

Дискретная математика. Третий семестр

Автор: Вячеслав Чепелин

Содержание

1. Лекция 1	3
1.1. Основные определения для неориентированных графов	3
1.2. Основные определения для ориентированных графов	4
1.3. Связность и пути.	4
2. Лекция 2	6
2.1. Деревья	6
2.2. Коды Прюфера (для неориентированных деревьев)	8
2.3. Количество остовых деревьев в ориентированном графе	9
3. Лекция 3	10
3.1. Эйлеровы пути и циклы	10
4. Лекция 4	11
4.1. Гамильтоновы пути и циклы	11
4.2. Турниры	12
5. Лекция 5.	13
5.1. Планарные графы	13
6. Лекция 6.	16
6.1. Раскраски	16
7. Лекция 7.	18
7.1. Паросочетание	18
8. Лекция 8	21
9. Лекция 9	23
9.1. Числа Рамсея	23
9.1.1. Оценки Сверху:	23
9.1.2. Оценки снизу:	23
9.2. Числа Рамсея для раскрасок в несколько цветов.	24
10. Лекция 10	25
10.1. Совершенные графы	25
11. Лекция 11	26
11.1. Матроиды	26
12. Лекция 12	28
12.1. Продолжение матроидов	28
12.2. Циклы в матроидах	28
12.3. Замыкания	29
13. Лекция 13	30
13.1. Аксиоматизация матроидов	30
14. Лекция 14	31
14.1. Пересечение матроидов	31
15. Информация о курсе	32

1. Лекция 1

1.1. Основные определения для неориентированных графов

Определение. Неориентированный граф

Неориентированный граф — пара (V, E) , где V — множество вершин, а $E \subset (V \times V) / \sim \setminus \{(u, u)\}$ — множество рёбер, где отношение эквивалентности задаётся как $(u, v) \sim (v, u)$.

Определение. Путь

Путь — последовательность $P = u_0 e_1 u_1 e_2 \dots e_k u_k$, где $e_i = u_{\{i-1\}} u_i$.

Число $k = \text{len}(P) = |P|$ называется **длиной пути**.

Простой путь — путь, посещающий каждую вершину не более одного раза.

Рёберно-простой путь — путь, посещающий каждое ребро не более одного раза.

Циклический путь — путь, у которого $u_0 = u_k$.

Рассмотрим замкнутый путь (циклический маршрут) в графе:

$$P = u_0 e_1 u_1 e_2 u_2 \dots u_{\{k-1\}} e_k u_k,$$

где $u_k = u_0$ (путь начинается и заканчивается в одной вершине).

Циклический сдвиг пути: для любого $0 \leq i \leq k$ определим сдвинутый путь:

$$Q_i = u_i e_{\{i+1\}} u_{\{i+1\}} \dots e_k u_k e_1 u_1 \dots e_i u_i.$$

Отражение (обратный обход) пути P задаётся как:

$$P^{\{-1\}} = u_k e_k u_{\{k-1\}} \dots e_1 u_0.$$

Два пути P и P' называются **эквивалентными** ($P \sim P'$), если:

- P' является циклическим сдвигом P , или
- P' является отражением P (с точностью до циклического сдвига).

Определение. Цикл

Циклом называется класс эквивалентности замкнутых путей относительно \sim , то есть:

$$\text{Цикл} = [P]_{\{\sim\}} = \{Q \mid Q \sim P\}.$$

Дополнительно требуется, чтобы в цикле не было повторного прохождения одного и того же ребра в противоположных направлениях.

Граф без циклов называется **ациклическим**.

Обозначение: $u \rightsquigarrow v$ означает, что вершины u и v соединены путём.

Теорема.

В неориентированном графе отношение «связаны путём» является отношением эквивалентности.

Классы эквивалентности этого отношения называются **компонентами связности**.

Вершины u и v называются **рёберно двусвязными**, если существуют два рёберно непересекающихся пути из u в v .

Теорема.

Отношение рёберной двусвязности является отношением эквивалентности.

Доказательство:

1. Рефлексивность: возьмём два одинаковых пути из вершины в себя. Они не пересекаются по рёбрам. (Довольно забавно об этом думать)
2. Симметричность: очевидно.
3. Транзитивность: пусть u двусвязана с v , а v — с w . Рассмотрим p_1 и p_2 — два пути из u в v . Возьмём w и будем из неё идти в сторону v по путям q_1 и q_2 .
 1. Если дошли без пересечения с p_1 или p_2 — победа.
 2. Если по одному пути пересеклись с p_1 , а по другому — с p_2 — победа.
 3. Если пришли на один и тот же путь, то от одного из q_1 и q_2 пойдём в сторону u , а от другого — в сторону v . Из второго пойдём из v в u по второму пути между ними. Победа.

Советуем порисовать для понимания. Тут вполне тривиальное доказательство.

Q.E.D.

Два ребра ab и cd являются **вершинно-двусвязными**, если существует два вершинно-непересекающихся пути, соединяющих их концы.

Точкой сочленения называется вершина, принадлежащая сразу двум классам вершинной двусвязности.

Мост — ребро, концы которого не являются рёберно двусвязными.

Лемма о рукопожатиях.

Сумма степеней вершин равна удвоенному количеству вершин

1.2. Основные определения для ориентированных графов

Ориентированный граф — пара (V, E) , где V — множество вершин, $E \subset V \times V$ — множество дуг.

Определения пути, циклического пути ($u_0 = u_k$) и цикла (класс эквивалентности циклических путей относительно циклического сдвига) аналогичны неориентированному случаю.

1.3. Связность и пути.**Теорема о количестве путей или о матрице смежности..**

Возьмем матрицу смежности. Она обозначается A_G и на позиции $a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{есть ребро } ij \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

d_{ijk} - число путей из i в j , содержащее k ребер. Тогда:

$$d_{ijk} = (A_G)^K[i][j]$$

Доказательство:

Докажем по индукции:

1) База: $k = 0$ $A_G^0 = I$ - работает.

$k = 1$ $A_G^1 = A_G$ - работает.

2) ИП:Хотим доказать, что:

$$D_n = A_j^n$$

Пусть выполнено для $n - 1$, докажем, что выполнено для n . Имею:

$$A_G^k = A_G^{k-1} A_G$$

Переобозначим $C = A_G^K, B = A_G^{k-1}, A = A_G$. Тогда:

$$c[i][j] = \sum_t b[i][t] a[t][j]$$

А теперь концептуально подумаем над этой формулой.

TODO

Q.E.D.

2. Лекция 2

2.1. Деревья

Определение. Дерево

Дерево – связный неориентированный граф без циклов

Лемма.

G – дерево, содержащее хотя бы 2 вершины. Тогда \exists вершина степени 1.

Ее можно усилить до того, что существуют 2 таких вершины. Такие вершины называются **висячими** или **листами**.

Теорема.

G – граф, содержит n вершин.

1. $n - 1$ ребер
2. нет циклов
3. G – связный

Если выполнены любые 2 из данных 3, то выполнено и третье

Доказательство этой теоремы очень просто

Теорема.

G – дерево тогда и только тогда, когда $\forall u, v : \exists!$ простой путь $u \rightsquigarrow v$

Доказательство этой теоремы тоже очень просто: стоит лишь рассмотреть от противного.

Утверждение. G дерево $\Leftrightarrow G$ связен и любое ребро мост.

Определение. Подграф

G - граф. H получен удалением из G ребер или вершин. H называется подграфом G

Определение. Индуцированный Подграф

G - граф. H получен удалением из G вершин. H называется индуцированным подграфом G

Определение. Остовный Подграф

G - граф. H получен удалением из G ребер, причем H связно. H называется остовным подграфом G

Определение. Остовное дерево

Остовное дерево - остовный граф, который является деревом

Лемма.

Любой связный граф содержит остовное дерево

Определение. Матрица Кирхгофа

Матрица Кирхгофа называется матрица K_G , такая что

$$a_{ij} = \begin{cases} \deg i, i = j \\ -1, ij \in E \\ 0 \text{ иначе} \end{cases}$$

Теорема. Кирхгофа

G - связный граф. Кол-во остовных деревьев G равно $\overline{A_{ij}}$, $\forall i, j$

Доказательство:

Лемма 1.

Введем понятие для графа G **матрицы инцидентов**. Пусть у нас n вершин и m ребер. Возьмем матрицу из m столбцов и n строк и для каждого ребра в этой матрице инцидентов поставим 1 в соотв. строку если ребро соединяет эту вершину с другой и 0 иначе. Назовем ее I_g . Пример:

i-ое ребро .	
	0
	1
	0
	0
	1
	0

u
v

Возьмем I_g и I_g^T и перемножим. Заметим, что получится матрица Кирхгофа, но у нас не того знака единицы. Возьмем теперь ориентацию графа G (любую). Поставим -1 в начало ребра и $+1$ в конец. Теперь уже перемножая их получим нашу нужную нам матрицу Кирхгофа.

$$\vec{I}_n * \vec{I}_n^T = \text{Матрица Киргофа } G$$

Лемма 2.

Давайте выберем любое $n - 1$ ребро. Рассмотрим столбцы \vec{I}_n , связанные с этими ребрами. Удалим любую строчку. Останется матрица $n - 1$ на $n - 1$. Назовем ее B . Если выбранные ребра образуют остовное дерево, то $\det B = \pm 1$, иначе $\det B = 0$.

Доказательство:

Обозначим множество оставшихся рёбер за EQ , а вершину, которую мы вычёркнули, — за u .

- Если EQ содержит цикл, то граф, тривиально, не связан. Рассмотрим компоненту связности, не содержащую u . В ней сумма столбцов равна нулю, и хорошо. Ну, как хорошо. Вообще EQ может не содержать ориентированного цикла, но содержать цикл G . Так вот, в таком случае нам придётся взять не сумму соответствующих столбцов, а алгебраическую сумму, где неправильно направленные рёбра идут с коэффициентом -1 . Тогда мы получим-таки наш ноль, то есть линейная комбинация столбцов будет равна нулю, следовательно определитель нулевой.
- Теперь пусть циклов там нет. Тогда там дерево (нет циклов и $n - 1$ ребро). Оно содержит 2 листа. Один из них — не u . Обзовём его v_1 . Поскольку мы считаем определок, нам разрешают переставлять строки и столбцы матрицы: давайте возьмём строку v_1 , в ней где-то ровно одна ± 1 . Переместим строку на первое место, а ± 1 — в первый столбец, после чего забудем о v_1 . Оставшаяся часть —

дерево, в нём есть два листа, один — не u , возьмём его как v_2 . Так сделаем до посинения, получим нижне-треугольную матрицу с ± 1 на диагонали.

Лемма 3. Формула Коши-Бине

Пусть A — матрица $r \times s$, B — матрица $s \times r$, $s \geq r$. Тогда

$$\det(AB) = \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_r \leq s} \det A^{i_1; \dots; i_r} \det B_{i_1; \dots; i_r}$$

Напомню, что $A^{i_1; \dots; i_r}$ — минор матрицы A , где выбраны столбцы $i_1; \dots; i_r$, а $B_{i_1; \dots; i_r}$ — минор B , где выбраны строки $i_1; \dots; i_r$.

Доказывать формулу мы не будем. Кучерук нам вроде даже ее давала

Наконец доказательство самой теоремы

Вычеркнем строчку с номером u . Что изменится в матрице Кирхгофа? Удалится строчка и столбец с u .

А теперь, используя формулу Коши-Бине для подсчета данного минора. Ой смотрим смотрим и получаем, что количество оставшихся деревьев в точности равно нашему минору.

Q.E.D.

2.2. Коды Прюфера (для неориентированных деревьев)

Коды Прюфера — это способ установить **биекцию** между помеченными деревьями и числовыми последовательностями.

Исходные данные: Рассматриваем деревья на n вершинах, помеченных числами от 1 до n . Дерево — это связный граф без циклов.

Алгоритм кодирования (преобразование дерева в код Прюфера)

Цель: получить последовательность (код) длиной $n - 2$.

1. Пусть T — наше дерево с множеством вершин $\{1, 2, \dots, n\}$.
2. Пока в дереве больше двух вершин, повторяем следующие шаги: а. Найдите **лист с наименьшим номером**. б. Запишите в код Прюфера номер **единственной вершины, смежной** с этим листом (его «соседа»). с. **Удалите этот лист и инцидентное ему ребро** из дерева T .
3. Когда останется всего 2 вершины, процесс останавливается. Полученная запись — это **код Прюфера** для дерева T .

Алгоритм декодирования (преобразование кода Прюфера в дерево)

Цель: по последовательности длиной $n - 2$ восстановить дерево на n вершинах.

1. Пусть дан код Прюфера P длиной $n - 2$. Постройте список вершин $L = \{1, 2, \dots, n\}$.
2. Пока код P не пуст, повторяйте:
 1. Найдите **наименьший номер** из списка L , который **не встречается** в коде P . Этот номер будет листом.
 2. **Проведите ребро** из этого листа в вершину, которая является **первым элементом** кода P .
 3. Удалите найденный лист из списка L и первый элемент из кода P .
3. Когда код P станет пуст, в списке L останется ровно две вершины. **Проведите ребро** между этими двумя вершинами.

Важность и следствия: Поскольку алгоритмы кодирования и декодирования взаимно обратны, между множеством всех помеченных деревьев на n вершинах и множеством всех последовательностей длиной $n - 2$ (где каждый элемент — число от 1 до n) существует **биекция**. Количество таких последовательностей равно n^{n-2} . Таким образом, мы получаем знаменитую **формулу Кэли**:

Более подробно про коды Прюфера можно прочитать [тут](#)

2.3. Количество оствовых деревьев в ориентированном графе

Это обобщение матричной теоремы о деревьях (теоремы Кирхгофа) на случай ориентированных графов.

Определения (уточнённые):

1. **Ориентированное дерево (дерево с корнем, или ветвление):** Это ориентированный граф, у которого:
 - Есть ровно одна вершина (корень), в которую не входит ни одно ребро (полустепень захода = 0).
 - В каждую другую вершину входит ровно одно ребро (полустепень захода = 1).
 - В графе нет ориентированных циклов.
2. **Ориентированное оствовое дерево с корнем в r :** Это подграф ориентированного графа G , который включает все его вершины, является ориентированным деревом и имеет корень r .

Замечание: Действительно, для одного графа может существовать несколько оствовых деревьев с разными корнями. Количество таких деревьев зависит от выбранной корневой вершины r .

Теорема (Матричная теорема о деревьях для ориентированных графов, вариант Тута/Ботт-Мэйберла).

Количество оствовых деревьев с корнем в заданной вершине r можно вычислить с помощью модифицированной матрицы Кирхгофа.

Алгоритм:

1. Постройте **матрицу Кирхгофа L** размера $n \times n$ (где n – число вершин в графе) следующим образом:
 - Для каждой вершины i вычислите ее **полустепень захода $\deg^-(i)$** (количество рёбер, входящих в i).
 - На диагонали $L[i][i]$ поставьте $\deg^-(i)$.
 - Для недиагональных элементов $L[i][j]$ (где $i \neq j$) поставьте **минус** количество рёбер, идущих из j в i . Обратите внимание на порядок индексов!
2. Чтобы найти количество оствовых деревьев с корнем в вершине r , нужно:
 1. Удалить строку и столбец, соответствующие корню r , из матрицы L . Получится матрица L_{-r} размера $(n-1) \times (n-1)$.
 2. Вычислить **определитель** матрицы L_{-r} .

> Количество оствовых деревьев с корнем в r = $\det(L_{-r})$

3. Лекция 3

3.1. Эйлеровы пути и циклы

Определение. Эйлеров путь(цикл)

Эйлеров путь(цикл) – соответственно путь или цикл, который проходит по каждому ребру 1 раз.

Теорема.

G - связный граф. Тогда существует эйлеров цикл \Leftrightarrow соблюдено усл. таблицы:

	Цикл	Путь
граф	все степени вершин четны	не больше 2 вершин имеют неч. степень
ор. граф	количество исходящих и выходящих ребер одинаково	левое, кроме 2 вершин у которых количество входящих и выходящих по модулю отличается на один

Доказательство:

Идея в правую сторону: вычеркиваем циклы, вычеркиваем, пока мы не распадемся на несколько компонент, используем индукцию и аккуратно ходим. Случай с путем сводим к поиску цикла.

Идея: в левую сторону: Смотрим на степени и все.

Q.E.D.

Теорема.

G - связный неориентированный граф, $2k$ вершин неч. степени и $k \geq 1$.

Тогда ребра графа представляют собой обход графа по k непересекающимся по ребрам путям.

Доказательство аналогично доказательству прошлой теоремы

Теорема. de Bruijn, von Aardene-Ehrenfist, Smith, Tutte

или по-другому BEST-theorem

Количество эйлеровых циклов графа G равно:

$$In_{r(G)} \cdot \prod_v (\deg v - 1)!$$

Доказательство:

Рассмотрим наш граф. Для каждой вершины выпишем перестановку ребер в этой вершине (исходящих).

Будем называть набор корректным, если последние ребра образовывают остовное дерево в вершину R .

Существует биекция между набором корректных перестановок и этих вершин

Q.E.D.

4. Лекция 4

4.1. Гамильтоновы пути и циклы

Определение. Гамильтонов путь

Гамильтонов цикл(путь) – цикл(путь), который проходит по каждой вершине 1 раз.

Теорема Дирака.

$\forall u : \deg u \geq \frac{n}{2} \Rightarrow G$ - гамильтонов.

Теорема Оре.

$\forall u, v : uv \notin E : \deg u + \deg v \geq n \Rightarrow G$ - гамильтонов.

Теорема Хватала.

Пусть G – связный граф с хотя бы 3 вершинами. Пусть его степени вершин – $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$. Если выполнено условие

$$\forall k < \frac{n}{2} : (d_k \leq k \Rightarrow d_{n-k} \geq n - k)$$

то G – гамильтонов.

Доказательство:

Для начала условие

$$d_k \leq k < \frac{n}{2} \Rightarrow d_{n-k} \geq n - k$$

назовём (*).

Лемма.

Пусть G выполнено (*), $uv \notin E$. Тогда $G \cup uv$ также (*).

Доказательство:

Пусть мы имели $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$. При добавлении ребра uv степени вершин u и v увеличиваются на 1. После пересортировки последовательности степеней выполняется $d_i(G) \leq d_i(G \cup uv)$ для всех i . Поскольку условие (*) монотонно относительно возрастания степеней, оно сохраняется.

Q.E.D.

Будем доказывать от противного.

Предположим, существует негамильтонов граф, удовлетворяющий (*).

Выберем такой граф G с:

- Наименьшим числом вершин
- Наибольшим числом рёбер среди таких графов

Тогда:

1. G не является полным графом (иначе он гамильтонов)
2. Для любого отсутствующего ребра uv граф $G \cup uv$ гамильтонов
3. Выберем отсутствующее ребро uv с максимальной суммой $\deg(u) + \deg(v)$

Поскольку $G \cup uv$ гамильтонов, в G существует гамильтонов путь :

$$u = u_1 \rightarrow u_2 \rightarrow \dots \rightarrow u_{n-1} \rightarrow u_n = v$$

Введём множества:

$$S = (i \in [2; n-1] \mid uu_i \in E(G))$$

$$T = (i \in [2; n] \mid u_{i-1}v \in E(G))$$

То есть идейно S - все вершины, выходящие из u , T - все вершины, входящие в v .

Имеем:

- $|S| = \deg(u)$
- $|T| = \deg(v)$
- $S \cap T = \emptyset$ (иначе существовал бы гамильтонов цикл в G)

$$u \rightarrow u_2 \rightarrow u_3 \rightarrow \dots \rightarrow u_{i-1} \rightarrow v \rightarrow u_{n-1} \rightarrow u_{n-2} \rightarrow \dots u_i \rightarrow u$$

Следовательно:

$$\deg(u) + \deg(v) = |S| + |T| \leq n - 1$$

Отсюда $\deg u + \deg v \leq n - 1$.

Без ограничения общности пусть $\deg(u) \leq \deg(v)$. Тогда:

$$\deg(u) \leq \frac{n-1}{2} < \frac{n}{2}$$

Положим $k = \deg(u)$. Тогда:

1. $d_k \leq k$ (существует k вершин со степенью $\leq k$)
2. По условию (*): $d_{n-k} \geq n - k$

Тогда, как выше и сказал, существует вершина $w \notin N(u)$ со степенью $\deg(w) \geq n - k$. Но тогда для ребра uw получаем:

$$\deg(u) + \deg(w) \geq k + (n - k) = n$$

что противоречит максимальности выбора ребра uv . Противоречие

Q.E.D.

4.2. Турниры

Турниры – всегда есть направленное ребро между u, v

Теорема. Реден, Камеон

Сильно-связный турнир – гамильтонов

Доказательство:

Очевидное доказательство по индукции

Q.E.D.

5. Лекция 5.

5.1. Планарные графы

Определение. Укладка графа

Укладкой графа G на поверхность называется отображение вершин графа (инъекция) и отображение ребер в множество непрерывных кривых, где каждое ребро начинается и заканчивается в соотв вершине, а также не пересекаются

Теорема.

Любой граф можно вложить в \mathbb{R}^3

Доказательство:

Построим как-то, а потом будем двигать ребра в окрестности пересечения ребер.

Альтернатива: Давайте случайно поставим вершины графа в \mathbb{R}^3 (например возьмем какой-то компакт по типу сферы или параллелепипеда). Проведем все ребра, вероятность что они пересекутся ноль, откуда можно вложить.

Q.E.D.

Определение. Гомиоморфные графы

Графы G_1, G_2 называются **гомиоморфными**, если они гомиоморфны как топологические пространства
 \Leftrightarrow можно непрерывными преобразованиями один в другой:

- можно добавить вершину a , между u, v и наоборот

Лемма.

Граф можно уложить на сфере \Leftrightarrow граф можно уложить в \mathbb{R}^2

Доказательство:

Случайно построим почти биекцию между сферой(почти) и плоскостью примерно так:

- Положим плоскость
- Поставим сферу на плоскость и обозначим у нее северный полюс
- Возьмем любую точку на плоскости и проведем прямую через северный полюс. Она пересечет в каком-то месте шар.
- Давайте возьмем такое отображение, оно будет почти биективным (у северного полюса не будет образа)

А если подумать, то теперь мы просто будем строить биекцию(почти) и все - победа. Главное, чтобы северным полюсом была вершина, через которую не проходит ни одно ребро и ни одна вершина, чего можно добиться.

Q.E.D.

Мы хотим этого, потому что сфера это компакт.

Определение. Планарный граф

Планарный граф – граф, вложимый в \mathbb{R}^2

Теорема Эйлера (или Формула Эйлера).

Пусть в связном планарном графе V вершин и E рёбер, а при его укладке на плоскости получилось F граней. Тогда $V + F - E = 2$

Доказательство:

Докажем индукцией по количеству вершин и рёбер. Если у нас 1 вершина и 0 рёбер, то грань там одна.

- Пусть у нас не 1 вершина. Если наш граф дерево, у него n вершин, $n - 1$ ребро и 1 грань. Все работает.
- Если наш граф не дерево, у нас есть хоть один не-мост. Тогда он лежит в цикле, а значит при удалении этого ребра у нас уменьшится количество граней на 1. При этом граф останется связным.

Из индукционного предположения: $V + (F - 1) - (E - 1) = 2$.

Q.E.D.

Теорема.

K_5 нельзя уложить на плоскость

Доказательство:

Предположим противное. Пускай граф K_5 можно уложить на плоскости. Тогда по теореме Эйлера должно быть выполнено: $V + F - E = 2$. У K_5 вершин 5, ребер 10. Должно быть 7 граней.

Давайте считать количество раз сколько ребра входит в грани с двух сторон. С одной стороны это $\leq 2 \cdot E = 20$, потому что каждое ребро лежит максимум в 2 гранях. С другой стороны каждая грань ограничивает вокруг себя цикл длины хотя бы 3, то есть ≥ 21 . Противоречие.

Q.E.D.

Теорема.

$K_{3,3}$ нельзя уложить на плоскость

Доказательство:

Предположим противное. Тогда $V = 6, E = 9, F = 5$. Противоречие строится на счете ребер со стороны граней. Каждую грань ограничивает 4 ребра (мин. цикл длины 4).

Q.E.D.

На этой идее можно строить много разных оценок

Лемма.

Все компоненты вершинной двусвязности G планарны $\Rightarrow G$ планарны

Теорема Понтрягина-Куратовского.

Граф можно уложить в $\mathbb{R}^2 \Leftrightarrow G$ не содержит подграфа, гомоморфному K_5 или $K_{3,3}$

Доказательство:

В правую сторону очевидно из вышесказанных теорем.

Докажем в левую сторону.

Это мягко говоря не очевидно

Мы будем доказывать и некоторые технические детали будем опускать и глубоко не спускаться в них. Совсем простого способа доказательства нет. Надо будет рассмотреть всего 12 случаев (халава).

Лемма.

\forall пл. графа G , \forall вершины u , существует такая укладка, что вершина u будет ограничивать внешнюю грань

\forall пл. графа G , \forall ребра u, v , существует такая укладка, что ребро u, v будет ограничивать внешнюю грань

Доказательство:

Уложим на сферу, покрутим сферу, победили

Q.E.D.

Лемма.

G планарен \Leftrightarrow все блоки G планарны.

Доказательство:

В правую сторону очевидно: постираем ребра и вершины и победили.

В левую сторону - разобьем на компоненты вершинной двусвязности.

todo: рисунок

Q.E.D.

Пусть G нельзя уложить. Возьмем минимальный контрпример . Тогда

- G - двусвязен из Леммы.
- Для любых u, v в $G \setminus (u, v)$ лежат на цикле. Назовем этот цикл C .

(Это следует из того, что удалив ребро граф уже можно уложить на плоскость, поделив граф на 2 части и прида к противоречию, как в верхней лемме, получим нужное нам утверждение)

- выберем ребро uv , цикл C и укладку $G \setminus (u, v)$, чтобы внутри C было максимальное число граней

Ключевая мысль: существует такая внешняя грань out и такая внутренняя грань in, что она разделяет внутреннюю и внешнюю грани

Расписывать ключевую мысль мне лень, так что TODO

Дальше там идет перебор 12 случаев, которые сводятся к наличию K_5 или $K_{3,3}$

Q.E.D.

6. Лекция 6.

6.1. Раскраски

Определение. Корректная раскраска графа

Пусть G - неориентированный граф и отображение $c : V \rightarrow [1, k]$. При этом выполнено, что \forall ребра $uv : c(u) \neq c(v)$. В таком случае c называют **корректной или правильной раскраской**

Определение. k -colorable или k -раскрашиваемый.

Пусть G - неориентированный граф и у него есть корректная раскраска в k цветов.

Определение. Хроматическое число графа

Минимальное число цветов, в которые можно покрасить граф $\chi(G)$

Теорема.

Граф двудольный тогда и только тогда, когда \forall цикл четен.

Доказательство:

В правую сторону очевидно.

В левую сторону жадно красим с помощью dfs.

Q.E.D.

При этом при $k \geq 3 : \chi(G) \leq k$ - НП полная задача. То есть алгоритмически бесполезно проверять.

Определение. Хроматический многочлен

Хроматический многочлен $p_G(t)$ - функция, которая говорит количеству способов раскрасить граф в t цветов.

Отождествление вершин

$$p_G(t) = p_G(t)|_{c(u)=c(v)} + p_G(t)|_{c(u) \neq c(v)} = p_{G/uw}(t) + p_{G \cup uv}(t)$$

Очень хорошая формула

Теорема. О хроматическом многочлене

G - неориентированный граф $p_g(t)$, n вершин, m ребер, k компонент связности. Тогда:

$$t^n - mt^{n+1} + p_{n-2}t^{n-2} - p_{n-3}t^{n-3} + \dots \pm p_k t^k$$

Доказательство:

Доказываем по индукции по числу вершин и по числу ребер.

База: $n, m = 0 : p_{G(t)} = t^n$

Q.E.D.

Теорема.

Граф дерево тогда и только тогда, когда его хроматический многочлен равен $t(t-1)^{n-1}$.

Доказательство:

В правую сторону очевидно.

В левую сторону $n - 1$ ребро, связный граф, пользуемся этим соображением и индукцией

Q.E.D.

$w(G)$ - кликовое число графа. Или по-другому максимальный размер подграфа клики.

Очевидно, что $w(G) \leq \chi(G)$.

$\Delta(G)$ - макс степень в G

Лемма.

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$$

Это что-то из разряда, давайте красить как хотим.

Лемма.

Считаем G связным. Если $\delta(G) \neq \Delta(G)$, то $\chi(G) \leq \Delta(G)$

Доказательство:

Возьмем остов, подвесим, будем красить снизу вверх

Q.E.D.

Теорема Брукса.

Если G - связный, $G \neq K_n$ и $G \neq C_{2n+1}$, то $\chi(G) < \Delta(G)$

Доказательство:

Мы почти победили эту теорему. Нам осталось только рассмотреть случай $\delta(G)$

Возьмем такие вершины u, v , что у них есть общий сосед.

Q.E.D.

7. Лекция 7.

7.1. Паросочетание

Мы будем думать о любом паросочетании в графе. G - неориентированный граф. Есть ребра и вершины. Ребро соединяет 2 вершины, ребра соединяются вершиной.

Найти множество объектов

Определение. Независимое множество

Независимым множеством вершин графа $G = (V, E)$ называется такое подмножество S множества вершин графа V , что $\forall u, v \in S : uv \notin E$

Максимальное независимое множество в графе обозначается за $\alpha(G)$

Определение. Паросочетание

Паросочетание M – произвольное множество рёбер двудольного графа такое, что никакие два ребра не имеют общей вершины.

Максимальный размер паросочетания обозначается $\alpha'(G)$

Определение. Контролирующее множество или вершинное покрытие, или реберное покрытие

Вершинное – множество вершин, что для любого ребра, хотя бы 1 ребро
реберное, для каждой вершины хотя бы 1 ребро находится в этом множестве.

$\beta(G)$ - размер минимального вершинного покрытия

$\beta'(G)$ - размер минимального реберного покрытия

Утверждение.

$$\alpha(G) + \beta(G) = n$$

Доказательство:

Пусть A - независимое множество вершин, возьмем $B = V \setminus A$

Покажем, что тогда B - вершинное покрытие (На самом деле там равносильность)

Из доказанного нами утверждение очевидно следует искомое ведь $|A + A^c| = n$

Q.E.D.

Теорема. Галлаи - 59

$$\alpha'(G) + \beta'(G) = n, \delta(G) > 0$$

Доказательство:

Берем множество непокрытых вершин. Их $n - 2\alpha'(G)$

$$\beta'(G) \leq \alpha'(G) + n - 2\alpha'(G) = n - \alpha'(G)$$

$$\text{Откуда } \alpha'(G) + \beta'(G) \leq n$$

$$\alpha'(G) \geq n - \beta'(G), \text{ откуда } \alpha'(G) + \beta'(G) \geq n$$

->DO: расписать

Q.E.D.

Теорема.

G - двудольный, то $\alpha'(G) = \beta(G)$

Произвольные графы: $\beta(G) \geq \alpha'(G)$

Определение. Совершенное паросочетание

Граф имеет **совершенное паросочетание**, если $2|M| = |V|$, $2\alpha'(G) = n$

Теорема Татта.

G содержит совершенное паросочетание $\Leftrightarrow \forall S \subset V : |S| \geq \text{odd}(G \setminus S)$

где $\text{odd}(G \setminus S)$ – число нечётных по числу вершин компонент связности в графе $G \setminus S$.

Доказательство:

В правую сторону:

Предположим, что в графе G существует совершенное паросочетание M . Рассмотрим произвольное множество $U \subset V(G)$.

Для каждой нечётной компоненты связности C графа $G \setminus U$ хотя бы одна вершина из C должна быть соединена ребром из M с некоторой вершиной из U , так как иначе в C останется непарная вершина. Поскольку паросочетание M совершенное, различные нечётные компоненты должны соединяться с различными вершинами из U . Следовательно, число нечётных компонент не превосходит $|U|$.

В левую сторону:

Предположим, что условие теоремы выполняется, но совершенного паросочетания в G нет.

Рассмотрим граф G^* , полученный из G добавлением рёбер так, чтобы он оставаться графом без совершенного паросочетания, но был бы максимальным в этом смысле (т.е. добавление любого нового ребра приводит к появлению совершенного паросочетания) (или как говорит АС - максимальный контрпример)

Пусть U – множество вершин $u \in V(G^*)$ таких, что все остальные вершины смежны с u .

Утверждение: Граф $G^* - U$ является объединением несвязных клик (полных графов).

Доказательство утверждения:

Предположим, что это не так. Тогда найдутся вершины $x, y, z \notin U$ такие, что $xy, yz \in E(G^*)$, но $xz \notin E(G^*)$. Так как $y \neg \in U$, существует вершина $w \neg \in U$ такая, что $yw \in E(G^*)$.

Из максимальности G^* следует:

- В $G^* + xz$ есть совершенное паросочетание M_1 , причём $xz \in M_1$.
- В $G^* + yw$ есть совершенное паросочетание M_2 , причём $yw \in M_2$.

Рассмотрим граф $H = (V(G), M_1 \oplus M_2)$.

Граф H представляет собой объединение чётных циклов, в которых рёбра чередуются из M_1 и M_2 .

Случай 1: Рёбра xz и yw лежат в разных компонентах связности H .

В компоненте с xz выберем рёбра из M_2 , в компоненте с yw – из M_1 , в остальных – любые. Получим совершенное паросочетание в G^* , что противоречит построению.

Случай 2: Рёбра xz и yw лежат в одной компоненте связности H (чётном цикле C).

Без ограничения общности, расположим вершины в цикле C в порядке $y \rightarrow w \rightarrow \dots \rightarrow z \rightarrow x \rightarrow \dots \rightarrow y$. Рассмотрим путь

$$P = x \xrightarrow{C} z \rightarrow y \xrightarrow{C} w$$

, который проходит через все вершины цикла C , используя ребро $yz \in E(G^*)$ и дуги цикла. На этом пути можно выбрать совершенное паросочетание M_W , состоящее только из рёбер G^* . Комбинируя M_W с паросочетаниями в других компонентах H , снова получим совершенное паросочетание в G^* – противоречие.

Таким образом, предположение неверно, и $G^* - U$ является объединением клик.

Вернемся к доказательству теоремы

Рассмотрим граф $G^* - U$. Он состоит из нескольких компонент связности, каждая из которых – клик. В нечётной клике (компоненте с нечётным числом вершин) все рёбра присутствуют, но при удалении U она становится нечётной компонентой связности.

По условию для графа G (а значит, и для G^* , так как добавление рёбер не нарушает условие), выполняется: $\text{odd}(G^* - U)l = |U|$

В графе $G^* - U$ нечётные клики можно полностью паросочетать внутри себя, кроме одной вершины, которая должна быть соединена с вершиной из U . Поскольку в G^* все вершины из U соединены со всеми остальными, мы можем построить совершенное паросочетание:

- В каждой нечётной компоненте $G^* - U$ паросочетаем все вершины, кроме одной, которую соединяем с некоторой вершиной из U .
- В чётных компонентах паросочетаем все вершины внутри компоненты.
- Условие $\text{odd}(G^* - U) \leq |U|$ гарантирует, что на все нечётные компоненты хватит вершин в U .

Таким образом, в G^* существует совершенное паросочетание, что противоречит его построению. Следовательно, исходное предположение неверно, и в графе G должно существовать совершенное паросочетание. ПОБЕДА

Q.E.D.

Определение. Дефицит графа

$$\text{def } G = n - 2\alpha'(G)$$

Теорема. Формула Бержа

$$\text{def } G = \max_{S \subset V} (\text{odd}(G \setminus S) - |S|)$$

Доказательство:

Оценка снизу на $\text{def } G$ очевидна.

Идея второй части: Добавим множество вершин U , $|U| = \max_{S \subset V} (\text{odd}(G \setminus S) - |S|)$, из которого будут вести ребра в каждую вершину нашего графа. Покажем, что наш график тогда по Теореме Татта имеет совершенное паросочетание. Заметим, что тогда удалив из него подграф U , мы получим в оставшемся графике как раз не макс. пар соч и def будет равен как раз тому что надо

Q.E.D.

8. Лекция 8

Определение. Фактор-критический

При удалении любой вершины оставшийся граф имеет совершенное паросочетание.

Теорема. Галлаи

Размер максимального паросочетания при удалении любой вершины не меняется \Leftrightarrow Фактор-критический

Доказательство:

В левую сторону очевидно. Докажем в правую:

Берем теорему Татта, как контрпример. Берем множество S , при котором достигается дефицит K и удаляем v

1. $|S| = 0 \Rightarrow K = 1$
2. Берем $v(s)$

Q.E.D.

Структурная декомпозиция Эдлиндса - Галлаи

$D(G)$ - множество вершин, что $\forall u \in D : a'(G \setminus u) = a'(G)$

$A = N(D)$ - множество соседей из D

$C = V \setminus (A \cup D)$

Как ее построить?

Лемма

1. $D(G \setminus a) = D(G)$
2. $A(G \setminus a) = A(G) \setminus A$
3. $C(G \setminus a) = C(G)$
4. $a'(G \setminus a) = a'(G) - 1$

Теорема Галлаи-Эдмонса о структурной декомпозиции.

Пусть G - граф, пусть D_1, D_2, \dots, D_k – компоненты связности $D(G)$

1. C имеет пар. соч.
2. D_i - фактор критические
3. Любое сов. пар соч в G состоит из:
 - сов пар. соч в C
 - почти сов. паросочетание в D_i
 - паросочетание $A - D_i$, покр. A
4. $\text{def } G = k - |A|$

Определение. k-фактор

Степень любой вершины k

Определение. f-фактор

$$F = [f_1, \dots, f_n] \deg u = f_u$$

Утверждение $G, f \mapsto G_f$. G_f сод. сов. паросочетанием $\Leftrightarrow G$ сод. f -фактор

$$ex(u) = d_u - f_u$$

9. Лекция 9

9.1. Числа Рамсея

Определение. Число Рамсея

Число Рамсея $r(n, m)$ – это наименьшее из всех таких чисел $x \in \mathbb{N}$, что при любой раскраске полного графа на x вершинах в два цвета обязательно найдется клика на n вершинах с ребрами цвета 1 или клика на m с ребрами цвета 2.

Сразу поймем, что $r(n, m) = r(m, n)$, $r(n, 2) = r(2, n) = n$, $r(n, 1) = r(1, n) = 1$

9.1.1. Оценки Сверху:

Теорема. Эрдеша-Секереша

$$r(n, m) \leq r(n, m - 1) + r(n - 1, m)$$

Доказательство:

Рассмотрим клику на $r(n, m - 1) + r(n - 1, m)$ вершинах с ребрами цветов 1 и 2 и ее произвольную вершину a . Тогда либо от вершины a отходит хотя бы $r(n - 1, m)$ ребер цвета 1. Случаи аналогичны, поэтому рассмотрим первый случай и клику на $r(n, m - 1)$ вершинах, соединенных с a ребрами цвета 2. На этих вершинах есть либо клика на n вершинах с ребрами цвета 2. Во втором случае добавим вершину a и получим клику на m вершинах с ребрами цвета 2. Во втором случае добавим вершину a и получим клику на m вершинах с ребрами цвета 2. Теперь из определения $r(n, m)$ следует утверждение пункта 1.

Q.E.D.

Следствие. Для натуральных чисел m, n выполняется неравенство $r(n, m) \leq C_{n+m-2}^{n-1}$

9.1.2. Оценки снизу:

Определение. Граф Рамсея

Графом Рамсея $R(n, m)$ назовем граф на $r(n, m) - 1$ вершинах, не содержащий ни клики на n вершинах, ни независимого множества на m вершинах.

Теорема. Эрдеш

Для любого натурального числа $k \geq 2$ выполняется неравенство $r(k, k) \geq 2^{\frac{k}{2}}$

Доказательство:

Зафиксируем множество помеченных вершин v_1, \dots, v_n . Пусть $g(n, k)$ – доля среди всех графов на вершинах v_1, \dots, v_n тех графов, что содержит клику на k вершинах. Всего графов на наших вершинах, очевидно, $2^{C_n^2}$ (каждое из возможных C_n^2 ребер можно провести или не провести).

Подсчитаем графы с кликой на k вершинах так: существуют C_n^k способов выбрать k вершин для клики в нашем множестве, после чего все ребра между ними будем считать проведенными, а остальные ребра выбираются произвольным образом. Таким образом, каждый граф с кликой на k вершинах будет посчитан, причем некоторые даже больше одного раза. Количество графов с кликой размера k оказывается не более $C_n^k 2^{C_n^2 - C_k^2}$. Следовательно:

$$g(n, k) \leq \frac{C_n^k}{2^{C_k^2}} < \frac{n^k}{k! 2^{C_k^2}}$$

Подставим $n < 2^{\frac{k}{2}}$ в неравенство, мы получаем:

$$g(n, k) < \frac{2^{\frac{k}{2}} 2^{-C_k^2}}{k!} = \frac{2^{\frac{k}{2}}}{k!} < \frac{1}{2}$$

Откуда понятно, что существует граф без полной клики размера k , и полной антиклики размера k .

Q.E.D.

9.2. Числа Рамсея для раскрасок в несколько цветов.

Определение. Обобщение чисел Рамсея

$r(k, n_1, \dots, n_k)$ — это наименьшее из всех таких чисел $x \in \mathbb{N}$, что при любой раскраске ребер полного графа на x вершинах в k цветов для некоторого $i \in [1, \dots, k]$ обязательно найдется клика на n_i вершинах с ребрами цвета i .

Теорема.

Пусть $k, n_1, \dots, n_k \geq 2$ — натуральные числа. Тогда выполняются следующие утверждения:

$$r(k, n_1, \dots, n_k) \leq r(k, n_1 - 1, n_2, \dots, n_k) + r(k, n_1, n_2 - 1, \dots, n_k) + \dots + r(k, n_1, n_2, \dots, n_k - 1)$$

10. Лекция 10

10.1. Совершенные графы

Определение. Совершенный граф

Граф G называется **совершенным**, если для любого его индуцированного подграфа H выполняется $\chi(H) = \omega(w)$

Теорема. Слабая гипотеза Бержа

Граф G совершенен тогда и только тогда, когда граф \bar{G} совершенен.

Теорема. Сильная гипотеза Бержа

Граф G совершенен тогда и только тогда, когда ни G , ни \bar{G} не содержат нечетного цикла длины более 3 в качестве индуцированного полграфа.

Теорема. Ловас

Граф G совершенен тогда и только тогда, когда для любого его индуцированного подграфа G' выполняется условие:

$$\omega(G')\omega(\bar{G}') = \alpha(G')w(G') \geq v(G')$$

Следствие. Граф G совершенен тогда и только тогда, когда граф \bar{G} совершен.

Определение. Хордальный или триангулируемый граф

В любом простом цикле длины больше 4, найдется хорда - ребро, не принадлежащее циклу и соединяющее 2 его вершины

Определение. Интервальный граф

$\{I_k = [b_k, r_k]\}_{k=1}^n$ - Каждой вершине графа представляем интервал. Если $I_k I_j \in E \Leftrightarrow I_k \cap I_j \neq \emptyset$, тогда такой график называется **интервальным**

11. Лекция 11

11.1. Матроиды

Определение. Матроид

Конечное множество $X, I \subset 2^X$ - независимые множества

1. $\emptyset \in I$ - аксиома нетривиальности
2. $X \subset B, B \in I \Rightarrow A \in I$ - аксиома наследования
- 1,2 - предматроиды или inheritance system
3. $\forall A, B \in I, |A| > |B|, \exists x \in A \setminus B : B \cup x \in I$ - аксиома замены

Примеры:

1. Линейная независимость или матричный матроид

$X \subset F^m, F$ - поле, направлений

I - семейство линейно-независимых

2. Графовый матроид

G - неориентированный граф, $X = E$

$I = \{A \mid A \text{ - ациклический}\}$

3. Равномерный матроид

$X = \{1, \dots, n\}$

$I = \{A \mid |A| \leq k\}$

4. Разноцветный матроид

$X = \{1, \dots, n\}, c : X \rightarrow \{1, \dots, k\}$

Множество независимых - множество, где разные вершины имеют разные цвета.

5. Матроид паросочетаний

На самом деле это не совсем наш матроид

$G, X, Y, E, I = \{A \mid A \subset X : \exists \text{ паросочетание } M, \text{ покрывающее } A\}$

Определение. База матроида

$B \in I, B \subset A, A \in I \Rightarrow A = B$

Лемма.

Если B_1, B_2 - базы матроида, тогда $|B_1| = |B_2|$

Определение. Взвешенный матроид

$M = \langle X, I \rangle, w : X \rightarrow \mathbb{R}$, то есть мы просто добавили нашему матроиду веса.

Теорема. Радо-Эдмондса

На носителе матроида $\mathcal{M} = \langle X, \mathcal{I} \rangle$ задана весовая функция $w : X \rightarrow \mathbb{R}$. Пусть $A \in \text{cal}\{\mathcal{I}\}$ – множество минимального веса среди независимых подмножеств X мощности k . Возьмем $x : A \cup x \in \mathcal{I}, x \notin A$, $w(x)$ – минимальна.

Тогда $A \cup x$ – множество минимального веса среди независимых подмножеств X мощности $k + 1$.

Доказательство:

Рассмотрим $B \in \mathcal{I}$ – множество минимального веса среди независимых подмножеств X мощности $k + 1$.

Из определения матроида: $\exists y \in B \setminus A : A \cup y \in \mathcal{I}$.

Тогда верны два неравенства:

$$\omega(A \cup y) = \omega(A) + \omega(y) \leq \omega(B) \Rightarrow \omega(A) \leq \omega(B) - \omega(y),$$

$$\omega(B \setminus y) = \omega(B) - \omega(y) \leq \omega(A).$$

Заметим, что величина $\omega(A)$ с двух сторон ограничивает величину $\omega(B) - \omega(y)$. Значит, эти величины равны:

$$\omega(A) = \omega(B) - \omega(y) \Rightarrow \omega(A) + \omega(y) = \omega(B).$$

Следовательно, $\omega(A \cup y) = \omega(A) + \omega(y) = \omega(B)$.

Таким образом получаем, что если объединить множество A с x – минимальным из таких, что $A \cup x \in \mathcal{I}$, – то получим множество минимального веса среди независимых подмножеств X мощности $k + 1$.

Q.E.D.

Теорема. Жадный алгоритм поиска базы минимального веса

Пусть на носителе матроида $\mathcal{M} = \langle X, \mathcal{I} \rangle$ задана весовая функция $\omega : X \rightarrow \mathbb{R}$. Для любого $A \subset X$ выполнено:

$$\omega(A) = \sum_{\{x \in A\}} \omega(x)$$

Тогда база минимального веса матроида $\text{cal}\{\mathcal{M}\}$ ищется жадно.

Определение. Цикл

Минимальное по включению зависимое (не независимое)

Определение. Ранговая функция

$r : 2^X \rightarrow \mathbb{Z}^+$, где $r(A) = |B|$, где B – максимальное по размеру максимальное по включению в A независимое

12. Лекция 12

12.1. Продолжение матроидов

Теорема. Слабая теорема о базах

1. $B_1, B_2 \in \mathcal{B} \rightarrow B_1 \not\subset B_2$
2. $\forall x \in B_1 \setminus B_2 : \exists B_2 \setminus B_1 : B_1 \setminus x \subset y \in \mathcal{B}$

Теорема. Сильная теорема о базах

2. $\forall y \in B_2 \setminus B_1 : \exists x \in B_1 \setminus B_2 : B_1 \setminus x \subset y \in \mathcal{B}$

$$r : 2^X \rightarrow \mathbb{N}_0$$

Теорема. О рангах

1. $0 \leq r(A) \leq |A|$
2. $A \subset B \Rightarrow r(A) \leq r(B)$
3. $r(A \cap B) + r(A \cup B) \leq r(A) + r(B)$

Доказательство:

1-2 очев

Лемма

$A \subset B$, A_0 - макс. незав. по включению $A : \exists B_0$ - макс независимое B , что $A_0 \subset B_0$

Q.E.D.

12.2. Циклы в матроидах

Теорема. О циклах

\mathcal{C} - множество циклов. Тогда

1. $\emptyset \notin \mathcal{C}$
2. $C_1, C_2 \in \mathcal{C}, C_1 \not\subset C_2$
3. $C_1 \neq C_2, C_1, C_2 \in \mathcal{C} : \forall p \in C_1 \cap C_2 : C_1 \cup C_2 \setminus p \notin \mathcal{C}$ или $\exists C_3 \subset C_1 \cup C_2 \setminus p$

Доказательство:

1-2 очев. Докажем 3. Заметим, что если C - цикл, то $r(C) = |C| - 1$

$$r(C_1 \cap C_2) + r(C_1 \cup C_2) \leq r(C_1) + r(C_2)$$

$$r(C_1 \cup C_2) \leq |C_1 \cup C_2| - 2$$

Откуда уже очевидно требуемое

Q.E.D.

Лемма.

$A \in I, x \notin A, A \cup x \notin I$, откуда $\exists! C \subset A \cup x$

Доказательство:

От противного, тогда $x \in C_1, C_2$. Тогда $\exists C_1 \subset C_1 \cup C_2 \setminus x$, тогда C_3 лежит в A - противоречие.

Q.E.D.

Вернемся к усиленной версии теоремы о базах

Теорема. Сильная теорема о базах

2. $\forall y \in B_2 \setminus B_1 : \exists x \in B_1 \setminus B_2 : B_1 \setminus x \subset y \in \mathcal{B}$

Доказательство:

От противного, используем последнюю лемму и побеждаем

Q.E.D.

12.3. Замыкания

Определение. Замыкание span A

$\langle A \rangle$ - все множества X , что добавление X в A не меняют ранг

1. $\langle A \rangle = \{a \mid r(A) = r(A \cup a)\}$
2. $\langle A \rangle$ - макс. по вкл. $B, r(A) = r(B), A \subset B$

Теорема. О замыканиях

1. $A \subset \langle A \rangle$
2. $\langle \langle A \rangle \rangle = \langle A \rangle$
3. $A \subset B \Rightarrow \langle A \rangle \subset \langle B \rangle$
4. Если $q \notin \langle A \rangle, q \in \langle A \cup p \rangle \Rightarrow p \in \langle A \cup q \rangle$

13. Лекция 13

13.1. Аксиоматизация матроидов

Определение. Аксиоматизация базами

$X, B \subset 2^X$

1. $B \notin \emptyset$
2. $B_1, B_2 \in B, B_1 \subset B_2 \Rightarrow B_1 = B_2$
3. $\forall x \in B_1 \setminus B_2 : \exists y \in B_2 \setminus B_1 : B_2 \setminus x \cup y \in B$

Тогда B - базы некоторого матроида.

Определение. Двойственный матроид

M - матриод, M^* - двойственный к нему:

$M^* = \langle X, I^* \rangle$, где $I^* = \{X \setminus A, A \in I\}$.

Определение. Аксиоматизация циклами

C - множество циклов матроида.

1. $\emptyset \notin C$
2. $C_1 \neq C_2 \Rightarrow C_1 \not\subset C_2$
3. $p \in C_1 \cap C_2 \Rightarrow \exists C_3 \subset C_1 \cup C_2 \ni p$

$$I = \{A \mid \nexists C \subset A\}$$

Определение. Аксиоматизация рангами

r - ранговая функция $r : 2^X \rightarrow \mathbb{N}_0$

1. $0 \leq r(A) \leq |A|$
2. $A \subset B \Rightarrow r(A) \leq r(B)$
3. $r(A \cup B) + r(A \cap B) \leq r(A) + r(B)$

14. Лекция 14

14.1. Пересечение матроидов

Определение. Пересечение матроидов

$$M_1 = \langle X, I_1 \rangle \quad M_2 = \langle X, I_2 \rangle$$

$M_1 \cap M_2 = \langle X, I_1 \cap I_2 \rangle$ - пересечение матроидов

Пример. Разноцветные леса.

$G = \langle V, E \rangle$, $X = E$, $c : E \rightarrow \{1, \dots, k\}$, I_1 - ациклические, I_2 - разноцветные

15. Информация о курсе

Поток – y2024.

Группы М3238-М3239.

Преподаватель – Станкевич Андрей Сергеевич.

Это третий семестр курса по дискретной математике, всем успехов!

