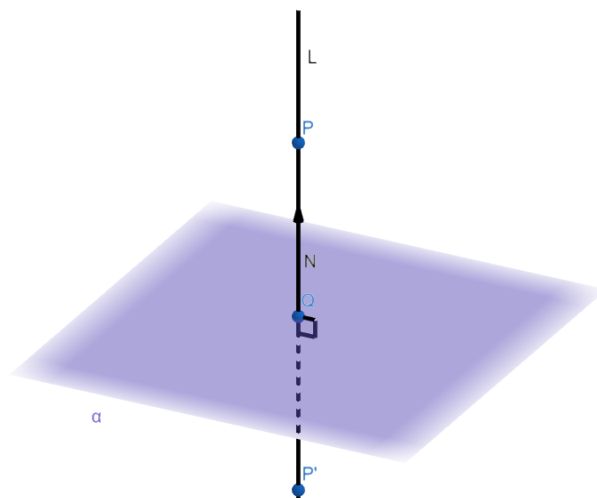
$$\vec{s} = \vec{s}_1 \times \vec{s}_2$$

$$\beta_1(\vec{s}_1, \vec{s}, M_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{M = L_2 \cap \beta_1}$$

$$\begin{aligned} \vec{N}_1 &= \vec{s}_1 \times \vec{s} = \\ &= \vec{s}_1 \times (\vec{s}_1 \times \vec{s}_2) \end{aligned}$$

1.2.3 Проекция точки на плоскость и прямую



$$PQ \perp \alpha, Q \in \alpha$$

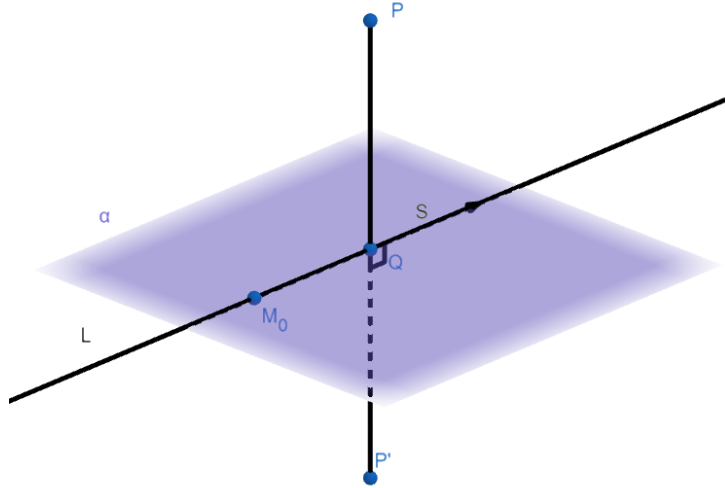
$$\alpha : Ax + By + Cz + D = 0, \vec{N} = (A, B, C)$$

$$P(P_1, P_2, P_3)$$

$$L(P, \vec{N}) : \begin{cases} x = P_1 + tA \\ y = P_2 + tB \\ z = P_3 + tC \end{cases} \Rightarrow Q = L \cap \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A(P_1 + t_Q A) + B(P_2 + t_Q B) + C(P_3 + t_Q C) + D = 0 \Rightarrow t_Q = -\frac{AP_1 + BP_2 + CP_3 + D}{A^2 + B^2 + C^2}$$

$$P' - \text{отражение } P \text{ относительно } \alpha \Rightarrow P' = 2Q - P$$



$$PQ \perp L(M_0, \vec{s} = (l, m, n)), Q \in L$$

$$P = (P_1, P_2, P_3)$$

$$\alpha(P, \vec{s}) : l(x - P_1) + m(y - P_2) + n(z - P_3) = 0 \quad L : \begin{cases} x = x_0 + tl \\ y = y_0 + tm \\ z = z_0 + tn \end{cases}$$

$$Q = \alpha \cap L \Rightarrow l((x_0 + t_Q l) - P_1) + m((y_0 + t_Q m) - P_2) + n((z_0 + t_Q n) - P_3) = 0$$

Находим из этого t_Q и подставляем в уравнение L .

$$P' - \text{отражение } P \text{ относительно } L \Rightarrow P' = 2Q - P$$

1.3 Кривые второго порядка (КВП)

1.3.1 Канонические уравнения КВП

Кривая второго порядка — множество точек на плоскости, декартовы координаты которых удовлетворяет алгебраическому уравнению 2-го порядка:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0, (a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0)$$

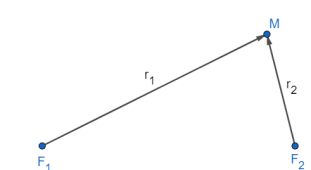
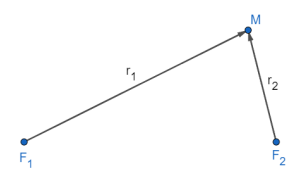
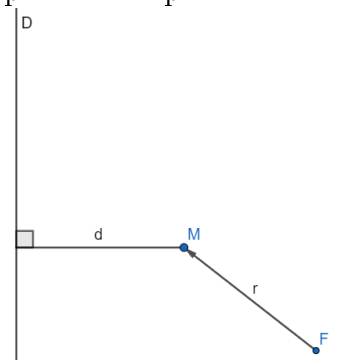
КВП делятся на 2 вида:

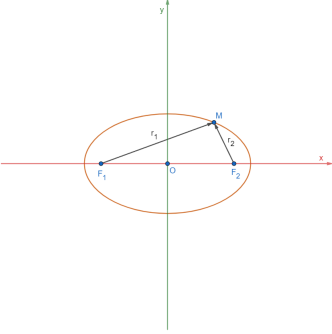
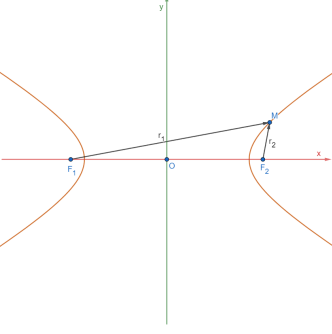
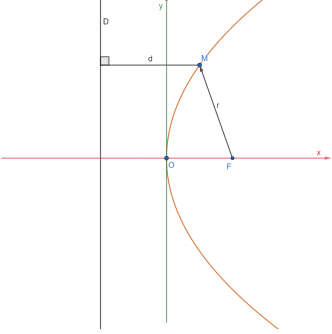
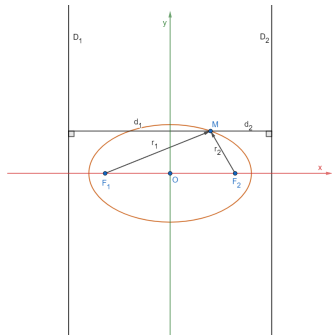
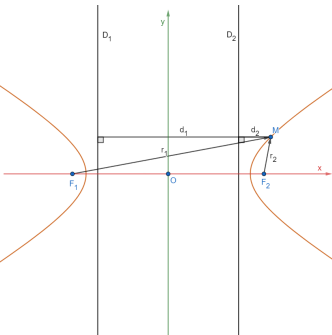
1. Невырожденные:

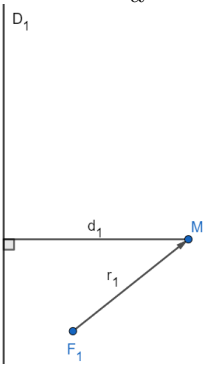
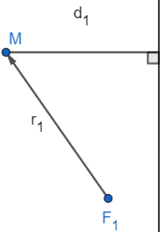
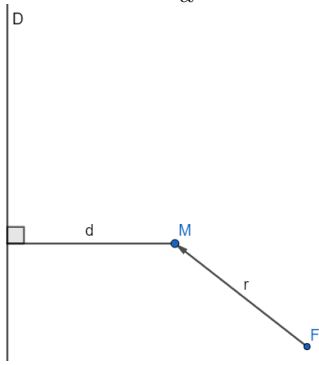
- Эллипс
- Парабола
- Гипербола

2. Вырожденные:

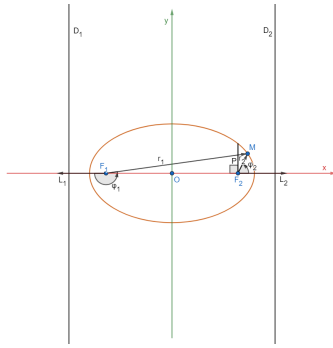
- Пара пересекающихся прямых
- Пара параллельных прямых
- Пара совпадающих прямых
- Точка
- Пустое множество

	Эллипс	Гипербола	Парабола
Опр. 1	<p>ГМТ на плоскости, таких, что сумма расстояний до двух фиксированных точек плоскости — величина постоянная и равная $2a$.</p>  <p>$r_1 + r_2 = 2a = \text{const}$</p>	<p>ГМТ на плоскости, таких, что модуль разности расстояний до двух фиксированных точек плоскости — величина постоянная и равная $2a$.</p>  <p>$r_1 - r_2 = 2a = \text{const}$</p>	<p>ГМТ на плоскости, таких, что расстояние до фиксированной точки плоскости равно расстоянию до фиксированной прямой.</p>  <p>$r = d$</p>

Уравнение в ДСК	 <p> $F_{1,2}$ — фокусы $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$ $\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$ $a^2 = b^2 + c^2, a > c$ r_1, r_2 — фокальные радиусы a — большая полуось b — малая полуось </p>	 <p> $F_{1,2}$ — фокусы $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$ $\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$ $c^2 = a^2 + b^2, a < c$ r_1, r_2 — фокальные радиусы a — действительная полуось b — мнимая полуось Имеет асимптоты $y = \pm \frac{b}{a}x$ </p>	 <p> F — фокус, D — директриса $F\left(\frac{p}{2}, 0\right), D: x = -\frac{p}{2}$ $\boxed{y^2 = 2px}$ $p = \text{dist}(F, D)$ p — фокальный параметр </p>
ε — Эксцентриситет	$\varepsilon = \frac{c}{a} < 1$	$\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$	$\varepsilon = 1$
$r_{1,2}$ — фокальные радиусы	$r_{1,2} = a \pm \varepsilon x$ $M(x, y) \in \text{эллипсу}$	Правая ветвь: $r_{1,2} = \varepsilon x \pm a$ Левая ветвь: $r_{1,2} = -\varepsilon x \mp a$ $M(x, y) \in \text{гиперболе}$	$r = x + \frac{p}{2}$
Директрисы	 <p> $D_{1,2}: x = \mp \frac{a}{\varepsilon}$ $\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon = \frac{r}{d}$ </p>	 <p> $D_{1,2}: x = \mp \frac{a}{\varepsilon}$ $\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon = \frac{r}{d}$ </p>	$\frac{r}{d} = 1 = \varepsilon$

Опр. 2	<p>ГМТ на плоскости, таких, что отношение расстояния до фиксированной точки плоскости к расстоянию до прямой — величина постоянная и меньшая единицы.</p> $\varepsilon = \text{const} = \frac{r}{d} < 1$ 	<p>ГМТ на плоскости, таких, что отношение расстояния до фиксированной точки плоскости к расстоянию до прямой — величина постоянная и большая единицы.</p> $\varepsilon = \text{const} = \frac{r}{d} > 1$ 	<p>ГМТ на плоскости, таких, что отношение расстояния до фиксированной точки плоскости к расстоянию до прямой — величина постоянная и равная единице.</p> $\varepsilon = \text{const} = \frac{r}{d} = 1$ 
--------	--	--	---

Полярное
уравнение



Начало ПСК в одном из фокусов, ось направлена в сторону соответствующей директрисы.

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$$

p — фокальный параметр.

$$p = \varepsilon \cdot q = \frac{b^2}{a}$$

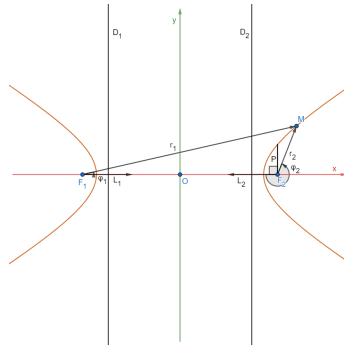
$$q = \text{dist}(F, D) = \frac{a}{\varepsilon} - c$$

p — Длина перпендикуляра от F до эллипса

Директрисы:

$$r = \frac{\pm \frac{a}{\varepsilon} - c}{\cos \varphi}$$

Если ось направлена в противоположную сторону, то заменяем все вхождения $\cos \varepsilon$ на $-\cos \varepsilon$.



Начало ПСК в одном из фокусов, ось направлена в сторону соответствующей директрисы.

$$r = \frac{\pm p}{1 \pm \varepsilon \cos \varphi}$$

Ветвь, соответствующая фокусу: “+”

Ветвь, не соответствующая фокусу: “−”

p — фокальный параметр.

$$p = \varepsilon \cdot q = \frac{b^2}{a}$$

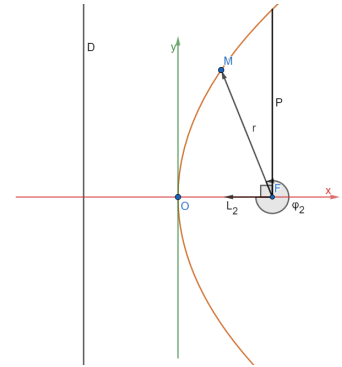
$$q = \text{dist}(F, D) = c - \frac{a}{\varepsilon}$$

p — Длина перпендикуляра от F до гиперболы.

Директрисы:

$$r = \frac{\pm \frac{a}{\varepsilon} + c}{\cos \varphi}$$

Если ось направлена в противоположную сторону, то заменяем все вхождения $\cos \varphi$ на $-\cos \varphi$.



Начало ПСК в фокусе, ось направлена в сторону директрисы.

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi} =$$

$$= \frac{p}{1 + \cos \varphi}$$

p — Длина перпендикуляра от F до параболы

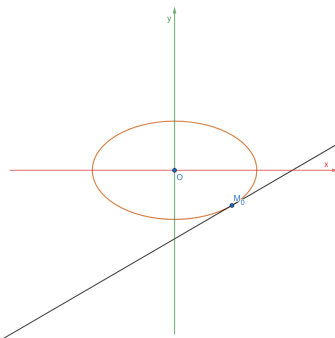
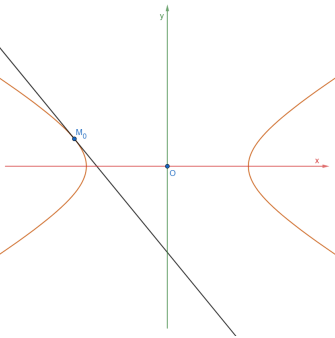
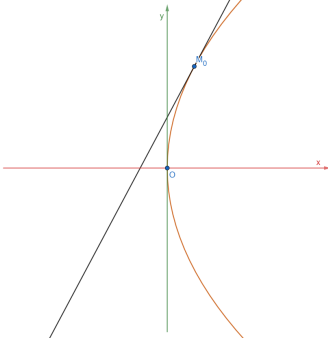
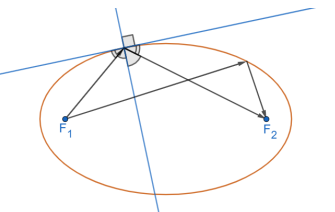
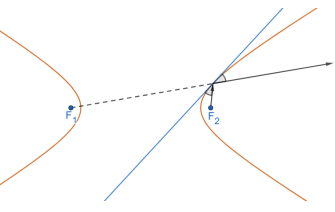
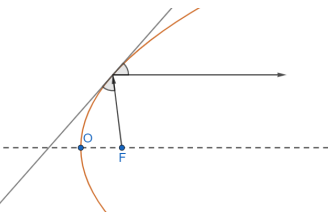
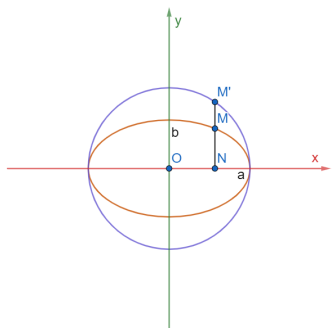
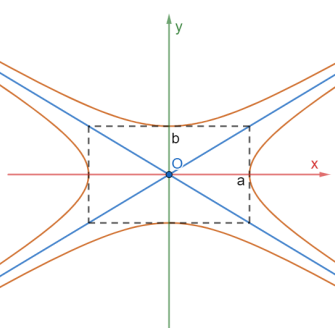
Если ось направлена

в противоположную

сторону, то заменяем

все вхождения $\cos \varphi$ на

$-\cos \varphi$.

Касательные	 <p>$M(x_0, y_0) \in \text{эллипсу}$ $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$</p>	 <p>$M(x_0, y_0) \in \text{гиперболе}$ $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$</p>	 <p>$M(x_0, y_0) \in \text{параболе}$ $yy_0 = p(x + x_0)$</p>
Оптические свойства	 <p>Любой луч, вышедший из одного фокуса, отразившись, пройдёт через другой фокус.</p>	 <p>Любой луч, вышедший из одного фокуса, отразившись, пройдёт по прямой, проходящей через другой фокус.</p>	 <p>Любой луч, вышедший из фокуса, отразившись, пройдёт по прямой, параллельной оси параболы.</p>
Другие свойства	 <p>$\frac{MN}{M'N} = \frac{b}{a}$ Любой эллипс — сжатая по какой-то оси окружность.</p>	 <p>$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ — сопряжённая гипербола. Имеет те же асимптоты.</p>	

Доказательство свойств (на примере гиперболы, эллипс доказывается полностью аналогично):

- Каноническое уравнение

По определению: $|r_1 - r_2| = 2a$

$$F_1(-c, 0), F_2(c, 0), c > a$$

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\text{Пусть } r_1 > r_2 \text{ (правая ветвь)} \Rightarrow r_1 = 2a + r_2 \Rightarrow r_1^2 = 4a^2 + 4ar_2 + r_2^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4ar_2 + (x-c)^2 + y^2 \Rightarrow xc = a^2 + ar_2 \Rightarrow r_2 = \frac{xc}{a} - a$$

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \Rightarrow \boxed{r_2 = x\varepsilon - a} \text{ — зависимость фокального радиуса от } x$$

$$r_2^2 = (x-c)^2 + y^2 \Rightarrow (x-c)^2 + y^2 = \frac{x^2 c^2}{a^2} - 2xc + a^2 \Rightarrow x^2 \left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) + y^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2(a^2 - c^2)}{a^2} + y^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1} \text{ Q.E.D.}$$

$$\text{Из } r_1 = 2a + r_2 \text{ аналогично получаем } r_1 = x\varepsilon + a. \text{ Значит } \boxed{r_{1,2} = x\varepsilon \pm a}$$

$$\text{Если } r_1 < r_2 \text{ (левая ветвь): } \boxed{r_{1,2} = -x\varepsilon \mp a}$$

- Директрисы:

$$D_2 : x = \pm \frac{a}{\varepsilon}, d_2 = \text{dist}(M, D_2) = \left| x - \frac{a}{\varepsilon} \right|$$

$$\text{Правая ветвь: } r_2 = x\varepsilon - a \Rightarrow \frac{r_2}{d_2} = \frac{x\varepsilon - a}{x - \frac{a}{\varepsilon}} = \varepsilon \frac{x - \frac{a}{\varepsilon}}{x - \frac{a}{\varepsilon}} = \varepsilon$$

$$\text{Левая ветвь: } r_2 = -x\varepsilon + a \Rightarrow \frac{r_2}{d_2} = \frac{-x\varepsilon + a}{-x + \frac{a}{\varepsilon}} = \varepsilon \frac{-x + \frac{a}{\varepsilon}}{-x + \frac{a}{\varepsilon}} = \varepsilon$$

$$\frac{r_2}{d_2} = \varepsilon \Rightarrow D_2 \text{ — директриса Q.E.D.}$$

Для r_1 и D_1 заменить x на $-x$

- Определение 2:

$$\text{Пусть известно } q = \text{dist}(F, D) \text{ и } \varepsilon = \frac{r}{d} > 1$$

Проведём ДСК, в которой $D \parallel Oy$. Давайте найдём параметры канонического уравнения, считая, что $D : x = \frac{a}{\varepsilon}$, а $F = (c, 0)$.

$$\left. \begin{aligned} c - \frac{a}{\varepsilon} &= q \\ \frac{c}{a} &= \varepsilon \end{aligned} \right\} \Rightarrow c = q + \frac{a}{\varepsilon} \Rightarrow a\varepsilon = q + \frac{a}{\varepsilon} \Rightarrow a \left(\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} \right) = q \Rightarrow \boxed{a = \frac{\varepsilon q}{\varepsilon^2 - 1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{c = \frac{\varepsilon^2 q}{\varepsilon^2 - 1}}$$

Мы узнали чему равны a и c из известных нам ε и q , значит точки, удовлетворяющие 2-му определению, удовлетворяют $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, а D — очевидно директриса гиперболы. *Q.E.D.*

- Асимптоты:

Найдём $y(x)$ для I координатной четверти: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y = b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$

Найдём угловой коэффициент асимптоты $k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y(x)}{x}$:

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{bx\sqrt{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{x^2}}}{x} = \frac{b}{a}$$

Найдём ординату пересечения асимптоты и оси ординат $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} (y(x) - kx)$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} - \frac{b}{a}x \right) &= b \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} - \frac{x}{a} \right) = \\ &= b \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\frac{x^2}{a^2} - 1 - \frac{x^2}{a^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} + \frac{x}{a}} \right) = b \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} + \frac{x}{a}} \right) = 0 \end{aligned}$$

Значит асимптота: $y = \frac{b}{a}x$ — в первой координатной четверти

По симметрии получаем $y = \pm \frac{b}{a}x$ *Q.E.D.*

- Полярное уравнение:

Зададим ПСК(r, φ), у которой полюс $O' = F_2 = (c, 0)$, а ось направлена в сторону, противоположную направлению координатной оси Ox .

$$x = c - r \cos \varphi$$

Правая ветвь: $r = r_2 = x\varepsilon - a$

$$r = \varepsilon(c - r \cos \varphi) - a = \varepsilon c - \varepsilon r \cos \varphi - a \Rightarrow r(1 + \varepsilon \cos \varphi) = \varepsilon c - a = \varepsilon \left(c - \frac{a}{\varepsilon} \right) = \varepsilon q = p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$$

Левая ветвь: $r = r_2 = -x\varepsilon + a$

$$r = -\varepsilon(c - r \cos \varphi) + a = -\varepsilon c + \varepsilon r \cos \varphi + a \Rightarrow r(1 - \varepsilon \cos \varphi) = a - \varepsilon c = \varepsilon \left(\frac{a}{\varepsilon} - c \right) = \varepsilon(-q) = -p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \frac{-p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}$$

Если ось направлена в противоположную сторону, то $\cos(\pi - \varphi) = -\cos \varphi$, и $\cos \varphi$ в формулы записывается со знаком минус.

Аналогично, если у ПСК полюс в F_1 .

- Касательные

Формула касательной к функции в точке $M_0(x_0, y_0)$: $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{f(x)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow (\text{Возьмём производную обеих сторон}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2x}{a^2} - \frac{2f(x)f'(x)}{b^2} = 0 \Rightarrow \frac{2f(x)f'(x)}{b^2} = \frac{2x}{a^2}$$

$$\text{Подставим } x_0: \frac{2f(x_0)f'(x_0)}{b^2} = \frac{2x_0}{a^2} \Rightarrow \frac{y_0f'(x_0)}{b^2} = \frac{x_0}{a^2} \Rightarrow f'(x_0) = \frac{x_0b^2}{y_0a^2}$$

$$\text{Подставим в формулу для касательной: } y = \frac{x_0b^2}{y_0a^2}(x - x_0) + y_0 =$$

$$= \frac{x_0b^2(x - x_0) + y_0^2a^2}{y_0a^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow yy_0a^2 = xx_0b^2 - x_0^2b^2 + y_0^2a^2 \Rightarrow \frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \text{ Q.E.D.}$$

- Оптические свойства

Пусть $M_0(x_0, y_0)$ лежит на гиперболе. Тогда:

$$\vec{r}_1 = \overrightarrow{F_1M_0} = (x_0 + c, y_0), \vec{r}_2 = \overrightarrow{F_2M_0} = (x_0 - c, y_0)$$

Проверим, что вектор биссектрисы угла между \vec{r}_1 и \vec{r}_2 параллелен касательной в точке M_0 , то есть перпендикулярен нормали касательной $\vec{N} = \left(\frac{x_0}{a^2}, -\frac{y_0}{b^2}\right)$.

$$\begin{aligned} \text{Вектор биссектрисы угла между } \vec{r}_1 \text{ и } \vec{r}_2: |\vec{r}_1|\vec{r}_2 + |\vec{r}_2|\vec{r}_1 &= (\varepsilon x_0 + a)\vec{r}_2 + (\varepsilon x_0 - a)\vec{r}_1 = \\ &= ((x_0 - c)(\varepsilon x_0 + a) + (\varepsilon x_0 - a)(x_0 + c), y_0(\varepsilon x_0 + a) + y_0(\varepsilon x_0 - a)) = \\ &= (2\varepsilon x_0^2 - 2ac, 2\varepsilon x_0 y_0) \sim \left(x_0^2 - \frac{ac}{\varepsilon}, x_0 y_0\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Скалярно перемножим с } \vec{N}: \left(x_0^2 - \frac{ac}{\varepsilon}\right) \frac{x_0}{a^2} - x_0 y_0 \frac{y_0}{b^2} &= \frac{x_0^3}{a^2} - \frac{x_0 c}{\varepsilon a} - \frac{x_0 y_0^2}{b^2} = \\ &= x_0 \left(\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2}\right) - x_0 = x_0 - x_0 = 0 \Rightarrow N \perp \text{ биссектрисе Q.E.D.} \end{aligned}$$

1.3.2 Приведение КВП к каноническому виду

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0, \quad a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$$

Очевидно, что уравнение КВП не меняет своего типа при повороте и сдвиге декартовой системы координат.

1. Если $a_{12} \neq 0$, подберём такой угол поворота α , чтобы в новом уравнении $a'_{12} = 0$.

Выразим старые координаты через новые:

$$x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \quad y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha, \quad \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\}$$

Выразим a'_{12} через старые коэффициенты, $\sin \alpha = S_\alpha$ и $\cos \alpha = C_\alpha$ и приравняем к 0:

$$a'_{12} = -2a_{11}C_\alpha S_\alpha + 2a_{12}(C_\alpha^2 - S_\alpha^2) + 2a_{22}C_\alpha S_\alpha = 0$$

$$(a_{22} - a_{11}) \tan \alpha + a_{12}(1 - \tan^2 \alpha) = 0$$

$$\tan^2 \alpha - \frac{a_{22} - a_{11}}{a_{12}} \tan \alpha - 1 = 0 \quad \text{— квадратное уравнение относительно } \tan \alpha$$

$$\text{Дискриминант } D = \left(\frac{a_{22} - a_{11}}{a_{12}}\right)^2 + 4 > 0 \quad \text{— 2 решения}$$

По теореме Виета $\tan \alpha_1 \cdot \tan \alpha_2 = -1 \Rightarrow \alpha_1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \alpha_2 \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right), \alpha_1 - \alpha_2 = 90^\circ$

$$\alpha_{1,2} = \arctan \left(\frac{\frac{a_{22} - a_{11}}{a_{12}} \pm \sqrt{\left(\frac{a_{22} - a_{11}}{a_{12}}\right)^2 + 4}}{2} \right)$$

Начало координат $O' = O$

2. $a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + 2a'_1x' + 2a'_2y' + a_0 = 0$ Есть два случая:

$$(a) \quad \begin{cases} a'_{11} \neq 0 \\ a'_{22} \neq 0 \end{cases}$$

$$a'_{11}x'^2 + 2a'_1x' = a'_{11} \left(x'^2 + 2\frac{a'_1}{a'_{11}}x' \right) = a'_{11} \left(x' + \frac{a'_1}{a'_{11}} \right)^2 - \frac{a_1'^2}{a'_{11}} = a'_{11}x''^2 - \frac{a_1'^2}{a'_{11}}$$

Сделаем сдвиг ДСК:

$$x'' = x' + \frac{a'_1}{a'_{11}}$$

$$y'' = y' + \frac{a'_2}{a'_{22}}$$

$$\text{Начало координат } O'' \left(-\frac{a'_1}{a'_{11}}, -\frac{a'_2}{a'_{22}} \right)$$

$$\text{Получим } a'_{11}x''^2 + a'_{22}y''^2 + a'_0 = 0 \Leftrightarrow a'_{11}x''^2 + a'_{22}y''^2 = -a'_0$$

Есть два случая:

i. $a'_0 \neq 0$

$$\alpha = \frac{a'_{11}}{-a'_0}, \beta = \frac{a'_{22}}{-a'_0}$$

$$\alpha x''^2 + \beta y''^2 = 1$$

Есть три случая:

A. $\alpha > 0, \beta > 0$ — Эллипс

B. $\alpha < 0, \beta < 0$ — Пустое множество

C. $\alpha\beta < 0$ — Гипербола

ii. $a'_0 = 0$

$$\alpha x''^2 = y''^2, \alpha \neq 0$$

Есть два случая:

A. $\alpha > 0 \Rightarrow y'' = \pm\sqrt{\alpha}x''$ — Пара пересекающихся прямых

B. $\alpha < 0 \Rightarrow y'' = x'' = 0$ — Точка

(b) Не умаляя общности $a'_{22} = 0$

$$a'_{11}x''^2 + 2a'_1x' + 2a'_2y' + a_0 = 0$$

Есть два случая:

i. $a'_2 \neq 0$

Сделаем сдвиг ДСК:

$$x'' = x' + \frac{a'_1}{a'_{11}}$$

$$y'' = y' + \frac{a_0 - \frac{a_1'^2}{a'_{11}}}{2a'_2}$$

$$\text{Начало координат } O'' \left(-\frac{a'_1}{a'_{11}}, -\frac{a_0 - \frac{a_1'^2}{a'_{11}}}{2a'_2} \right)$$

Получим $a'_{11}x''^2 + 2a'_2y''^2 = 0 \Leftrightarrow x''^2 = \alpha y''^2, \alpha \neq 0$ — Парабола

ii. $a'_2 = 0, x'' = x' + \frac{a'_1}{a'_{11}}$

$$a'_{11}x''^2 + a'_0 = 0 \Rightarrow x''^2 = \alpha$$

Есть три случая:

A. $\alpha > 0 \Rightarrow x'' = \pm\sqrt{\alpha}$ — Пара параллельных прямых

B. $\alpha = 0 \Rightarrow x''^2 = 0 \Leftrightarrow x'' = 0$ — Прямая

C. $\alpha < 0$ — Пустое множество

Глава 2

Линейная алгебра

2.1 Основные алгебраические структуры

2.1.1 Операции, группа, кольцо, поле

Законы композиции.

$f : A \times B \rightarrow C$ - функция, отображение.

$\forall(a, b) : a \in A, b \in B : \exists!c \in C$ — закон внешней композиции.

$f : A \times A \rightarrow A$ — закон внутренней композиции или алгебраическая операция, бинарная операция.

Ассоциативность, коммутативность алгебраических операций.

Возьмем операцию $*$: $A \times A \rightarrow A$:

$a * b = b * a$ — коммутативность.

$a * (b * c) = (a * b) * c$ — ассоциативность.

Алгебраическая структура, группа, кольцо, поле. Свойства.

Алгебраическая структура — множество с набором Ω — операция и отношений на ней, с некоторой системой аксиом. Обозначают (A, Ω)

Группа $(A, \{*\})$:

$*$ — групповая операция, чаще всего обозначается как “ \cdot ” — умножение, или как “ $+$ ” — сложение.

“ \cdot ” — мультипликативная запись, где e — единица, а $-a$ — обратный.

“ $+$ ” — аддитивная запись, где e заменяется на 0 — нулевой, а $-a$ — противоположный.

1. $a * (b * c) = (a * b) * c$ — ассоциативность.

2. $\exists e : \forall a : a * e = e * a = a$ — существование нейтрального элемента e .

3. $\forall a : \exists (-a) : a * (-a) = e$ — существование обратного элемента $(-a)$.

Если группа обладает еще и коммутативностью, то такая группа — **абелева**:

$$4. a * b = b * a$$

Кольцо $(A, \{+, \cdot\})$:

1–4. Абелева группа по сложению.

$$5. a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \text{ — левая дистрибутивность.}$$

$$6. (b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a \text{ — правая дистрибутивность.}$$

Поле $(A, \{+, \cdot\})$:

1–5. Кольцо по сложению.

6–9. Абелева группа по умножению для ненулевых элементов.

Поле — это ассоциативное коммутативное кольцо с единицей, то есть для \forall ненулевого элемента \exists обратный, а вот у нуля обратного нет и это нормально.

Свойства кольца:

$$1. 0 \cdot a = 0$$

$$2. a + x = a + y \rightarrow x = y$$

$$3. a + x = b \text{ имеет единственное решение } x = -a + b$$

$$4. 0 \text{ — единственен.}$$

$$5. 1 \text{ — единственна в кольце с единицей.}$$

2.1.2 Линейное пространство, алгебра, свойства.

K — поле, V — множество. $+$: $V \times V \rightarrow V$, \cdot : $K \times V \rightarrow V$. Если все, что сказано ниже выполнено $\forall \phi, \lambda \in K, a, b \in V$.

1–4. Абелева группа по сложению.

$$5. \phi(\lambda(a)) = \lambda(\phi(a)).$$

$$6. \lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b.$$

$$7. (\phi + \lambda)a = \phi a + \lambda a.$$

$$8. \exists 1 : a \cdot 1 = a.$$

То тогда такую систему называют линейным пространством над полем K .

Если добавить еще одну операцию \times : $V \times V \rightarrow V$.

$$9. (a + b) \times c = a \times c + b \times c$$

$$c \times (a + b) = c \times a + c \times b$$

$$10. \lambda(a \times b) = (\lambda a) \times b = a \times (\lambda b)$$

То такую структуру называют алгеброй.

11. добавим коммутативность \times — коммутативная алгебра.

12. добавим ассоциативность \times — ассоциативная алгебра.

13. добавим единицу — унитарная алгебра.

14. добавим обратное (для ненулевых элементов) — алгебра с делением.

2.1.3 Нормированные линейные пространства и алгебры.

Нормированное пространство — линейное пространство над $\mathbb{R}(\mathbb{C})$ с нормой.

Норма $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$, удовлетворяющее:

1. $\forall x, y \in V : \|x\| + \|y\| \geq \|x + y\|$.
2. $\forall x \in V : \|x\| \geq 0$, причем $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
3. $\forall x \in V : \forall \alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) : \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$.

Алгебра называется **нормированной**, если существует норма согласованная с умножением:

$$\|ab\| \leq \|a\| \cdot \|b\|.$$

2.1.4 Отношение эквивалентности, фактор-структуры.

Бинарное отношение \sim на множестве X — **отношение эквивалентности**, если оно

- Рефлексивно: $\forall x \in X \ x \sim x$.
- Симметрично: $\forall x, y \in X \ x \sim y \Leftrightarrow y \sim x$.
- Транзитивно: $\forall x, y, z \in X \ x \sim y \wedge y \sim z \rightarrow x \sim z$.

Если \sim — бинарное отношение на X , то множества $M_a = \{x \in X \mid x \sim a\}$ называются классами эквивалентности, а множество $X/\sim = \{M_a \mid a \in X\}$ — **фактормножеством** (или факторпространством) X по \sim .

Свойства классов эквивалентности.

1. $\forall a \in X \ M_a \neq \emptyset$.
2. $\forall a, b \in X$ выполнено либо $M_a = M_b$, либо $M_a \cap M_b = \emptyset$.
3. $\bigcup_{a \in X} M_a = X$.

Если у нас есть множество X , а M — какое-то множество, состоящее из непустых взаимно непесекающихся подмножеств X , в объединении дающих X . Тогда M называется **разбиением** X .

Любое разбиение X является факторпространством X по некоторому отношению эквивалентности. Доказательство этого тривиально, если вы представите отношения как ребра в графе, а классы эквивалентности — компоненты

2.2 Линейное пространство комплексных чисел

2.2.1 Основные определения

Множество комплексных чисел - линейное пространство \mathbb{R}^2 с евклидовой нормой. (мы его так вводим). Получаем первый вариант записи комплексных чисел - Декартову форму записи:

$$(x; y) = z \in \mathbb{C}; x, y \in \mathbb{R}$$

Евклидову норму $|z| = \|(x; y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$ называют модулем комплексного числа.

Представив комплексные числа таким образом, мы видим их геометрическую интерпретацию, как радиус-векторов на плоскости (модуль числа - длина радиус-вектора). В качестве базиса будем использовать вектора $(1; 0)$ - вещественную единицу и $(0; 1)$ - мнимую единицу, обозначаемую i .

Алгебраическая форма записи - ещё один вариант записи комплексных чисел:

$$z = (x; y) = x + iy$$

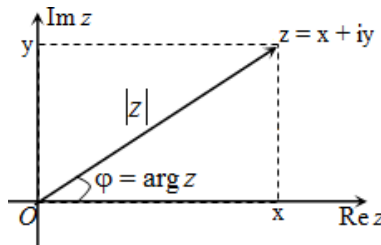
При этом $x = \operatorname{Re} z$ - вещественная часть числа, а $y = \operatorname{Im} z$ - мнимая часть.

При $x = 0$ число становится чисто мнимым.

При $y = 0$ число можно отождествлять с вещественным числом x .

Теперь можем ввести полярную систему координат с центром, совпадающим с центром декартовой системы координат и осью вдоль оси $\operatorname{Re} z$. Тогда для каждого ненулевого комплексного числа получим r и φ . Для $z = x + iy \neq 0$ модуль числа $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, а φ - аргумент - такой угол, что $\tan \varphi = y/x$

Функция аргумента — $\varphi = \operatorname{Arg}(x + iy)$ — многозначная, то есть её результат — множество всех подходящих значений, а формат \arg_k означает использование k -ого значения. Нулевой аргумент (результат \arg_0 или просто \arg) называется главным аргументом и лежит в $[-\pi; \pi)$ или в $[0; 2\pi)$, в зависимости от выбранного диапазона.



Заметим, что тогда $x = r \cos \varphi$, а $y = r \sin \varphi$. Тогда получим третий вариант записи комплексного числа - Тригонометрическую форму записи:

$$z = x + iy = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

2.2.2 Комплексные = алгебра с нормой.

То, что это линейное пространство и так понятно (очевидно, что все 8 аксиом выполнены, тк мы до этого доказывали, что \mathbb{R}^2 — линейное пространство). Давайте докажем, что комплексные числа — это нормированная алгебра.

Значит, мы хотим создать такую операцию умножения, что она будет согласованно с нормой. Посмотрим, тогда чему должно быть равно $i \cdot i = i^2$.

Тогда давайте предположим, что сейчас $i \cdot i = \lambda + \phi i$.

Посмотрим, чему у нас будет равна вот такая норма:

$$\forall x \in \mathbb{R} : \|i^2 + ix\| = \|i(i + x)\| \leq \|i\| \|i + x\| = \sqrt{1 + x^2}$$

Должно выполняться последнее, если мы хотим, чтобы норма была согласованна с умножением. Но мы знаем что $i \cdot i = \lambda + \phi i$! Подставим:

$$\begin{aligned} \|i^2 + ix\| &= \|\lambda + \phi i + ix\| = \sqrt{\lambda^2 + (\phi + x)^2} \leq \sqrt{1 + x^2} \\ \lambda^2 + \phi^2 + 2\phi x + x^2 &\leq 1 + x^2 \\ \lambda^2 + \phi^2 + 2\phi x &\leq 1 \end{aligned}$$

Заметим, что, если $\phi \neq 0$, тогда слева многочлен от x — прямая, с углом наклона не 0. Откуда в какой-то момент она пересечет 1 и будет принимать значения больше 1.

Откуда получаем, что $\phi = 0$. Откуда $i^2 = \lambda \in \mathbb{R}$.

Посмотрим на $2 \leq \sqrt{(\lambda + 1)^2 + 4} = \|\lambda + 2i + 1\| = \|(i + 1)^2\| \leq \sqrt{2}^2 = 2$.

$\lambda^2 + 2\lambda + 1 + 4 = 4$, откуда $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$, откуда $\lambda = -1$.

Мы только что доказали, что $i^2 = -1!!!$

Теперь тогда покажем, как будет происходить умножение ниже:

2.2.3 Основные действия с комплексными числами

Немного действий, определённых для \mathbb{C} :

1. **Сложение/вычитание** — аналогично сложению/вычитанию векторов

$$\begin{aligned} (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) &= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \\ (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) &= (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2) \end{aligned}$$

2. **Умножение** — например, как умножение алгебраических форм записи

$$(x_1 + iy_1) * (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

Оно так задается из-за того, что мы хотим дистрибутивность для того, чтобы комплексные числа были алгеброй с нормой. Распишем в тригонометрической форме перемножение двух комплексных чисел:

$$\begin{aligned} r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) * r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) &= \\ = r_1 r_2 ((\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i(\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2)) &= \\ = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \end{aligned}$$

Видим, что при умножении комплексных чисел их аргументы складываются, а модули перемножаются.

3. **Сопряжение** – для всех комплексных чисел $z = x + iy$ существует комплексно сопряжённое ему $\bar{z} = x - iy$. Несколько весьма простых, но полезных фактов с сопряжёнными числами:

- $\overline{\bar{z}} = z$
- $z = \bar{z} \Leftrightarrow (x + iy) = (x - iy) \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$
- $z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = (x^2 + y^2) = |z|^2$
- $z + \bar{z} = (x + iy) + (x - iy) = 2x = 2 \cdot \operatorname{Re} z$
- $z - \bar{z} = (x + iy) - (x - iy) = 2iy = 2i \cdot \operatorname{Im} z$

4. **Обратное** – зная свойства сопряжения можно получить формулу для числа обратного комплексному z это будет $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$. Несложно убедиться, что $z * z^{-1} = 1$, что и требовалось от обратного элемента.

5. ***Деление** – имея обратное число деление построить несложно:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1}$$

Такое деление будет весьма неудобным, хоть и рабочим, упростит его экспоненциальная форма записи комплексных чисел.

2.2.4 Экспоненциальная форма и её свойства. Формулы Эйлера и Муавра

Сделаем заявление, в которое поверим и в дальнейшем будем активно использовать:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi; \varphi \in \mathbb{R}$$

Свойства:

1. $e^{i \cdot 2\pi k} = 1; k \in \mathbb{Z}$
2. $e^{i(\varphi + 2\pi k)} = e^{i\varphi}; k \in \mathbb{Z}$
3. $e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} = e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2}$
4. $e^{-i\varphi} = \frac{1}{e^{i\varphi}} = \overline{e^{i\varphi}}$
5. $|e^{i\varphi}| = 1$
6. $e^{i\varphi \cdot n} = (e^{i\varphi})^n; n \in \mathbb{Z}$

7. Формулы Эйлера:

$$\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} = \cos \varphi$$

$$\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} = \sin \varphi$$

Введём ещё одну новую форму записи комплексного числа - Экспоненциальную:

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = re^{i\varphi}$$

Формула Муавра:

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = r^n e^{i\varphi \cdot n}; n \in \mathbb{N}$$

$$|z^n| = |z|^n = r^n$$

$$\arg z^n = n \cdot \arg z$$

Раз мы научились возводить комплексное число в целую степень, то хочется научиться находить и корень целой степени. Пусть $w = \sqrt[n]{z} \Leftrightarrow w^n = z = re^{i\varphi}$

$$w \in \mathbb{C} \Leftrightarrow w = |w|e^{i \cdot \arg w}$$

$$w^n = |w|^n e^{in \cdot \arg w} = re^{i\varphi} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |w| = \sqrt[n]{r} \\ \arg w = \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Получили, что $\arg w = \frac{\varphi + 2\pi k}{n} = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}k$ а значит, что корень целой степени n даёт n различных решений, которые лежат на плоскости на одной окружности, через равные углы $\frac{2\pi}{n}$, и никаких других, так как алгебраическое уравнение $w^n = r$ имеет ровно n корней.

2.2.5 Некоторые функции комплексной переменной

Комплексная экспонента

$$\exp z = e^z = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y); \quad z = x + iy; \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Свойства:

1. $e^{z+2\pi ki} = e^z - 2\pi i$ периодичность
2. $|e^z| = e^x = e^{\operatorname{Re} z}$
3. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$
4. $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$
5. Аналогично формулам Эйлера введём \sin и \cos комплексной переменной:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Аналогично вещественным тригонометрическим можем ввести $tg z$, $ctg z$, обратные тригонометрические и гиперболические функции комплексного переменного. Например:

$$ch z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$sh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

Пусть $\operatorname{Re} z \in [a_1; a_2]$, а $\operatorname{Im} z \in [b_1; b_2]$, то есть z лежит внутри некоего прямоугольника на комплексной плоскости. В какой области будет лежать $\exp z$? Заметим, что модули итоговых чисел ограничены $[e_1; e_2]$, а аргументы $[b_1; b_2]$. Получается, что $\exp z$ лежит в некоем угловом секторе.

Логарифм комплексного числа

Пусть $\ln z = w = x + iy$, тогда

$$z = |z|e^{i(\arg z + 2\pi k)} = re^{i\varphi}$$

$$z = e^w = e^x e^{iy}$$

Получим, что $|z| = e^x \in \mathbb{R}$, то есть $x = \ln |z|$. А $y = \arg z + 2\pi k$.

Видим, что в формуле присутствует $2\pi k$, что говорит нам о многозначности логарифма комплексного числа. Приведём общую формулу:

$$\ln_k z = w = \ln |z| + i(\arg_0 z + 2\pi k) = \ln |z| + i \cdot \arg_k z; k \in \mathbb{Z}$$

Из этой формулы можем получить несколько небольших формул:

$$\ln_0 z = \ln |z| + i \cdot \arg_0 z$$

$$\ln_k z = \ln_0 z + 2\pi ki$$

$\ln_0 z$ – главное значение логарифма

Из-за многозначности логарифма есть большая опасность неправильно воспользоваться им, например может быть, что $\ln z_1 z_2 \neq \ln z_1 + \ln z_2$ или $\ln z^k \neq k \ln z$. Приведём пример подобной ошибки: Пусть $\arg z \in [0; 2\pi)$, $z_1 = -1$, $z_2 = -i$, $k = 0$

$$\ln_0 z_1 = \ln |-1| + i \arg_0(-1) = \ln 1 + \pi i \text{ (тут функция } \ln 1 \text{ — вещественная } \Rightarrow \text{ равна нулю)}$$

$$\ln_0 z_2 = \ln |-i| + i \arg_0(-i) = \ln 1 + \frac{3\pi}{2}i$$

В сумме получилось $\frac{5\pi}{2}i$

$$\ln_0 z_1 z_2 = \ln_0 i = \ln |i| + i \arg_0 i = \ln 1 + \frac{\pi}{2}i$$

Комплексное число в натуральной степени

Пусть $w = z^n = r^n e^{in\varphi}$, где $n \in \mathbb{N}$ Рассмотрим, во что перейдёт z , лежащий в угловом секторе при возведении в степень. Модуль числа будет возведён в степень n , а аргумент умножится на n . Если изначальный сектор был ограничен окружностями с радиусами a_1 и a_2 , а так же лучами с полярными углами b_1 и b_2 , то он перейдёт в другой угловой сектор, ограниченный окружностями с радиусами a_1^n и a_2^n , а так же лучами с полярными углами nb_1 и nb_2 .

Комплексное число в комплексной степени

Пусть $k \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{C}$ – константа

$$w = z^b = e^{b \ln_k z} \text{ — обобщённая степенная функция}$$

$$w = b^z = e^{z \ln_k b} \text{ — обобщённая показательная функция}$$

Заметим, что стандартные свойства натурального логарифма **не выполняются**. Например $b^{z_1+z_2} \neq b^{z_1} b^{z_2}$.

2.3 Линейные пространства.

2.3.1 Основные определения.

В этом разделе мы будем рассматривать линейные пространства над \mathbb{C} и иногда \mathbb{R} . Обозначать над чем мы будем K .

Линейная оболочка, линейная независимость векторов.

Говорят, что вектор u является линейной комбинацией векторов $(v_1; v_2; \dots; v_n)$, если $\exists \lambda_1; \lambda_2; \dots; \lambda_n \in K$:

$$u = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot v_i$$

Если все $\lambda_k = 0$, то линейная комбинация называется тривиальной

Система векторов $v_1, \dots, v_m \in V$ называется линейной независимой, если любая нулевая линейная комбинация тривиальна $\xLeftrightarrow{def} \sum_{k=1}^m \lambda_k v_k = 0 \Leftrightarrow \forall k \in \{1, \dots, m\} : \lambda_k = 0$

В противном случае, система векторов называется линейно зависимой, т.е. \exists набор $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ не все нули таких, что $\sum_{k=1}^m \lambda_k v_k = 0$.

$\text{span}(v_1, v_2, \dots, v_n)$ это линейная оболочка векторов — множество всевозможных векторов, представимых через v_1, v_2, \dots, v_n .

Теорема о линейно независимых системах векторов

Теорема

1. v_1, \dots, v_m -линейно зависима \Leftrightarrow по крайней мере один из векторов — это линейная комбинация остальных
2. Если некоторая подсистема системы векторов v_1, \dots, v_m - линейно зависима, то система векторов v_1, \dots, v_m — линейно зависима
3. $\left. \begin{array}{l} v_1, \dots, v_m \text{ — линейно независима} \\ v_1, \dots, v_{m+1} \text{ — линейно зависима} \end{array} \right\} \Rightarrow v_{m+1} \text{ — линейная комбинация } v_1, \dots, v_m$

Доказательство

1. $\boxed{\Rightarrow}$ v_1, \dots, v_m — линейно зависима, т.е. \exists нетривиальный набор $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ такой, что $\sum_{k=1}^m \lambda_k v_k = 0$

н.у.о. пусть $\lambda_m \neq 0$, тогда $\lambda_m v_m = - \sum_{k=1}^{m-1} \lambda_k v_k$

$$v_m = \sum_{k=1}^{m-1} \left(-\frac{\lambda_k}{\lambda_m} \right) v_k = \sum_{k=1}^{m-1} \lambda'_k v_k \xLeftrightarrow{def} v_m \text{ — линейная комбинация } v_1, \dots, v_{m-1}$$

$$\boxed{\Leftarrow} \text{ н.у.о. пусть } v_m = \sum_{k=1}^{m-1} \lambda_k v_k, \text{ тогда } \sum_{k=1}^{m-1} \lambda_k v_k - v_m = 0$$

$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}, \lambda_m \neq 0$ такой, что $\sum_{k=1}^m \lambda_k v_k = 0 \xLeftrightarrow{def} v_1, \dots, v_m$ — линейно зависима Q.E.D.

2. н.у.о. пусть $v_1, \dots, v_{m'}$ — линейно зависима $m' < m$, тогда

\exists нетривиальный набор $\lambda_1, \dots, \lambda_{m'} : \sum_{k=1}^{m'} \lambda_k v_k = 0$

При $\lambda_{m'+1} = 0, \dots, \lambda_m = 0$: набор $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ — нетривиален

$\Rightarrow \sum_{k=1}^m \lambda_k v_k = 0 \xLeftrightarrow{def} v_1, \dots, v_m$ — линейно зависима Q.E.D.

3. v_1, \dots, v_m, v_{m+1} — линейно зависима $\Rightarrow \exists$ нетривиальный набор $\lambda_1, \dots, \lambda_{m+1} : \sum_{k=1}^m \lambda_k v_k + \lambda_{m+1} v_{m+1} = 0$

Если $\lambda_{m+1} = 0$, тогда набор $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ — нетривиален и $\sum_{k=1}^m \lambda_k v_k = 0 \xLeftrightarrow{def} v_1, \dots, v_m$ — линейно зависима. Противоречие.

Иначе $v_{m+1} = \sum_{k=1}^m \left(-\frac{\lambda_k}{\lambda_{m+1}} \right) v_k = \sum_{k=1}^m \lambda'_k v_k \xLeftrightarrow{def} v_{m+1}$ — линейная комбинация v_1, \dots, v_m
Q.E.D.

Следствия:

1. Если система линейно независима, то любая подсистема линейно независима.
2. Если система содержит 0 вектор, либо пару пропорциональных векторов, то система линейно зависима.

Теорема о «прополке».

Любую систему векторов v_1, \dots, v_m , в которой хотя бы один из векторов ненулевой, можно заменить на линейно независимую систему векторов v_{j_1}, \dots, v_{j_k} с сохранением линейной оболочки.
 $\text{span}(v_1, \dots, v_m) = \text{span}(v_{j_1}, \dots, v_{j_k})$

Доказательство:

Пусть $s_0 = 0, s_1 = \text{span}(v_1), \dots, s_m = \text{span}(v_1, \dots, v_m)$

Тогда $s_0 \subset s_1 \subset \dots \subset s_m \subset V$.

Идём от $j = m$ до $j = 2$.

Если $s_{j-1} = s_j$, то v_j удаляем. При этом $\text{span}(v_1, \dots, v_j) = \text{span}(v_1, \dots, v_{j-1})$ сохраняется.

Если $s_{j-1} \subset s_j$, то $v_j \notin s_{j-1}$, т.е. v_j — не является линейной комбинацией v_1, \dots, v_{j-1} .

Продолжая так делать, получим, что никакой вектор из полученных не является линейной комбинацией других, то есть итоговое подмножество линейно независимо. В результате получается цепочка строго вложенных подмножеств $s_0 \subset s_{j_1} \subset \dots \subset s_{j_k} \subset s_m \subset V$

$\Rightarrow s_m = \text{span}(v_{j_1}, \dots, v_{j_k})$ Q.E.D.

2.3.2 Порождающая (полная) система векторов. Базис и размерность линейного пространства

Система векторов $v_1, \dots, v_m \in V$ называется порождающей (полной), если любой вектор линейного пространства V раскладывается по этим векторам, т.е. является линейной комбинацией v_1, \dots, v_m . $V = \text{span}(v_1, \dots, v_m)$

Если число v_1, \dots, v_m конечно, то линейное пространство называется конечномерным.

Теорема

Следующие утверждения равносильны:

1. $v_1, \dots, v_n \in V$ — линейно независимая и порождающая система
2. $v_1, \dots, v_n \in V$ — линейно независимая система и максимальная по числу элементов
3. $v_1, \dots, v_n \in V$ — порождающая система и минимальная по числу элементов

Доказательство

1 \Rightarrow 2 v_1, \dots, v_n — линейно независимая и порождающая система

Пусть u_1, \dots, u_m — линейно независима

Тогда $\forall u \in V : v_1, \dots, v_n, u$ — линейно зависима, т.к. v_1, \dots, v_n — порождающая система, то u — линейная комбинация v_1, \dots, v_n , или $\text{span}(v_1, \dots, v_n, u) = V$

$$\begin{array}{ccc}
 \underbrace{u_m, v_1, \dots, v_n}_{\substack{\text{линейно зависима} \\ n+1}} & \xrightarrow{\text{прополка}} & \underbrace{u_m, v_1, \dots}_{\substack{\text{линейно независима} \\ \text{span}(u_m, v_1, \dots) = V \\ \leq n}} \\
 \\
 \underbrace{u_{m-1}, u_m, v_1, \dots}_{\substack{\text{линейно зависима} \\ \leq n}} & \xrightarrow{\text{прополка}} & \underbrace{u_{m-1}, u_m, v_1, \dots}_{\substack{\text{линейно независима} \\ \text{span}(u_{m-1}, u_m, v_1, \dots) = V \\ \leq n}}
 \end{array}$$

и т.д.

$$\underbrace{u_1, \dots, u_m, v_1, \dots}_{\leq n} \text{ — линейно независима } \Rightarrow m \leq n$$

2 \Rightarrow 1 v_1, \dots, v_m — линейно независимая система и максимальная по числу элементов

$$\forall v \in V : \left. \begin{array}{l} v_1, \dots, v_n \text{ — линейно независима} \\ v_1, \dots, v_n, v \text{ — линейно зависима} \end{array} \right\} \Rightarrow v = \sum_{k=1}^n \lambda_k v_k \Rightarrow v_1, \dots, v_n \text{ — порождающая}$$

1 \Rightarrow 3 $v_1, \dots, v_n \in V$ — линейно независимая и порождающая система

Пусть u_1, \dots, u_m — порождающая система

$$\text{span}(u_1, \dots, u_m) = V$$

$\forall v \in V : u_1, \dots, u_m, v$ — линейно зависима

$$\begin{array}{ccc}
\underbrace{v_n, u_1, \dots, u_m}_{\substack{\text{линейно зависима} \\ m+1}} & \xrightarrow{\text{прополка}} & \underbrace{v_n, u_1, \dots}_{\substack{\text{линейно независима} \\ \text{span}(v_n, u_1, \dots) = V \\ \leq m}} \\
\\
\underbrace{v_{n-1}, v_n, u_1, \dots}_{\substack{\text{линейно зависима} \\ \leq m+1}} & \xrightarrow{\text{прополка}} & \underbrace{v_{n-1}, v_n, u_1, \dots}_{\substack{\text{линейно независима} \\ \text{span}(v_{n-1}, v_n, u_1, \dots) = V \\ \leq m}}
\end{array}$$

и т.д.

$$\underbrace{v_1, \dots, v_n, u, \dots}_{n \leq m} \text{ — линейно независима} \Rightarrow n \leq m$$

3 \Rightarrow 1

v_1, \dots, v_n — порождающая система и минимальная по числу элементов

Пусть v_1, \dots, v_n — линейно зависима

Тогда $\exists v$ — линейная комбинация остальных \Rightarrow можно сделать прополку

$v_1, \dots, v_n \xrightarrow{\text{прополка}} v_{j_1}, \dots, v_{j_k}$ — порождающую систему с меньшим числом элементов (при прополке хотя бы один вектор уйдёт)

Но это противоречит тому, что v_1, \dots, v_n — минимальная по числу элементов $\Rightarrow v_1, \dots, v_n$ — линейно независима

Q.E.D.

Если система $v_1, \dots, v_n \in V$ удовлетворяет условиям теоремы, то она называется **базисом** пространства V .

Количество векторов $n = \dim V =$ **размерность линейного пространства** = max возможное число линейно независимых векторов = min число в порождающей системе векторов

Теорема

1. \forall линейно независимую систему векторов в V можно дополнить до базиса пространства V
2. из любой порождающей системы пространства V можно выделить базис пространства V

Доказательство

1. Пусть v_1, \dots, v_m — линейно независимая система

Если $\text{span}(v_1, \dots, v_m) = V$, то v_1, \dots, v_m — базис

Если $\text{span}(v_1, \dots, v_m) \subset V$, то $\exists v_{m+1} \neq 0 \in V$ и $v_{m+1} \notin \text{span}(v_1, \dots, v_m)$

$\Rightarrow v_{m+1}$ — не линейная комбинация остальных векторов

$\Rightarrow v_1, \dots, v_{m+1}$ — линейно независимая система

Повторяем рассуждения для v_1, \dots, v_{m+1}

В итоге получаем v_1, \dots, v_n — линейно независимая система максимальная по числу элементов $\Rightarrow v_1, \dots, v_n$ — базис

2. $\text{span}(v_1, \dots, v_m) = V$, где v_1, \dots, v_m — порождающая система

Если v_1, \dots, v_m — линейно независимая система $\Rightarrow v_1, \dots, v_m$ — базис

Если v_1, \dots, v_m — линейно зависимая система, то

$$v_1, \dots, v_m \xrightarrow{\text{прополка}} \underbrace{v_{j_1}, \dots, v_{j_n}}_{\substack{\text{линейно независимая система} \\ \text{порождающая система} \\ n \leq m \\ \text{span}(v_{j_1}, \dots, v_{j_n}) = V}}$$

$\Rightarrow v_{j_1}, \dots, v_{j_n}$ — базис

Q.E.D.

2.3.3 Координаты вектора. Изоморфизм линейного пространства

V — линейное пространство над полем $K(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. $\dim V = n$

$\forall x \in V : x = \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i e_i$, где $e = (e_1, \dots, e_n)$ — базис в V (порождающая система)

$\mathbf{x}_i \in K$ — координаты вектора x относительно базиса e

$$x \in V \longrightarrow \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \end{pmatrix} \in K^n, \text{ где } \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \end{pmatrix} \text{ — координатный столбец}$$

Утверждение

$\forall x \in V$ координаты относительно базиса e определяются единственным образом

Доказательство

e базис \Leftrightarrow порождающая линейно независимая система.

$e_1, \dots, e_n \Rightarrow$ порождающая система, т.е. x раскладывается на координаты

$$\text{Пусть } x = \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i e_i = \sum \mathbf{x}'_i e_i$$

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}'_i) e_i = 0 \text{ — нулевая линейная комбинация линейно независимых векторов } \Leftrightarrow \forall i = 1 \dots n : \mathbf{x}_i - \mathbf{x}'_i = 0$$

Q.E.D.

$$x \in V \xleftrightarrow{e} \mathbf{x} \in K^n$$

взаимно однозначное соответствие (биекция)

V_1, V_2 — линейные пространства над одним и тем же полем K называются изоморфными ($V_1 \cong V_2$), если между V_1 и V_2 существует биекция и сохраняется линейность, т.е.

$$\begin{aligned} x \in V_1 &\longleftrightarrow x' \in V_2 \\ y \in V_1 &\longleftrightarrow y' \in V_2 \\ \forall \lambda \in K : x + \lambda y \in V_1 &\longleftrightarrow x' + \lambda y' \in V_2 \end{aligned}$$

Свойства изоморфизма

$$1. 0 \in V \longrightarrow 0' \in V'$$

Доказательство:

$$\forall \lambda \in K : \lambda x \longleftrightarrow \lambda x'$$

$$\text{Пусть } \lambda = 0, \text{ тогда } 0 = 0 \cdot x \longleftrightarrow 0 \cdot x' = 0'$$

Q.E.D.

$$2. \forall x \in V \longleftrightarrow x' \in V'$$

$-x \in V$ — противоположный элемент к x

$-x' \in V'$ — противоположный элемент к x'

$$\Rightarrow -x \longleftrightarrow -x'$$

Доказательство:

$$\forall \lambda \in K : \lambda x \longleftrightarrow \lambda x'$$

$$\text{Пусть } \lambda = -1, \text{ тогда } -x = -1 \cdot x \longleftrightarrow -1 \cdot x' = -x'$$

Q.E.D.

$$3. x_1, \dots, x_m \in V; x'_1 \dots x'_m \in V'$$

$$\forall k = 1 \dots m : x_k \longleftrightarrow x'_k$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^m \alpha_k x_k \in V \longleftrightarrow \sum_{k=1}^m \alpha_k x'_k \in V'$$

Доказательство:

По методу математической индукции

Q.E.D.

$$4. \underbrace{x_1, \dots, x_m}_{\text{линейно независимы}} \in V \longleftrightarrow \underbrace{x'_1, \dots, x'_m}_{\text{линейно независимы}} \in V'$$

Доказательство:

$$\alpha_k \in K$$

$$\sum_{k=1}^m \alpha_k x_k = 0 \longleftrightarrow \sum_{k=1}^m \alpha_k x'_k = 0'$$

$$\text{т.к. } \sum_{k=1}^m \alpha_k x_k \longleftrightarrow \sum_{k=1}^m \alpha_k x'_k \text{ (3 свойство) и } 0 \in V \longleftrightarrow 0' \in V' \text{ (1 свойство)}$$

$$\underbrace{x_1, \dots, x_m}_{\text{линейно независимы}} \in V \Leftrightarrow \forall k = 1 \dots m : \alpha_k = 0 \Leftrightarrow \underbrace{x'_1, \dots, x'_m}_{\text{линейно независимы}} \in V'$$

Q.E.D.

$$5. \underbrace{x_1, \dots, x_m}_{\text{порождающая система}} \in V \longleftrightarrow \underbrace{x'_1, \dots, x'_m}_{\text{порождающая система}} \in V'$$

$x_1, \dots, x_m \in V$ — порождающая система $\Leftrightarrow \forall x \in V : x = \sum_{k=1}^m \alpha_k x_k$

$$\forall x \in V : x = \sum_{k=1}^m \alpha_k x_k \longleftrightarrow \forall x' \in V' : x' = \sum_{k=1}^m \alpha_k x'_k$$

т.к. $\sum_{k=1}^m \alpha_k x_k \longleftrightarrow \sum_{k=1}^m \alpha_k x'_k$ (3 свойство) и $x \longleftrightarrow x'$

$\forall x' \in V' : x' = \sum_{k=1}^m \alpha_k x'_k \Leftrightarrow x'_1, \dots, x'_m$ — порождающая система

Q.E.D.

$$6. \underbrace{e_1, \dots, e_n}_{\text{базис } V} \longleftrightarrow \underbrace{e'_1, \dots, e'_n}_{\text{базис } V'}$$

Доказательство:

Из свойств 4 и 5 мы знаем, что если система векторов линейно независима и порождающая, то есть это базис. Q.E.D.

Теорема

V_1, V_2 — линейные пространства над полем K

$$V_1 \cong V_2 \Leftrightarrow \dim V_1 = \dim V_2$$

Доказательство

$$\boxed{\Leftarrow} \dim V_1 = \dim V_2 \Rightarrow e_1, \dots, e_n \text{ — базис в } V_1 \text{ и } e'_1, \dots, e'_n \text{ — базис в } V_2$$

Построим изоморфизм из V_1 в V_2

$$x = \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i e_i \in V_1 \longleftrightarrow \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \end{pmatrix} \in K^n \longleftrightarrow x' = \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i e'_i \in V_2$$

$$x \in V_1 \xleftrightarrow{\text{координатный изоморфизм}} \mathbf{x} \in K^n \xleftrightarrow{\text{координатный изоморфизм}} x' \in V_2$$

Проверим линейность $\forall \lambda \in K$

$$\begin{aligned} x + \lambda y &\longleftrightarrow \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i e_i + \lambda \sum_{i=1}^n \mathbf{y}_i e_i = \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i + \lambda \mathbf{y}_i) e_i \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 + \lambda \mathbf{y}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n + \lambda \mathbf{y}_n \end{pmatrix} \longleftrightarrow \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i + \lambda \mathbf{y}_i) e'_i = \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i e'_i + \lambda \sum_{i=1}^n \mathbf{y}_i e'_i = e'_i \longleftrightarrow x' + \lambda y' \\ x + \lambda y &\longleftrightarrow x' + \lambda y' \end{aligned}$$

Биекция сохраняет свойство линейности \Leftrightarrow изоморфизм

\Rightarrow Если $V_1 \cong V_2$, то из 6 свойства изоморфизма мы знаем, что существует биекция между базисами этих систем $\Rightarrow \dim V_1 = \dim V_2$

Q.E.D.

Следствие

Изоморфизм конечномерных пространств — отношение эквивалентности на множестве линейных конечномерных пространств

$$V_1 \sim V_2 \Leftrightarrow V_1 \cong V_2$$

Доказательство

1. рефлексивность

$$V_1 \sim V_1, \text{ т.к. } id_{V_1} — \text{изоморфизм}$$

2. симметричность

$$V_1 \sim V_2 \Rightarrow V_2 \sim V_1, \text{ т.к. } \dim V_1 = \dim V_2 \text{ по теореме выше}$$

3. транзитивность

$$\left. \begin{array}{l} V_1 \sim V_2 \\ V_2 \sim V_3 \end{array} \right\} \Rightarrow V_1 \sim V_3$$

по теореме выше

$$\left. \begin{array}{l} \dim V_1 = \dim V_2 \\ \dim V_2 = \dim V_3 \end{array} \right\} \Rightarrow \dim V_1 = \dim V_3$$

Q.E.D.

2.3.4 Линейное подпространство. Ранг системы векторов

$L \subset V$ (подмножество), если L удовлетворяет 1–8 аксиомам линейного пространства над полем K относительно $+$, $\cdot \lambda$, то L называется линейным подпространством пространства V .

Теорема (критерий линейного подпространства)

L — линейное подпространство $V \Leftrightarrow \forall x, y \in L \subset V \forall \lambda \in K : x + \lambda y \in L$

(L замкнуто относительно $+$, $\cdot \lambda$)

Доказательство

\Rightarrow т.к. $L \subset V$ и выполняются 1-8 аксиомы

\Leftarrow т.к. $L \subset V$ выполнены все аксиомы кроме 3 и 4

Пусть $x \in L \subset V$, тогда $x + (-1) \cdot x \in L \Rightarrow 0 \in L \Rightarrow \exists$ нейтральный элемент в L

Пусть $x = 0 \in L, y \in L \Rightarrow 0 + (-1) \cdot y = -y \in L \Rightarrow \exists$ противоположный элемент

\Rightarrow для L выполнены 1-8 аксиомы линейного пространства

Q.E.D.

Замечания

1. $L \subset V \Rightarrow 0 \in L$
2. $\dim L \leq \dim V$

Ранг системы векторов $\stackrel{def}{\Longleftrightarrow} \dim(\text{span}(v_1, \dots, v_m)) = r = \text{rg}(v_1, \dots, v_m)$

r — число макс линейно независимых векторов в $L = \text{span}(v_1, \dots, v_m)$

по теореме о «прополке»: $\text{span}(v_1, \dots, v_m) = \text{span}(v_{j_1}, \dots, v_{j_r})$ — линейно независимы

v_{j_1}, \dots, v_{j_r} базис $\text{span}(v_1, \dots, v_m)$ — база системы векторов v_1, \dots, v_m

Элементарные преобразования системы векторов:

1. удаление/добавление нулевого вектора
2. изменение порядка векторов
3. замена любого векторов на него же, умноженный на скаляр ($\lambda \in K, \lambda \neq 0 : v_j \rightarrow \lambda v_j$)
4. замена любого из векторов на его сумму с любым другим вектором системы ($v_j \rightarrow v_j + v_k$)

Теорема

$\text{rg}(v_1, \dots, v_m)$ не меняется при элементарных преобразованиях

Доказательство:

1. Заметим, что добавление/удаление нулевого вектора никак не влияет на span , то есть на ранг.
2. Заметим, что при перестановке у нас просто меняется порядок в разложении через эти вектора.

3. Возьмем и умножим соответствующее α_i в разложении вектора на $\frac{1}{\lambda}$. Заметим, что «новых» векторов в span не добавится, и старые вектора все останутся
4. $\dots + a_j v_j + \dots + a_k v_k + \dots = \dots + a_j (v_j + v_k) + \dots + (a_k - a_j) v_k + \dots$ Аналогично рассуждениям из прошлого пункта получим требуемое

Q.E.D.

2.3.5 $L_1 + L_2, L_1 \cap L_2$, формула Грассмана, $L_1 \oplus L_2$ (прямая сумма)

$L_1, L_2 \in V$ — линейные подпространства пространства V

$$L_1 + L_2 = \{x_1 + x_2 \in V : x_1 \in L_1, x_2 \in L_2\}$$

$$L_1 \cap L_2 = \{x \in V : x \in L_1, x \in L_2\}$$

Лемма:

Сумма и пересечение тоже линейные подпространства.

Доказательство:

См. критерий линейного подпространства.

Q.E.D.

Теорема (формула Грассмана)

$L_1, L_2 \in V$ — линейные подпространства пространства V

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim(L_1) + \dim(L_2) - \dim(L_1 \cap L_2)$$

Доказательство:

$$1. \dim(L_1 \cap L_2) = 0$$

$L_1 \cap L_2 = \{0\}$. А что это значит? Что мы должны доказать немного другую формулу:
 $\dim(L_1 + L_2) = \dim(L_1) + \dim(L_2)$

Возьмём v_1, \dots, v_n — базис L_1 .

Возьмём f_1, \dots, f_m — базис L_2 .

Докажем, что $v_1, \dots, v_n, f_1, \dots, f_m$ — базис для $L_1 + L_2$.

- Докажем линейную независимость. От противного. Пусть лин. зависимо, тогда напишем нетривиальную линейную комбинацию:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i + \sum_{i=1}^m \alpha_{i+m} f_i = 0 \Rightarrow \underbrace{\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i}_{\in L_1} = \underbrace{\sum_{i=1}^m -\alpha_{i+m} f_i}_{\in L_2}, \quad L_1 \cap L_2 = \{0\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i \underbrace{v_i}_{\text{базис}} = 0 = \sum_{i=1}^m -\alpha_{i+m} \underbrace{f_i}_{\text{базис}} \Leftrightarrow \forall i : \alpha_i = 0$$

- Докажем порождаемость. Любой элемент суммы раскладывается (по определению) на элемент из L_1 и элемент из L_2 . Откуда получили то, что нам надо.

Формула доказана!

2. $\dim(L_1 \cap L_2) \neq 0$ Откуда возьмём базис пересечения: e_1, \dots, e_k .

По теореме о дополнении до базиса, т.к. e_1, \dots, e_k лежит в L_1 и линейно независимо, то можно дополнить до базиса L_1 , получим: $e_1, \dots, e_k, v_1, \dots, v_{n-k}$ — базис L_1 .

Аналогично сделаем со вторым пространством и получим: $e_1, \dots, e_k, f_1, \dots, f_{m-k}$ — базис L_2 .

Теперь докажем, что $e_1, \dots, e_k, v_1, \dots, v_{n-k}, f_1, \dots, f_{m-k}$ — базис суммы.

- Докажем линейную независимость. От противного. Пусть лин. зависимо, тогда напишем нетривиальную линейную комбинацию:

$$\sum_{i=1}^{n-k} \alpha_i v_i + \sum_{i=1}^k \alpha_{n-k+i} e_i + \sum_{i=1}^{m-k} \alpha_{n+i} f_i = 0$$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n-k} \alpha_i v_i + \sum_{i=1}^k \alpha_{n-k+i} e_i}_{\in L_1} - \underbrace{\sum_{i=1}^{m-k} \alpha_{n+i} f_i}_{\in L_2} = 0$$

Перенесем в другую сторону и получим, что с одной стороны у нас есть v из L_1 , с другой стороны он у нас из L_2 . Откуда левая сумма раскладывается по векторам из e_1 (так как он лежит в пересечении).

$$\sum_{i=1}^{n-k} \alpha_i v_i + \sum_{i=1}^k \alpha_{n-k+i} e_i = \sum_{i=1}^k \beta_i e_i$$

Перенесу налево, должна получиться линейная комбинация равная нулю, а такая из-за линейной независимости может быть только тривиальной, откуда α_j при v_j равны 0, следовательно α_j при всех f_j и e_k , т.к. это базис L_2 :

$$\sum_{i=1}^{m-k} \alpha_{n+i} f_i + \sum_{i=1}^k \alpha_{n-k+i} e_i = 0$$

Откуда линейно независима.

- Докажем порождаемость. Любой элемент суммы раскладывается (по определению) на элемент из L_1 и элемент из L_2 . Откуда разложим на базисы L_1, L_2 (которые указаны выше). Сложим их и получили, что данный элемент это линейная комбинация. Откуда порождается.

Тогда $\dim(L_1 + L_2) = n + m - k$.

Q.E.D.

$L_1, \dots, L_m \subset V$ называются дизъюнктными, если $x_1 + \dots + x_n = 0$, где $x_i \in L_i, i = 1 \dots m \Leftrightarrow \forall i = 1 \dots m : x_i = 0$

$L_1 + \dots + L_m$ называется прямой суммой, если L_1, \dots, L_m — дизъюнктны.

$L_1 \oplus L_2 \oplus \dots \oplus L_m$ — прямая сумма линейных подпространств.

Теорема

$$L = L_1 + \dots + L_m = \sum_{k=1}^m L_k, L_k \subset V$$

$$L = \bigoplus_{k=1}^m L_k \Leftrightarrow \text{выполнению любого из 3-х утверждений}$$

1. $\forall j = 1 \dots m : L_j \cap \sum_{k \neq j} L_k = \{0\}$
2. базис L = объединение базисов L_k
3. $\forall x \in L : \exists! x_k \in L_k : x = \sum x_k$ (единственность представления элемента суммы)

Доказательство:

1. Давайте сначала докажем из определения дизъюнктивности первый пункт.

\Rightarrow Мы знаем, что $v_1 + v_2 + \dots + v_m = 0$ возможно только если каждый из векторов — 0.

Рассмотрим $v \in L_i \cap \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m L_j$. Он, как несложно заметить, лежит в L_i , поэтому может быть

записан как v_i . С другой стороны, $v \in \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m L_j$, что значит, что его можно записать как сумму

$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m v_j$. А это значит, что $-v_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m v_j = 0$. По причине дизъюнктивности, все слагаемые тут —

0. А значит $-v_i = 0 \Rightarrow v = 0$. То есть любой $v \in L_i \cap \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m L_j$ является 0, что и требовалось

доказать.

\Leftarrow Мы знаем, что $\forall i \in [1 : m] L_i \cap \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m L_j = \{0\}$. Хочется доказать, что $v_1 + v_2 + \dots + v_m =$

$0 \Leftrightarrow \forall i \in [1 : m] v_i = 0$. Заметим, что $v_1 + v_2 + \dots + v_m = 0 \Leftrightarrow \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m v_j = -v_i$. Правая часть

лежит в $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m L_j$, а левая — в L_i . Это значит, что обе части лежат в их пересечении, а там

лежит только 0. Значит $v_i = 0$. То же самое можно провести для любого i , получив, что все v_i — нули. Что и требовалось доказать.

2. Теперь давайте докажем из определения дизъюнктивности второй пункт.

Мы знаем, что $v_1, \dots, v_m = 0$ возможно только если каждый из векторов — 0. Рассмотрим базисы L_i . Возьмем все эти базисы. Очевидно они будут порождать нашу сумму. Теперь докажем линейную независимость.

Рассмотрим нулевую линейную комбинацию объединения базисов L_j :

$$\sum \beta_j e_i^j + \dots + \sum \beta_{f_k} e_{j_k}^k$$

где $v_j = \sum \beta_j e_i^j \in L_j$.

Дизъюнкты $\Leftrightarrow \forall j : v_j = 0 \Leftrightarrow \forall j : \beta_{ij} = 0$ т.к. e_{ij}^j базис $L_j \Leftrightarrow$ объединение базисов линейно независимо.

3. $\exists x_k$, очевидно. Докажем единственность. Пусть $x = \sum x_k = \sum x'_k \Rightarrow \sum (x_k - x'_k) = 0$
 $\Leftrightarrow \forall k : x_k - x'_k = 0$
 дизъюнктность

Q.E.D.

Следствие

$$L = L_1 \oplus \dots \oplus L_m \Leftrightarrow \dim L = \sum_{i=1}^m \dim L_i$$

Доказательство

Из п. 2.

Q.E.D.

$$V = \bigoplus_{i=1}^m L_i \Rightarrow \forall x \in V : \exists! x_i \in L_i : x = \sum_{i=1}^m x_i$$

x_i — проекция элемента x на подпространство L_i параллельно $\sum_{j \neq i} L_j$.

Если $V = L_1 \oplus L_2$, L_1 — прямое дополнение L_2 и наоборот.

Если $L \subset V$, то всегда $\exists L' \subset V : V = L \oplus L'$ (L' выбирается неоднозначно).

Линейным (аффинным) многообразием называется множество точек пространства $V : P = \{x \in V : x = x_0 + l, l \in L\}$, где $L \subset V, x_0 \in V$ (сдвинутое линейное подпространство). Обозначается как $P = x_0 + L$.

Размерность линейного многообразия $\xLeftrightarrow{def} \dim P = \dim L$

Теорема

$P_1 = x_1 + L_1; P_2 = x_2 + L_2$, где $L_1, L_2 \subset V$ — линейные подпространства, $x_1, x_2 \in V$

$$P_1 = P_2 \Leftrightarrow \begin{cases} L_1 = L_2 = L \\ x_1 - x_2 \in L \end{cases}$$

Доказательство:

$$\boxed{\Leftarrow} \forall p_1 \in P_1 = x_1 + l_1 = x_1 - x_2 + l_1 + x_2 \in P_2$$

Так как $x_1 - x_2 \in L = L_2, l_1 \in L = L_2$. Откуда $P_1 \subset P_2$. Аналогично $P_2 \subset P_1$, откуда получили искомое $\boxed{\Rightarrow}$ Посмотрим на $x_1 + 0$. Он лежит в P_1 , откуда есть ему эквивалентный $x_2 + l_2$ из P_2 , исходя из того, что $P_1 = P_2$. Тогда $x_1 - x_2$ лежит в L_2 .

Посмотрим на $x_2 + 0$. Он лежит в P_2 , откуда есть ему эквивалентный $x_1 + l_1$ из P_1 , исходя из того, что $P_1 = P_2$. Тогда $x_1 - x_2$ лежит в L_1 . Откуда он лежит в пересечении.

Теперь рассмотрим любое $l_2 \in L_2$. Ему соответствует элемент, как $x_2 + l_2$, с другой стороны это $x_1 + l_1$. Тогда $x_1 - x_2 + l_1 = l_2$. Откуда любой l_2 содержится в l_1 . То есть $L_2 \subset L_1$. Аналогично, $L_1 \subset L_2$, откуда получили то, что нам надо.

Q.E.D.

Следствие

$$P = x_0 + L$$

$$\forall x \in P \Rightarrow P_x = x + L = P$$

Доказательство

1. $L = L$
2. $x - x_0 \in L$

Q.E.D.

2.3.6 Фактор пространство лин. пространства

Пусть у нас есть линейное подпространство L . Тогда отношение $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in L$ является отношением эквивалентности, для любых векторов из V .

Факторпространство пространства V по модулю линейного подпространства L $V|_L$ — это фактормножество V по отношению эквивалентности \sim из предыдущего утверждения.

Теорема $V|_L$ состоит из линейных многообразий на L .

Доказательство:

Если $x - y \in L$, то линейные многообразия $x + L$ и $y + L$ по одной из теорем ранее совпадают. То есть эквивалентные элементы порождают одинаковые многообразия.

Q.E.D.

Теорема

$$\dim V|_L = \dim V - \dim L.$$

Доказательство:

Пусть $\{e_1; e_2; \dots; e_m\}$ — базис L . Дополним его до базиса V векторами $\{f_1; f_2; \dots; f_{n-m}\}$. Хочется доказать, что $\{f_1 + L; f_2 + L; \dots; f_{n-m} + L\}$ — базис $V|_L$.

Докажем, что эта система порождающая. Нужно породить $v + L$. v раскладывается по базису $\{e_1; e_2; \dots; e_m; f_1; f_2; \dots; f_{n-m}\}$ как $v = \sum_{i=1}^m \alpha_i e_i + \sum_{i=1}^{n-m} \beta_i f_i$. Первая сумма лежит в L , то есть её можно выкинуть, многообразие останется таким же. А значит $v + L$ можно представить как $\sum_{i=1}^{n-m} \beta_i (f_i + L)$, ведь по определению суммы многообразий это $\left(\sum_{i=1}^{n-m} \beta_i f_i \right) + L$.

Теперь докажем линейную независимость. Рассмотрим нулевую линейную комбинацию $\sum_{i=1}^{n-m} \beta_i (f_i + L)$. Она, как мы уже знаем, равна $\left(\sum_{i=1}^{n-m} \beta_i f_i \right) + L$. Это должно быть равно нейтральному элементу (то есть L). Когда эти линейные многообразия равны? Когда $\sum_{i=1}^{n-m} \beta_i f_i \in L$. То есть $\sum_{i=1}^{n-m} \beta_i f_i - \sum_{i=1}^m \alpha_i e_i = 0$. Но это же линейная комбинация векторов

подсистемы $\{e_1; e_2; \dots; e_m; f_1; f_2; \dots; f_{n-m}\}$, а значит она линейно независима. А значит $\forall i \in [1 : n - m] \beta_i = 0$, что значит, что линейная комбинация $\sum_{i=1}^{n-m} \beta_i (f_i + L)$ тривиальна.

Q.E.D.

2.4 Матрицы

2.4.1 Основные понятия

def: Матрица — множество некоторых объектов (элементов), записанных в виде таблицы (не обязательно числа).

$$A = (a_{ij})_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

m — число строк n — число столбцов "Матрица размерности m на n ".

Матрица, где $\forall i, j \ a_{ij} \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ — числовая (вещественная/комплексная).

$$A = (A_1 \ \dots \ A_m) \text{ — столбцовый вид записи. } A_j \text{ — столбец матрицы. } A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m(\mathbb{C}^m)$$

$$A = \begin{pmatrix} S_1 \\ \vdots \\ S_m \end{pmatrix} \text{ — строчный вид записи. } S_i \text{ — строка матрицы. } S_i = (a_{i1} \ \dots \ a_{in}) \in \mathbb{R}_n(\mathbb{C}_n)$$

$$\text{span}(A_1, \dots, A_n) \subset \mathbb{R}^m(\mathbb{C}^m)$$

Если $m = n$, матрица называется **квадратной**.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & * & * \\ * & \ddots & * \\ * & * & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ — главная диагональ.}$$

$$A = \begin{pmatrix} * & * & a_{1n} \\ * & \ddots & * \\ a_{n1} & * & * \end{pmatrix} \text{ — побочная диагональ.}$$

$$\forall i \neq j \ a_{ij} = 0 \quad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_n \end{pmatrix} = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \text{ — } \underline{\text{диагональная}} \text{ матрица.}$$

$$E = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n), \forall i \ \alpha_i = 1 \text{ — } \underline{\text{единичная}} \text{ матрица.}$$

$$0 = \text{diag}(0, \dots, 0) \text{ — } \underline{\text{нулевая}} \text{ матрица.}$$

$$\forall A_{n \times n} \quad \text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} \text{ — след матрицы (от англ. trace)}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ — верхнетреугольная матрица.}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ * & \ddots & 0 \\ * & * & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ — нижнетреугольная матрица.}$$

2.4.2 Основные операции с матрицами

$$a_{ij} \in \mathbb{K}$$

$$A_{m \times n}, B_{m \times n}$$

def: $C = A + B = (c_{ij}) \quad \forall i, j \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

'+' — сложение матриц (одной размерности)

$\mathbb{0}$ — нейтральный элемент относительно сложения

$$\lambda \in \mathbb{K}$$

$$C = \lambda A = (\lambda a_{ij})$$

$\lambda \times$ — умножение на скаляр.

$-1A$ — противоположная A матрица (не путать с обратной)

Свойства:

1. $A + B = B + A$
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. $\exists \mathbb{0}$
4. $\exists -A$
5. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
6. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
7. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A) = \beta(\alpha A)$
8. $1A = A$

\Rightarrow Линейное пространство (8 аксиом выполнены) $M_{m \times n}$

$$E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & a_{ij} = 1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ — канонический базис пространства } M_{m \times n} \quad A = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} E_{ij} =$$

$$(\alpha_{ij})_{m \times n} = \mathbb{0}_{m \times n} \Leftrightarrow a_{ij} = 0 \quad \forall i, j$$

$$A \leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{1n} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{2n} \\ a_{m1} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}(\mathbb{C})^{mn} \Leftrightarrow A \cong \mathbb{K}^{mn} \Leftrightarrow \dim(M_{m \times n}) = mn$$

def: Матрицы A и B согласованы, если число столбцов A совпадает с числом строк B .

Если A и B согласованы, то $A_{m \times k}, B_{k \times n}$

$$C = A \times B = AB = (C_{ij})_{m \times n} \quad C_{ij} = \sum_{r=1}^k a_{ir} b_{rj} \text{ — "}\times\text{" умножение матриц.}$$

def: Матрицы A и B перестановочны, если $AB = BA$ (очевидно, должны быть квадратными).

A, B, C — квадратные матрицы $n \times n$

$\forall \lambda \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} 9. \quad & A(B + C) = AB + AC \\ & (A + B)C = AC + BC \end{aligned}$$

\Rightarrow кольцо

$$10. \quad \lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$$

\Rightarrow алгебра $(M_{n \times n})$

$$12. \quad A(BC) = (AB)C$$

\Rightarrow ассоциативная алгебра

$$13. \quad \exists E \quad EA = AE = A$$

\Rightarrow унитарная алгебра

Обратный элемент может не существовать, так что не выполняется 14. И ещё нет коммутативности, так что не выполняется 11.

Доказательства: упражнение на дом :) Но, вообще, там несложно, просто глина.

2.4.3 Операция транспонирования

def: Операция транспонирования заменяет матрицу $A_{m \times n}$ на $A_{n \times m}^T$, где строки новой матрицы — столбцы исходной (для квадратной матрицы это попросту отражение относительно главной диагонали).

$$B = A^T = (b_{ij}) = (a_{ji})$$

Свойства:

$$1. \quad (A^T)^T = A$$

$$2. (A + \lambda B)^T = A^T + \lambda B^T$$

$$3. A \text{ и } B \text{ согласованы } (AB)^T = B^T A^T$$

def: $A_{m \times n}$ называется симметричной, если $A = A^T$

def: $A_{m \times n}$ называется кососимметричной, если $A = -A^T$ (у кососимметричной все диагональные элементы — нули).

2.4.4 Обратная матрица

def: $A_{n \times n}$

Матрица A^{-1} называется обратной к A , а A называется обратимой, если $A^{-1}A = AA^{-1} = E$

Пока мы не знаем условий существования (в лекциях позже)

Свойства:

1. A^{-1} — единственная (док-во очевидное через ассоциативность)
2. $(A^{-1})^{-1} = A$ (из определения)
3. $\forall \lambda, \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \neq 0 \quad (\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$
4. $E^{-1} = E$
5. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
6. $\exists B^{-1} \Rightarrow \exists (AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

2.4.5 Ранг матрицы

def: $rg_{line}(A) = rg(S_1, \dots, S_m)$ — строчный ранг матрицы A (берем строки как вектора, находим ранг системы векторов) $1 \leq rg_{line}(A) \leq n$ ($A \neq 0$)

def: $rg_{col}(A) = rg(A_1, \dots, A_n)$ — столбцовый ранг матрицы A (берем строки как вектора, находим ранг системы векторов) $1 \leq rg_{col}(A) \leq m$ ($A \neq 0$)

$$A_j \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$$

$$\tilde{A}_j = \begin{pmatrix} a_{i_1 j} \\ a_{i_2 j} \\ \vdots \\ a_{i_k j} \end{pmatrix} \text{ — отрезок длины } k \text{ столбца } A_j$$

$$S_i \quad 1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq m$$

$$\tilde{S}_i = (a_{ij_1} \quad a_{ij_2} \quad \dots \quad a_{ij_k}) \text{ — отрезок длины } k \text{ строки } S_i$$

Утверждение 1: A_1, A_2, \dots, A_n линейно зависимы \Rightarrow любые отрезки длины k $\tilde{A}_1 \dots \tilde{A}_n$ линейно зависимы.

Доказательство:

Есть нетривиальная линейная комбинация столбцов A_1, A_2, \dots, A_n , равная нулю, и если мы удалим часть строк, линейная комбинация всё так же будет давать 0, при этом получим нетривиальную линейную комбинацию отрезков $A_1, \dots, A_n \Rightarrow$ линейно зависимы.

Следствие: Отрезки длины k $\tilde{A}_1 \dots \tilde{A}_n$ линейно независимы $\Rightarrow A_1, A_2, \dots, A_n$ линейно независимы.

Утверждение 2: $rg_{line}(A) = k$ $S_{i_1} \dots S_{i_k}$ — база строк. Тогда, если $\tilde{A}_1 \dots \tilde{A}_n$ отрезки, отвечающие $S_{i_1} \dots S_{i_k}$, линейно зависимы, то и A_1, A_2, \dots, A_n линейно зависимы.

Доказательство:

н.у.о. $i_1, \dots, i_k = 1, 2, \dots, k$. Значит все оставшиеся — линейно комбинация. Значит любую строку можно записать, как линейную комбинацию наших строк:

$$s_{k+l} = \sum_{r=1}^k \alpha_{rl} s_r. \quad a_{k+l_j} = \sum_{r=1}^k \alpha_{rl} a_{r_j}, \quad l = 1, \dots, m - k:$$

$\tilde{A}_1 \dots \tilde{A}_n$ отрезки, отвечающие $S_1 \dots S_k$, линейно зависимы $\Leftrightarrow \exists \beta_j \in K$ не все нули.

$$\sum_{j=1}^n b_j \tilde{A}_j = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n \beta_j a_{r_j} = 0, \forall r = 1, \dots, k. \text{ Докажем, что с этими же } \beta_j$$

$$\sum_{j=1}^n b_j A_j = 0. \text{ Первые } k - \text{ нули. Докажем, что и оставшиеся нули.}$$

$$\text{Посмотрим на } k+1 \text{ координату: } \sum_{j=1}^n \beta_j a_{k+1_j} = \sum_{j=1}^n \beta_j \sum_{r=1}^k \alpha_{r1} a_{r_j} = \sum_{r=1}^k \alpha_{r1} \sum_{j=1}^n \beta_j a_{r_j} = 0$$

Далее будем смотреть на следующую $k+l$ координату, и дальнейшее доказательство будет аналогично.

Q.E.D.

Замечание: Утверждение 2 справедливо для любой подсистемы отрезков столбцов A_{j_1}, \dots, A_{j_r} .

Теорема (о ранге матрицы)

$$rg_{line}(A) = rg_{col}(A) = rg(A)$$

Доказательство:

$$rg A = k : 1 \leq k \leq n, m$$

н.у.о. Пусть первые k строк — база строк матрицы.

Рассмотрим отрезки столбцов, соответствующие этим элементам.

$$r = rg(\tilde{A}_1 \dots \tilde{A}_n) \leq k$$

Пусть $\tilde{A}_{j_1} \dots \tilde{A}_{j_r}$ — база отрезков.

Тогда по следствию к утверждению 1: $\tilde{A}_{j_1} \dots \tilde{A}_{j_r}$ — линейно независимые столбцы. При этом, по утверждению 2 (и замечанию) любая система из $r+1$ столбца будет зависима, т.к. будут зависимы их отрезки $\Rightarrow rg_{col} = r$

Откуда получаем, что ранг столбцов меньше ранга строк. Заметим, что то же самое будет верно и для строк.

Q.E.D.

Свойства ранга:

$$1. \quad rg(A^T) = rg(A)$$

2. $rg(\lambda A) = rg(A), \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$
3. $rg(A + B) \leq rg(A) + rg(B)$ (лайт версия т. Грассмана)
4. A и B согласованы, $rg(AB) \leq \min(rg(A), rg(B))$

Доказательство:

1. Заметим, что у транспонированной столбцы и строки просто местами поменяются.
2. тут даже говорить нечего...
3. $rg(A + B) \leq \dim(L_1 + L_2) \leq \dim(L_1) + \dim(L_2)$
4. Зафиксируйте A . Тогда столбцы, полученные умножением матрицы A поочерёдно на столбцы матрицы B будут лин. комбинацией столбцов матрицы A , откуда $rg(AB) \leq rg A$. Транспонируйте произведение и повторите, получите $rg(AB) \leq rg(B)^T = rg(B)$

def: Элементарными преобразованиями над строками (столбцами) матрицы A называются элементарные преобразования 1-4, которые производятся с ними, как с векторами пространства K^n и K^m соответственно.

5. $rg(A)$ не меняется при элементарных преобразованиях над её строками/столбцами

Теорема: $A_{m \times n}$

$$rg(A) = k$$

$$1 \leq k \leq \min(n, m)$$

$\forall A$ может быть элементарными преобразованиями строк и перестановкой столбцов приведена к трапециевидной форме. Причем, число строк в трапециевидной форме равно k (соответственно, если число столбцов равно k , можно привести к треугольной форме)

Матрица трапециевидной формы (н.у.о. $n \leq m$):

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & * & * & * \\ 0 & \ddots & * & * & * \\ 0 & 0 & a_{nn} & * & * \end{pmatrix}$$

2.5 Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

2.5.1 Основные определения и понятия, теорема Кронекера-Капелли.

Обычно система записывается так:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12} + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22} + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2} + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Это общий вид СЛАУ, причём $a_{ij}, x_k, b_r \in K$

Матричная форма записи $Ax = b$, где

$$\underbrace{A}_{\text{матрица системы}} = (a_{ij})_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, x = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\text{столбец неизвестных}}, b = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{\text{столбец свободных членов}}$$

$$A = (A_1, \dots, A_n), \text{ где } A_j \text{ — столбцы. } \boxed{\sum_{i=1}^n x_i A_i = b} \text{ — векторная форма записи}$$

$Ax = b$ — **система однородных линейных уравнений (СЛОУ)** (однородная система), если $b = 0$.

$Ax = b$ — **система неоднородных линейных уравнений (СЛНУ)** (неоднородная система), если $b \neq 0$.

Система $Ax = b$ — **совместная (разрешимая)**, если $\exists x$, то есть существует решение.

Система $Ax = b$ — **несовместная (неразрешимая)**, если $\nexists x$, то есть решения не существует.

Замечание: СЛОУ всегда совместна, т.к. $x = 0$ всегда является решением.

Система $Ax = b$ — **определенная**, если есть единственное решение.

Система $Ax = b$ — **неопределенная**, если есть более одного решения.

Система $Ax = 0$ — **тривиальная**, если она определённая, то есть единственное решение $x = 0$.

Общее решение системы $Ax = b$ — $\{\forall x | Ax = b\}$, то есть множество всех его решений.

Частное решением системы $Ax = b$ — какое-то конкретное решение x , рассматриваемое в данном контексте.

Расширенная матрица системы — $(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$

Теорема Кронекера-Капелли: $Ax = b$ совместна $\Leftrightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(A|b)$

Доказательство:

$Ax = b \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i A_i = b$ — линейная комбинация столбцов $\Leftrightarrow b \in \text{span}(A_1, \dots, A_n) \Leftrightarrow \text{span}(A_1, \dots, A_n) = \text{span}(A_1, \dots, A_n, b)$

$\text{rg}(A) = \dim(\text{span}(A_1, \dots, A_n)) = \dim(\text{span}(A_1, \dots, A_n, b)) = \text{rg}(A|b)$ *Q.E.D.*

2.5.2 Структура общего решения СЛОУ и СЛНУ. ФСР. Альтернатива Фредгольма.

Теорема: $Ax = 0$, $u, v \in K^n$ — решения СЛОУ $\Rightarrow \forall \lambda \in K : \lambda u + v$ — тоже решение СЛОУ.

Доказательство:

u, v — решения $\Rightarrow Au = 0, Av = 0$

$A(\lambda u + v) = \lambda Au + Av = \lambda 0 + 0 = 0 \Rightarrow \lambda u + v$ — тоже решение СЛОУ *Q.E.D.*

Следствие: общее решение СЛОУ — линейное подпространство $L \subseteq K^n$

Смотри критерии линейного подпространства.

Теорема (размерность общего решения СЛОУ): $Ax = 0$, $\text{rg}(A) = k$, L — общее решение СЛОУ $\Rightarrow \dim(L) = n - k = n - \text{rg}(A)$, где n — число неизвестных.

Доказательство:

- $k = 0$:

$$A = 0 \quad \forall x \in K^n : Ax = 0 \Rightarrow \dim(L) = \dim(K^n) = n - 0 = n - k$$

- $1 \leq k < n$:

Тогда $\text{rg}(A) = k = \text{rg}_{\text{col}}(A) = \text{rg}(A_1, \dots, A_n)$ — база столбцов из k элементов. Переставим неизвестные x_i , чтобы базисом были столбцы A_1, \dots, A_k , а все остальные столбцы будут их линейными комбинациями.

$\forall j = 1, \dots, n - k :$

$A_{k+j} = \sum_{i=1}^k \alpha_i^j A_i$, где $\alpha_i^j \in K$. (j — тоже индекс, просто для удобства записанный сверху)

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i^j A_i - A_{k+j} = 0 \Leftrightarrow u_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 \\ \alpha_2^1 \\ \vdots \\ \alpha_k^1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1^2 \\ \alpha_2^2 \\ \vdots \\ \alpha_k^2 \\ 0 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, u_{n-k} = \begin{pmatrix} \alpha_1^{n-k} \\ \alpha_2^{n-k} \\ \vdots \\ \alpha_k^{n-k} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}$$

u_1, \dots, u_{n-k} — решения $Ax = 0$, причём линейно независимые, т.к. ни один не является линейной комбинацией остальных.

Покажем, что u_1, \dots, u_{n-k} — порождающая система. Пусть u — решение $Ax = 0$.

$$\begin{aligned}
 u = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \\ \beta_{k+1} \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} &\Rightarrow v = u + \sum_{i=1}^{n-k} \beta_{k+i} u_i = \\
 &= \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \\ \beta_{k+1} \\ \beta_{k+2} \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_{k+1}\alpha_1^1 \\ \beta_{k+1}\alpha_2^1 \\ \vdots \\ \beta_{k+1}\alpha_k^1 \\ -\beta_{k+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_{k+2}\alpha_1^2 \\ \beta_{k+2}\alpha_2^2 \\ \vdots \\ \beta_{k+2}\alpha_k^2 \\ 0 \\ -\beta_{k+2} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} \beta_n\alpha_1^{n-k} \\ \beta_n\alpha_2^{n-k} \\ \vdots \\ \beta_n\alpha_k^{n-k} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -\beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_k \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

v — тоже решение $Ax = 0$, так как является суммой других решений $Ax = 0$, домноженных на некоторые коэффициенты.

$Av = \gamma_1 A_1 + \dots + \gamma_k A_k = 0$ — нулевая линейная комбинация линейно независимых векторов

$$\Rightarrow \forall \gamma_j = 0 \Rightarrow u + \sum_{i=1}^{n-k} \beta_{k+i} u_i = 0 \Rightarrow u = \sum_{i=1}^{n-k} (-\beta_{k+i}) u_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_1, \dots, u_{n-k} \text{ — порождающая система} \Rightarrow u_1, \dots, u_{n-k} \text{ — базис } L \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dim L = n - k$$

- $k = n$:

A_1, \dots, A_n — линейно независимы

$$\begin{aligned}
 Ax = 0 &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i A_i = 0 \Leftrightarrow \forall i = 1, \dots, n : x_i = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ — единственное решение} \\
 &\Leftrightarrow \dim L = 0
 \end{aligned}$$

Следствие: $Ax = 0$, n — число переменных.

- $0 \leq \text{rg}(A) < n \Rightarrow$ система неопределенная, имеет бесконечно много решений, образующие линейное подпространство.
- $\text{rg}(A) = n \Rightarrow$ система определенная, имеет единственное решение равное нулю, то есть система тривиальная.

Фундаментальная система решения — базис линейного подпространства решений СЛОУ.

Теорема (о структуре решения СЛНУ): Пусть $Ax = b$ совместна, x_0 — частное решение СЛНУ: x — решение СЛНУ $\Leftrightarrow x = x_0 + u$, где u — некоторое решение $Ax = 0$

Доказательство:

• \Rightarrow :

$$Ax = b, Ax_0 = b \Rightarrow A(x - x_0) = 0 \Rightarrow u = x - x_0 \text{ — решение } Ax = 0$$

• \Leftarrow :

$$x = x_0 + u, Au = 0, Ax_0 = b \Rightarrow Ax = A(x_0 + u) = b + 0 = b \Rightarrow x \text{ — решение } Ax = b$$

Следствия (если система $Ax = 0$ совместна, то):

1. Общее решение $Ax = b$ — линейное многообразие $P = L + x_0$, где x_0 — частное решение СЛНУ, $L = \text{span}(u_1, \dots, u_{n-k})$ — общее решение $Ax = 0$

$$\dim(P) = \dim(L) \text{ — размерность общего решения СЛНУ.}$$

2.
 - $0 \leq \text{rg}(A) < n \Rightarrow Ax = b$ имеет бесконечно много решений, $\dim(P) = n - \text{rg}(A)$
 - $\text{rg}(A) = n \Rightarrow Ax = b$ имеет единственное решение, $\dim(P) = 0$

Теорема (Альтернатива Фредгольма): Пусть $A_{m \times n} \neq 0$, $x \in K^n$, $y \in K^m$: Либо $\forall b \in K^m$: $Ax = b$ имеет решение, либо $A^T y = 0$ нетривиальна.

То есть, $\forall b \in K^m$, существует решение $Ax = b \Leftrightarrow A^T y = 0$ тривиальна.

Доказательство:

$$\forall b \in K^m Ax = b \text{ совместна} \Leftrightarrow b = \sum_{i=1}^n x_i A_i \Leftrightarrow b \in \text{span}(A_1, \dots, A_n)$$

$$\text{Пусть } b = E_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ где } a_j = 1 \text{ — элемент } j\text{-ой строки}$$

$$E_j \in \text{span}(A_1, \dots, A_n)$$

Заметим, что $K^m \subset \text{span}(A_1, \dots, A_n) \subset K^m$, потому что любой базисный вектор содержится в нашей оболочке. Откуда:

$$\text{span}(A_1, \dots, A_n) = K^m \Rightarrow \text{rg} A = m = \text{rg} A^T \Leftrightarrow A^T y = 0 \text{ будем иметь одно решение, по ранее сказанной теореме.}$$

2.5.3 Метод Гаусса решения СЛНУ

$$Ax = b.$$

Элементарным преобразованием системы будем называть:

1. добавление / удаление уравнения с нулевыми коэффициентами и нулевым свободным членом.
2. изменение нумераций уравнений.
3. умножение \forall уравнения на $\forall \lambda \in K, \lambda \neq 0$.

4. замена \forall уравнения на его сумму с другим уравнением.
5. изменение нумерации переменных.

Замечание:

1. все элементарные преобразования приводят к эквивалентной системе.
2. все элементарные преобразования эквиваленты элементарным преобразованиям со строками матрицы $A|b$ и перестановкой в ней столбцов (пункт 5).

Теорема (прямой ход метода Гаусса)

$$\forall Ax = b$$

Элементарными преобразованиями системы исходная система может быть заменена на эквивалентную систему, матрица которой будет иметь трапецевидную (в частном случае, треугольную) форму.

Доказательство:

- Находим в необработанной части матрицы самую левую верхнюю ненулевую ячейку. Переставляем её в самый левый верхний угол необработанной части матрицы.
- Отнимаем от всех строчек, ниже первой необработанной, первую необработанную, домноженную на нужный коэффициент, чтобы первый столбец необработанной части оказался заполненным нулями, кроме первой ячейки.
- Отмечаем верхнюю необработанную строчку и левый необработанный столбец, как обработанные.

Метод Гаусса решения СЛАУ:

1. Прямой ход $(A|b) \sim (\tilde{A}|\tilde{b})$

См. теорему о приведении матрицы к трапецевидной форме. Проводить её мы будем с расширенной матрицей системы. Один лишь нюанс в том, что переставлять столбец B ни с чем нельзя, то есть на нём мы заканчиваем алгоритм. Нужно также учесть, что если в матрице $(\tilde{A}|\tilde{b})$ будет строка вида $(0 \dots 0 | \underset{\neq 0}{\tilde{b}_j})$, то система несовместна.

2. Обратный ход

(а) Вид матрицы треугольный ($\text{rg } A = n$ — числу неизвестных)

Обнулим последний столбец при помощи последней строки:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & 0 & b_1 - b_n \frac{a_{1n}}{a_{nn}} \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 & b_2 - b_n \frac{a_{2n}}{a_{nn}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array} \right)$$

Повторим для предпоследней строки и столбца и так далее. В конце концов придём к виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & b'_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b'_n \end{array} \right)$$

Значит $\begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix}$ — решение СЛАУ, причём единственное в силу теоремы о структуре общего решения СЛНУ.

(b) Вид матрицы трапецевидный ($\text{rg } A < n$)

Возьму из матрицы треугольник, а остальные переменные возьмём за параметры. Их перенесём в правую часть относительно “=”, затем повторим алгоритм пункта (a). В результате, получим общее решение, зависящее от $n - k$ параметров.

2.5.4 Нахождение обратной матрицы методом Гаусса.

$A_{n \times n}$. Найти $A_{n \times n}^{-1}$, такую, что $A \cdot A^{-1} = E = A^{-1} \cdot A$

A^{-1} - n неизвестных столбцов. $A^{-1} = (X_1, \dots, X_n) = X =$

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\text{Заметим, что } A^{-1} \text{ - решение уравнения } AX = E \Leftrightarrow \begin{cases} AX_1 = E_1 \\ AX_2 = E_2 \\ \vdots \\ AX_n = E_n \end{cases} \quad E = (E_1, \dots, E_n)$$

Пусть все системы совместны. Тогда, в процессе нахождения неизвестных столбцов мы делаем с левой частью матрицы одни и те же преобразования. Давайте решать n систем одновременно:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{array} \right)$$

Теорема. (о существовании обратной матрицы)

Дано: матрица $A_{n \times n}$

$\exists A^{-1}$ (A обратима) $\Leftrightarrow \text{rg } A = n$

Причем A^{-1} может быть найдена методом Гаусса.

Доказательство:

$\exists A^{-1}$, если \exists решения $AX_i = E_i$ ($\forall i = 1 \dots n$), это значит, что $\text{rg}(A|E_i) = \text{rg } A$ ($\forall i = 1 \dots n$),

откуда каждый $E_i \in \text{span}(A_1, \dots, A_n) \subset K^n \Rightarrow \text{rg} A = n$.

Следствие. Дано $A_{n \times n}, Ax = b$. A обратима $\Leftrightarrow \exists!$ решение СЛНУ. Причем, $x = A^{-1}b$

$\exists A^{-1} \Leftrightarrow A$ обратима $\Leftrightarrow \text{rg} A = n \Leftrightarrow \Leftrightarrow \exists!$ решение СЛНУ $Ax = b$.

Пусть $x = A^{-1}b$

$Ax = b \Leftrightarrow A(A^{-1}b) = b \Leftrightarrow b = b$ Q.E.D

Теорема (о ранге произведения матриц)

$A_{n \times n}$, A - обратима, $B \Rightarrow \begin{cases} \text{rg}(AB) = \text{rg} B, \text{ если определено } A \cdot B \\ \text{rg}(BA) = \text{rg} B, \text{ если определено } B \cdot A \end{cases}$

Доказательство:

$$1. \text{rg}(AB) \leq (\text{rg} A, \text{rg} B) \leq \text{rg} B.$$

$$\text{rg} B = \text{rg} EB = \text{rg}(A^{-1}AB) \leq \text{rg}(AB) \leq \text{rg} B$$

$$2. \text{rg}(BA) = \text{rg}(BA)^T = \text{rg}(A^T B^T) = \text{rg}(B^T) = \text{rg} B \text{ (т.к. } \text{rg}(A^T) = \text{rg}(A) = n)$$

2.5.5 Геометрическая интерпретация СЛАУ

$V, \dim V = n$

e_1, e_2, \dots, e_n - базис

Множество точек пр-ва V , координаты которых удовлетворяют алгебраическому уравнению 1-ой степени (линейному) наз-ся гиперплоскостью в пр-ве V .

$\forall x \in V \leftrightarrow x \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$ — координатный изоморфизм

$\alpha_1, \dots, \alpha_m$ - гиперплоскости

Что будет в пересечении $\alpha_1 \cap \alpha_2 \cap \dots \cap \alpha_m$?

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & b'_1 \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} & b'_2 \\ 0 & 0 & 0 & b'_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & b'_k \end{array} \right)$$

1.

2.

3. $\text{rg} A = 3 = \text{rg} A|B$, это значит, что есть 3 линейно независимые строки, а остальные - их лин. комбинация.

То есть существуют 3 некомпланарные нормали $\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{N}_3$.

Прямые лежащие в попарном пересечении плоскостей с этими нормальными будут не параллельными, то есть т.к. система совместна, то существует точка, принадлежащая каждой из прямых, т.е. все 3 прямые пересекаются в 1-ой точке.

2.5.6 Матрица перехода от старого базиса к новому. Связь координат вектора в разных базисах.

V, e_1, e_2, \dots, e_n — “старый” базис — $e = (e_1, \dots, e_n)$.

e'_1, e'_2, \dots, e'_n — новый базис — $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$.

$$x \in V \leftrightarrow \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \end{pmatrix} \in K^n \text{ - координаты в базисе } e.$$

$$x \in V \leftrightarrow \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}'_1 \\ \mathbf{x}'_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}'_n \end{pmatrix} \in K^n \text{ - координаты в базисе } e'.$$

$$x = \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i e_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{x}'_i e'_i.$$

Давайте представим e'_j через старый базис: $T_j = \begin{pmatrix} t_{1j} \\ \vdots \\ t_{nj} \end{pmatrix}$ - координаты в базисе e .

$$e'_j = \sum_{k=1}^n t_{kj} e_k$$

$T = T_{e \rightarrow e'} = (T_1, T_2, \dots, T_n)$ — матрица перехода от базиса e к e'

$$(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n) T_{e \rightarrow e'}$$

Свойства T :

1. $\text{rg } T = n$ (T обратима) (очевидно, т.к. координатный изоморфизм)
2. T^{-1} - матрица перехода из e' в e .

Пусть B - матрица перехода от e' к e .

$$(e_1, \dots, e_n) = (e'_1, \dots, e'_n) B = ((e_1, \dots, e_n) T) B = (e_1, \dots, e_n) (BT), \text{ откуда } BT = E, \text{ откуда } B = T^{-1}$$

3. связь координат вектора в разных базисах:

$x \leftrightarrow \mathbf{x}$ в старом базисе

$x \leftrightarrow \mathbf{x}'$ в новом базисе

$$x = \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i e_i = \sum_{j=1}^n \mathbf{x}'_j e'_j = \sum_{j=1}^n \mathbf{x}'_j \sum_{i=1}^n t_{ij} e_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n t_{ij} \mathbf{x}'_j \right) e_i$$

т.к. координаты определяются единственным образом

$$\forall i = 1 \dots n : \mathbf{x}_i = \sum_{j=1}^n t_{ij} \mathbf{x}'_j = (TX')_i \Leftrightarrow \mathbf{X} = T\mathbf{X}', \text{ а}$$

$$\mathbf{X}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{X}$$

2.6 Определители.

2.6.1 Антисимметричные полилинейные формы. Определитель системы векторов произвольного лин. пр-ва.

$\dim V = n$ - лин. пространство над полем K

$f : \underbrace{V \times V \times \dots \times V}_p \rightarrow K$ — называется полилинейной формой (функцией), если выполнено:

$$f(\xi_1, \dots, \xi_p) = \text{число в } K.$$

$$\forall \lambda \in K, \forall \psi, \mu \in V : f(\dots, \psi + \lambda\mu, \dots) = f(\dots, \psi, \dots) + \lambda f(\dots, \mu, \dots)$$

(линейна по каждому аргументу)

Правило/Соглашение Эйнштейна: $x^i e_i = \sum_{i=1}^n x e_i$ - меняем обозначение

решил выделить это в лемму

Лемма:

$$\xi_1, \dots, \xi_p \in V.$$

$$\xi_j = \xi_j^i e_i \leftrightarrow \begin{pmatrix} \xi_j^1 \\ \vdots \\ \xi_j^n \end{pmatrix} \in K^n$$

$$\text{Тогда: } f(\xi_1, \dots, \xi_p) = f(\xi_1^{i_1} e_{i_1}, \xi_2^{i_2} e_{i_2}, \dots, \xi_p^{i_p} e_{i_p}) = \xi_1^{i_1} \xi_2^{i_2} \dots \xi_p^{i_p} f(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}),$$

где $f(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) := \alpha_{i_1 \dots i_p} \in K$ — коэффициенты (координаты) формы f

Доказательство:

Разложите каждую скобочку по линейности. Ой, получили, что надо :0

$f : V^p \rightarrow K$ - полилинейная форма. если $f=0$ при любых двух равных аргументах, то f наз-ся **антисимметричной**.

Утверждение. f антисимметрична $\Leftrightarrow \forall (i, j) : f(\dots, \xi_i, \dots, \xi_j, \dots) = -f(\dots, \xi_j, \dots, \xi_i, \dots)$.

Доказательство:

\Rightarrow

$$f(\dots, \xi_i + \xi_j, \dots, \xi_i + \xi_j, \dots) = 0$$

Разложим через линейность и учтём антисимметричность:

$$f(\dots, \xi_i, \dots, \xi_j, \dots) + f(\dots, \xi_j, \dots, \xi_i, \dots) = 0. \text{ Откуда уже следует искомое.}$$

\Leftarrow

$$f(\dots, \xi_i, \dots, \xi_j, \dots) = -f(\dots, \xi_j, \dots, \xi_i, \dots), \text{ откуда уже следует искомое. Q.E.D}$$

Антисимметричные полилинейные формы будем называть **p - формами**.

Следствие: f - p-форма $\Leftrightarrow \forall (k, m) : \alpha_{i_1 \dots i_k \dots i_m, \dots, i_p} = -\alpha_{i_1 \dots i_m \dots i_k, \dots, i_p} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \forall(k, m) \alpha_{i_1 \dots i_k \dots i_m, \dots, i_p} = 0, \text{ если } i_k = i_m.$$

Если $p > n$, то, очевидно, $f = 0$. Пусть $p = n$, f — n -форма, тогда все координаты $\alpha_{i_1 \dots i_n} = 0$, если совпадают хотя бы 2 индекса.

$$f(\xi_1, \dots, \xi_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \xi_1^{i_1} \dots \xi_n^{i_n} \underbrace{f(e_{i_1}, \dots, e_{i_n})}_{\alpha_{i_1 \dots i_n}}, \text{ где } i_1, \dots, i_n \text{ это перестановка индексов}$$

Здесь S_n — множество всех перестановок чисел $1 \dots n$.

Подстановки и перестановки

$\varphi : (1, \dots, n) \rightarrow (1, \dots, n)$ — подстановка. Удобнее всего показывать стрелочками. Перестановка — отображение (биекция) ка — образ.

φ, ψ — 2 подстановки. Произведением перестановок назовем образ композиции отображений.

Произведение ассоциативно, но не коммутативно.

Если φ — подстановка, то φ^{-1} — взаимно однозначная и взаимнообратная.

Транспозиция элементов перестановки σ называется подстановка меняющая местами 2 элемента перестановки:

$$(i_1, \dots, i_a, \dots, i_b, \dots, i_n) \text{ перейдет в } (i_1, \dots, i_b, \dots, i_a, \dots, i_n)$$

Любую перестановку можно привести к тривиальной конечным числом транспозиций, так как можно найти единицу, поменять местами с первым элементом, затем найти двойку, поменять местами со вторым, и так далее.

Перестановка называется **четной** или **нечетной**, если она приводится к тривиальной за четное или соответственно нечетное количество транспозиций (именно тем алгоритмом который сверху)

$$\varepsilon(\sigma) = \begin{cases} 0, \sigma - \text{четная} \\ 1, \sigma - \text{нечетная} \end{cases} \quad - \text{ чётность (функция чётности) перестановки.}$$

Тогда $(-1)^{\varepsilon(\sigma)}$ — знак перестановки.

Приведём каждую из перестановок (i_1, \dots, i_n) к тривиальной, описанным выше способом и учтём, что f антисимметричная форма.

$$\begin{aligned} f(\xi_1, \dots, \xi_n) &= \sum_{\sigma \in S_n} \xi_1^{i_1} \dots \xi_n^{i_n} f(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) = \sum_{\sigma \in S_n} \xi_1^{i_1} \dots \xi_n^{i_n} f(e_1, \dots, e_n) \cdot (-1)^{\varepsilon(\sigma)} = \\ &= \text{const} \cdot \sum_{\sigma \in S_n} \xi_1^{i_1} \dots \xi_n^{i_n} (-1)^{\varepsilon(\sigma)}, \text{ где } \text{const} = f(e_1, \dots, e_n). \end{aligned}$$

n -форму, у которой значение на упорядоченном наборе базиса векторов e_1, \dots, e_n равно 1 назовем D .

Пусть D — n -форма, т.ч. $D(e_1, \dots, e_n) = 1$

$$\Rightarrow \forall \xi_1 \dots \xi_n : D(\xi_1, \dots, \xi_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \xi_1^{i_1} \dots \xi_n^{i_n} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \stackrel{\text{def}}{=} \det(\xi_1, \dots, \xi_n)$$

— определитель системы векторов $\xi_1, \dots, \xi_n \in V$.

Замечания:

1. $\forall f$ - n -форма $f = \alpha D$, где $\alpha = f(e_1, \dots, e_n)$.
2. Форма D существует и единственная.
3. Определение D -формы зависит от базиса, т.к. чтобы её определить, должен быть зафиксирован базис.

2.6.2 Определитель матрицы. Две формулы

Есть матрица $A_{n \times n}$, $a_{ij} \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$

$$A = (A_1, \dots, A_n), A_j \in K^n$$

$$E_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ E_{jj} = 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ — канонический базис пространства } K^n$$

$$A_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} E_i$$

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} \text{ — координаты в базисе } E_1, \dots, E_n$$

$$D \text{ - } n\text{-форма } D(E_1, \dots, E_n) = 1$$

$$\forall A_1, \dots, A_n \in K^n$$

$$D(A_1, \dots, A_n) = \boxed{\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} a_{i_1 1} \dots a_{i_n n} = \det A} \text{ — } \underline{\text{1-ая формула det числовой матрицы.}}$$

Замечания:

1. $D(E_1, \dots, E_n) = 1 = \det E$
2. f — n -форма на K^n
 $f(A_1, \dots, A_n) = \alpha D(A_1, \dots, A_n)$
 $\alpha = f(E_1, \dots, E_n)$

Инверсией называется пара элементов (i_α, i_β) перестановки σ такие, что $i_\alpha > i_\beta$ и $\alpha < \beta$.

$\text{inv}(\sigma)$ = число инверсий в перестановке

Теорема:

1. $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1})$
2. Любая транспозиция элементов может быть получена за нечётное число транспозиций соседних элементов
3. транспозиция любых двух соседних элементов меняет число инверсий на 1

$$4. (-1)^{\varepsilon(\sigma)} = (-1)^{\text{inv}(\sigma)}$$

Доказательство:

1. Применим алгоритм из определения ε одновременно для σ и σ^{-1} . На каждом шаге алгоритма перестановками, полученные из σ и σ^{-1} остаются обратными друг-другу, значит добираются до тривиальной за одинаковое количество транспозиций. Значит, их чётности равны.
2. Поменяем местами i_α и i_β ; приблизим i_β к i_α k транспозициями соседних элементов. Поменяем i_α и i_β местами. Отодвинем i_α от i_β k транспозициями. Всего $2k + 1$ транспозиций.
3. Пусть перестановка имеет вид $(A, i_\alpha, i_\beta, B)$, где A и B — части перестановки. i_α образует m инверсий с A , i_β образует k инверсий с B . Транспозиция i_α и i_β или создаст или уничтожит их инверсию и не изменит m или k .
4. Пусть σ четная \Rightarrow четное число транспозиций приводят к тривиальной \Rightarrow четное число соседних транспозиций приводят к тривиальной перестановке, т.е. число инверсий изменилось на четное число. Число инверсий в конце — 0, чётное число, а значит изначально $\text{inv } \sigma$ — четное число. Пусть σ нечетная \Rightarrow нечетное число транспозиций приводят к тривиальной \Rightarrow нечетное число соседних транспозиций приводят к тривиальной перестановке, т.е. число инверсий изменилось на нечетное число. Число инверсий в конце — 0, чётное число, а значит изначально $\text{inv } \sigma$ — нечетное число.

Вторая формула для определителя:

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\text{inv}(\sigma)} a_{i_1 1}, \dots, a_{i_n n}, \text{ где } \sigma = (i_1, \dots, i_n)$$

2.6.3 Свойства определителя

$$1. \det A^T = \det A$$

$$A^T = \begin{pmatrix} A_1^T \\ \vdots \\ A_n^T \end{pmatrix}$$

$$\det A^T = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} a_{i_1 1}, \dots, a_{i_n n}, \sigma = (i_1, \dots, i_n) = (\varphi(1), \dots, \varphi(n)) = \varphi(1, \dots, n) \Leftrightarrow$$

$$\sigma^{-1} \text{ обратная} = (j_1 \dots j_n)$$

$$(-1)^{\varepsilon(\sigma^{-1})} = (-1)^{\varepsilon(\sigma)}$$

$$\det A^T = \sum_{\sigma^{-1} \in S_n} (-1)^{\varepsilon(\sigma^{-1})} a_{j_1 i} \dots a_{j_n n} = \det A$$

$$\text{Следствие: } \det A = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\text{inv}(\sigma)} a_{i_1 1} \dots a_{i_n n}, \text{ для } \sigma = (i_1 \dots i_n)$$

Замечание: все свойства, сформулированные для столбцов, верны и для строк.

$$2. \det(\dots, \lambda A_i, \dots) = \lambda \det(\dots, A_i, \dots), \lambda \in K$$

$$\det(\dots, A_i + A_j, \dots, A_k, \dots) = \det(\dots, A_i, \dots, A_k, \dots) + \det(\dots, A_j, \dots, A_k, \dots)$$

Доказательство:

$\det A = D(A_1, \dots, A_n)$ - полилинейная n - форма, откуда все и следует

3. $\det(\dots 0 \dots) = 0$ - частный случай $\lambda = 0$.
4. $\det(\dots, A_i, \dots, A_j, \dots) = -\det(\dots, A_j, \dots, A_i, \dots)$
 $\det(\dots, A_i, \dots, A_i, \dots) = 0$

Доказательство: \det — антисимметричная

5. $\det(\dots A_i \dots A_j \dots) = \det(\dots A_i + \lambda A_j \dots A_j \dots)$

Доказательство:

$$\det(\dots A_i + \lambda A_j \dots A_j \dots) = \det(\dots A_i + \dots A_j \dots) + \det(\dots \lambda A_j \dots A_j \dots) = \det(\dots A_i + \dots A_j \dots) + \lambda \cdot 0 \text{ Q.E.D}$$

6. Определитель ступенчатой матрицы:

$$\det \begin{pmatrix} A^1 & 0 & \dots & 0 \\ * & A^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \dots & A^m \end{pmatrix} = \prod_{k=1}^m \det A^k$$

$A^k = (a_{ij}^k)$ — квадратная матрица.

Доказательство:

- База $m = 2$: $\det \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ * & A_2 \end{pmatrix}$

Решим простой случай $A_1 = E_1, A_2 = E_2$:

$$\det \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ * & E_2 \end{pmatrix} \stackrel{\text{св-во } \det}{=} \det \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} = \det E = 1$$

Усложним. Пусть у нас теперь только одна из двух матриц единичная (E_{k_2} - единичная матрица размера $k \times k$):

$$\det \begin{pmatrix} B & 0 \\ * & E_{k_2} \end{pmatrix} \stackrel{\text{св-во } \det}{=} \det \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & E_{k_2} \end{pmatrix} = f(B_1, \dots, B_{k_1}) = f(E_1, \dots, E_{k_1}) \det B = \det B$$

f — k_1 -форма, т.к. полилинейная относительно B_j и антисимметричная из свойства \det . (f - функция, которая для заданной B находит определитель матрицы)

$$f = \alpha D, \alpha = f(e_1, \dots, e_{k_1}), D(B_1, \dots, B_{k_2}) = \det B$$

$$f(E_1, \dots, E_{k_1}) = \det \begin{pmatrix} E_{k_1} & 0 \\ * & E_{k_2} \end{pmatrix} = 1$$

Усложним ещё раз:

$$\det \begin{pmatrix} B & 0 \\ * & C \end{pmatrix} = g(C_1, \dots, C_{k_2}) = g(E_1, \dots, E_{k_2}) \cdot \det C = \det B \det C, \text{ что следует из того, что } g - k_2 \text{ форма относительно } C_j, \text{ при фиксированном } B$$

- Индукционный переход Пусть верно для $m - 1$, тогда докажем, что верно для m :

$$\det \begin{pmatrix} A^1 & 0 & \dots & 0 \\ * & A^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \dots & A^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ * & A^m \end{pmatrix} = \det A^m \cdot \det A = \prod_{k=1}^m \det A^k,$$

$$\text{где } A = \begin{pmatrix} A^1 & 0 & \dots & 0 \\ * & A^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \dots & A^{m-1} \end{pmatrix}$$

Следствия:

$$(a) \det \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ * & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot \dots \cdot a_{nn}$$

$$(b) \operatorname{rg} A = n \Rightarrow \det A \neq 0$$

Просто преобразуем A методом Гаусса и получим трапециевидную. $\operatorname{rg} A = n \Rightarrow$ после преобразований она будет треугольной, значит на диагонали нет нулей, значит их произведение не 0.

Замечание: в силу свойства 1, всё сказанное верно и для верхнетреугольных матриц.

7. $\det A = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij}$, для любого столбца $j = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}$ для любой строки i , где A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij}

$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$, где M_{ij} – минор.

$$A = \begin{pmatrix} I \dots & a_{1j} & II \\ a_{1n} \dots & a_{ij} & \dots a_{in} \\ III & a_{mj} & IV \end{pmatrix}, \text{ тогда } M_{ij} = \det \left(\begin{array}{c|c} I & II \\ \hline III & IV \end{array} \right)$$

Докажем сначала для 1 столбца:

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} A_{i1}$$

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} a_{11} & * & \dots & * \\ a_{12} & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & * & \dots & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & * & \dots & * \\ 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & * & \dots & * \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & * & \dots & * \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & * & \dots & * \end{vmatrix} + \dots + \\ &+ \begin{vmatrix} 0 & * & \dots & * \\ 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} M_{11} - a_{21} M_{21} + a_{31} M_{31} - \dots + (-1)^{n-1} a_{n1} M_{n1} = \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} M_{i1} a_{i1} \text{ (свойства 2, 4, 6)} \end{aligned}$$

Докажем для произвольного j -ого столбца

$$\det A = \det(\dots A_j \dots) \underset{\text{св-во 4}}{=} (-1)^{j-1} \det(A_j A_1 \dots A_n) = \sum_{i=1}^n (-1)^{j-1} (-1)^{i+1} a_{ij} M_{ij}$$

$$\begin{aligned}
 & 8. \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ik} \quad (j - \text{фиксированный номер столбца, } k - \text{фиксированный номер другого столбца.}) \\
 & = 0 = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{kj} \quad (i - \text{фиксированный номер строки, } k - \text{фиксированный номер другой строки})
 \end{aligned}$$

Доказательство:

A_{ik} – алгебраические дополнения элементов k -ого столбца

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ik} = \det(A_1 \dots A_j \dots A_j \dots A_n) \stackrel{\text{св-ва 4, 7}}{=} 0$$

$$9. \det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

$$AB = (AB_1, \dots, AB_n), \quad B = (B_1, \dots, B_n)$$

$$\det(A \cdot B) = f(B_1, \dots, B_n) \quad (n - \text{форма, } f = \alpha D) = f(E_1, \dots, E_n) \cdot \det B = \det(A \cdot E) \cdot \det B = \det a \cdot \det B$$

2.6.4 Формула для обратной матрицы. Теорема Крамера.

Матрица $A_{n \times n}$ – **невырожденная**, если $\det A \neq 0$

Теорема: (об обратной матрице)

Дано $A_{n \times n}$. A обратима $\Leftrightarrow A$ невырожденна.

$$\text{Причем, } A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T, \quad A_{ij} - \text{алгебраическое дополнение элемента } a_{ij}$$

Матрица в формуле называется союзной, взаимной, или присоединяемой.

Доказательство:

• \Rightarrow

$$A \text{ обратима} \Rightarrow \exists A^{-1}. A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

$$\Rightarrow \det(A^{-1}A) = \det E = \det A^{-1} \cdot \det A, \text{ откуда уже следует исконое.}$$

• \Leftarrow

A - невырожденная. $\det A \neq 0$. Покажем, что матрица $B = \frac{1}{\det A} (A_{ij})^T$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} A_{1j} & \dots & \sum_{j=1}^n a_{1j} A_{nj} \\ \sum_{j=1}^n a_{2j} A_{1j} & \dots & \sum_{j=1}^n a_{2j} A_{nj} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj} A_{nj} & \dots & \sum_{j=1}^n a_{nj} A_{nj} \end{pmatrix} =$$

(Все не диагональные ячейки по 8 свойству — нули, а все диагональные по 7 свойству — $\det A$) $= E \Rightarrow B = A^{-1}$

Следствия:

1. A обратима $\Leftrightarrow \operatorname{rg} A = n \Leftrightarrow \det A \neq 0$

2. $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$

3. Теорема Крамера

$$Ax = b, A_{n \times n}$$

$\exists!$ решение $\Leftrightarrow A$ невырожденная.

Причём, $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$, где $\Delta = \det A$, $\Delta_i = \det(A_1, \dots, b, \dots, A_n)$ (b занимает i -й столбец)

Доказательство:

$\exists!$ решение $\Leftrightarrow \operatorname{rg} A = n \Leftrightarrow \det A \neq 0$, то есть A - невырожденная ($x = A^{-1}b$)

$$x = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n A_{i1} b_i \\ \sum_{i=1}^n A_{i2} b_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n A_{in} b_i \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \det(b, A_2 \dots A_n) \\ \det(A_1, b \dots A_n) \\ \vdots \\ \det(A_1, A_2 \dots b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\Delta_1}{\Delta} \\ \frac{\Delta_2}{\Delta} \\ \vdots \\ \frac{\Delta_n}{\Delta} \end{pmatrix}$$

2.6.5 Теорема Лапласа

$$A = (a_{ij})_{n \times n}$$

$$1 \leq k \leq n: i_1 < i_2 < \dots < i_k, j_1 < j_2 < \dots < j_k$$

$$i_s \in (1, \dots, n), j_t \in (1, \dots, n)$$

Составим из элементов матрицы A новую матрицу, состоящую из элементов, находящихся на пересечении k выбранных строк и k выбранных столбцов

$$\text{Минор } k\text{-того порядка } M_{i_1, \dots, i_k}^{j_1, \dots, j_k} = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & \dots & a_{i_k j_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_1 j_k} & \dots & a_{i_k j_k} \end{vmatrix}$$

$\overline{M}_{i_1, \dots, i_k}^{j_1, \dots, j_k} = M_{s_1, \dots, s_m}^{t_1, \dots, t_m}$ — называется **дополнительным минором**, где $t_i \neq j_j$, $s_i \neq i_j$.

Алгебраическим дополнением называется дополнительный минор, домноженный на единицу в степени суммы номеров строк и столбцов.

$$A_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_k} = (-1)^{i_1 + \dots + i_k + j_1 + \dots + j_k} \overline{M}_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_k}$$

Теорема Лапласа

$A_{n \times n}$, зафиксируем какие-то k строчек i_1, \dots, i_k

$$\det A = \sum_{j_1 < \dots < j_k} M_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_k} A_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_k} \quad (\text{аналогично для столбцов})$$

Доказательство:

Пусть k выбрано от 1 до n и фиксирован набор строк. Тогда хотим доказать:

$$\sum_{j_1 < \dots < j_k} (-1)^{i_1 + i_2 + \dots + i_k + j_1 + j_2 + \dots + j_k} \overline{M}_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_k} M_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_k} = \det A$$

- **База индукции:**

Свойство 7: $\sum_j (-1)^{i+j} \overline{M}_j^i M_j^i = \det A$, где $M_i^j = a_{ij}$

- **Индукционное предположение:**

Пусть формула верна для $k-1$ строчки (i_1, \dots, i_{k-1}) :

$$\det A = \sum_{j_1 < j_2 < \dots < j_{k-1}} (-1)^{i_1 + \dots + i_{k-1} + j_1 + \dots + j_{k-1}} \overline{M}_{j_1, \dots, j_{k-1}}^{i_1, \dots, i_{k-1}} M_{j_1, \dots, j_{k-1}}^{i_1, \dots, i_{k-1}}$$

- **Индукционный переход:**

Пусть i_k строка такая, что $i_k > i_{k-1}$

Заметим, что в дополнительный минор входит i_k строка:

$$\overline{M}_{j_1, \dots, j_{k-1}}^{i_1, \dots, i_{k-1}} = M_{\dots, i_k, \dots}^{\dots, i_k, \dots}$$

Давайте разложим данный минор, по данной строке. Получим:

$$\sum_{j \in (1, \dots, n) \setminus (j_1, \dots, j_{k-1})} a_{i_k j} (-1)^{\#i_k + \#j} \overline{M}_{j_1, \dots, j_{k-1}, j}^{i_1, \dots, i_{k-1}, i_k}$$

где $\#i_k$ и $\#j$ - номер строки в матрице без $k-1$ столбцов (j_1, \dots, j_{k-1}) и без этих $k-1$ строк (i_1, \dots, i_{k-1}) .

Не трудно заметить, что $\#i_k = i_k - (k - 1)$. Теперь давайте подставим в формулу наш получившийся минор.

$$\sum_{j_1 < j_2 < \dots < j_{k-1}} (-1)^{i_1 + \dots + i_{k-1} + j_1 + \dots + j_{k-1}} M_{j_1, \dots, j_{k-1}}^{i_1, \dots, i_{k-1}} \sum_{j \in (1, \dots, n) \setminus (j_1, \dots, j_{k-1})} a_{i_k j} (-1)^{\#i_k + \#j} \overline{M}_{j_1, \dots, j_{k-1}, j}^{i_1, \dots, i_{k-1}, i_k}$$

Получится вот такая крайне прелестная формула. Перепишем:

$$\sum_{j_1 < j_2 < \dots < j_{k-1}} \sum_{j \in (1, \dots, n) \setminus (j_1, \dots, j_{k-1})} a_{i_k j} (-1)^{\#i_k + \#j} \overline{M}_{j_1, \dots, j_{k-1}, j}^{i_1, \dots, i_{k-1}, i_k} (-1)^{i_1 + \dots + i_{k-1} + j_1 + \dots + j_{k-1}} M_{j_1, \dots, j_{k-1}}^{i_1, \dots, i_{k-1}}$$

И что мы делаем в этой формуле, выбираем сначала $k - 1$ столбец, а потом еще один. Давайте делать это по-другому. Выберем k столбцов и 1, который выкидываем. Получится вот такая формула:

$$\sum_{j_1 < \dots < j_k} \sum_{s \in \{1, \dots, k\}} (-1)^{i_k - (k-1) + \#j_s} a_{i_k j_s} \overline{M}_{j_1, \dots, j_k}^{i_1, \dots, i_k} M_{\{j_1, \dots, j_{k-1}, j_k\} \setminus \{j_s\}}^{i_1, \dots, i_{k-1}} \cdot (-1)^{i_1 + \dots + i_{k-1} + j_1 + \dots + \widehat{j_s} + j_k}$$

Найдем $\#j_s = j_s - (s - 1)$:

$$\sum_{j_1 < \dots < j_k} \sum_{s \in \{1, \dots, k\}} (-1)^{i_k - (k-1) + j_s - (s-1)} a_{i_k j_s} \overline{M}_{j_1, \dots, j_k}^{i_1, \dots, i_k} M_{\{j_1, \dots, j_{k-1}, j_k\} \setminus \{j_s\}}^{i_1, \dots, i_{k-1}} \cdot (-1)^{i_1 + \dots + i_{k-1} + j_1 + \dots + \widehat{j_s} + j_k}$$

В итоге:

$$\sum_{j_1 < \dots < j_k} (-1)^{i_1 + \dots + i_k + j_1 + \dots + j_k} \overline{M}_{j_1, \dots, j_k}^{i_1, \dots, i_k} \sum_{s \in \{1, \dots, k\}} (-1)^{-(k-1) - (s-1)} a_{i_k j_s} M_{\{j_1, \dots, j_{k-1}, j_k\} \setminus \{j_s\}}^{i_1, \dots, i_{k-1}}$$

А это будет разложением по k -ой строчке $M_{j_1, \dots, j_k}^{i_1, \dots, i_k}$, откуда получаем искомое. Q.E.D.

~~Кажется, вам тяжело! Единый общероссийский телефон доверия:~~

~~Позвонить 8-800-2000-122~~

2.6.6 Второе определение ранга матрицы.

$\text{rg } A$ называется наибольший порядок минора отличного от нуля, то есть $\text{rg } A = k$, если существует минор k -ого порядка не равный нулю, а любой минор большего порядка равен 0. Такой минор называется **базисным**, а строки и столбцы, входящие в этот минор — **базисными**.

Базисный минор не определён единственным образом.

Замечание. Если все миноры $k + 1$ порядка 0, то все миноры порядка больше $k + 1$ тоже 0. (очевидно из разложения по строчке или столбцу)

Теорема (об эквивалентности двух определений ранга)

$$\text{rg } A_{\text{def } 1} = \text{rg } A_{\text{def } 2}$$

Доказательство:

Давайте докажем, что $\text{rg } A_{\text{def } 1} \geq \text{rg } A_{\text{def } 2}$.

Пусть $\text{rg } A_{\text{def } 1} = k \Rightarrow$ любые $(k+1)$ столбцов линейно зависимы \Rightarrow любые отрезки длины $(k+1)$ будут линейно зависимы \Rightarrow любой минор $(k+1)$ -ого порядка $= 0 \Rightarrow \text{rg } A_{\text{def } 2} \leq k = \text{rg } A_{\text{def } 1}$

Давайте докажем, что $\text{rg } A_{\text{def } 1} \leq \text{rg } A_{\text{def } 2}$

Пусть $\text{rg } A_{\text{def } 1} = k$, возьмём отрезки длины k , соответствующие базисным столбцам и строкам. Тогда отрезки столбцов будут линейно независимы, т.к. в противном случае, по утверждению 2 были бы линейно зависимы исходные столбцы \Rightarrow получим минор k -ого порядка $\neq 0 \Rightarrow \text{rg } A_{\text{def } 2} \geq k = \text{rg } A_{\text{def } 1}$

Метод окаймляющих миноров.

$A \neq 0$

Алгоритм:

Берем смотрим на минор k -ого порядка $\neq 0$:

1. Если все его окаймляющие миноры 0, то $\text{rg } A = k$.
2. Если существует минор $(k+1)$ -ого порядка не равный 0, тогда $k++$ и повторить алгоритм

Окаймляющий минор - минор, строки и столбцы которого содержат строки и столбцы данного минора.

Пусть $M_{j_1, \dots, j_k}^{i_1, \dots, i_k} \neq 0$, а все его окаймляющие его равны 0 $\Rightarrow \text{rg } A = k$

$$\forall i \forall j \notin (j_1, \dots, j_k) : \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & \dots & a_{i_1 j_k} & a_{i_1 j} \\ a_{i_2 j_1} & \dots & a_{i_2 j_k} & a_{i_2 j} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{i_k j_1} & \dots & a_{i_k j_k} & a_{i_k j} \\ a_{i j_1} & \dots & a_{i j_k} & a_{i j} \end{vmatrix} = 0$$

Если i совпадает с каким-либо индексом из i_1, \dots, i_k , то это определитель с равными строками, значит нулевой. Если i не совпадает ни с одним индексом из i_1, \dots, i_k , то тогда это окаймляющий минор $(k+1)$ -го порядка, который нулевой по условию.

Разложим определитель по последней строке.

$$0 = \sum_{s=1}^k a_{i j_s} A_{i j_s} + a_{i j} (-1)^{k+1+k+1} \underbrace{M_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_k}}_{\neq 0} - \text{не зависит от } i$$

$$\lambda_s = - \frac{A_{i j_s}}{M_{j_1, \dots, j_k}^{i_1, \dots, i_k}}$$

$$\forall i : a_{i j} = \sum_{s=1}^k a_{i j_s} \lambda_s \Leftrightarrow A_j = \sum_{s=1}^k A_{j_s} \lambda_s$$

мы показали, что для $\forall j \notin \{j_1, \dots, j_k\}$ столбец A_j — линейная комбинация k линейно независимых столбцов $A_{j_1}, \dots, A_{j_k} \Rightarrow \text{rg } A = k$.

2.6.7 Определитель n -ого порядка.

Приведение к треугольному виду.

$$\Delta_n \begin{pmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ x & a_2 & x & \dots & x \\ x & x & a_3 & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & \dots & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ x - a_1 & a_2 - x & 0 & \dots & 0 \\ x - a_1 & 0 & a_3 - x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x - a_1 & 0 & 0 & \dots & a_n - x \end{pmatrix} =$$

$$= \prod_{k=1}^n (a_k - x) \begin{vmatrix} \frac{a_1}{a_1 - x} & \frac{x}{a_2 - x} & \frac{x}{a_3 - x} & \dots & \frac{x}{a_n - x} \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \prod_{k=1}^n (a_k - x) \begin{vmatrix} \sum & \frac{x}{a_2 - x} & \frac{x}{a_3 - x} & \dots & \frac{x}{a_n - x} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

Откуда уже можно легко посчитать определитель.

Метод выделения линейных множителей

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = p(x_i)$$

Заметим, что когда $x_i = x_j$ определитель равен 0. Тогда получаем, что определитель должен делиться на каждый из корней (раскладывается в произведение корней)

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = p(x_i) = (x_1 - x_2) \cdot (x_1 - x_3) \cdot \dots \cdot (x_1 - x_n) \cdot (x_2 - x_3) \cdot \dots \cdot (x_{n-1} - x_n) C$$

Посмотрим на Δ_n как на многочлен от x_n

$$\Delta_n = (x_n - x_1)(x_n - x_2) \dots (x_n - x_{n-1}) c' = \Delta_{n-1} x_n^{n-1} + \dots, \text{ при этом } \Delta_{n-1} = \text{const}, \text{ т.к. не содержит } x_n.$$

$$c' = \Delta_{n-1}$$

$$\Delta_n = (x_n - x_1)(x_n - x_2) \dots (x_n - x_{n-1})(x_{n-1} - x_n) \dots (x_{n-1} - x_{n-2}) \Delta_{n-2} =$$

$$= \prod_{i>j} (x_i - x_j)$$

Метод рекуррентных соотношений

Возвратная последовательность. Пример. $x_2 = 2, x_1 = 4$. Рекуррентная последовательность задается выражением $x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2}$. Можно получить явное выражение.

Пример решения. $x_1 = 3, x_2 = 9, x_n = 3x_{n-1} - \frac{9}{4}x_{n-2}, n > 2$.

Подставим вместо $x_n = \lambda^n$ (не спрашивайте почему, там огромный кусок теорий и объяснений)

$\lambda^n = 3\lambda^{n-1} + \frac{9}{4}\lambda^{n-2}$. Переведем в квадратное, решим, найдем корни. Получим $\lambda_{1,2} = \frac{3}{2}$

Тк лямбды совпали, то второй корень умножаем на n :

$$x_n = c_1 \left(\frac{3}{2}\right)^n + c_2 n \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

$$3 = x_1 = c_1 \left(\frac{3}{2}\right) + c_2 \left(\frac{3}{2}\right)$$

$$x_2 = c_1 \left(\frac{3}{2}\right)^2 + c_2 2 \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 9$$

Найдём c_1 и c_2 , получим явно выражение.

Глава 3

Информация о курсе.

Преподаватель – Кучерук Екатерина Аркадьевна

Конспект писался Чепелиным Вячеславом и Альжановым Леонидом.

По редакцией Е.А. Кучерук.

Огромное спасибо за большое количество правок:

1. Бородулину Фёдору
2. Солянику Егору
3. Свешникову Борису