

Mécanique analytique I

MECA0201-1

Notes d'exercices

Pierre C. DAUBY

Septembre 2022

Ces notes d'exercices ont été préparées et rédigées par Valérie Coumans, Huguette Croisier, Sarah Kosta, Sophie Penning, Grégor Rauw, Anne Thoul.
Sophie Rosu et Manu Stalport ont également participé à la mise en forme du texte.

Table des matières

Table des matières	3
1 Cinématique du point	6
1.1 Rappels théoriques : position, vitesse et accélération	6
1.1.1 Coordonnées polaires	7
1.1.2 Coordonnées cylindriques	9
1.1.3 Coordonnées sphériques	10
1.2 Translation, rotation et mouvement hélicoïdal	11
1.2.1 Mouvement rectiligne uniforme	11
1.2.2 Mouvement circulaire uniforme	12
1.2.3 Mouvement hélicoïdal	13
1.3 Exercices résolus	14
1.3.1 Vecteur de Poisson d'un solide en rotation autour d'un axe fixe	14
1.3.2 Gradient d'un champ scalaire en coordonnées cylindriques .	15
1.3.3 L'échelle	17
1.3.4 Équation différentielle d'une hélice	18
1.3.5 Mouvement plan	20
1.3.6 Cercle en rotation	22
1.3.7 Le maître et le chien	24
1.4 Formules de Frenet-Serret	26
1.4.1 Rappels théoriques	26
1.4.2 Trajectoire hélicoïdale	27
1.4.3 Trajectoire spirale	30
1.5 Exercices proposés	32
2 Dynamique du point matériel	34
2.1 Mouvements non guidés	34
2.1.1 Mouvement d'un projectile en l'absence de frottement	34
2.1.2 Mouvement d'un projectile dans un milieu résistant	36
2.1.3 Inertie et poids	39
2.1.4 Mouvement d'une particule soumise à des forces EM	42
2.1.5 Exercices proposés	46
2.2 Mouvements guidés	47
2.2.1 Le plan incliné sans frottement	48
2.2.2 Le plan incliné avec frottement	49
2.2.3 Mouvement sur un cercle avec frottement	51
2.2.4 Mouvement sur un cylindre sans frottement	53

2.2.5 Montagnes russes	54
2.2.6 Perle sur une hélice	56
2.2.7 La balançoire	59
2.2.8 Exercices proposés	61
2.3 Oscillateurs harmoniques	62
2.3.1 L'oscillateur sur une tige inclinée	62
2.3.2 L'oscillateur lié à une droite	66
2.3.3 Ressort non linéaire	69
2.3.4 La particule sur l'élastique	72
2.3.5 Exercices proposés	73
2.4 Forces centrales	73
2.4.1 Rappels théoriques	73
2.4.2 Gravitation universelle : la masse de la galaxie	75
2.4.3 Gravitation universelle : satellite géostationnaire	76
2.4.4 Gravitation universelle : vitesse de libération	77
2.4.5 Gravitation universelle : astéroïde	78
2.4.6 Gravitation universelle : composition de la Lune	79
2.4.7 La cardioïde	80
2.4.8 Le potentiel $\mathbf{U} = \mathbf{k}\mathbf{r}$	81
2.4.9 Le potentiel de Rutherford, loi répulsive en \mathbf{r}^{-2}	83
2.4.10 Déduction de l'expression de la force de gravitation universelle	85
2.4.11 Exercices proposés	86
3 Mécanique en axes relatifs	88
3.1 Rappels théoriques	88
3.2 Exercices résolus	89
3.2.1 Le carrousel et la balle	89
3.2.2 Le projectile sur le carrousel	91
3.2.3 La fourmi sur le disque	94
3.2.4 La bille dans un tube en rotation	95
3.2.5 Point attractif sur un disque tournant	97
3.2.6 Le bol hémisphérique tournant	102
3.2.7 Bille oscillant sur un cercle tournant	105
3.3 Exercices proposés	106
4 Moments d'Inertie	108
4.1 Rappels théoriques	108
4.1.1 Moment d'inertie	108
4.1.2 Théorème des axes parallèles (théorème d'Huygens)	108
4.1.3 Théorème des axes perpendiculaires	110
4.2 Calculs de moments d'inertie	111
4.2.1 Moment d'inertie d'un système de deux masses ponctuelles	111
4.2.2 Moment d'inertie d'une plaque	111
4.2.3 Moment d'inertie d'un cylindre creux	112
4.2.4 Moment d'inertie d'un cerceau	113
4.2.5 Moment d'inertie d'un cylindre plein	114
4.2.6 Moment d'inertie d'une sphère creuse	114
4.2.7 Moment d'inertie d'une sphère pleine	115

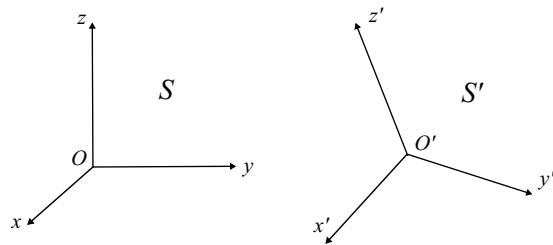
4.2.8	Moment d'inertie d'un carré plein	116
4.2.9	Moment d'inertie d'un carré vide	117
4.2.10	Moment d'inertie d'un tube épais	117
4.3	Calcul d'un centre de masse	120
5	Mécanique du Solide	122
5.1	Rappels théoriques	122
5.1.1	Lois de conservation pour les systèmes de points matériels	122
5.1.2	Lois de conservation dans S^*	123
5.1.3	Dynamique des solides en mouvement plan	124
5.2	Mouvements d'un disque roulant	126
5.2.1	Mouvement plan d'un disque	126
5.2.2	La boule de bowling	129
5.2.3	Mouvement plan d'un disque sur un plan incliné	131
5.2.4	Mouvement plan d'un disque qui rencontre un plan incliné	132
5.2.5	La bobine	134
5.3	Mouvements d'oscillation	138
5.3.1	Le pendule composé	138
5.3.2	Le demi-cylindre	140
5.3.3	Le pendule d'Euler	143
5.4	Autres systèmes mécaniques	145
5.4.1	Les deux cylindres	145
5.4.2	Les poulies et les masses	148
5.5	Exercices proposés	151

Chapitre 1

Cinématique du point

1.1 Rappels théoriques : position, vitesse et accélération

En mécanique, il est fréquent d'étudier le mouvement d'un point matériel P par rapport à différents systèmes de référence, pouvant être en mouvement relatif l'un par rapport à l'autre.



Considérons deux systèmes de référence S et S' en mouvement relatif l'un par rapport à l'autre, définis respectivement par (O, \vec{e}_i) et (O', \vec{e}'_i) .

La *formule de Poisson* donne la relation entre les dérivées temporelles d'un vecteur \vec{a} évaluées dans S et dans S' :

$$\left(\frac{d\vec{a}}{dt} \right)_S = \left(\frac{d\vec{a}}{dt} \right)_{S'} + \vec{\omega}_{S' \div S} \wedge \vec{a} \quad (1.1)$$

où le *vecteur de Poisson* $\vec{\omega}_{S' \div S}$, qui représente la vitesse angulaire de S' par rapport à S , est donné par :

$$\vec{\omega}_{S' \div S} = \left(\left(\frac{d\vec{e}_{x'}}{dt} \right)_S \cdot \vec{e}_{y'} \right) \vec{e}_{z'} + \left(\left(\frac{d\vec{e}_{y'}}{dt} \right)_S \cdot \vec{e}_{z'} \right) \vec{e}_{x'} + \left(\left(\frac{d\vec{e}_{z'}}{dt} \right)_S \cdot \vec{e}_{x'} \right) \vec{e}_{y'}.$$

En particulier,

$$\left(\frac{d\vec{e}'_i}{dt} \right)_S = \vec{\omega}_{S' \div S} \wedge \vec{e}'_i$$

puisque les \vec{e}'_i sont des vecteurs constants dans S' .

Pour rappel, le vecteur de Poisson a les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_S &= \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_{S'} \\ \vec{\omega}_{S' \div S} &= -\vec{\omega}_{S \div S'} \\ \vec{\omega}_{S'' \div S} &= \vec{\omega}_{S'' \div S'} + \vec{\omega}_{S' \div S}\end{aligned}$$

Dans le cas particulier où les systèmes de référence S et S' sont en translation l'un par rapport à l'autre, le vecteur de Poisson est nul :

$$\vec{\omega}_{\text{translation}} = 0.$$

Dans le cas particulier où les systèmes de référence S et S' sont en rotation autour d'un axe commun et fixe pour les deux systèmes, le vecteur de Poisson est donné par :

$$\vec{\omega}_{\text{rotation}} = \dot{\varphi} \vec{e}$$

où φ est l'angle qui définit la position de S' par rapport à S et \vec{e} est le vecteur unitaire de l'axe de rotation dont le sens est obtenu en appliquant la règle du tire-bouchon dans le sens de φ .

Loi de composition des vitesses. Cette loi permet de mettre en relation la vitesse du point P par rapport au système de référence S , \vec{v}_P , et la vitesse de ce point P par rapport au système de référence S' , \vec{v}'_P .

$$\vec{v}_P = \frac{d\vec{OP}}{dt} = \vec{v}_{O'} + \vec{v}'_P + \vec{\omega}_{S' \div S} \wedge \vec{O'P}$$

où $\vec{v}_{O'}$ est la vitesse du point O' par rapport au système de référence S et $\vec{\omega}_{S' \div S}$ le vecteur de Poisson qui représente la vitesse angulaire de S' par rapport à S .

Loi de composition des accélérations. Cette loi permet de mettre en relation l'accélération du point P par rapport au système de référence S , $\vec{\gamma}_P$, et l'accélération de ce point P par rapport au système de référence S' , $\vec{\gamma}'_P$.

$$\vec{\gamma}_P = \vec{\gamma}_{O'} + \vec{\gamma}'_P + \vec{\omega}_{S' \div S} \wedge (\vec{\omega}_{S' \div S} \wedge \vec{O'P}) + \frac{d\vec{\omega}_{S' \div S}}{dt} \wedge \vec{O'P} + 2\vec{\omega}_{S' \div S} \wedge \vec{v}'_P$$

où $\vec{\gamma}_{O'}$ l'accélération du point O' par rapport au système de référence S , \vec{v}'_P la vitesse du point P par rapport au système de référence S' et $\vec{\omega}_{S' \div S}$ le vecteur de Poisson qui représente la vitesse angulaire de S' par rapport à S .

1.1.1 Coordonnées polaires

Le système de référence fixe S est défini par le point O et la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ tandis que le système de référence mobile S' est défini par le point P et la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$. Le vecteur de Poisson $\vec{\omega}_{S' \div S}$ est donné par $\dot{\varphi} \vec{e}_z$. Le système de coordonnées polaires est exclusivement utilisé pour décrire des mouvements plans.

1.1.1 Coordonnées polaires

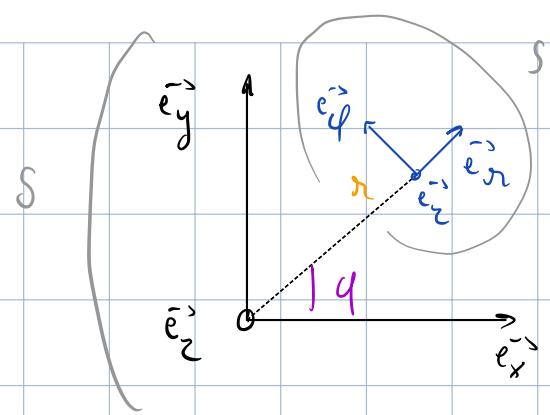
$$\left\{ \begin{array}{l} x = r \cos(\varphi) \\ y = r \sin(\varphi) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} S(0; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z) \\ S'(P; \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi) \end{array} \right.$$

$$S(0; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$$

$$S'(P; \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$$

$$\vec{\omega}_{S'/S} = \dot{\varphi} \vec{e}_z$$



Calculer \vec{r} , $\vec{\omega}$ et \vec{a} dans S :

$$\vec{r} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y$$

$$\vec{\omega} = \dot{x} \vec{e}_x + \dot{y} \vec{e}_y$$

$$\vec{a} = \ddot{x} \vec{e}_x + \ddot{y} \vec{e}_y$$

Calculer \vec{r} , $\vec{\omega}$ et \vec{a} dans S' :

$$\left. \begin{array}{l} \vec{r} = \vec{0} \\ \vec{\omega} = \vec{0} \\ \vec{a} = \vec{0} \end{array} \right\} \text{de repère bouge de la même façon que la particule}$$

Exprimer \vec{r} , $\vec{\omega}$, \vec{a} dans en coord. polaire et de la base polaire.

$$\vec{r} = r \cdot \vec{e}_r$$

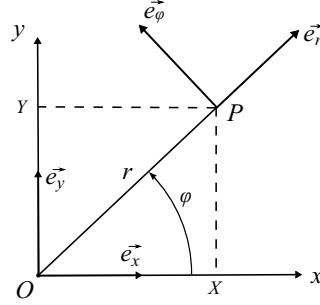
$$\vec{\omega} = \left(\frac{d \vec{r}}{dt} \right)_S = \frac{d(r \vec{e}_r)}{dt} = r \vec{e}_r + r \left(\frac{d(\vec{e}_r)}{dt} \right)_S \quad \left| \begin{array}{l} \vec{\omega} = \dot{\varphi} \vec{e}_z \\ \vec{e}_r = \vec{e}_r \\ \vec{e}_\theta = \vec{e}_\theta \\ \vec{e}_\varphi = \vec{e}_\varphi \end{array} \right. \\ = r \vec{e}_r + r \vec{\omega} \wedge \vec{e}_r \\ = r \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{a} = \frac{d \vec{\omega}}{dt} = \frac{d}{dt}(r \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi)$$

$$= \ddot{r} \vec{e}_r + r \vec{\omega} \wedge \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + r \ddot{\varphi} \vec{e}_\varphi + r \dot{\varphi} \vec{\omega} \wedge \vec{e}_\varphi$$

$$= \ddot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi - r \dot{\varphi}^2 \vec{e}_r$$

$$= \vec{e}_r \cdot [\ddot{r} + r \dot{\varphi}^2] + \vec{e}_\varphi \cdot [2r \dot{\varphi} + r \ddot{\varphi}]$$



Les vecteurs position, vitesse et accélération du point P :

- par rapport au système de référence fixe S , exprimés en coordonnées cartésiennes et dans la base associée $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{OP} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y \\ \vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x} \vec{e}_x + \dot{y} \vec{e}_y \\ \vec{\gamma} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{x} \vec{e}_x + \ddot{y} \vec{e}_y\end{aligned}$$

- par rapport au système de référence mobile S' :

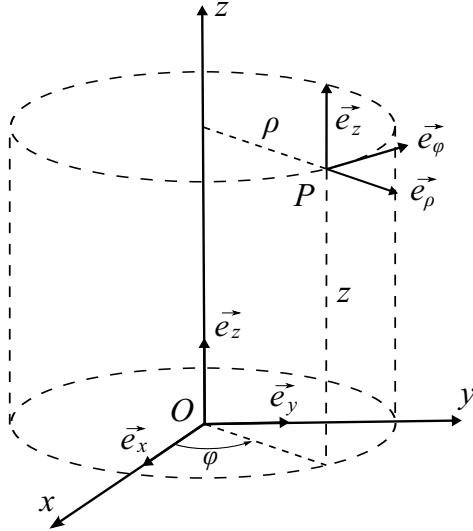
$$\begin{aligned}\vec{r}' &= \vec{PP} = 0 \\ \vec{v}' &= 0 \\ \vec{\gamma}' &= 0\end{aligned}$$

- par rapport au système de référence fixe S , exprimés en coordonnées polaires et dans la base associée $(\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{OP} = r \vec{e}_r \\ \vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r \vec{e}_r) = \frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r \frac{d\vec{e}_r}{dt} \\ &= \dot{r} \vec{e}_r + r \vec{\omega}_{S' \div S} \wedge \vec{e}_r = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_z \wedge \vec{e}_r \\ &= \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi \\ \vec{\gamma} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi) \\ &= \ddot{r} \vec{e}_r + \dot{r} \frac{d\vec{e}_r}{dt} + \dot{r} \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + r \dot{\varphi} \frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} \\ &= \ddot{r} \vec{e}_r + \dot{r} \vec{\omega}_{S' \div S} \wedge \vec{e}_r + \dot{r} \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + r \dot{\varphi} \vec{\omega}_{S' \div S} \wedge \vec{e}_\varphi \\ &= \ddot{r} \vec{e}_r + \dot{r} \dot{\varphi} \vec{e}_z \wedge \vec{e}_r + \dot{r} \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + r \ddot{\varphi} \vec{e}_\varphi + r \dot{\varphi} \dot{\varphi} \vec{e}_z \wedge \vec{e}_\varphi \\ &= \ddot{r} \vec{e}_r + \dot{r} \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + \dot{r} \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + r \ddot{\varphi} \vec{e}_\varphi - r \dot{\varphi}^2 \vec{e}_r \\ &= (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) \vec{e}_r + (2\dot{r} \dot{\varphi} + r \ddot{\varphi}) \vec{e}_\varphi\end{aligned}$$

en utilisant la relation (1.1) pour calculer les dérivées temporelles des vecteurs du système de référence S' dans le système de référence S .

1.1.2 Coordonnées cylindriques



Le système de référence fixe S est défini par le point O et la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ tandis que le système de référence mobile S' est défini par le point P et la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$. Le vecteur de Poisson $\vec{\omega}_{S' \div S}$ est donné par $\dot{\varphi}\vec{e}_z$. En effet, on passe du système de référence S au système de référence S' en effectuant une rotation de vitesse angulaire $\dot{\varphi}$ autour de l'axe z ($\vec{\omega}_1 = \dot{\varphi}\vec{e}_z$) et une translation de O vers P . Pour rappel, le vecteur de Poisson associé à un mouvement de translation est nul.

Les vecteurs position, vitesse et accélération du point P :

- par rapport au système de référence fixe S , exprimés en coordonnées cartésiennes et dans la base associée $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{OP} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z \\ \vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z \\ \vec{\gamma} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z\end{aligned}$$

- par rapport au système de référence mobile S' :

$$\begin{aligned}\vec{r}' &= \vec{PP} = 0 \\ \vec{v}' &= 0 \\ \vec{\gamma}' &= 0\end{aligned}$$

- par rapport au système de référence fixe S , exprimés en coordonnées cylindriques et dans la base associée $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{OP} = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z \\ \vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(\rho\vec{e}_\rho) + \frac{d}{dt}(z\vec{e}_z) = \frac{d\rho}{dt}\vec{e}_\rho + \rho\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} + \frac{dz}{dt}\vec{e}_z + z\frac{d\vec{e}_z}{dt} \\ &= \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\vec{\omega}_{S' \div S} \wedge \vec{e}_\rho + \dot{z}\vec{e}_z + z\vec{\omega}_{S' \div S} \wedge \vec{e}_z \\ &= \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_z \wedge \vec{e}_\rho + \dot{z}\vec{e}_z + z\dot{\varphi}\vec{e}_z \wedge \vec{e}_z \\ &= \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{e}_z\end{aligned}$$

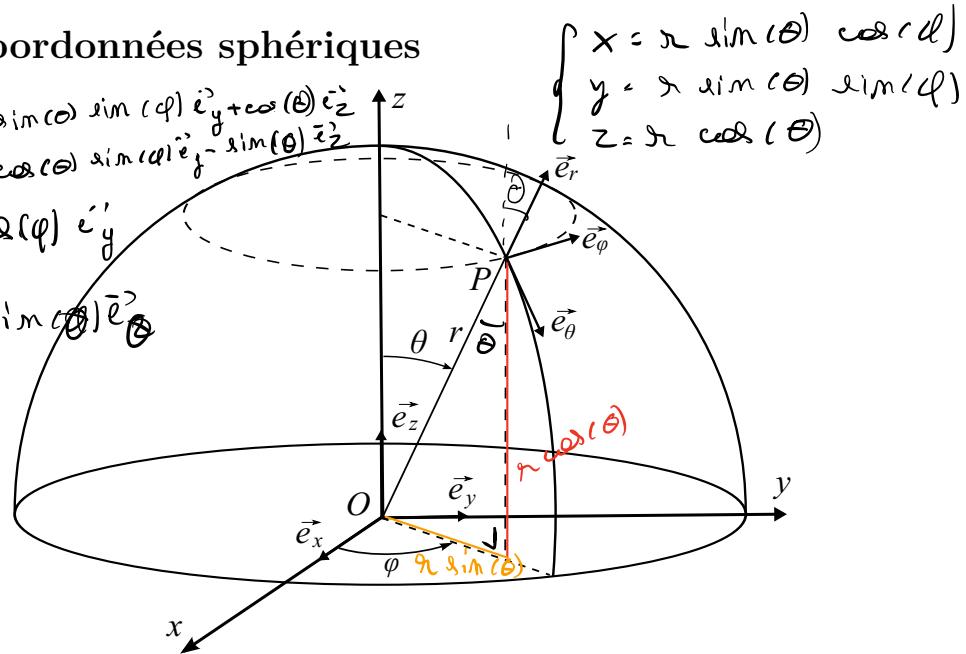
$$\begin{aligned}
 \vec{\gamma} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{e}_z) \\
 &= \ddot{\rho}\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} + \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \rho\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \rho\dot{\varphi}\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} + \ddot{z}\vec{e}_z + \dot{z}\frac{d\vec{e}_z}{dt} \\
 &= \ddot{\rho}\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\vec{\omega}_{S' \div S} \wedge \vec{e}_\rho + \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \rho\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \rho\dot{\varphi}\vec{\omega}_{S' \div S} \wedge \vec{e}_\varphi + \ddot{z}\vec{e}_z + \dot{z}\vec{\omega}_{S' \div S} \wedge \vec{e}_z \\
 &= \ddot{\rho}\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\dot{\varphi}\vec{e}_z \wedge \vec{e}_\rho + \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \rho\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \rho\dot{\varphi}\dot{\varphi}\vec{e}_z \wedge \vec{e}_\varphi + \ddot{z}\vec{e}_z + \dot{z}\dot{\varphi}\vec{e}_z \wedge \vec{e}_z \\
 &= \ddot{\rho}\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \rho\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi - \rho\dot{\varphi}^2\vec{e}_\rho + \ddot{z}\vec{e}_z \\
 &= (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi})\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\vec{e}_z
 \end{aligned}$$

en utilisant la relation (1.1) pour calculer les dérivées temporelles des vecteurs du système de référence S' dans le système de référence S .

1.1.3 Coordonnées sphériques

$$\begin{aligned}
 \vec{e}_x &= \sin(\theta) \cos(\varphi) \vec{e}_x + \sin(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_y + \cos(\theta) \vec{e}_z \\
 \vec{e}_y &= \cos(\theta) \cos(\varphi) \vec{e}_x + \cos(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_y - \sin(\theta) \vec{e}_z \\
 \vec{e}_\theta &= -\sin(\varphi) \vec{e}_x + \cos(\varphi) \vec{e}_y \\
 \Rightarrow \vec{e}_z &= \cos(\theta) \vec{e}_x - \sin(\theta) \vec{e}_y
 \end{aligned}$$

$$\vec{e}_z = \cos \theta \vec{e}_\theta$$

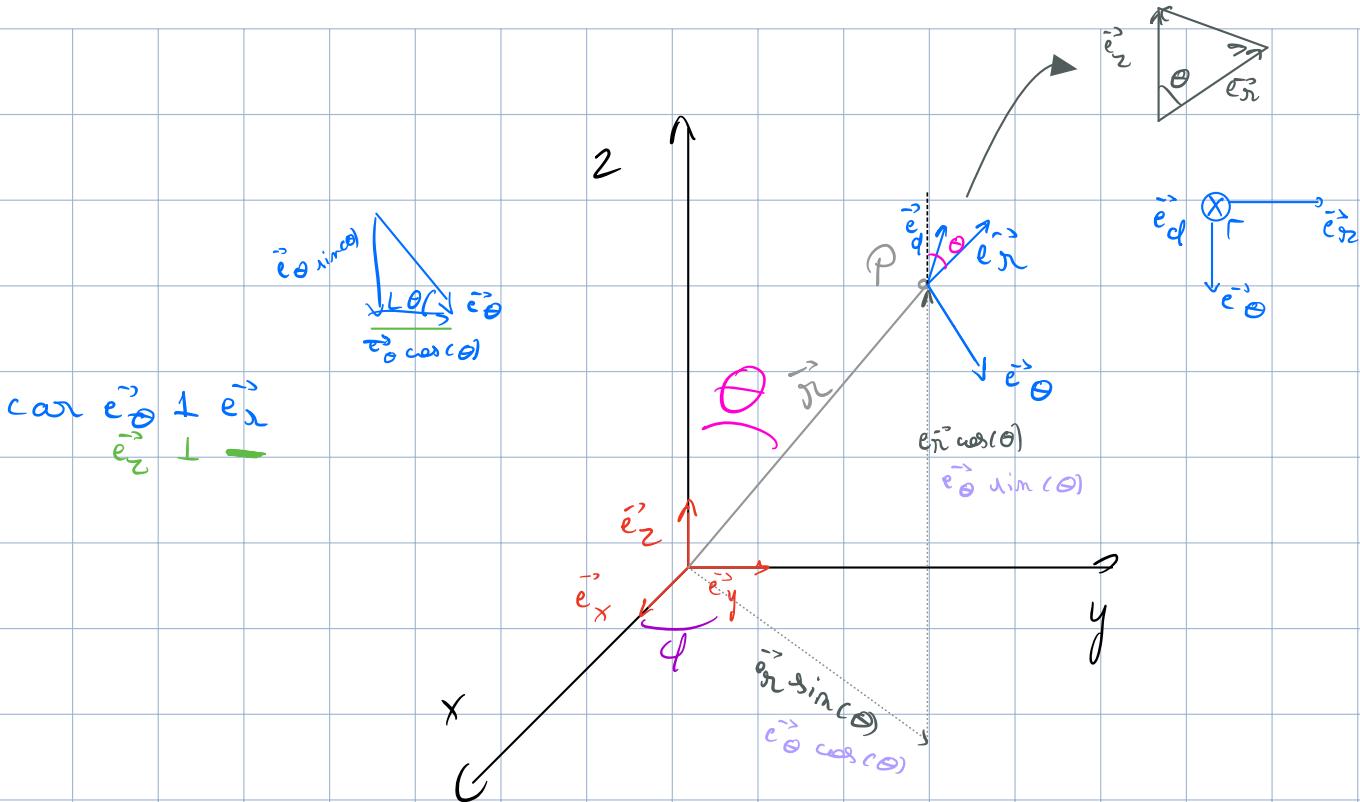


Le système de référence fixe S est défini par le point O et la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ tandis que le système de référence mobile S' est défini par le point P et la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$. Le vecteur de Poisson $\vec{\omega}_{S' \div S}$ est donné par $\dot{\varphi}\vec{e}_z + \dot{\theta}\vec{e}_\varphi$. En effet, on passe du système de référence S au système de référence S' en effectuant une rotation de vitesse angulaire $\dot{\varphi}$ autour de l'axe z ($\vec{\omega}_1 = \dot{\varphi}\vec{e}_z$), une rotation de vitesse angulaire $\dot{\theta}$ autour de l'axe \vec{e}_φ ($\vec{\omega}_2 = \dot{\theta}\vec{e}_\varphi$) et une translation de O vers P . Pour rappel, le vecteur de Poisson associé à un mouvement de translation est nul et par additivité des vecteurs de Poisson on obtient : $\vec{\omega}_{S' \div S} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 = \dot{\varphi}\vec{e}_z + \dot{\theta}\vec{e}_\varphi$.

Les vecteurs position, vitesse et accélération du point P :

- par rapport au système de référence fixe S , exprimés en coordonnées cartesiennes et dans la base associée $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$:

$$\begin{aligned}
 \vec{r} &= \vec{OP} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z \\
 \vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z \\
 \vec{\gamma} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z
 \end{aligned}$$



On a:

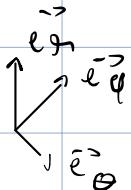
$$\begin{cases} \vec{e}_r = \sin(\theta) \cos(\varphi) \vec{e}_x + \sin(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_y + \cos(\theta) \vec{e}_z \\ \vec{e}_\theta = \cos(\theta) \cos(\varphi) \vec{e}_x + \cos(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_y - \sin(\theta) \vec{e}_z \\ \vec{e}_\varphi = -\sin(\varphi) \vec{e}_x + \cos(\varphi) \vec{e}_y \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \vec{e}_x = \sin(\theta) \cos(\varphi) \vec{e}_r + \cos(\theta) \cos(\varphi) \vec{e}_\theta - \sin(\varphi) \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_y = \sin(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_r + \cos(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_\theta + \cos(\varphi) \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_z = \cos(\theta) \vec{e}_r - \sin(\theta) \vec{e}_\theta \end{cases}$$

Oma bien

$\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\theta = 0$	$\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\varphi = \vec{e}_\varphi$
$\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\varphi = 0$	$\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\varphi = -\vec{e}_\theta$
$\vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_\varphi = 0$	$\vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_\varphi = \vec{e}_r$



$$\vec{\omega} = \dot{\theta} \vec{e}_z + \dot{\phi} \vec{e}_\theta = \dot{\theta} \vec{e}_d + \dot{\phi} \cos(\theta) \vec{e}_r - \dot{\phi} \sin(\theta) \vec{e}_\theta$$

Or, $\vec{e}_z = \cos(\theta) \vec{e}_r - \sin(\theta) \vec{e}_\theta$

Donc $\vec{\omega} = \frac{d \vec{r}}{dt} = \frac{d(r \vec{e}_r)}{dt} = r \vec{e}_r + r \cdot \vec{\omega} \wedge \vec{e}_r$

$(\vec{e}_r \wedge \vec{e}_d = 0)$
 $\vec{e}_\theta \wedge \vec{e}_r = -\vec{e}_d)$

$$\vec{\omega} = r \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta + r \dot{\phi} \sin(\theta) \vec{e}_d$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d \vec{\omega}}{dt} = \frac{d}{dt} (r \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta + r \dot{\phi} \sin(\theta) \vec{e}_d)$$

- $r \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta + r \dot{\phi} \sin(\theta) \vec{e}_d$
- $r \dot{\theta} \vec{e}_\theta + r \ddot{\theta} \vec{e}_\theta - r \dot{\theta}^2 \vec{e}_r + r \dot{\theta} \dot{\phi} \cos(\theta) \vec{e}_d$
- $r \dot{\phi} \sin(\theta) \vec{e}_d + r \dot{\phi} \sin(\theta) \vec{e}_d + r \dot{\phi} \dot{\theta} \cos(\theta) \vec{e}_d$

$$\rightarrow -r \dot{\phi}^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \vec{e}_\theta - r \dot{\phi}^2 \sin(\theta)^2 \vec{e}_r$$

$$= \dots \rightarrow q^2 \cdot r \sin(\theta) \cdot (-\sin(\theta) \vec{e}_r - \cos(\theta) \vec{e}_\theta)$$

On trouve:

$$\begin{aligned} & \vec{e}_r \cdot (r - r \dot{\theta}^2 - r \dot{\phi}^2 \sin^2(\theta)) \\ & + \vec{e}_\theta \cdot (2r \dot{\theta} + r \ddot{\theta} - r \dot{\phi}^2 \sin(\theta) \cos(\theta)) \\ & + \vec{e}_d \cdot (r \dot{\phi} \sin(\theta) + 2r \dot{\theta} \dot{\phi} \cos(\theta) + r (\dot{\phi} \sin(\theta) + r \dot{\phi} \sin(\theta))) \\ & \quad (2r \dot{\phi} \sin(\theta) + 2r \dot{\theta} \dot{\phi} \cos(\theta) + r \dot{\phi} \sin(\theta)) \end{aligned}$$

— par rapport au système de référence mobile S' :

$$\begin{aligned}\vec{r}' &= \vec{PP} = 0 \\ \vec{v}' &= 0 \\ \vec{\gamma}' &= 0\end{aligned}$$

— par rapport au système de référence fixe S , exprimés en coordonnées sphériques et dans la base associée $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{OP} = r \vec{e}_r \\ \vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r \vec{e}_r) = \frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r \frac{d\vec{e}_r}{dt} \\ &= \dot{r} \vec{e}_r + r \vec{\omega}_{S' \div S} \wedge \vec{e}_r \\ &= \dot{r} \vec{e}_r + r (\dot{\varphi} \vec{e}_z + \dot{\theta} \vec{e}_\varphi) \wedge \vec{e}_r \\ &= \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_z \wedge \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\varphi \wedge \vec{e}_r \\ &= \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \sin \theta \vec{e}_\varphi + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta \\ \vec{\gamma} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \sin \theta \vec{e}_\varphi + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta) \\ &= \ddot{r} \vec{e}_r + r \frac{d\vec{e}_r}{dt} + \dot{r} \dot{\varphi} \sin \theta \vec{e}_\varphi + r \ddot{\varphi} \sin \theta \vec{e}_\varphi + r \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos \theta \vec{e}_\varphi \\ &\quad + r \dot{\varphi} \sin \theta \frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} + \dot{r} \dot{\theta} \vec{e}_\theta + r \ddot{\theta} \vec{e}_\theta + r \dot{\theta} \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} \\ &= \ddot{r} \vec{e}_r + \dot{r} \vec{\omega}_{S' \div S} \wedge \vec{e}_r + \dot{r} \dot{\varphi} \sin \theta \vec{e}_\varphi + r \ddot{\varphi} \sin \theta \vec{e}_\varphi + r \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos \theta \vec{e}_\varphi \\ &\quad + r \dot{\varphi} \sin \theta \vec{\omega}_{S' \div S} \wedge \vec{e}_\varphi + \dot{r} \dot{\theta} \vec{e}_\theta + r \ddot{\theta} \vec{e}_\theta + r \dot{\theta} \vec{\omega}_{S' \div S} \wedge \vec{e}_\theta \\ &= \ddot{r} \vec{e}_r + \dot{r} (\dot{\varphi} \vec{e}_z + \dot{\theta} \vec{e}_\varphi) \wedge \vec{e}_r + \dot{r} \dot{\varphi} \sin \theta \vec{e}_\varphi + r \ddot{\varphi} \sin \theta \vec{e}_\varphi + r \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos \theta \vec{e}_\varphi \\ &\quad + r \dot{\varphi} \sin \theta (\dot{\varphi} \vec{e}_z + \dot{\theta} \vec{e}_\varphi) \wedge \vec{e}_\varphi + \dot{r} \dot{\theta} \vec{e}_\theta + r \ddot{\theta} \vec{e}_\theta + r \dot{\theta} (\dot{\varphi} \vec{e}_z + \dot{\theta} \vec{e}_\varphi) \wedge \vec{e}_\theta \\ \color{orange} \rightarrow &= \ddot{r} \vec{e}_r + \dot{r} \dot{\varphi} \sin \theta \vec{e}_\varphi + \dot{r} \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{r} \dot{\varphi} \sin \theta \vec{e}_\varphi + r \ddot{\varphi} \sin \theta \vec{e}_\varphi + r \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos \theta \vec{e}_\varphi \\ &\quad + r \dot{\varphi}^2 \sin \theta (-\sin \theta \vec{e}_r - \cos \theta \vec{e}_\theta) + \dot{r} \dot{\theta} \vec{e}_\theta + r \ddot{\theta} \vec{e}_\theta + r \dot{\theta} \dot{\varphi} (\cos \theta \vec{e}_\varphi) - r \dot{\theta}^2 \vec{e}_r \\ &= (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta - r \dot{\theta}^2) \vec{e}_r + (2\dot{r} \dot{\varphi} \sin \theta + r \ddot{\varphi} \sin \theta + 2r \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos \theta) \vec{e}_\varphi \\ &\quad + (2\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta} - r \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta) \vec{e}_\theta\end{aligned}$$

en utilisant la relation (1.1) pour calculer les dérivées temporelles des vecteurs du système de référence S' dans le système de référence S .

1.2 Translation, rotation et mouvement hélicoïdal

1.2.1 Mouvement rectiligne uniforme

Montrer que si la vitesse \vec{v} d'une particule est de la forme

$$\vec{v} = \vec{v}_0$$

où \vec{v}_0 est une constante, le mouvement est une translation à vitesse constante (« MRU » : mouvement rectiligne uniforme).

→ *cas d. cartésienne*

On peut d'abord décomposer les vecteurs en leurs composantes selon x , y et z :

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \dot{x} \vec{e}_x + \dot{y} \vec{e}_y + \dot{z} \vec{e}_z \\ \vec{v}_0 &= v_{0x} \vec{e}_x + v_{0y} \vec{e}_y + v_{0z} \vec{e}_z\end{aligned}$$

Il suffit ensuite d'égaler les quantités devant chaque vecteur de base et de primitive pour retrouver l'expression de la trajectoire.

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = v_{0x} \\ \dot{y} = v_{0y} \\ \dot{z} = v_{0z} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = v_{0x}t + x_0 \\ y = v_{0y}t + y_0 \\ z = v_{0z}t + z_0 \end{array} \right.$$

avec $\vec{r}_0 = x_0 \vec{e}_x + y_0 \vec{e}_y + z_0 \vec{e}_z$ la position initiale de la particule au temps $t = 0$. On a donc :

$$\vec{r} = (v_{0x}t + x_0) \vec{e}_x + (v_{0y}t + y_0) \vec{e}_y + (v_{0z}t + z_0) \vec{e}_z = \vec{v}_0 t + \vec{r}_0$$

On voit bien que la trajectoire évolue dans la direction de \vec{v}_0 et à vitesse constante $v_0 = |\vec{v}_0|$, il s'agit donc d'un mouvement rectiligne uniforme.

1.2.2 Mouvement circulaire uniforme

Montrer que si la vitesse \vec{v} d'une particule est de la forme

$$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

où $\vec{\omega}$ est une constante et \vec{r} le vecteur position, la particule se déplace, avec une vitesse de norme constante, sur un cercle centré sur l'origine et situé dans le plan perpendiculaire au vecteur « vitesse angulaire » $\vec{\omega}$ (« MCU » : mouvement circulaire uniforme). Si on repère la position de la particule sur le cercle au moyen d'une coordonnée angulaire φ , on montre facilement que le vecteur vitesse angulaire¹ $\vec{\omega}$ peut s'écrire $\vec{\omega} = \dot{\varphi} \vec{e}$, où \vec{e} est le vecteur unitaire parallèle à $\vec{\omega}$ et orienté par la règle du tire-bouchon.

Plaçons-nous arbitrairement dans un système de coordonnées cylindriques dont le vecteur \vec{e}_z pointe dans la même direction que le vecteur $\vec{\omega}$. Nous avons :

$$\vec{v} = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + \dot{z} \vec{e}_z$$

et

$$\vec{\omega} \wedge \vec{r} = \omega \vec{e}_z \wedge (\rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z) = \rho \omega \vec{e}_\varphi$$

On en déduit de suite que, en supposant ρ différent de zéro,

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\rho} = 0 \\ \dot{\varphi} = \omega \\ \dot{z} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \rho = \rho_0 \\ \varphi = \omega t + \varphi_0 \\ z = z_0 \end{array} \right.$$

1. De manière un peu abusive (les vitesses angulaires décrivent normalement les mouvements des solides), $\vec{\omega}$ est souvent appelé la vitesse angulaire du point P se déplaçant sur le cercle (l'abus de langage n'étant permis que dans ce cas précis).

MRC

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= \omega_x \hat{e}_x + \omega_y \hat{e}_y + \omega_z \hat{e}_z \\ \Rightarrow \vec{\omega}_0 &= \omega_{x,0} \hat{e}_x + \omega_{y,0} \hat{e}_y + \omega_{z,0} \hat{e}_z \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_x = \omega_{x,0} = \frac{dx}{dt} \\ \omega_y = \omega_{y,0} = \frac{dy}{dt} \\ \omega_z = \omega_{z,0} = \frac{dz}{dt} \end{array} \right.$$

→ Intégration

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{dx}{dt} dt &= \int_0^t \omega_{x,0} dt \\ &= \int_{x(0)}^{x(t)} dx = x(t) - x_0 = \omega_{x,0} \cdot t \\ &\Leftrightarrow x(t) = \omega_{x,0} \cdot t + x_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{On a donc } \vec{r} &= (\omega_{0,x} \cdot t + x_0) \hat{e}_x + (\omega_{0,y} \cdot t + y_0) \hat{e}_y + (\omega_{0,z} \cdot t + z_0) \hat{e}_z \\ \Rightarrow \vec{r} &= \vec{\omega}_0 \cdot t + \vec{r}_0 \end{aligned}$$

Équation d'une droite

MCU

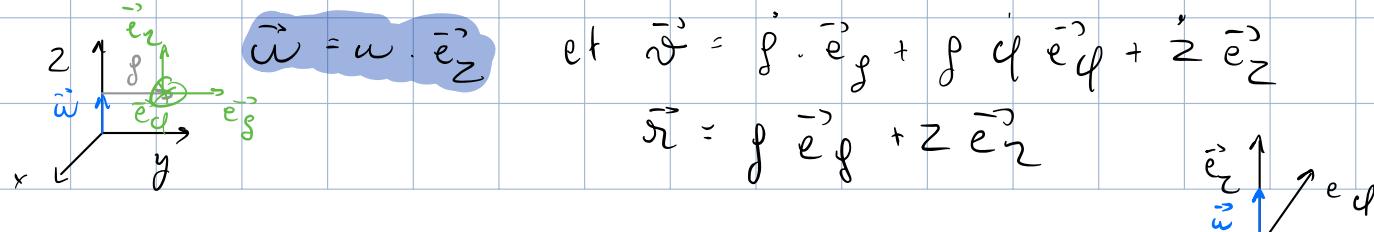
Si $\vec{\omega}_p = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$ avec $\vec{\omega}$ vect. constant

$$\text{Alors: } \|\vec{\omega}\| = \omega_0$$

→ La trajectoire est un cercle à $\vec{\omega}$

→ $\vec{v} = \dot{r} \hat{e}'$ avec $\hat{e}' \perp$ au cercle.

Prenons un SR t q cylindrique t q:



$$\text{On a } \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + (\vec{e}_g + \vec{z} \vec{e}_2)$$

$$= \omega g \vec{e}_q = \vec{\omega}$$

$$\text{on a : } (\vec{r}_0 = \vec{r}_0 \vec{e}_g + z_0 \vec{e}_2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\omega} = \vec{e}_g + \vec{e}_q + \vec{z} \vec{e}_2 \\ \vec{\omega} = \omega \vec{e}_q \end{array} \right.$$

$$\text{On a donc : } \left\{ \begin{array}{l} \dot{g} = 0 \\ \dot{g} q = \omega g \Leftrightarrow \dot{q} = \omega \\ \dot{z} = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{g} = 0 \\ \dot{q} = \omega \\ \dot{z} = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \omega \text{ est const} \\ \Rightarrow |\vec{\omega}| \text{ est const} \\ \checkmark \text{ et } \vec{\omega} = \omega \vec{e}_2 \end{array}$$

et si on intègre, on trouve :

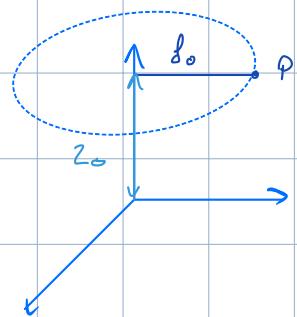
$$\int_0^t \frac{dg}{dt} dt = \int_0^t 0 dt$$

$$= \int_{g_0}^{g(t)} dt = 0 \Leftrightarrow g(t) = g_0$$

$$\int_0^t \frac{dq}{dt} dt = \int_0^t \omega dt$$

$$\Leftrightarrow \int_{q(0)}^{q(t)} dt = \omega t \Leftrightarrow q(t) - q_0 = \omega t$$

$$q(t) = \omega t + q_0$$



$$\int_0^t \frac{dz}{dt} dt = \int_0^t 0 dt$$

$$\Leftrightarrow \int_{z(0)}^{z(t)} dt = 0 \Leftrightarrow z(t) = z_0$$

$$\text{et ainsi on a : } \vec{r}(t) = \vec{r}_0 \vec{e}_h + (\omega t + q_0) \vec{e}_q + z_0 \vec{e}_2$$

$\rightarrow \vec{e}_h$ et \vec{e}_2 const.

\rightarrow La position varie le long de \vec{e}_q \rightarrow cercle dont tangente = \vec{e}_q

en supposant qu'au temps $t = 0$, la position de la particule était $\vec{r}_0 = \rho_0 \vec{e}_\rho + z_0 \vec{e}_z$. On voit que seul l'angle qui repère la particule évolue au cours du temps, et linéairement. La particule évolue donc le long d'un cercle de rayon constant ρ_0 à la vitesse constante $\rho_0 \dot{\varphi} = \rho_0 \omega$. On déduit également immédiatement que

$$\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z = \dot{\varphi} \vec{e}_z = \dot{\varphi} \vec{e}$$

Résolution alternative :

Étant donné la définition de \vec{v} , on a $\vec{v} \perp \vec{\omega}$ et $\vec{v} \perp \vec{r}$. Puisque le vecteur \vec{v} est perpendiculaire au vecteur $\vec{\omega}$, on en déduit d'abord que le mouvement est compris dans un plan perpendiculaire à $\vec{\omega}$. En utilisant la définition de la norme d'un vecteur ainsi que l'orthogonalité entre \vec{v} et \vec{r} , on peut également démontrer que la norme de \vec{r} est une constante :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\|\vec{r}\|^2) &= \frac{d}{dt}(\vec{r} \cdot \vec{r}) \\ &= 2\vec{r} \cdot \frac{d}{dt}(\vec{r}) \\ &= 2\vec{r} \cdot \vec{v} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Les normes de $\vec{\omega}$ et \vec{r} étant constantes, la norme du vecteur vitesse l'est également.

1.2.3 Mouvement hélicoïdal

Montrer que si la vitesse \vec{v} d'une particule est de la forme

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

où \vec{v}_0 et $\vec{\omega}$ sont deux vecteurs constants et parallèles et où \vec{r} est le vecteur position, alors la particule effectue un mouvement hélicoïdal autour d'un axe parallèle aux deux vecteurs \vec{v}_0 et $\vec{\omega}$ donnés. Ce mouvement hélicoïdal peut être vu comme la superposition d'un mouvement de translation à vitesse \vec{v}_0 le long de l'axe (premier exemple ci-dessus) et d'un mouvement circulaire uniforme à « vitesse angulaire » $\vec{\omega}$ autour de l'axe (deuxième exemple ci-dessus). On peut aussi montrer facilement que la norme de la vitesse de la particule ainsi que la projection de cette vitesse sur l'axe sont des constantes.

Plaçons-nous encore une fois dans un système de coordonnées cylindriques dont le vecteur \vec{e}_z pointe dans la même direction que le vecteur $\vec{\omega}$. Le vecteur \vec{v}_0 peut donc s'écrire sous la forme $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_z$. Nous avons :

$$\vec{v} = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + \dot{z} \vec{e}_z$$

et

$$v_0 \vec{e}_z + \vec{\omega} \wedge \vec{r} = v_0 \vec{e}_z + \omega \vec{e}_z \wedge (\rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z) = v_0 \vec{e}_z + \rho \omega \vec{e}_\varphi$$

On en déduit de suite que, en supposant encore ρ différent de zéro,

$$\begin{cases} \dot{\rho} = 0 \\ \dot{\varphi} = \omega \\ \dot{z} = v_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho = \rho_0 \\ \varphi = \omega t + \varphi_0 \\ z = v_0 t + z_0 \end{cases}$$

en supposant qu'au temps $t = 0$, la position de la particule était $\vec{r}_0 = \rho_0 \vec{e}_\rho + z_0 \vec{e}_z$. On voit que le mouvement est lié à présent à la variation linéaire de l'angle φ et à celle de la hauteur z . C'est donc un mouvement hélicoïdal. Calculons le module v de la vitesse :

$$\vec{v} = \rho_0 \omega \vec{e}_\varphi + v_0 \vec{e}_z \Rightarrow v = \sqrt{\rho_0 \omega + v_0}$$

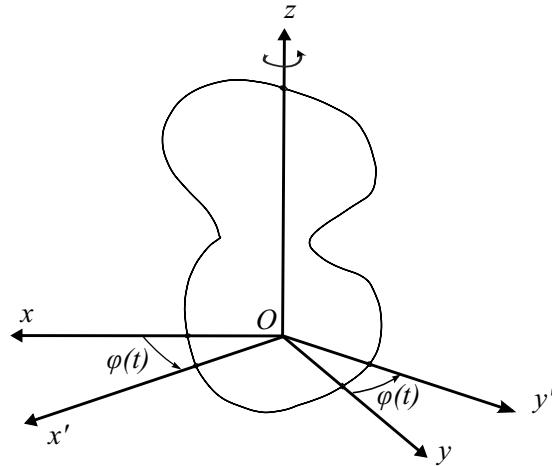
C'est une quantité constante, le mouvement est donc uniforme. La projection v_z de la vitesse sur l'axe z est également constante :

$$v_z = \vec{v} \cdot \vec{e}_z = v_0$$

1.3 Exercices résolus

1.3.1 Vecteur de Poisson d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

Soit un solide en rotation autour de l'axe fixe \vec{e}_z . On a un système de référence fixe $S(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et un système de référence attaché au solide $S'(O, \vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_{z'})$ avec $\vec{e}_z = \vec{e}_{z'}$. Soit $\varphi(t)$ l'angle orienté entre les axes x et x' . On cherche le vecteur de Poisson $\vec{\omega}$ du solide par rapport au système de référence fixe.



Par définition, on a :

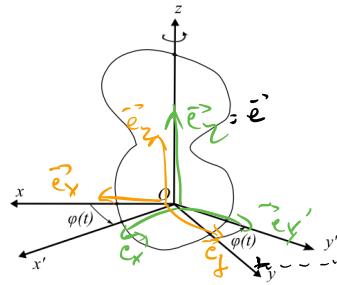
$$\vec{\omega}_{S' \div S} = \left(\left(\frac{d\vec{e}_{x'}}{dt} \right)_S \cdot \vec{e}_{y'} \right) \vec{e}_{z'} + \left(\left(\frac{d\vec{e}_{y'}}{dt} \right)_S \cdot \vec{e}_{z'} \right) \vec{e}_{x'} + \left(\left(\frac{d\vec{e}_{z'}}{dt} \right)_S \cdot \vec{e}_{x'} \right) \vec{e}_{y'}$$

L'axe $\vec{e}_{z'}$ est fixe, donc on a $\frac{d\vec{e}_{z'}}{dt} = 0$. Par la trigonométrie, on obtient les relations suivantes :

$$\begin{cases} \vec{e}_{x'} = \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y \\ \vec{e}_{y'} = -\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y \end{cases}$$

1.3.1 Vecteur de Poisson d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

Soit un solide en rotation autour de l'axe fixe \vec{e}_z . On a un système de référence fixe $S(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et un système de référence attaché au solide $S'(O, \vec{e}'_x, \vec{e}'_y, \vec{e}'_z)$ avec $\vec{e}'_z = \vec{e}_z$. Soit $\varphi(t)$ l'angle orienté entre les axes x et x' . On cherche le vecteur de Poisson $\vec{\omega}$ du solide par rapport au système de référence fixe.



Par def :

$$\vec{\omega}_{sys} = \left(\frac{d \vec{e}'_x}{dt} \right)_S \cdot \vec{e}'_y \vec{e}'_z + \left(\frac{d \vec{e}'_y}{dt} \right)_S \cdot \vec{e}'_z \vec{e}'_x + \left(\frac{d \vec{e}'_z}{dt} \right)_S \cdot \vec{e}'_x \vec{e}'_y = 0$$

$$\vec{\omega}_{sys} = (\dot{\varphi} \vec{e}'_y \cdot \vec{e}'_y) \vec{e}'_z - \dot{\varphi} (\vec{e}'_x \cdot \vec{e}'_z) \vec{e}'_x$$

$$\therefore \dot{\varphi} \vec{e}'_z = \dot{\varphi} \vec{e}$$

$$\vec{e}'_x = \cos(\varphi) \vec{e}_x + \sin(\varphi) \vec{e}_y$$

$$\vec{e}'_y = -\sin(\varphi) \vec{e}_x + \cos(\varphi) \vec{e}_y$$

$$\frac{d \vec{e}'_y}{dt} = -\dot{\varphi} \sin(\varphi) \vec{e}_x + \dot{\varphi} \cos(\varphi) \vec{e}_y = \dot{\varphi} \vec{e}_y$$

$$\frac{d \vec{e}'_y}{dt} = -\dot{\varphi} \cos(\varphi) \vec{e}_x - \dot{\varphi} \sin(\varphi) \vec{e}_y = -\dot{\varphi} \vec{e}_x$$

Si on dérive,

$$\begin{cases} \frac{d\vec{e}_{x'}}{dt} = \dot{\varphi}(-\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y) = \dot{\varphi} \vec{e}_{y'} \\ \frac{d\vec{e}_{y'}}{dt} = \dot{\varphi}(-\cos \varphi \vec{e}_x - \sin \varphi \vec{e}_y) = -\dot{\varphi} \vec{e}_{x'} \end{cases}$$

Donc :

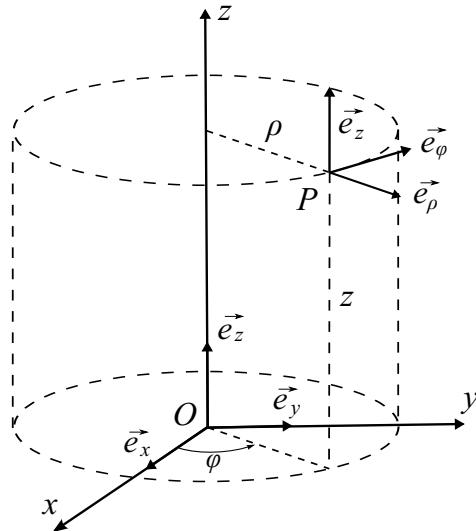
$$\vec{\omega} = (-\dot{\varphi} \vec{e}_{x'} \cdot \vec{e}_{z'}) \vec{e}_{x'} + 0 + (\dot{\varphi} \vec{e}_{y'} \cdot \vec{e}_{y'}) \vec{e}_{z'} = \dot{\varphi} \vec{e}_{z'}$$

1.3.2 Gradient d'un champ scalaire en coordonnées cylindriques

Sachant que le gradient d'un champ scalaire a en coordonnées cartésiennes s'écrit :

$$\vec{\nabla}a = \frac{\partial a}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial a}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial a}{\partial z} \vec{e}_z,$$

déterminer son expression en coordonnées cylindriques.



L'expression de gradient d'un champ scalaire a dans les coordonnées cylindriques s'obtient en effectuant un changement de variables dans l'opérateur de dérivation. Réécrivons les relations entre (x, y, z) et (ρ, φ, z) :

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \arctg \frac{y}{x} \\ z = z \end{cases}$$

On a la relation :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z}$$

Or on peut calculer :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{x}{\rho} = \cos \varphi \\
 \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = -\frac{y}{\rho^2} = -\frac{\sin \varphi}{\rho} \\
 \frac{\partial z}{\partial x} &= 0
 \end{aligned}$$

Ce qui donne finalement :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\sin \varphi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

De même :

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z}$$

On a :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{y}{\rho} = \sin \varphi \\
 \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{x}{\rho^2} = \frac{\cos \varphi}{\rho} \\
 \frac{\partial z}{\partial y} &= 0
 \end{aligned}$$

Et finalement :

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\cos \varphi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

La dérivée par rapport à z reste évidemment la même. Le gradient d'un champ scalaire a dans les coordonnées cylindriques s'écrit donc :

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} a &= \vec{e}_x \frac{\partial a}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial a}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial a}{\partial z} \\
 &= (\cos \varphi \vec{e}_\rho - \sin \varphi \vec{e}_\varphi) \left(\cos \varphi \frac{\partial a}{\partial \rho} - \frac{\sin \varphi}{\rho} \frac{\partial a}{\partial \varphi} \right) \\
 &\quad + (\sin \varphi \vec{e}_\rho + \cos \varphi \vec{e}_\varphi) \left(\sin \varphi \frac{\partial a}{\partial \rho} + \frac{\cos \varphi}{\rho} \frac{\partial a}{\partial \varphi} \right) + \vec{e}_z \frac{\partial a}{\partial z} \\
 &= \cos^2 \varphi \vec{e}_\rho \frac{\partial a}{\partial \rho} - \cos \varphi \frac{\sin \varphi}{\rho} \vec{e}_\rho \frac{\partial a}{\partial \varphi} - \cos \varphi \sin \varphi \vec{e}_\varphi \frac{\partial a}{\partial \rho} + \frac{\sin^2 \varphi}{\rho} \vec{e}_\varphi \frac{\partial a}{\partial \varphi} \\
 &\quad + \sin^2 \varphi \vec{e}_\rho \frac{\partial a}{\partial \rho} + \cos \varphi \sin \varphi \vec{e}_\varphi \frac{\partial a}{\partial \rho} + \sin \varphi \frac{\cos \varphi}{\rho} \vec{e}_\rho \frac{\partial a}{\partial \varphi} + \frac{\cos^2 \varphi}{\rho} \vec{e}_\varphi \frac{\partial a}{\partial \varphi} + \vec{e}_z \frac{\partial a}{\partial z} \\
 &= \vec{e}_\rho \frac{\partial a}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \vec{e}_\varphi \frac{\partial a}{\partial \varphi} + \vec{e}_z \frac{\partial a}{\partial z}
 \end{aligned}$$

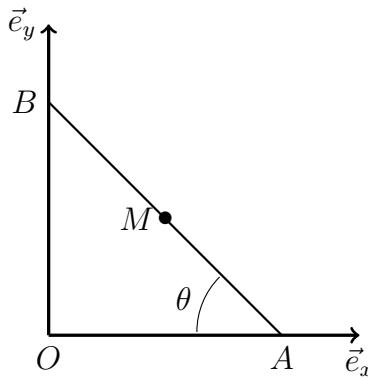
où on a exprimé à la deuxième ligne les vecteurs de base des coordonnées cartésiennes en fonction des vecteurs de base des coordonnées cylindriques.

Remarque : les expressions apparaissant dans le point 1.10.6 du syllabus (p. 53) peuvent être démontrées de la même façon.

1.3.3 L'échelle

Soit une échelle AB de longueur l . A l'instant initial, l'échelle est verticale. Le point A , en contact avec le sol, se déplace horizontalement avec une vitesse constante de module v , alors que le point B glisse le long de la verticale. Soit θ l'angle entre l'échelle et l'horizontale. On demande de déterminer :

1. la vitesse du point B en fonction de v et θ ;
2. la vitesse du point M , milieu de AB ;
3. la trajectoire du point M .



1. On a un système de référence fixe $S(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$, avec \vec{e}_x dans la direction horizontale et \vec{e}_y dans la direction verticale. Soit θ l'angle entre \vec{e}_x et l'échelle. La position du point A est donnée par :

$$x_A = l \cos \theta$$

En dérivant cette expression, on trouve la vitesse du point A :

$$\dot{x}_A = -l\dot{\theta} \sin \theta = v$$

La position du point B est donnée par :

$$y_B = l \sin \theta$$

En dérivant cette expression, on trouve la vitesse du point B :

$$\dot{y}_B = l\dot{\theta} \cos \theta = -\frac{v}{\tan \theta}$$

2. La position du point M est donnée par :

$$\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AM} = \vec{OA} - \frac{l}{2} \cos \theta \vec{e}_x + \frac{l}{2} \sin \theta \vec{e}_y$$

① le pt B est de vitesse :

$$y_B = l \cdot \sin(\theta)$$

le pt A est de vitesse :

$$x_A = l \cdot \cos(\theta)$$

Alors, on a :

$$v_B = \dot{y}_B = \dot{\theta} l \cdot \cos(\theta)$$

$$v_A = \dot{x}_A = -\dot{\theta} l \cdot \sin(\theta) = -v$$

$$\text{Alors } \rightarrow \dot{y}_B = \dot{\theta} l \cdot \cos(\theta) \cdot \frac{\sin(\theta)}{\sin(\theta)} = -\frac{v}{\tan(\theta)}$$

②

$$\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AM} = \vec{OA} - \frac{l}{2} \cos(\theta) \hat{e}_x + \frac{l}{2} \sin(\theta) \hat{e}_y$$

$$\begin{aligned} \text{Donc, } \vec{OM} &= v + \frac{l}{2} \dot{\theta} \sin(\theta) \hat{e}_x + \frac{l}{2} \dot{\theta} \cos(\theta) \hat{e}_y \\ &= v \hat{e}_x - \frac{v}{2} \hat{e}_x + \frac{v_B}{2} \hat{e}_y \\ &= \frac{v}{2} \hat{e}_x + \frac{v_B}{2} \hat{e}_y \end{aligned}$$

③

$$\text{On a : } x_M = x_A - \frac{l}{2} \cos(\theta) = l \cos(\theta) - \frac{l}{2} \cos(\theta) = \frac{l}{2} \cos(\theta)$$

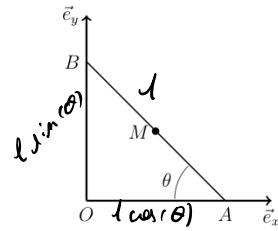
$$y_M = y_B - \frac{l}{2} \sin(\theta) = \frac{l}{2} \sin(\theta)$$

$$\begin{aligned} x_M^2 + y_M^2 &= \frac{l^2}{4} (\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) \\ &= \frac{l^2}{4} \rightarrow \text{ cercle de rayon } \frac{l}{2} \text{ autour de } (0,0) \rightarrow O. \end{aligned}$$

1.3.3 L'échelle

Soit une échelle AB de longueur l. A l'instant initial, l'échelle est verticale. Le point A, en contact avec le sol, se déplace horizontalement avec une vitesse constante de module v, alors que le point B glisse le long de la verticale. Soit θ l'angle entre l'échelle et l'horizontale. On demande de déterminer :

1. la vitesse du point B en fonction de v et θ ;
2. la vitesse du point M, milieu de AB ;
3. la trajectoire du point M.



En dérivant cette expression, on trouve la vitesse du point M :

$$\begin{aligned}\vec{v}_M &= \vec{v}_A + \frac{l}{2}\dot{\theta}\sin\theta\vec{e}_x + \frac{l}{2}\dot{\theta}\cos\theta\vec{e}_y \\ &= v\vec{e}_x - \frac{v}{2}\vec{e}_x + \frac{\dot{y}_B}{2}\vec{e}_y \\ &= \frac{v}{2}\vec{e}_x + \frac{\dot{y}_B}{2}\vec{e}_y\end{aligned}$$

3. Les coordonnées du point M sont :

$$\begin{aligned}x_M &= x_A - \frac{l}{2}\cos\theta = l\cos\theta - \frac{l}{2}\cos\theta = \frac{l}{2}\cos\theta \\ y_M &= y_B - \frac{l}{2}\sin\theta = l\sin\theta - \frac{l}{2}\sin\theta = \frac{l}{2}\sin\theta\end{aligned}$$

On en déduit directement la relation suivante :

$$x_M^2 + y_M^2 = \frac{l^2}{4}$$

La trajectoire du point M est un cercle de centre O et de rayon $\frac{l}{2}$.

1.3.4 Equation différentielle d'une hélice

Le mouvement d'un point de vecteur position \vec{r} est régi par l'équation

$$\beta^{-1}\vec{e}_z \wedge \ddot{\vec{r}} + \dot{\vec{r}} = \alpha^2\vec{e}_z$$

où \vec{e}_z est un vecteur unitaire constant, α et β sont des scalaires constants. Les conditions initiales exprimées en coordonnées cylindriques sont :

$$z(0) = z_0, \varphi(0) = \varphi_0, \rho(0) = r_0$$

$$\dot{z}(0) = \alpha^2, \dot{\varphi}(0) = \frac{\beta}{2}, \dot{\rho}(0) = 0$$

1. Résoudre l'équation différentielle en coordonnées cylindriques.
2. Etablir les équations de la trajectoire.
3. Déterminer la nature du mouvement.
1. On donne l'équation différentielle du mouvement

$$\beta^{-1}\vec{e}_z \wedge \ddot{\vec{r}} + \dot{\vec{r}} = \alpha^2\vec{e}_z \quad (1.2)$$

En coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z \\ \dot{\vec{r}} &= \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{e}_z \\ \ddot{\vec{r}} &= (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi})\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\vec{e}_z\end{aligned}$$

1.3.4 Équation différentielle d'une hélice

Le mouvement d'un point de vecteur position \vec{r} est régi par l'équation

$$\beta^{-1} \vec{e}_z \wedge \ddot{\vec{r}} + \dot{\vec{r}} = \alpha^2 \vec{e}_z$$

où \vec{e}_z est un vecteur unitaire constant, α et β sont des scalaires constants. Les conditions initiales exprimées en coordonnées cylindriques sont :

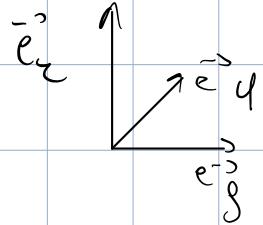
$$z(0) = z_0, \varphi(0) = \varphi_0, \rho(0) = r_0$$

$$\dot{z}(0) = \alpha^2, \dot{\varphi}(0) = \frac{\beta}{2}, \dot{\rho}(0) = 0$$

On a

$$\vec{r} = \rho \vec{e}_\rho + \varphi \vec{e}_\varphi + z \vec{e}_z$$

$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{\rho} - \dot{\varphi}^2) \vec{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \ddot{\varphi}) \vec{e}_\varphi + \ddot{z} \vec{e}_z$$



On a donc

$$\beta^{-1} \vec{e}_z \wedge \ddot{\vec{r}} + \dot{\vec{r}} = \alpha^2 \vec{e}_z$$

① ②

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & \beta^{-1} \left(\vec{e}_z \wedge (\dot{\rho} - \dot{\varphi}^2) \vec{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \ddot{\varphi}) \vec{e}_\varphi \right) \\ &= \beta^{-1} \left((\dot{\rho} - \dot{\varphi}^2) \vec{e}_\rho - (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \ddot{\varphi}) \vec{e}_\varphi \right) \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \quad + \dot{\vec{r}} = + \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + \ddot{z} \vec{e}_z$$

On a donc :

$$\begin{cases} \textcircled{1} \quad 0 = -\beta^{-1} (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \ddot{\varphi}) + \dot{\rho} \\ \textcircled{2} \quad 0 = \beta^{-1} (\dot{\rho} - \dot{\varphi}^2) + \dot{\varphi} \\ \textcircled{3} \quad \alpha^2 = \ddot{z} \end{cases}$$

$$\textcircled{3} \rightarrow \alpha^2 = \ddot{z} \Leftrightarrow z(t) = z_0 + \alpha^2 t$$

$$\textcircled{1} \rightarrow -\frac{\beta^{-1}}{g} \cdot \frac{d}{dt}(g^2 \dot{q}) + \dot{g} = 0$$

regarder
juste g ou q

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}(g^2 \dot{q}) = \beta \dot{g} \cdot g = \frac{\beta d(g^2)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(g^2 \dot{q} - \frac{\beta}{2} g^2\right) = 0$$

$$\Rightarrow g^2 \cdot \left(\dot{q} - \frac{\beta}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \dot{q} = \frac{\beta}{2}$$

$$\Leftrightarrow q(t) = \frac{\beta}{2} \cdot t + q(0)$$

$$\textcircled{2} \rightarrow \beta^{-1} \left(\ddot{g} - g \cdot \frac{\beta^2}{4} \right) + g \cdot \frac{\beta}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ddot{g}}{\beta} + g \cdot \frac{\beta}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \ddot{g} + g \cdot \frac{\beta^2}{4} = 0$$

$$\Rightarrow g + \frac{\beta^2}{4} = 0$$

$$g = -\frac{\beta^2}{4} \Leftrightarrow i \cdot \frac{\beta}{2}$$

Sol de l'équation homogène : $A e^{i \frac{\beta}{2} t} + B e^{-i \frac{\beta}{2} t}$ ($A, B \in \mathbb{C}$)

$$\Leftrightarrow A \cos\left(\frac{\beta}{2} t\right) + B \cdot \sin\left(\frac{\beta}{2} t\right)$$

$$\cdot e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$$

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Dès lors,

$$\beta^{-1} \vec{e}_z \wedge \ddot{\vec{r}} = \beta^{-1} [(\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) \vec{e}_\varphi - (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho \ddot{\varphi}) \vec{e}_\rho]$$

En substituant les résultats ci-dessus dans l'équation (1.2) et en projetant sur les axes, il vient :

$$(\cdot \vec{e}_\rho) : -\beta^{-1} (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho \ddot{\varphi}) + \dot{\rho} = 0 \quad (1.3)$$

$$(\cdot \vec{e}_\varphi) : \beta^{-1} (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) + \rho \dot{\varphi} = 0 \quad (1.4)$$

$$(\cdot \vec{e}_z) : \dot{z} = \alpha^2 \quad (1.5)$$

L'équation (1.5) implique que $\dot{z} = \alpha^2 = cte$ et donc

$$z(t) = \alpha^2 t + z_0 \quad (1.6)$$

Quand $\rho \neq 0$, l'équation (1.3) peut s'écrire :

$$-\frac{\beta^{-1}}{\rho} \frac{d}{dt} (\rho^2 \dot{\varphi}) + \dot{\rho} = 0$$

Soit

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\rho^2 \dot{\varphi}) &= \frac{\beta}{2} \frac{d}{dt} \rho^2 \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} (\rho^2 \dot{\varphi} - \frac{\beta}{2} \rho^2) &= 0 \end{aligned}$$

Ce qui implique $\rho^2 \left(\dot{\varphi} - \frac{\beta}{2} \right) = C$ avec C une constante. Avec les conditions initiales, on obtient $C = 0$ et donc $\dot{\varphi} = \frac{\beta}{2}$, soit (quand $\rho \neq 0$) :

$$\varphi(t) = \frac{\beta}{2} t + \varphi_0 \quad (1.7)$$

Finalement, en remplaçant $\dot{\varphi}$ par sa valeur dans l'équation (1.4) ci-dessus, on obtient :

$$\begin{aligned} \beta^{-1} \left(\ddot{\rho} - \rho \frac{\beta^2}{4} \right) + \rho \frac{\beta}{2} &= 0 \\ \Rightarrow \ddot{\rho} + \frac{\beta^2}{4} \rho &= 0 \end{aligned}$$

La solution générale de cette équation s'écrit :

$$\rho(t) = A \cos \frac{\beta t}{2} + B \sin \frac{\beta t}{2}$$

Avec les conditions initiales ($\rho = r_0$ et $\dot{\rho} = 0$ en $t = 0$), on obtient que $A = r_0$ et $B = 0$, de sorte que :

$$\rho(t) = r_0 \cos \frac{\beta t}{2} \quad (1.8)$$

On notera que ce résultat n'est valable que si $\rho \neq 0$, c'est-à-dire pour $\beta t / 2 < \pi/2$.

2. Eliminons le temps entre les équations (1.7) et (1.8) ci-dessus : (1.7) donne $\frac{\beta t}{2} = \varphi - \varphi_0$, de sorte que (1.8) s'écrit $\rho = r_0 \cos(\varphi - \varphi_0)$. En coordonnées cartésiennes, on peut écrire

$$x = \rho \cos \varphi = r_0 \cos(\varphi - \varphi_0) \cos \varphi \quad (1.9)$$

$$y = \rho \sin \varphi = r_0 \cos(\varphi - \varphi_0) \sin \varphi \quad (1.10)$$

$$z = \frac{2\alpha^2}{\beta} (\varphi - \varphi_0) + z_0 \quad (1.11)$$

3. L'équation (1.9) peut s'écrire :

$$\begin{aligned} x &= r_0 (\cos \varphi \cos \varphi_0 + \sin \varphi \sin \varphi_0) \cos \varphi \\ &= r_0 (\cos^2 \varphi \cos \varphi_0 + \sin \varphi \cos \varphi \sin \varphi_0) \\ &= \frac{r_0}{2} [\cos \varphi_0 (1 + \cos 2\varphi) + \sin \varphi_0 \sin 2\varphi] \\ &= \frac{r_0}{2} [\cos \varphi_0 + \cos(2\varphi - \varphi_0)] \end{aligned}$$

De même, l'équation (1.10) s'écrit :

$$\begin{aligned} y &= r_0 (\cos \varphi \cos \varphi_0 + \sin \varphi \sin \varphi_0) \sin \varphi \\ &= r_0 (\cos \varphi \sin \varphi \cos \varphi_0 + \sin^2 \varphi \sin \varphi_0) \\ &= \frac{r_0}{2} [\cos \varphi_0 \sin 2\varphi + \sin \varphi_0 (1 - \cos 2\varphi)] \\ &= \frac{r_0}{2} [\sin \varphi_0 + \sin(2\varphi - \varphi_0)] \end{aligned}$$

Dès lors,

$$\left(x - \frac{r_0}{2} \cos \varphi_0 \right)^2 + \left(y - \frac{r_0}{2} \sin \varphi_0 \right)^2 = \frac{r_0^2}{4}$$

soit l'équation d'un cercle de rayon $\frac{r_0}{2}$ et de centre $\left(\frac{r_0}{2} \cos \varphi_0, \frac{r_0}{2} \sin \varphi_0, 0 \right)$.

La trajectoire est la combinaison d'un mouvement de rotation autour d'un axe parallèle à \vec{e}_z et d'une translation parallèlement à cette direction, par conséquent la trajectoire est une hélice. On rappellera également que ce résultat n'est en fait strictement valable que si $\rho \neq 0$, c'est-à-dire pour $\beta t/2 < \pi/2$, ce qui correspond à une partie de l'hélice décrite ci-avant.

1.3.5 Mouvement plan

Le mouvement d'un point matériel P de vecteur position \vec{r} est régi par l'équation

$$\vec{e} \wedge \ddot{\vec{r}} + 2\omega \dot{\vec{r}} = 0$$

où \vec{e} est un vecteur unitaire constant, ω est un scalaire constant. En $t = 0$, $\vec{r} = \vec{a}$ avec $\vec{a} \cdot \vec{e} = 0$.

1. Montrer que le point P se déplace dans un plan.
2. Exprimer l'équation du mouvement en utilisant les coordonnées polaires (r, φ) dans le plan du mouvement de P.

1.3.5. Mouvement d'un pt prégi par:

$$\vec{e} \wedge \ddot{\vec{r}} + 2\omega \dot{\vec{r}} = 0$$

$\vec{e} = \text{const}$
 $\omega = \text{scalaire const}$

C.I] $t=0$, $\vec{r} = \vec{a}$ avec $\vec{a} \cdot \vec{e} = 0$

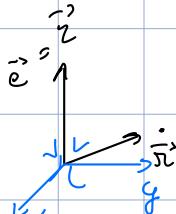
① Montrer que P se déplace dans un plan

② Exprimer l'équation de mouvement en coord. polaire.

③ $Mg r^2 (\dot{\varphi} - \omega) = cst.$

① $\vec{e} \cdot (\vec{e} \wedge \ddot{\vec{r}} + 2\omega \dot{\vec{r}}) = \vec{0} \cdot \vec{e}$

$$\Leftrightarrow 2\omega \dot{\vec{r}} \cdot \vec{e} = 0$$



$$\Rightarrow \dot{\vec{r}} \cdot \vec{e} = 0 \quad \forall t$$

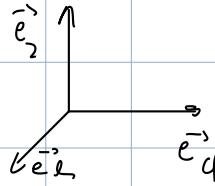
$$\Rightarrow \dot{\vec{r}} \cdot \vec{e} = C$$

et en $t=0 \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{e} = 0 = C$, ainsi $C = 0 \Rightarrow \dot{\vec{r}} \cdot \vec{e} = 0$

② On a $\ddot{\vec{r}} = r \ddot{\vec{e}}_r + z \ddot{\vec{e}}_z$

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + z \vec{e}_z$$

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}} &= \omega \vec{e}_z \\ &= \dot{\varphi} \vec{e}_r \end{aligned}$$



$$\ddot{\vec{r}} = (r - r\dot{\varphi}^2) \vec{e}_r + (2r\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) \vec{e}_\varphi + \ddot{z} \vec{e}_z$$

$$\vec{r} = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + \dot{z} \vec{e}_z$$

$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) \vec{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho \ddot{\varphi}) \vec{e}_\varphi + \ddot{z} \vec{e}_z$$

On a $\vec{e} \parallel \vec{e}_z$

On a: $\vec{e} \wedge \ddot{\vec{r}} + 2\omega \dot{\vec{r}} = 0$

Si on injecte la valeur de $\ddot{\vec{r}}$ et $\dot{\vec{r}}$:

$$(r - r\dot{\varphi}^2) \vec{e}_\varphi - (2r\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) \vec{e}_\rho + 2\omega (r \vec{e}_r + r\dot{\varphi} \vec{e}_\varphi) = 0$$

$$\vec{e}_\rho \left[-2r\dot{\varphi} - r\ddot{\varphi} + 2\omega r \right] = 0 \quad \text{①} \quad \text{Après projection}$$

$$\vec{e}_\varphi \left[r - r\dot{\varphi}^2 + 2\omega r \dot{\varphi} \right] = 0 \quad \text{②}$$

① $-2r\dot{\varphi} - r\ddot{\varphi} + 2\omega r = 0$

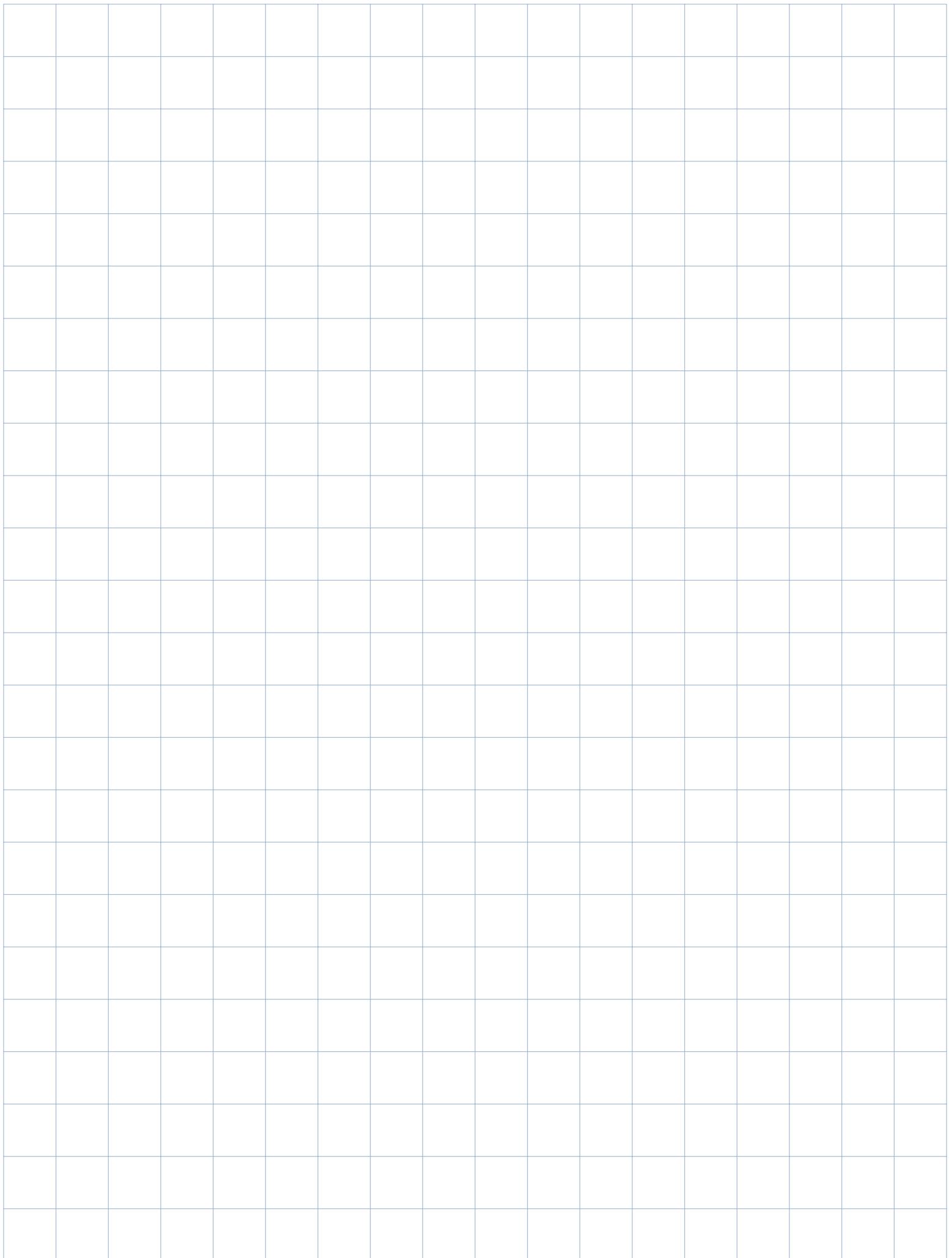
$$\Leftrightarrow 2r\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 2\omega r$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \cdot \dot{\varphi}) = \frac{d}{dt} (\omega r^2) \cdot \frac{1}{r} \Leftrightarrow \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\varphi}) = \frac{d}{dt} (\omega r^2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\varphi} - \omega r^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} [r^2 \cdot (\dot{\varphi} - \omega)] = 0$$

Donc $r^2 \cdot (\dot{\varphi} - \omega)$ vaut une constante



3. Montrer que la quantité $r^2(\dot{\varphi} - \omega)$ est constante.
1. Multiplions l'équation du mouvement scalairement par \vec{e} :

$$\underbrace{(\vec{e} \wedge \ddot{\vec{r}}) \cdot \vec{e}}_0 + 2\omega \dot{\vec{r}} \cdot \vec{e} = 0$$

$$\Rightarrow \omega \dot{\vec{r}} \cdot \vec{e} = 0$$

On trouve donc $\dot{\vec{r}} \cdot \vec{e} = 0$ et donc $\vec{r} \cdot \vec{e} = C$ avec C une constante. En $t = 0$, $\vec{r} = \vec{a}$ et donc $C = \vec{a} \cdot \vec{e} = 0$. Dès lors :

$$\vec{r} \cdot \vec{e} = 0, \forall t$$

Le vecteur position \vec{r} est donc en permanence perpendiculaire au vecteur \vec{e} , par conséquent le mouvement est plan.

2. Utilisons les coordonnées polaires dans le plan du mouvement (*i.e.* le plan perpendiculaire à \vec{e} et passant par l'origine O) $\Rightarrow \vec{e} = \vec{e}_z$:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= r \vec{e}_r \\ \dot{\vec{r}} &= \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi \\ \ddot{\vec{r}} &= (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) \vec{e}_r + (2\dot{r} \dot{\varphi} + r \ddot{\varphi}) \vec{e}_\varphi\end{aligned}$$

Substituons ces résultats dans l'équation du mouvement :

$$(\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) \vec{e}_\varphi - (2\dot{r} \dot{\varphi} + r \ddot{\varphi}) \vec{e}_r + 2\omega (\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi) = 0$$

Soit en projetant sur les axes \vec{e}_r et \vec{e}_φ :

$$-2\dot{r} \dot{\varphi} - r \ddot{\varphi} + 2\omega \dot{r} = 0 \quad (1.12)$$

$$\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2 + 2\omega r \dot{\varphi} = 0 \quad (1.13)$$

3. Considérons l'équation (1.12) ci-dessus :

$$-2\dot{r} \dot{\varphi} - r \ddot{\varphi} + 2\omega \dot{r} = 0$$

Cette équation peut s'écrire :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\varphi}) = 2\omega \dot{r}$$

En multipliant de part et d'autre par r , il vient :

$$\frac{d}{dt} (r^2 \dot{\varphi}) = \frac{d}{dt} (\omega r^2)$$

Soit

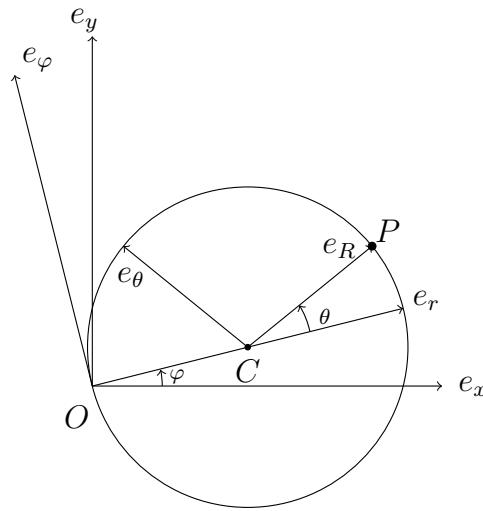
$$\frac{d}{dt} [r^2 (\dot{\varphi} - \omega)] = 0$$

Et donc $r^2 (\dot{\varphi} - \omega)$ est constant.

1.3.6 Cercle en rotation

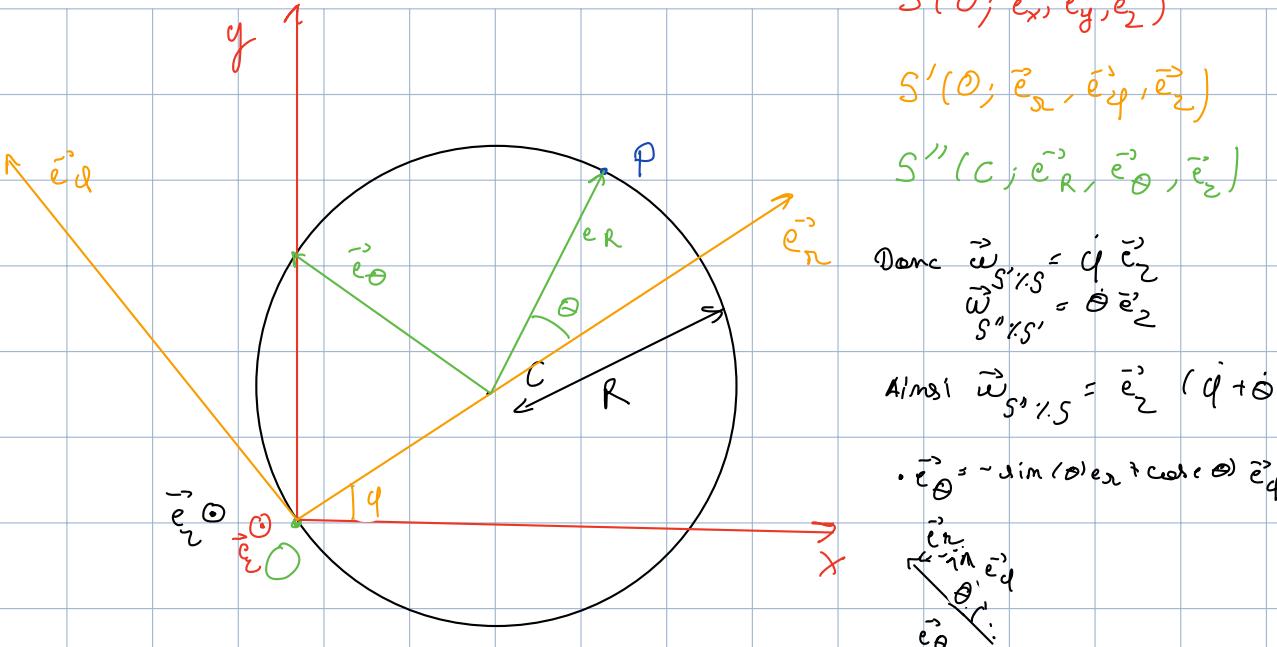
Un cercle de centre C et de rayon R tourne autour d'un de ses points O dans le plan horizontal avec une vitesse angulaire constante Ω . Un point matériel P est en mouvement sur le cercle et sa position est repérée par l'angle θ entre la diamètre du cercle passant par O et le vecteur \vec{CP} . On demande de calculer :

1. la vitesse et l'accélération absolues de P ;
2. la vitesse et l'accélération relatives de P par rapport au cercle ;
3. la vitesse et l'accélération d'entraînement de P ainsi que son accélération de Coriolis.



On a un système de référence fixe $S(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, un système de référence en mouvement avec le cercle $S'(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ et un système de référence en mouvement avec le point P $S''(C, \vec{e}_R, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$. Soit $\theta(t)$ l'angle orienté entre \vec{e}_r et \vec{e}_R . Les vecteurs de Poisson sont : $\vec{\omega}_{S' \div S} = \Omega \vec{e}_z = \dot{\varphi} \vec{e}_z$, $\vec{\omega}_{S'' \div S'} = \dot{\theta} \vec{e}_z$ et donc $\vec{\omega}_{S'' \div S} = \vec{\omega}_{S'' \div S'} + \vec{\omega}_{S' \div S} = (\Omega + \dot{\theta}) \vec{e}_z$.

1. Calcul de la vitesse et de l'accélération absolues de P , c'est-à-dire par rapport au système de référence fixe S .



$$S(0; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$$

$$S'(0; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$$

$$S''(C; \vec{e}_R, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$$

Donc $\vec{\omega}_{S''/S} = \dot{\varphi} \vec{e}_z$
 $\vec{\omega}_{S''/S'} = \dot{\theta} \vec{e}_z$

Ainsi $\vec{\omega}_{S'/S} = \vec{e}_z (\dot{\varphi} + \dot{\theta})$

$\vec{e}_\theta = -\sin(\theta) \vec{e}_x + \cos(\theta) \vec{e}_y$

\vec{e}_θ
 $\vec{e}_\theta = \vec{e}_y \sin(\theta) + \vec{e}_x \cos(\theta)$

Composition des vitesses:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_P' + \vec{v}_{O'C} + \vec{\omega}_{S'/S} \times \vec{r}_P'$$

vitesse d'entraînement

Composition des accélérations:

$$\vec{a}_P = \vec{a}_P' + \vec{a}_{O'C} + \vec{a}_{\omega_{S'/S}} + \vec{a}_c$$

① Calculez \vec{v} et \vec{a} dans S
 $\hookrightarrow f(R; \theta, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}) - \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$

② Calculez \vec{v} et \vec{a} dans S'

③ Calculez \vec{v}_c , \vec{a}_e et \vec{a}_c de S''/S

④ $\vec{r} = \vec{OP} = \vec{OC} + \vec{CP} = R \vec{e}_z + R \vec{e}_R$

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt} (R \vec{e}_z + R \vec{e}_R) \\ &= R \vec{e}_z + R \cdot \vec{\omega}_{S'/S} \times \vec{e}_z + R \vec{e}_R + R \cdot \vec{\omega}_{S''/S} \times \vec{e}_R \\ &= R \dot{\varphi} \cdot \vec{e}_\theta + R \cdot (\dot{\varphi} + \dot{\theta}) \cdot \vec{e}_z \end{aligned}$$

Or, $\vec{e}_\theta = -\sin(\theta) \vec{e}_x + \cos(\theta) \vec{e}_y$

Ainsi on a $\vec{v} = R \dot{\varphi} \cdot \vec{e}_\theta - R (\dot{\varphi} + \dot{\theta}) \sin(\theta) \vec{e}_x + R (\dot{\varphi} + \dot{\theta}) \cos(\theta) \vec{e}_y$

$$= \vec{e}_x (-R \sin(\theta) \cdot (\dot{\varphi} + \dot{\theta})) + \vec{e}_y \cdot (R \cdot (\dot{\varphi} + \dot{\theta} \cos(\theta)) + \dot{\theta})$$

⑤ $\vec{r} = \vec{OP} = R \vec{e}_z + R \vec{e}_R$

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{n}}{dt} = \frac{dR\vec{e}_n}{dt} + \frac{d}{dt} R\vec{e}_R$$

$$= R \underbrace{\omega_{S' \times S} \wedge \vec{e}_n}_{\text{constante}} + R \underbrace{\dot{\omega}_{S' \times S} \wedge \vec{e}_R}_{\text{constante}}$$

$$= R \vec{\theta} \wedge \vec{e}_z \wedge \vec{e}_R = R \vec{\theta} \wedge \vec{e}_\phi = R \vec{\theta} \sin(\phi) \vec{e}_n + R \vec{\theta} \cos(\phi) \vec{e}_\phi$$

et $\vec{a} = R \ddot{\theta} \vec{e}_\phi + R \vec{\theta} \omega_{S' \times S} \wedge \vec{e}_\phi$

$$= R \ddot{\theta} \vec{e}_\phi + R \dot{\theta}^2 \vec{e}_z \wedge \vec{e}_\phi = R \ddot{\theta} \vec{e}_\phi - R \dot{\theta}^2 \vec{e}_n$$

③ $\vec{\omega}_p = \vec{\omega}_p' + \vec{\theta}_{S' \times 0} + \vec{\omega}_{S' \times S} \wedge \vec{n}_{p'}$ On a $\omega = \omega' + \omega_e \Leftrightarrow \omega_e = \omega - \omega'$

On a $\vec{\omega}_e = \vec{\omega}_{S' \times 0} + \vec{\omega}_{S' \times S} \wedge \vec{0}_{p'}$

$$= 0 + i \vec{e}_z \wedge \vec{0}_{p'} = i \vec{e}_z \wedge (R \vec{e}_n + R \vec{e}_R)$$

$$= i (R \vec{e}_n + R \vec{e}_R) = i R (\vec{e}_n + \vec{e}_R)$$

$$\vec{a}_e = \vec{\omega}_{S' \times S} \wedge (\vec{\omega}_{S' \times S} \wedge \vec{n}_{p'}) + \frac{d\vec{\omega}_{S' \times S}}{dt} \wedge \vec{n}_{p'} = 0 \text{ car } \frac{d\vec{\omega}_{S' \times S}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}_{S' \times S}}{dt}$$

$$= i \vec{e}_z \wedge (i R (\vec{e}_n + \vec{e}_R)) + i \vec{e}_z \wedge R (\vec{e}_n + \vec{e}_R)$$

$$= i \vec{e}_z \wedge (i R (\vec{e}_n + \vec{e}_R)) + i R \vec{e}_\phi + i R \vec{e}_\phi$$

$$= -i R (\vec{e}_n + \vec{e}_R) + i R \vec{e}_\phi + i R \vec{e}_\phi$$

et $\vec{\omega}$ est constante car i est une vitesse angulaire constante

$$\vec{a}_c = 2 \vec{\omega}_{S' \times S} \wedge \vec{\omega}'$$

$$= 2 i \vec{e}_z \wedge (R \vec{\theta} \vec{e}_\phi)$$

$$= -2 R \vec{\theta} \vec{\phi} \wedge \vec{e}_R$$

$$\begin{aligned}
\vec{r} &= \vec{OP} = \vec{OC} + \vec{CP} = R\vec{e}_r + R\vec{e}_R \\
\vec{v} &= \frac{d}{dt}(\vec{OC} + \vec{CP}) = R\frac{d}{dt}\vec{e}_r + R\frac{d}{dt}\vec{e}_R \\
&= R\vec{\omega}_{S' \div S} \wedge \vec{e}_r + R\vec{\omega}_{S'' \div S} \wedge \vec{e}_R = R\Omega \vec{e}_z \wedge \vec{e}_r + R(\Omega + \dot{\theta}) \vec{e}_z \wedge \vec{e}_R \\
&= R\Omega \vec{e}_\varphi + R(\Omega + \dot{\theta}) \vec{e}_\theta = R\Omega \vec{e}_\varphi - R\sin\theta(\Omega + \dot{\theta}) \vec{e}_r + R\cos\theta(\Omega + \dot{\theta}) \vec{e}_\varphi \\
&= R(\Omega + \cos\theta(\Omega + \dot{\theta})) \vec{e}_\varphi - R\sin\theta(\Omega + \dot{\theta}) \vec{e}_r \\
\vec{\gamma} &= -R\sin\theta\dot{\theta}(\Omega + \dot{\theta}) \vec{e}_\varphi + R\cos\theta\ddot{\theta} \vec{e}_\varphi + R(\Omega + \cos\theta(\Omega + \dot{\theta})) \vec{\omega}_{S' \div S} \wedge \vec{e}_\varphi \\
&\quad - R\cos\theta\dot{\theta}(\Omega + \dot{\theta}) \vec{e}_r - R\sin\theta\ddot{\theta} \vec{e}_r - R\sin\theta(\Omega + \dot{\theta}) \vec{\omega}_{S' \div S} \wedge \vec{e}_r \\
&= -R\sin\theta\dot{\theta}(\Omega + \dot{\theta}) \vec{e}_\varphi + R\cos\theta\ddot{\theta} \vec{e}_\varphi + R(\Omega + \cos\theta(\Omega + \dot{\theta})) \Omega \vec{e}_z \wedge \vec{e}_\varphi \\
&\quad - R\cos\theta\dot{\theta}(\Omega + \dot{\theta}) \vec{e}_r - R\sin\theta\ddot{\theta} \vec{e}_r - R\sin\theta(\Omega + \dot{\theta}) \Omega \vec{e}_z \wedge \vec{e}_r \\
&= -R\sin\theta\dot{\theta}(\Omega + \dot{\theta}) \vec{e}_\varphi + R\cos\theta\ddot{\theta} \vec{e}_\varphi - R(\Omega + \cos\theta(\Omega + \dot{\theta})) \Omega \vec{e}_r \\
&\quad - R\cos\theta\dot{\theta}(\Omega + \dot{\theta}) \vec{e}_r - R\sin\theta\ddot{\theta} \vec{e}_r - R\sin\theta(\Omega + \dot{\theta}) \Omega \vec{e}_\varphi \\
&= (-R\sin\theta(\Omega + \dot{\theta})^2 + R\cos\theta\ddot{\theta}) \vec{e}_\varphi + (-R\Omega^2 - R\cos\theta(\Omega + \dot{\theta})^2 - R\sin\theta\ddot{\theta}) \vec{e}_r
\end{aligned}$$

avec R, Ω constants et $\vec{e}_\theta = -\sin\theta \vec{e}_r + \cos\theta \vec{e}_\varphi$.

2. Calcul de la vitesse et de l'accélération relatives de P par rapport au cercle, c'est-à-dire par rapport au système de référence S' .

$$\begin{aligned}
\vec{r}' &= \vec{OP} = R\vec{e}_r + R\vec{e}_R \\
\vec{v}' &= R\frac{d}{dt}\vec{e}_r + R\frac{d}{dt}\vec{e}_R \\
&= R\vec{\omega}_{S' \div S'} \wedge \vec{e}_r + R\vec{\omega}_{S'' \div S'} \wedge \vec{e}_R \\
&= R\dot{\theta} \vec{e}_z \wedge \vec{e}_R = R\dot{\theta} \vec{e}_\theta \\
\vec{\gamma}' &= R\ddot{\theta} \vec{e}_\theta + R\dot{\theta} \vec{\omega}_{S'' \div S'} \wedge \vec{e}_\theta \\
&= R\ddot{\theta} \vec{e}_\theta + R\dot{\theta}^2 \vec{e}_z \wedge \vec{e}_\theta \\
&= R\ddot{\theta} \vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2 \vec{e}_R
\end{aligned}$$

avec R constant.

3. Calcul de la vitesse et de l'accélération d'entraînement de P ainsi que son accélération de Coriolis.

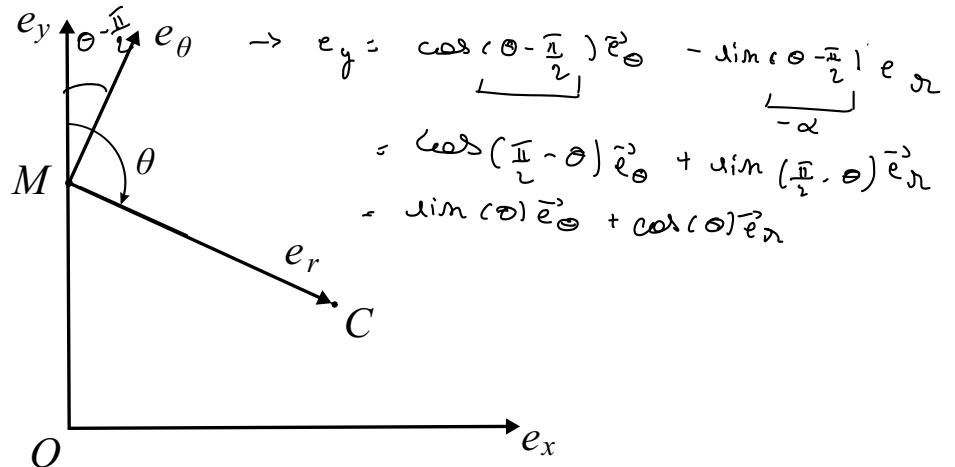
$$\begin{aligned}
\vec{v}_e &= R\Omega(\vec{e}_\varphi + \vec{e}_\theta) \\
\vec{\gamma}_e &= -R\sin\theta\Omega^2 \vec{e}_\varphi + (-R\Omega^2 - R\cos\theta\Omega) \vec{e}_r \\
&= -R\Omega^2 \vec{e}_r - R\Omega^2(\sin\theta \vec{e}_\varphi + \cos\theta \vec{e}_r) \\
&= -R\Omega^2 \vec{e}_r - R\Omega^2 \vec{e}_R \\
\vec{\gamma}_C &= 2\vec{\omega}_{S' \div S} \wedge \vec{v}' = 2\Omega \vec{e}_z \wedge R\dot{\theta} \vec{e}_\theta \\
&= -2R\dot{\theta}\Omega \vec{e}_R
\end{aligned}$$

avec $\vec{\gamma} = \vec{\gamma}' + \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_C$, loi de composition des accélérations.

1.3.7 Le maître et le chien

Un maître se déplace en MRU avec une vitesse \vec{v} . Son chien situé à une distance r tente de le rattraper. Il se déplace avec une vitesse $k\vec{v}$ de module constant et dirigée en permanence vers son maître. Initialement, l'angle θ entre la direction de déplacement du maître et celle de son chien vaut 90 degrés et ils sont séparés d'une distance R . On demande de déterminer :

1. l'équation de la trajectoire ;
2. la condition sur k pour que le chien rattrape son maître ;



1. Calcul de l'équation de la trajectoire.

Soient M le maître et C le chien. On a un système de référence fixe $S(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, avec \vec{e}_y la direction de \vec{v} , et un système de référence en mouvement avec le maître $S'(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$, avec \vec{e}_r dirigé vers C . Soit $\theta(t)$ l'angle orienté entre \vec{e}_y et \vec{e}_r . Le vecteur de Poisson est : $\vec{\omega}_{S' \div S} = -\dot{\theta} \vec{e}_z$.

La vitesse du maître est donnée par :

$$\vec{v}_M = v \vec{e}_y$$

La vitesse du chien est donnée par :

$$\vec{v}_C = -k v \vec{e}_r$$

En utilisant la loi de composition des vitesses et en projetant sur les axes, on trouve :

$$\begin{aligned} \vec{v}_C &= \vec{v}_M + \vec{v}'_C + \vec{\omega}_{S' \div S} \wedge \vec{MC} \\ -k v \vec{e}_r &= v \vec{e}_y + \vec{v}'_C - \dot{\theta} \vec{e}_z \wedge (r \vec{e}_r) \\ -k v \vec{e}_r &= v(\cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta) + \dot{r} \vec{e}_r - r \dot{\theta} \vec{e}_\theta \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$(\vec{e}_r) \quad : \quad -k v = v \cos \theta + \dot{r} \implies \dot{r} = -v(k + \cos \theta) \quad (1.14)$$

$$(\vec{e}_\theta) \quad : \quad 0 = v \sin \theta - r \dot{\theta} \implies r = \frac{1}{\dot{\theta}} v \sin \theta \quad (1.15)$$

vitesse constante \vec{v}_M

$$\|\vec{v}_M\| = v$$

vitesse constante \vec{v}_C
dirigée vers M

$$\|\vec{v}_C\| = d \cdot v \quad (d \in \mathbb{R}^+)$$

$$S(0, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$$

$$S'(M, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$$

Diagramme

$$\omega_{S'/S} = -\dot{\theta} \vec{e}_z$$

$$\omega_M = v \cdot \vec{e}_y$$

$$\omega_C = -d \omega \vec{e}_x$$

Loi de composition des vitesses:

$$\begin{aligned} \vec{v}_C &= \vec{v}_C' + \vec{v}_e = \vec{v}_C' + \vec{v}_o + \vec{\omega}_{S'/S} \wedge \vec{r}_C' \\ &= \omega_c' + \vec{v}_M - \dot{\theta} \vec{e}_z \wedge \vec{r}_C' \rightarrow r(\vec{e}_z) \end{aligned}$$

$$-d \omega \vec{e}_x = \omega_c' + \omega \vec{e}_y - \dot{\theta} r \vec{e}_z$$

$$-d \omega \cdot \vec{e}_x = \omega (\sin(\theta) \vec{e}_y + \cos(\theta) \vec{e}_z) + r \vec{e}_y - \dot{\theta} r \vec{e}_z$$

$$\text{Donc } (\vec{e}_x) \quad -d \omega = \omega \cos(\theta) + \dot{\theta} r$$

$$\vec{e}_y \quad 0 = \omega \sin(\theta) - \dot{\theta} r$$

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{OP}}{dt} = \frac{d\vec{OO}}{dt} + \frac{d\vec{OP}}{dt} \\ &= \vec{v}_o + \frac{d\vec{OP}}{dt} + \vec{\omega} \wedge \vec{OP}, \\ &= \vec{v} + \vec{v}_o + \vec{\omega} \wedge \vec{OP} \\ &= \vec{v} + \vec{v}_e \end{aligned}$$

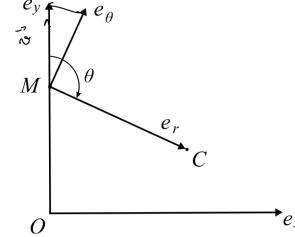
1.3.7 Le maître et le chien

Un maître se déplace en MRU avec une vitesse \vec{v} . Son chien situé à une distance r tente de le rattraper. Il se déplace avec une vitesse $k\vec{v}$ de module constant et dirigée en permanence vers son maître. Initialement, l'angle θ entre la direction de déplacement du maître et celle de son chien vaut 90 degrés et ils sont séparés d'une distance R . On demande de déterminer :

1. l'équation de la trajectoire ;

2. la condition sur k pour que le chien rattrape son maître ;

$$\begin{aligned} e_y &= \cos(\theta) \vec{e}_x - \sin(\theta) \vec{e}_z \\ e_x &= \sin(\theta) \vec{e}_x + \cos(\theta) \vec{e}_z \end{aligned}$$



Composition des vitesses:

$$\vec{v}_p = \vec{v}_o + \vec{v}_o \wedge \vec{r}_o + \vec{\omega}_{S'/S} \wedge \vec{r}_p$$

vitessé d'entraînement

Composition des accélérations:

$$\vec{a}_p = \vec{a}_p + \vec{a}_{o/o} + \vec{a}_e + (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_p) + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r}_p + 2\vec{\omega} \wedge \vec{a}_e$$

$$\text{or, } \vec{e}_y = \sin(\theta) \vec{e}_x + \cos(\theta) \vec{e}_z$$

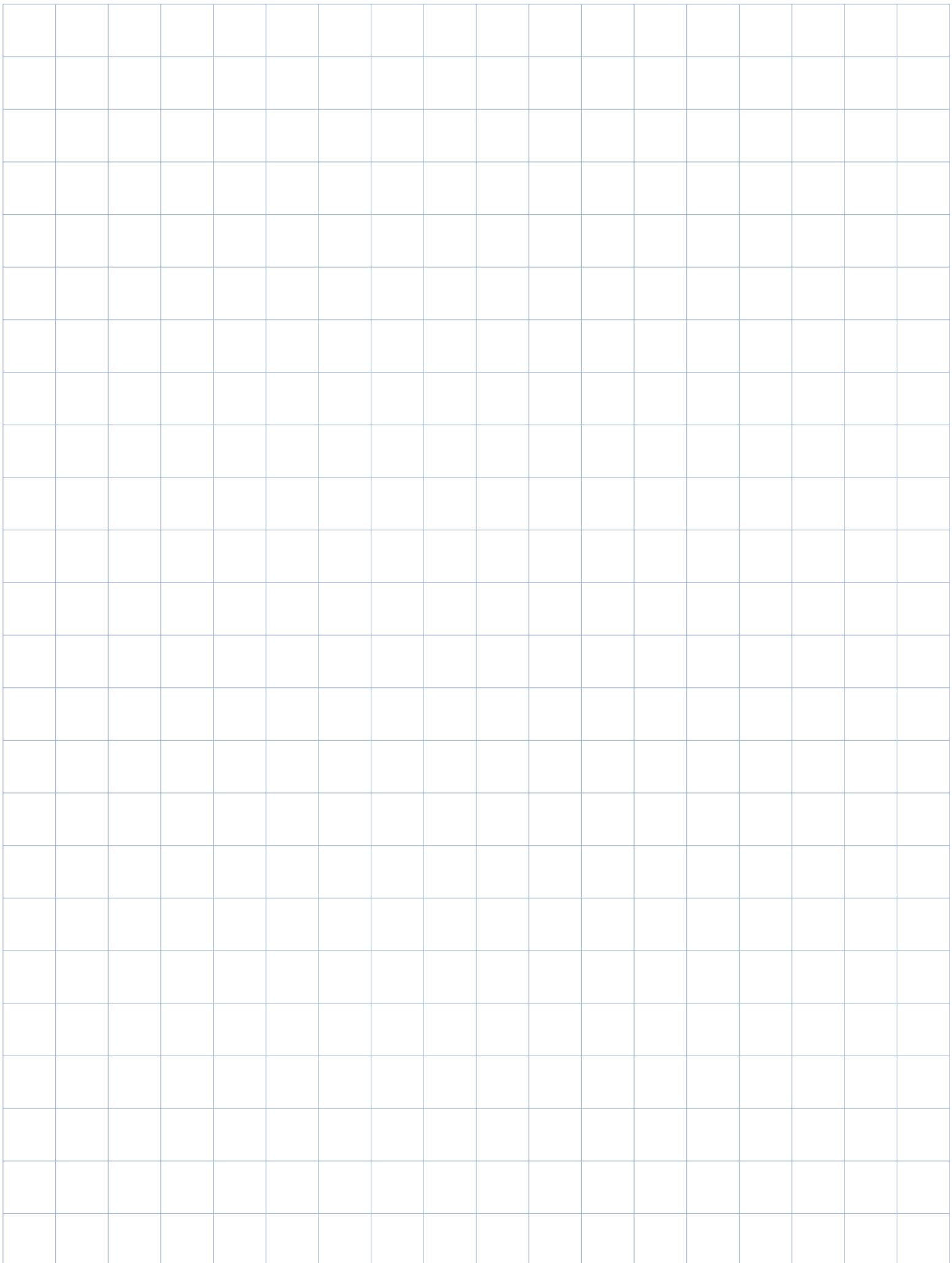
$$\left. \begin{aligned} \vec{a} &= -\omega \cdot (d + \cos(\theta)) \\ d &= \frac{\omega \sin(\theta)}{\dot{\theta}} \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{OP}}{dt} = \frac{d\vec{OO}}{dt} + \frac{d\vec{OP}}{dt} \\ &= \vec{v}_o + \frac{d\vec{OP}}{dt} + \vec{\omega} \wedge \vec{OP}, \\ &= \vec{v} + \vec{v}_o + \vec{\omega} \wedge \vec{OP} \\ &= \vec{v} + \vec{v}_e \end{aligned}$$

(Pensez)

$$\begin{aligned} \vec{\Sigma} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{OP}}{dt} = \frac{d\vec{OO}}{dt} + \frac{d\vec{OP}}{dt} \\ &= \vec{\Sigma}_o + \frac{d\vec{OP}}{dt} + \vec{\omega} \wedge \vec{OP} \\ &= \vec{\Sigma}_o + \vec{v}_e + \vec{\omega} \wedge \vec{OP} = \vec{\Sigma} + \vec{v}_e \end{aligned}$$

2



où \vec{v}'_C représente la vitesse de C par rapport au système de référence S' , avec $\vec{r}' = r \vec{e}_r$. On obtient un système d'équations différentielles non linéaires couplées.

On peut également obtenir ces équations comme suit :

$$\begin{aligned}\vec{r}_C &= \vec{OC} = \vec{OM} + \vec{MC} \\ &= \vec{r}_M + r\vec{e}_r \\ \vec{v}_C &= -kv\vec{e}_r = \dot{\vec{r}}_M + \frac{d}{dt}(r\vec{e}_r) \\ &= v\vec{e}_y + \dot{r}\vec{e}_r + r\vec{\omega}_{S' \div S} \wedge \vec{e}_r \\ &= v\vec{e}_y + \dot{r}\vec{e}_r - r\dot{\theta}\vec{e}_\theta \\ (\vec{e}_y &= \cos\theta\vec{e}_r + \sin\theta\vec{e}_\theta) \\ &= v\cos\theta\vec{e}_r + v\sin\theta\vec{e}_\theta + \dot{r}\vec{e}_r - r\dot{\theta}\vec{e}_\theta\end{aligned}$$

En calculant le rapport des équations (1.14) et (1.15), on obtient :

$$\frac{\dot{r}}{r} = \frac{-(k + \cos\theta)\dot{\theta}}{\sin\theta}$$

En intégrant par rapport au temps et en utilisant la relation trigonométrique $\sin\theta = 2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)$ dans le membre de droite, il vient :

$$\begin{aligned}\implies \ln r + C &= -\int \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\dot{\theta}dt - k \int \frac{\dot{\theta}}{2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)}dt \\ \ln r &= -\ln(|\sin\theta|) - k \ln(|\tan(\theta/2)|) + \ln C' \\ &= \ln \frac{C'}{|\sin\theta||\tan(\theta/2)|^k} \\ \implies r(\theta) &= \frac{C'}{|\sin\theta||\tan(\theta/2)|^k}\end{aligned}$$

En utilisant les conditions initiales $r_0 = R$ et $\theta_0 = \pi/2$, on trouve que $C' = R$. Au final, on a :

$$r(\theta) = \frac{R}{|\sin\theta||\tan(\theta/2)|^k}$$

Étant donné que le chien se dirige constamment vers le maître, et que $\theta_0 = \pi/2$, le bon sens nous amène à penser que θ est compris entre $\pi/2$ et π . On a donc $\sin\theta \geq 0$ et $\tan(\theta/2) \geq 0$ et la formule précédente devient :

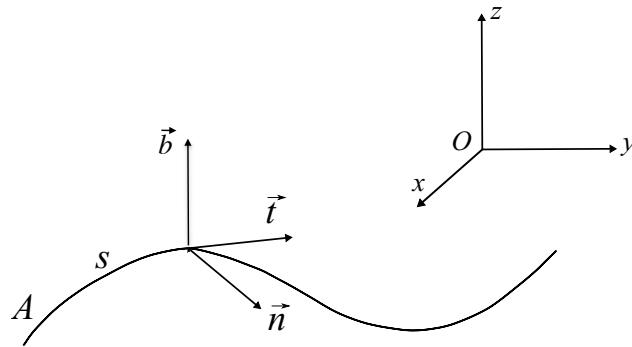
$$\begin{aligned}r(\theta) &= \frac{R \cos^k(\theta/2)}{\sin\theta \sin^k(\theta/2)} \\ &= \frac{R \cos^{k-1}(\theta/2)}{2 \sin^{k+1}(\theta/2)}\end{aligned}$$

avec $\sin\theta = 2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)$.

2. Pour que le chien rattrape son maître, il faut $r(\theta) = 0$ ². Remarquons alors tout d'abord que si $\theta \in [\pi/2; \pi]$ le dénominateur de l'expression ci-dessus donnant $r(\theta)$ est non nul. Par ailleurs, puisque $R > 0$, le numérateur de cette même expression ne peut s'annuler que si $k > 1$ et $\theta = \pi$. Le chien rattrapera donc le maître, en $\theta = \pi$, s'il court plus vite que celui-ci.

1.4 Formules de Frenet-Serret

1.4.1 Rappels théoriques



Le trièdre de Frenet-Serret ($\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$) est une base orthonormée locale définie le long de la trajectoire d'un point matériel P . L'abcisse curviligne s est la longueur d'arc mesurée du point A (fixe) au point P (variable). \vec{t} est le vecteur unitaire *tangent* à la courbe, \vec{n} est le vecteur unitaire *normal* à la courbe et \vec{b} est appelée la *binormale*. Ces vecteurs sont définis de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\vec{t} &= \frac{d\vec{OP}}{ds} \\ \vec{n} &= \frac{\frac{d\vec{t}}{ds}}{\left| \frac{d\vec{t}}{ds} \right|} \\ \vec{b} &= \vec{n} \wedge \vec{t}\end{aligned}$$

On s'intéresse aux dérivées de ces quantités par rapport à s et on définit le vecteur de Darboux $\vec{\Omega}$ comme suit :

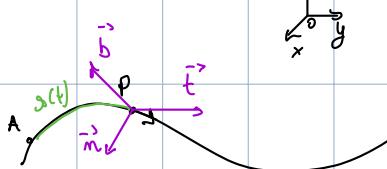
$$\vec{\Omega} = \frac{\vec{t}}{\mathcal{T}} - \frac{\vec{b}}{\mathcal{R}}$$

où \mathcal{R} est le rayon de courbure et \mathcal{T} est le rayon de torsion.

2. L'égalité stricte à 0 est un peu délicate car elle pose des problèmes mathématiques dans les développements réalisés ci-dessus. Ainsi, par exemple, on a divisé par r dans un calcul précédent. En outre, il faut rappeler que les coordonnées polaires ne sont strictement définies que pour $r > 0$, alors qu'on cherche justement à annuler cette distance dans l'exercice en cours. Pour être parfaitement correct, il faudrait plutôt répondre à la question suivante : "Existe-t-il un angle limite $\theta_l \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ tel que $\lim_{\theta \rightarrow \theta_l} r(\theta) = 0$?". On ne peut y répondre positivement que dans le cas $k > 1$, où on a alors $\lim_{\theta \rightarrow \pi} \cos^{k-1}(\theta/2) = 0$.

Formules de Frenet

Rappel



z

x

y

$\text{abcisse curviligne}$

$$\vec{t} = \frac{d\vec{P}}{ds} \quad \vec{n} = \frac{\vec{t}'}{\| \vec{t}' \|}, \quad \left\| \frac{\vec{t}'}{ds} \right\| = \frac{1}{R}$$

$$\vec{b} = \vec{n} \wedge \vec{t}$$

$$\frac{d(\vec{n}, \vec{t}, \vec{b})}{ds} = \vec{n} \wedge (\vec{n}', \vec{t}', \vec{b}') \quad \Rightarrow \quad \vec{n}' = \frac{\vec{t}'}{R} - \frac{\vec{b}'}{R} \quad \Rightarrow \quad \left\| \frac{d\vec{b}}{ds} \right\| = \frac{1}{R}$$

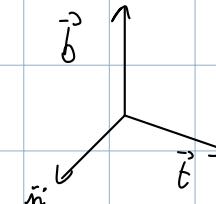
$$\frac{d(\vec{n}, \vec{t}, \vec{b})}{dt} = \frac{d(\vec{n}, \vec{t}, \vec{b})}{ds} \frac{ds}{dt} = \vec{n}' \wedge (\vec{n}, \vec{t}, \vec{b})$$

$$\text{On a } \vec{\alpha} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\vec{t}}{ds} \frac{ds}{dt} = i\vec{t} \quad \Rightarrow \quad \|\vec{\alpha}\| = 1$$

$$\vec{\alpha} = i\vec{t} + \frac{i^2}{R} \cdot \vec{n}$$

acc tangent

acc centripète/ normale



$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{n}}{dt} = \frac{d}{dt} i\vec{t}$$

$$= i\vec{t}' + i \frac{d\vec{t}}{dt} = i\vec{t}' + \frac{i^2}{R} \vec{n}$$

$$\frac{d\vec{t}}{dt} = \frac{d\vec{t}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = i$$

$$\Rightarrow \vec{n}' \wedge \vec{t} = \frac{\vec{n}}{R}$$

1.4.2 Traj. hélicoïdale

$$\vec{r}_p(t) = (a \cos(\omega t), a \sin(\omega t), b \omega t) \quad a, b, \omega > 0$$

① Décrire le mouv.

1) Dans le plan (x, y)

$$\vec{r}_p(t) = (a \cos(\omega t), a \sin(\omega t))$$

$$\rightarrow x^2 + y^2 = a^2 \cdot (\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)) = a^2$$

→ cercle centré en (x, y) = (0, 0) de rayon a,
vitesse angulaire ω . donc $\omega = \frac{2\pi}{T} \Leftrightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$

Le pas est la distance parcourue selon z pendant 1 période.

$$P = b\omega T = b\omega \frac{2\pi}{\omega} = b2\pi.$$

②

$$1. \vec{\theta}(t)$$

$$2. \vec{\alpha}(t)$$

$$3. \vec{\alpha}'(t)$$

$$4. \vec{a}_n(t)$$

$$5. \vec{s}(t) = \int_0^t \vec{x} dt$$

$$6. \vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$$

$$7. R, G$$

\vec{x}

\vec{y}

\vec{z}

$$\text{On a } \vec{\omega}(t) = \frac{d\vec{\omega}_p}{dt} = (-\omega \sin(\omega t), \omega \cos(\omega t), b\omega^2)$$

$$\text{Veo que } \|\vec{\omega}\| = |\dot{\phi}|$$

$$\begin{aligned} \text{On a } \|\vec{\omega}\| &= \sqrt{\langle \vec{\omega}(t), \vec{\omega}(t) \rangle} \\ &= \omega (\sqrt{a^2 \sin^2 \omega t + b^2}) \end{aligned}$$

$$\text{On a } \vec{t} = \frac{\vec{\omega}}{\omega} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot (-a \sin(\omega t) \vec{e}_x, a \cos(\omega t) \vec{e}_y, b \vec{e}_z)$$

$$\text{On a } \vec{\vartheta}(t) = \int_0^t \dot{\phi} dt = \int_0^t \omega \sqrt{a^2+b^2} dt = \omega \cdot t \cdot \sqrt{a^2+b^2}$$

$$\text{On a } \vec{a}(t) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = (-\omega^2 \cos(\omega t), -\omega^2 \sin(\omega t), 0)$$

$$\vec{a}(t) = \ddot{\vartheta} \vec{t} + \frac{i^2 \vec{m}}{R} \rightarrow a(t) = \frac{i^2}{R} \vec{m} \quad \text{on a } \vec{a}(t) = \vec{\sigma}$$

$$\text{et } \vec{a}(t) = \vec{a}_m$$

$$\text{car } \frac{d}{dt} (\omega \sqrt{a^2+b^2}) = \frac{d}{dt} |\dot{\phi}|$$

$$\odot = i^2$$

$$\text{On a } \vec{m} = \frac{\frac{d\vec{t}}{ds}}{\|\frac{d\vec{t}}{ds}\|} = \frac{\frac{d\vec{t}}{dt}}{\|\frac{d\vec{t}}{dt}\|} = \frac{\frac{\omega}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot (-a \cos(\omega t) \vec{e}_x, -a \sin(\omega t) \vec{e}_y, 0 \vec{e}_z)}{\omega \cdot a}$$

$$\vec{m} = (-\cos(\omega t) \vec{e}_x, -\sin(\omega t) \vec{e}_y, \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} \vec{e}_z)$$

$$\vec{b} = \vec{m} \wedge \vec{t}$$

$$\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{-a \sin \omega t}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{a \cos \omega t}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ -\cos \omega t & -\sin \omega t & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned} \vec{b} &= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ -\cos(\omega t) & -\sin(\omega t) & 0 \\ -a \sin(\omega t) & a \cos(\omega t) & b \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} (-b \sin(\omega t) \vec{e}_x + b \cos(\omega t) \vec{e}_y - a \vec{e}_z) \end{aligned}$$

$$\text{on a } \vec{m} \wedge \vec{b} = \frac{i^2}{R} \vec{m}$$

$$\Rightarrow \vec{m} = \frac{R}{i^2} \vec{b} = \frac{\vec{b}}{i^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} (b \sin \omega t \vec{e}_x - b \cos \omega t \vec{e}_y + a \vec{e}_z)$$

$$\text{R: On a } \|\vec{y}\| = \frac{i^2}{R} \Leftrightarrow \omega^2 = \frac{i^2}{R} \Rightarrow R = \frac{\omega^2 \cdot a^2 + b^2}{\omega^2} = \frac{a^2 + b^2}{a}$$

6:

$$\text{On a } \frac{d\vec{b}}{ds} = \frac{\vec{m}}{s} \Rightarrow \left\| \frac{d\vec{b}}{ds} \right\| = \frac{1}{s} \Rightarrow \vec{b} = \frac{1}{\left\| \frac{d\vec{b}}{ds} \right\|}$$

$$\frac{d\vec{b}}{dt} = \frac{d\vec{b}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{d\vec{b}}{ds} \cdot \dot{s} \Rightarrow \frac{d\vec{b}}{ds} = \frac{1}{\dot{s}} \frac{d\vec{b}}{dt}$$

$$= \frac{1}{\omega \sqrt{a^2+b^2}} \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} (-b \cos(\omega t), -b \sin(\omega t)) \right)$$

$$\text{On a } \vec{t} = \frac{d\vec{b}}{ds} = \frac{\vec{m}}{s}$$

$$\text{car } \vec{m} = \dot{s} \vec{t}$$

$$\vec{m} = \frac{d\vec{t}}{ds} \text{ et } \left\| \frac{d\vec{t}}{ds} \right\| = \frac{1}{R}$$

$$\vec{b} = \vec{m} \wedge \vec{t} \text{ et } \left\| \frac{d\vec{b}}{ds} \right\| = \frac{1}{s}$$

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{s}}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{\vec{m}}{s}$$

$$\text{car } \vec{m} = \frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \vec{t} \cdot \dot{s}$$

$$\text{On a } \frac{d}{dt} (\vec{t}, \vec{m}, \vec{b}) = \dot{s} \cdot \vec{l} \wedge (\vec{t}, \vec{m}, \vec{b})$$

$$= \vec{\omega}_{\text{for}} \wedge (\vec{t}, \vec{m}, \vec{b}) \text{ où } \vec{l} = \frac{\vec{t} - \vec{b}}{R}$$

$$\text{et } \vec{\omega} = \frac{d\vec{l}}{dt} = \frac{d(\dot{s} \cdot \vec{t})}{dt} = \dot{s} \vec{t} + \dot{s} (\vec{s} \cdot \vec{l} \wedge \vec{t}) \\ = \ddot{s} \vec{t} + \dot{s} \vec{l} \wedge \vec{m}$$

R

1.4.2 Trajectoire hélicoïdale

Dans un système de coordonnées cartésiennes $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, les coordonnées d'un point matériel P sont données en fonction du temps t par l'expression :

$$\vec{r}(t) = (a \cos \omega t, a \sin \omega t, b \omega t)$$

$$\vec{r}(t) = (a \cos \omega t, a \sin \omega t, b \omega t)$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt}(t) = (-a \omega \sin \omega t, a \omega \cos \omega t, b \omega) = \vec{v}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt}(t) = (-a \omega^2 \cos \omega t, -a \omega^2 \sin \omega t, 0) = \vec{\alpha}$$

$$\text{On a } \vec{t} = \frac{\vec{v}}{\omega} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot (-a \sin \omega t, a \cos \omega t, b)$$

$$\text{On a } \omega = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{a^2 \omega^2 \sin^2(\omega t) + a^2 \omega^2 \cos^2(\omega t) + b^2 \omega^2} \\ = \omega \sqrt{a^2+b^2}$$

$$\text{On a } s(t) = \int_0^t \dot{s} dt \quad \text{Or, } \left\| \vec{v} \right\| = |\vec{v}| = \dot{s}$$

$$\text{Dès lors } \vec{s}(t) = \int_0^t \omega \sqrt{a^2+b^2} dt = \omega \sqrt{a^2+b^2} \cdot t$$

$$\text{Or si } \vec{m} = \frac{\vec{t}}{\|\vec{t}\|} = \frac{\vec{t}}{\frac{\|d\vec{t}\|}{dt}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot (-a\omega \cos(\omega t), -a\omega \sin(\omega t))$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot a\omega$$

$$= (-\cos(\omega t), -\sin(\omega t))$$

On peut aussi calculer $\vec{a}_t(t)$:

$$\vec{a} = i\vec{t} + \frac{i^2}{R} \cdot \vec{m} \rightarrow i = 0 \quad \vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

$$\vec{a} = \frac{i^2}{R} \vec{m}$$

$$\Rightarrow \|\vec{a}\| = a\omega^2$$

$$\text{Or, } \|\vec{a}\| = a\omega^2$$

$$\text{Dès lors } \frac{i^2}{R} = a\omega^2 \Rightarrow R = \left(\frac{a\omega^2}{i^2} \right)^{-1} = \left(\frac{a\omega^2}{\omega^2(a^2+b^2)} \right)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2} \right)^{-1} = \frac{a^2+b^2}{a}$$

On a les relations :

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} \vec{t} \\ \vec{n} \\ \vec{b} \end{pmatrix} = \vec{\Omega} \wedge \begin{pmatrix} \vec{t} \\ \vec{n} \\ \vec{b} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{\vec{n}}{\mathcal{R}} \\ \frac{d\vec{n}}{ds} = -\frac{\vec{b}}{\mathcal{T}} - \frac{\vec{t}}{\mathcal{R}} \\ \frac{d\vec{b}}{ds} = \frac{\vec{n}}{\mathcal{T}} \end{cases}$$

Par conséquent,

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \vec{t} \\ \vec{n} \\ \vec{b} \end{pmatrix} = \frac{d}{ds} \begin{pmatrix} \vec{t} \\ \vec{n} \\ \vec{b} \end{pmatrix} \frac{ds}{dt} = \dot{s} \vec{\Omega} \wedge \begin{pmatrix} \vec{t} \\ \vec{n} \\ \vec{b} \end{pmatrix} = \omega_{Fr} \wedge \begin{pmatrix} \vec{t} \\ \vec{n} \\ \vec{b} \end{pmatrix}$$

où

$$\omega_{Fr} = \dot{s} \vec{\Omega} = \frac{\dot{s}}{\mathcal{T}} \vec{t} - \frac{\dot{s}}{\mathcal{R}} \vec{b}$$

est le vecteur de Poisson du système de référence $(P, \vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$ par rapport au système de référence $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

La vitesse d'un point matériel P est donnée par :

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt} \vec{r}(s(t)) = \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \dot{s} \vec{t}$$

ce qui montre que la vitesse d'un point est toujours tangente à sa trajectoire. Son module est donné par :

$$v = \|\vec{v}(t)\| = |\dot{s}|$$

L'accélération s'écrit :

$$\vec{\gamma}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{s} \vec{t}) = \frac{d\dot{s}}{dt} \vec{t} + \dot{s} \frac{d\vec{t}}{dt} = \ddot{s} \vec{t} + \dot{s} \omega_{Fr} \wedge \vec{t} = \ddot{s} \vec{t} + \dot{s}^2 \vec{\Omega} \wedge \vec{t} = \ddot{s} \vec{t} + \dot{s}^2 \frac{\vec{n}}{\mathcal{R}}$$

$$\vec{\gamma}(t) = \vec{\gamma}_n + \vec{\gamma}_t \quad \text{où} \quad \begin{cases} \vec{\gamma}_n = \gamma_n \vec{n} = \frac{\dot{s}^2}{\mathcal{R}} \vec{n} & \text{accélération normale} \\ \vec{\gamma}_t = \gamma_t \vec{t} = \ddot{s} \vec{t} & \text{accélération tangentielle} \end{cases}$$

1.4.2 Trajectoire hélicoïdale

Dans un système de coordonnées cartésiennes $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, les coordonnées d'un point matériel P sont données en fonction du temps t par l'expression :

$$\vec{r}(t) = (a \cos \omega t, a \sin \omega t, b \omega t)$$

où les constantes a , b et ω sont positives.

- Décrire le mouvement qualitativement.
- Calculer la vitesse \vec{v} et son module v , l'accélération $\vec{\gamma}$ et son module γ , l'accélération tangentielle $\vec{\gamma}_t$, l'accélération normale $\vec{\gamma}_n$, les vecteurs du trièdre de Frenet, le rayon de courbure \mathcal{R} , le rayon de torsion \mathcal{T} , la loi $s(t)$ donnant la longueur parcourue le long de la courbe en fonction du temps t .

- Description qualitative de la trajectoire.
Dans le plan (x, y) , le mouvement s'écrit :

$$(x, y) = (a \cos \omega t, a \sin \omega t)$$

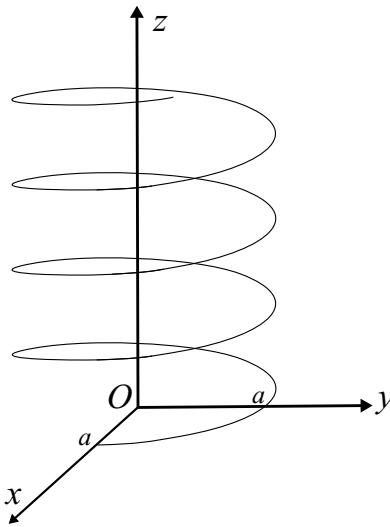
et consiste donc en un mouvement circulaire uniforme sur un cercle de rayon a et avec une « vitesse angulaire » ω .

La période de ce mouvement circulaire uniforme est $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Le long de l'axe z , le mouvement est rectiligne, uniforme et de vitesse $b\omega$.

On a donc un mouvement hélicoïdal. Le pas p de l'hélice est la distance parcourue le long de l'axe z pendant une révolution dans le plan (x, y) et vaut :

$$p = b\omega T = b\omega \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi b$$



- Vitesse. La vitesse est donnée par la dérivée temporelle du vecteur position :

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(a \cos \omega t \vec{e}_x + a \sin \omega t \vec{e}_y + b\omega t \vec{e}_z) = \omega(-a \sin \omega t \vec{e}_x + a \cos \omega t \vec{e}_y + b \vec{e}_z)$$

Le module de la vitesse vaut :

$$v = \|\vec{v}\| = \omega \sqrt{a^2 \sin^2 \omega t + a^2 \cos^2 \omega t + b^2} = \omega \sqrt{a^2 + b^2} = |\dot{s}| = \pm \dot{s}$$

On note que le module de la vitesse est constant.

- Vecteur tangent unitaire.

De manière générale, ce vecteur est défini par $\vec{t} = \frac{d\vec{r}}{\|\frac{d\vec{r}}{du}\|}$ (où u est un paramètre quelconque de la courbe). En choisissant $u = t$ (le temps), on obtient alors

$$\vec{t} = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}(-a \sin \omega t \vec{e}_x + a \cos \omega t \vec{e}_y + b \vec{e}_z)$$

- Abscisse curviligne :

$$s(t) = \int \dot{s} dt = \int v dt = v \int dt = \omega \sqrt{a^2 + b^2} t + s(t=0)$$

— Accélération :

$$\vec{\gamma}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \omega^2(-a \cos \omega t \vec{e}_x - a \sin \omega t \vec{e}_y) = -a\omega^2(\cos \omega t \vec{e}_x + \sin \omega t \vec{e}_y)$$

$$\gamma = \|\vec{\gamma}\| = a\omega^2$$

— Accélération tangentielle :

$$\vec{\gamma}_t = \ddot{s}\vec{t} = \dot{v}\vec{t} = 0$$

car v est constant.

— Accélération normale :

$$\vec{\gamma}_n = \vec{\gamma} - \vec{\gamma}_t = \vec{\gamma}$$

car $\vec{\gamma}_t = 0$.

— Normale :

Par définition, $\vec{n} = \frac{\frac{d\vec{t}}{du}}{\left\| \frac{d\vec{t}}{du} \right\|}$, où u est un paramètre quelconque de la courbe.

En choisissant le temps pour ce dernier, on obtient

$$\frac{d\vec{t}}{dt} = \frac{\omega}{\sqrt{a^2 + b^2}} (-a \cos(\omega t) \vec{e}_x - a \sin(\omega t) \vec{e}_y), \text{ et}$$

$$\left\| \frac{d\vec{t}}{dt} \right\| = \frac{\omega}{\sqrt{a^2 + b^2}} a.$$

Dès lors, $\vec{n} = -\cos(\omega t) \vec{e}_x - \sin(\omega t) \vec{e}_y$.

— Binormale :

$$\vec{b} = \vec{t} \wedge \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{-a \sin \omega t}{\sqrt{a^2 + b^2}} & \frac{a \cos \omega t}{\sqrt{a^2 + b^2}} & \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ -\cos \omega t & -\sin \omega t & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} (b \sin \omega t \vec{e}_x - b \cos \omega t \vec{e}_y + a \vec{e}_z)$$

— Rayon de courbure :

$$\gamma_n = \frac{\dot{s}^2}{\mathcal{R}} = \frac{v^2}{\mathcal{R}} \Rightarrow \mathcal{R} = \frac{v^2}{\gamma} = \frac{(\omega \sqrt{a^2 + b^2})^2}{a\omega^2} = \frac{a^2 + b^2}{a} = a + \frac{b^2}{a}$$

Il est à noter que $\mathcal{R} > a$ (c'est une conséquence du terme $\frac{b^2}{a}$, autrement dit du fait que le mouvement ne se fait pas dans un plan!).

— Rayon de torsion :

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = \frac{-\vec{n}}{\mathcal{T}} \Rightarrow \left| \frac{d\vec{b}}{ds} \right| = \frac{1}{\mathcal{T}} \Rightarrow \mathcal{T} = \frac{1}{\left| \frac{d\vec{b}}{ds} \right|}$$

Or,

$$\frac{d\vec{b}}{dt} = \frac{d\vec{b}}{ds} \frac{ds}{dt} = \dot{s} \frac{d\vec{b}}{ds} \Rightarrow \frac{d\vec{b}}{ds} = \frac{1}{v} \frac{d\vec{b}}{dt}$$

et

$$\frac{d\vec{b}}{dt} = \frac{b\omega}{\sqrt{a^2 + b^2}} (\cos \omega t \vec{e}_x + \sin \omega t \vec{e}_y)$$

Donc

$$\mathcal{T} = \frac{v}{\left| \frac{d\vec{b}}{dt} \right|} = \frac{\omega \sqrt{a^2 + b^2}}{b\omega} \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{a^2 + b^2}{b} = b + \frac{a^2}{b}$$

1.4.3 Trajectoire spirale

Dans un système de coordonnées cartésiennes $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, les coordonnées d'un point sont données en fonction du temps t par l'expression :

$$\vec{r}(t) = ae^{\lambda t} (\sin \omega t, 0, \cos \omega t)$$

où les constantes a , λ et ω sont positives.

- Décrire le mouvement qualitativement.
- Calculer la vitesse \vec{v} et son module v , l'accélération $\vec{\gamma}$ et son module γ , l'accélération tangentielle $\vec{\gamma}_t$, l'accélération normale $\vec{\gamma}_n$, les vecteurs du trièdre de Frenet, le rayon de courbure \mathcal{R} , le rayon de torsion \mathcal{T} et la loi $s(t)$ donnant la longueur parcourue le long de la courbe en fonction du temps t .
- Description qualitative de la trajectoire.

La courbe est plane dans le plan (x, z) étant donné que la composante y est nulle dans l'expression de la trajectoire.

L'expression $\rho(\sin \omega t, 0, \cos \omega t)$, si ρ est constant, correspond à un mouvement circulaire uniforme de rayon ρ , avec une période $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Ici, $\rho = ae^{\lambda t}$ augmente exponentiellement avec le temps, par conséquent la trajectoire est une spirale.

- Vitesse :

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt} (ae^{\lambda t} (\sin \omega t, 0, \cos \omega t)) = ae^{\lambda t} (\lambda \sin \omega t + \omega \cos \omega t, 0, \lambda \cos \omega t - \omega \sin \omega t)$$

$$\begin{aligned} v &= \|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_z^2} = ae^{\lambda t} \sqrt{(\lambda \sin \omega t + \omega \cos \omega t)^2 + (\lambda \cos \omega t - \omega \sin \omega t)^2} \\ &= ae^{\lambda t} \sqrt{\lambda^2 \sin^2 \omega t + \omega^2 \cos^2 \omega t + \lambda^2 \cos^2 \omega t + \omega^2 \sin^2 \omega t} \\ &= ae^{\lambda t} \sqrt{\lambda^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\vec{v} = \dot{s} \vec{t}$$

donc $|\dot{s}| = v$. En supposant que s augmente à mesure que l'on s'éloigne de l'origine de la spirale, on a $\dot{s} = |\dot{s}| = v$, et l'abscisse curviligne s'écrit :

$$s(t) = \int \dot{s} dt = \int v dt = \int ae^{\lambda t} \sqrt{\lambda^2 + \omega^2} dt = \frac{a}{\lambda} e^{\lambda t} \sqrt{\lambda^2 + \omega^2} + C.$$

Le vecteur tangent unitaire est donné par :

$$\vec{t} = \frac{\frac{d\vec{r}}{dt}}{\left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\|} = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + \omega^2}} (\lambda \sin \omega t + \omega \cos \omega t, 0, \lambda \cos \omega t - \omega \sin \omega t)$$

— Accélération :

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}(t) &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (ae^{\lambda t} (\lambda \sin \omega t + \omega \cos \omega t, 0, \lambda \cos \omega t - \omega \sin \omega t)) \\ &= ae^{\lambda t} (\lambda(\lambda \sin \omega t + \omega \cos \omega t) + \lambda \omega \cos \omega t - \omega^2 \sin \omega t, 0, \\ &\quad \lambda(\lambda \cos \omega t - \omega \sin \omega t) - \lambda \omega \sin \omega t - \omega^2 \cos \omega t) \\ &= ae^{\lambda t} (2\lambda \omega \cos \omega t + (\lambda^2 - \omega^2) \sin \omega t, 0, (\lambda^2 - \omega^2) \cos \omega t - 2\lambda \omega \sin \omega t) \end{aligned}$$

La composante tangentielle est donnée par :

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}_t &= \ddot{s}\vec{t} = \dot{v}\vec{t} = a\lambda e^{\lambda t} \sqrt{\lambda^2 + \omega^2} \vec{t} \\ &= a\lambda e^{\lambda t} (\lambda \sin \omega t + \omega \cos \omega t, 0, \lambda \cos \omega t - \omega \sin \omega t) \end{aligned}$$

La composante normale est donnée par :

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}_n &= \vec{\gamma} - \vec{\gamma}_t \\ &= ae^{\lambda t} (2\lambda \omega \cos \omega t + (\lambda^2 - \omega^2) \sin \omega t - \lambda^2 \sin \omega t - \lambda \omega \cos \omega t, 0, \\ &\quad (\lambda^2 - \omega^2) \cos \omega t - 2\lambda \omega \sin \omega t - \lambda^2 \cos \omega t + \lambda \omega \sin \omega t) \\ &= ae^{\lambda t} (\lambda \omega \cos \omega t - \omega^2 \sin \omega t, 0, -\omega^2 \cos \omega t - \lambda \omega \sin \omega t) \\ &= a\omega e^{\lambda t} (\lambda \cos \omega t - \omega \sin \omega t, 0, -\omega \cos \omega t - \lambda \sin \omega t) \end{aligned}$$

Et son module est donné par :

$$\begin{aligned} \gamma_n &= |\vec{\gamma}_n| = a\omega e^{\lambda t} \sqrt{(\lambda \cos \omega t - \omega \sin \omega t)^2 + (-\omega \cos \omega t - \lambda \sin \omega t)^2} \\ &= a\omega e^{\lambda t} \sqrt{\lambda^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

On a aussi :

$$\vec{\gamma}_n = |\vec{\gamma}_n| \vec{n} = \gamma_n \vec{n}$$

Par conséquent, la normale s'écrit :

$$\vec{n} = \frac{\vec{\gamma}_n}{\gamma_n} = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + \omega^2}} (\lambda \cos \omega t - \omega \sin \omega t, 0, -\omega \cos \omega t - \lambda \sin \omega t)$$

— Binormale :

$$\begin{aligned}
\vec{b} &= \vec{t} \wedge \vec{n} = \frac{1}{\lambda^2 + \omega^2} \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \lambda \sin \omega t + \omega \cos \omega t & 0 & \lambda \cos \omega t - \omega \sin \omega t \\ \lambda \cos \omega t - \omega \sin \omega t & 0 & -\omega \cos \omega t - \lambda \sin \omega t \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{\lambda^2 + \omega^2} ((\lambda \cos \omega t - \omega \sin \omega t)^2 + (-\omega \cos \omega t - \lambda \sin \omega t)^2) \vec{e}_y \\
&= \frac{1}{\lambda^2 + \omega^2} (\lambda^2 + \omega^2) \vec{e}_y \\
&= \vec{e}_y
\end{aligned}$$

On trouve que \vec{b} est perpendiculaire au plan de la courbe, et constant dans le temps. Par conséquent, $\frac{d\vec{b}}{dt} = 0$ et on a :

$$\frac{d\vec{b}}{dt} = \frac{d\vec{b}}{ds} \frac{ds}{dt} = v \frac{d\vec{b}}{ds}.$$

Puisque la vitesse est non nulle, on en déduit que $\frac{d\vec{b}}{ds} = 0$ et par suite que le rayon de torsion \mathcal{T} est infini (cela est logique puisque la courbe est plane).

— Rayon de courbure :

$$\begin{aligned}
\gamma_n &= \frac{\dot{s}^2}{\mathcal{R}} = \frac{v^2}{\mathcal{R}} \Rightarrow \mathcal{R} = \frac{v^2}{\gamma_n} \\
\mathcal{R} &= \frac{(ae^{\lambda t} \sqrt{\lambda^2 + \omega^2})^2}{a\omega e^{\lambda t} \sqrt{\lambda^2 + \omega^2}} = \frac{a^2 e^{2\lambda t} (\lambda^2 + \omega^2)}{a\omega e^{\lambda t} \sqrt{\lambda^2 + \omega^2}} = \frac{a}{\omega} e^{\lambda t} \sqrt{\lambda^2 + \omega^2}
\end{aligned}$$

1.5 Exercices proposés

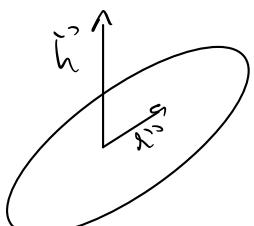
- Le mouvement d'un point matériel est régi par l'équation différentielle

$$h^2 \vec{r} = \frac{1}{v^2} \dot{\vec{r}} \wedge \vec{h}$$

\vec{h} étant un vecteur constant de norme h et v^2 le carré de la norme de la vitesse. A l'instant initial, on a $\vec{r} = \vec{r}_0$.

- a) Déterminer la condition sur \vec{r}_0 pour que le problème ait un sens ;
- b) Déduire de la forme de l'équation qu'on a affaire à un mouvement plan ;
- c) Résoudre l'équation en coordonnées cylindriques et en déduire la nature de la trajectoire.

(R : a) $\vec{r}_0 \cdot \vec{h} = 0$, c) $r = \|\vec{r}_0\|, \varphi = \frac{1}{h\|\vec{r}_0\|^2} t$, mouvement circulaire uniforme)



$$h^2 \vec{r} = \frac{1}{\omega^2} \vec{r} \times \vec{h}$$

$$|\vec{h}| = \text{const} \quad \omega^2 = |\vec{\omega}|^2$$

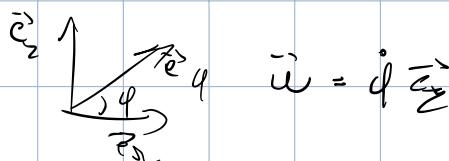
$$\text{b) } \vec{h} \cdot (\vec{h} \cdot \vec{r}) = \left(\frac{1}{\omega^2} \vec{r} \times \vec{h} \right) \vec{h}$$

$$\vec{h} \cdot (\vec{h} \cdot \vec{r}) = 0$$

c) en coord cylind:

$$\vec{r} = r \vec{e}_r + z \vec{e}_z$$

$$\begin{aligned} \vec{r} &= r \vec{e}_r + r \dot{\phi} (\vec{e}_z \wedge \vec{e}_r) + z \vec{e}_z \\ &= r \vec{e}_r + r \dot{\phi} \vec{e}_\phi + z \vec{e}_z \end{aligned}$$



$$\vec{h} \parallel \vec{e}_z$$

$$\vec{h} = h \vec{e}_z$$

$$\text{Denc: } h^2 \cdot (r \vec{e}_r + z \vec{e}_z) = \frac{1}{\omega^2} \cdot (-r \dot{\phi} \vec{e}_\phi + r \ddot{\phi} \vec{e}_r)$$

$$\begin{cases} r \times h^2 = h \ddot{\phi} \vec{e}_r \cdot \frac{1}{\omega^2} \\ z = 0 \\ \vec{e}_z \\ 0 = -\frac{1}{\omega^2} \sin h \end{cases} \rightarrow \frac{h \cdot \omega^2}{\dot{\phi}} = r \Leftrightarrow \dot{\phi} = h \omega^2 \Rightarrow \dot{\phi} = \int_0^t h \omega^2 dt + \phi_0 \Rightarrow \dot{\phi} = h \omega^2 t$$

$$h^2 \vec{r} = \frac{1}{\omega^2} (\vec{r} \wedge \vec{h})$$

$$\text{et } \vec{h} = h \vec{e}_z$$



$$\text{Denc, mu que } \vec{r} = r \vec{e}_r + z \vec{e}_z \\ \vec{r} = r \vec{e}_r + r \dot{\phi} \vec{e}_\phi + z \vec{e}_z$$

$$\text{on a } h^2 \cdot r \vec{e}_r + h^2 z \vec{e}_z = \frac{1}{\omega^2} (r \vec{e}_r + r \dot{\phi} \vec{e}_\phi + z \vec{e}_z \wedge h \vec{e}_z)$$

$$h^2 \cdot r \vec{e}_r + h^2 z \vec{e}_z = -\frac{h \ddot{\phi}}{\omega^2} \vec{e}_\phi + \frac{h \dot{\phi}}{\omega^2} \vec{e}_r$$

$$\begin{cases} h^2 \cdot r = \frac{h \ddot{\phi}}{\omega^2} \\ 0 = h \cdot \frac{r \dot{\phi}}{\omega^2} \end{cases} \Rightarrow \dot{\phi} = 0 \Leftrightarrow \dot{\phi}(t) = \dot{\phi}_0 \Rightarrow \dot{\phi} = h \omega^2 \dot{\phi}^2$$

$$\begin{cases} \vec{e}_r \\ \vec{e}_\phi \\ \vec{e}_z \end{cases} \quad h^2 z = 0 \Rightarrow z = 0$$

$$|\vec{r}|^2 = \sqrt{r^2 + z^2 \dot{\phi}^2} \\ = 0 \quad \dot{\phi}^2 = \omega^2$$

$$\dot{\phi}(t) \rightarrow \frac{1}{h \omega^2} \cdot t + C$$

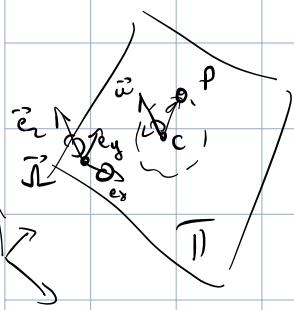
$$|\vec{\omega}|^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \\ = 0 + r^2 \dot{\phi}^2$$

• lid a' p en c $\rightarrow \vec{r} = 0$

$$S_1(0, e_x, c_y, c_z)$$

• lid a' II

$$S_2(c,$$



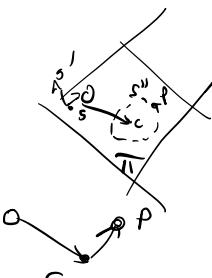
$$\vec{r} = \vec{OC} + \vec{CP}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} =$$

1.4.6

2. Un plan Π tourne sur lui-même autour d'un de ses points O, avec une vitesse angulaire $\vec{\Omega}$ constante ($\vec{\Omega}$ perpendiculaire à Π). Un point matériel P décrit une circonference dans ce plan de centre C, à vitesse angulaire (par rapport au plan) constante $\vec{\omega}$. Déterminer l'accélération de P dans les référentiels suivants : absolu, lié au plan Π et lié à P en C. Déterminer également son accélération d'entraînement et son accélération de Coriolis.

$$(R : \text{référentiel lié à } P \text{ en } C : \vec{\gamma}'' = \vec{0}; \text{ lié à } \Pi : \vec{\gamma}' = -\omega^2 \vec{CP}; \text{ absolu : } \vec{\gamma} = -\Omega^2 \vec{OC} - (\Omega + \omega)^2 \vec{CP}; \vec{\gamma}_e = -\Omega^2(\vec{OC} + \vec{CP}); \vec{\gamma}_c = -2\Omega\omega \vec{CP})$$

- 
3. Le mouvement plan d'un point matériel P par rapport à un référentiel absolu est paramétré en coordonnées polaires par $r = a e^\varphi$, $\varphi = \omega t$, où a et ω sont des constantes. Déterminer la vitesse \vec{v} et l'accélération $\vec{\gamma}$ absolues de P dans ce système de coordonnées. Montrer que l'angle α entre \vec{r} et \vec{v} est constant et déterminer sa valeur.

$$\begin{aligned} r &= ae^{\varphi t}, \quad \varphi = \omega t \quad (a, \omega \text{ ct}) \quad \vec{r} = \vec{r}_r + \vec{r}_\varphi \quad \vec{r}^2 = r^2 \\ \text{donc } \dot{r} &= \frac{d}{dt} r = \frac{d}{dt} a e^{\varphi t} = a \omega e^{\varphi t} = a \omega \quad \vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_\varphi \\ \dot{\varphi} &= \omega \quad \vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_\varphi \\ \text{Finallement : } \vec{v} &= \vec{r}_r + \vec{r}_\varphi \\ &= r \omega \vec{e}_r + r \omega \vec{e}_\varphi \\ &= r \omega (\vec{e}_r + \vec{e}_\varphi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{\gamma} &= r \omega^2 \vec{e}_r + r \omega^2 \vec{e}_\varphi + r \omega^2 \vec{e}_\varphi - r \omega^2 \vec{e}_r \\ \vec{\gamma} &= 2r\omega^2 \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle \vec{r}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{r}\| \|\vec{v}\|} = \frac{r \omega^2}{r \cdot r \omega} = \frac{\pi \omega^2}{\pi^2 \omega} = \frac{\omega}{\pi}$$

$$\begin{pmatrix} r & \omega \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} \left(\frac{\omega}{\pi} \right)$$

$$\vec{r} \left(\frac{\omega}{\pi} \right)$$

et on a aussi

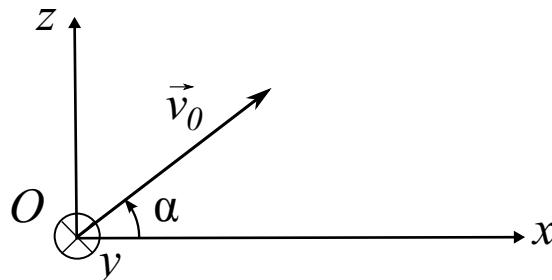
Chapitre 2

Dynamique du point matériel

2.1 Mouvements non guidés

2.1.1 Mouvement d'un projectile en l'absence de frottement

Un projectile, de masse m et soumis à la pesanteur g , est lancé avec une vitesse initiale v_0 dans le plan (x, z) dont la direction fait un angle α avec l'horizontale. Déterminer l'évolution du vecteur position au cours du temps, l'altitude maximale atteinte, le temps de vol total et la portée du tir.



1. Evolution du vecteur position.

Le vecteur position est $\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z$.

Il n'y a aucune contrainte qui s'oppose au mouvement, on en conclut qu'il existe trois degrés de liberté : x , y et z .

La seule force s'appliquant sur le point matériel est la force de pesanteur : $\vec{F} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$.

On écrit les équations de Newton :

$$m\vec{\gamma} = \vec{F} = -mg\vec{e}_z \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases}$$

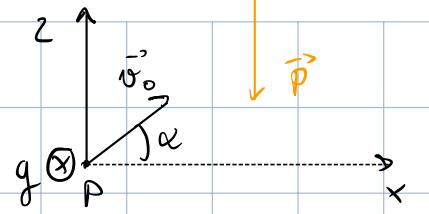
On intègre une première fois par rapport au temps :

$$\begin{cases} \dot{x} = C_1 \\ \dot{y} = C_2 \\ \dot{z} = -gt + C_3 \end{cases}$$

On intègre une seconde fois :

Chapitre 2

2.1.1. Mouvement d'un projectile



- C.I: en $t=0$: et v_0 est dans le plan Oxz
 $\vec{v} = \vec{v}_0$
 $\vec{g} = \vec{0}$
 $\Rightarrow \vec{v}_0 = v_0 \cos(\alpha) \hat{e}_x + v_0 \sin(\alpha) \hat{e}_z$

$$\textcircled{1} \quad \vec{r} = x \hat{e}_x + y \hat{e}_y + z \hat{e}_z$$

$$\vec{v} = \dot{x} \hat{e}_x + \dot{y} \hat{e}_y + \dot{z} \hat{e}_z$$

$$\vec{a} = \ddot{x} \hat{e}_x + \ddot{y} \hat{e}_y + \ddot{z} \hat{e}_z$$

$$\textcircled{2} \quad \text{Forces} \quad \vec{P} = m \vec{g} = -m g \hat{e}_z$$

$$\textcircled{3} \quad \vec{F} = m \vec{a}$$

$$\Rightarrow -m g \hat{e}_z = (\dot{x} \hat{e}_x + \dot{y} \hat{e}_y + \dot{z} \hat{e}_z) m$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = -g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = x \\ c_2 = y \\ -gt + c_3 = z \end{cases} \quad \begin{array}{l} t=0 \\ \Rightarrow \\ 0 = c_1 \\ 0 = c_2 \\ v_0 \sin(\alpha) = c_3 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = v_0 \cos(\alpha) \cdot t + c_4 \\ y = c_5 \\ z = v_0 \sin(\alpha) \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 + c_6 \end{cases} \quad \begin{array}{l} t=0 \\ \Rightarrow c_4, c_5, c_6 = 0 \end{array}$$

$$\bullet \text{ Alt max: } \dot{z} = 0$$

$$z_{\text{alt max}} = 0 = -gt + v_0 \sin(\alpha) \cdot t \Rightarrow t_{\text{max}} = \frac{v_0 \sin(\alpha)}{g}$$

$$\bullet \text{ Temps de vol: } z = 0$$

$$0 = \left(-\frac{1}{2} g t + v_0 \sin(\alpha) \cdot t \right)_{t=0}$$

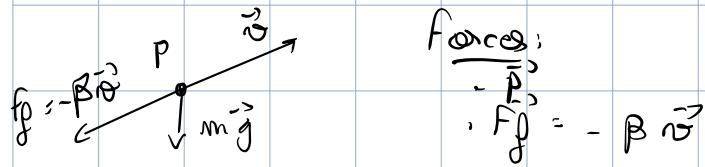
$$\Rightarrow t_{\text{vol}} = \frac{2v_0 \sin(\alpha)}{g}$$

$$\text{Porté du tir: } x(t_{\text{vol}}) = v_0 \cos(\alpha) \cdot \frac{2v_0 \sin(\alpha)}{g}$$

$$= \frac{v_0 \sin(2\alpha)}{g}$$

2. 1. 1)

Particule lancée avec frottement



Forces:
 $\vec{F}_f = -\beta \vec{n}$

CI: $\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = 0 \end{cases}$
 $\vec{\omega}_0 = (v_{ox}, v_{oy}, 0)$

Ex2



→ étudier le mt de P.

$$\vec{p} = m \vec{g} \vec{e}_y \quad \vec{F}_f = -\beta \vec{n} = -\beta (\dot{x} \vec{e}_x + \dot{y} \vec{e}_y + \dot{z} \vec{e}_z)$$

Newton: $\vec{p} + \vec{F}_f = m \cdot \vec{\ddot{a}}$

$$\begin{array}{l} \vec{e}_x \quad \left\{ \begin{array}{l} -\beta \dot{x} = \ddot{x} \cdot m \\ m \ddot{x} + \beta \dot{x} = 0 \end{array} \right. \quad \textcircled{1} \\ \vec{e}_y \quad \left\{ \begin{array}{l} m \ddot{y} + \beta \dot{y} - mg = 0 \\ m \ddot{y} + \beta \dot{y} = mg \end{array} \right. \quad \textcircled{2} \\ \vec{e}_z \quad \left\{ \begin{array}{l} -\beta \dot{z} = \ddot{z} \cdot m \\ m \ddot{z} + \beta \dot{z} = 0 \end{array} \right. \quad \textcircled{3} \end{array}$$

$$\textcircled{1} \quad \ddot{x} + \frac{\beta}{m} \dot{x} = 0$$

$$z^2 + \frac{\beta}{m} z = 0 \rightarrow z \cdot (z + \frac{\beta}{m}) = 0$$

Sol: $x(t) = A e^{ot} + B e^{-\frac{\beta}{m} t}$
 $x(t) = B e^{-\frac{\beta}{m} t} + A$ avec $A, B \in \mathbb{C}$

$$x(t_0) \rightarrow x_0 = 0$$

$$0 = B + A$$

$$x(t_0) \rightarrow v_{ox}, v_{oy}$$

$$v_{ox} = B \cdot -\frac{\beta}{m} \rightarrow B = -\frac{v_{ox} \cdot m}{\beta} \Rightarrow A = \frac{v_{ox} \cdot m}{\beta}$$

Donc $x(t) = \frac{-v_{ox} \cdot m}{\beta} \cdot (1 - e^{-\frac{\beta}{m} t})$

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \cdot g \cdot e^{\alpha t} \quad \rightarrow \alpha = 0 \\ x(0) &= x_0 \cdot g \cdot e^0 = x_0 \cdot g \\ x_0 &= 0 \end{aligned}$$

② $\ddot{y} + \frac{\beta}{m} \dot{y} - g = 0$

Poly correct: $z^2 + \frac{\beta}{m} z = 0$

j' C(z) j' L(c) j' up / j' s'

$$y(t) = C e^{\alpha t} + \mathbb{D} e^{-\frac{\beta}{m}t} \quad \text{avec } C, \mathbb{D} \in \mathbb{C} \rightarrow z^2 + \frac{\beta}{m}z = 0 \quad \text{ag. x} \quad | 1$$

$$g(t) = C + \mathbb{D} e^{-\frac{\beta}{m}t} \quad \text{a. } z^2 + \frac{\beta}{m}z = 0 \quad \text{a.g.} \quad | 1$$

Sol part : $y(t) = \frac{B}{m} \cdot y = g \rightarrow y' = \frac{g \cdot m}{B} \rightarrow g = \frac{\beta}{m} \cdot a.g.$
 $\Rightarrow a = \frac{\beta}{m}$
 $\text{donc } u(x) = x \cdot \frac{B \cdot g}{m}$
 $u_p(t) = \frac{B \cdot g}{m} t$

Donc $y(t) = C + \mathbb{D} e^{-\frac{\beta}{m}t} + \frac{g \cdot m}{B} \cdot t$

$$y(t_0) = 0 = C \cdot \mathbb{D}$$

$$y = \left(\frac{m}{\beta} v_{0,y} - g \frac{m^2}{\beta^2} \right) (1 - e^{-\frac{\beta}{m}t}) + \frac{mg}{\beta} t$$

$$y(t_0) = -\mathbb{D} \frac{B}{m} + \frac{g \cdot m}{B} = v_{0y}$$

$$\mathbb{D} = \left(\frac{g \cdot m}{B} - v_{0y} \right) \cdot \frac{m}{\beta} = \mathbb{D} = \frac{g \frac{m^2}{\beta}}{\beta} - v_{0y} \cdot \frac{m}{\beta}$$

$$y = \left(\frac{m}{\beta} v_{0y} - g \frac{m^2}{\beta^2} \right) (1 - e^{-\frac{\beta}{m}t}) + \frac{g \cdot m}{B} \cdot t \quad C = -\mathbb{D} = -g \frac{m^2}{\beta^2} + v_{0y} \frac{m}{\beta}$$

Finalement, $y(t) = \frac{m}{\beta} \cdot \left(\frac{g \cdot m}{B} + v_{0y} + e^{-\frac{\beta}{m}t} \frac{g \cdot m}{B} - e^{-\frac{\beta}{m}t} v_{0y} + gt \right)$

$$m \ddot{z} + \beta \dot{z} = 0$$

$$\dot{z} + \frac{\beta}{m} z = 0$$

$$\rightarrow z(t) = E + F e^{-\frac{\beta}{m}t}$$

$$z(t_0) = 0 = E + F \rightarrow F = 0$$

$$z(t_0) = 0 = F \cdot -\frac{\beta}{m} \rightarrow F = 0$$

$$z(t) = 0$$

U t'entends une vitesse finie

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |\vec{v}| = C \text{ (A prouver)}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + y^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \sqrt{\left(\frac{v_{0x} m}{B} \cdot e^{-\frac{\beta}{m}t} \right)^2 + \left(\frac{g \cdot m}{B} + e^{-\frac{\beta}{m}t} \cdot \left(v_{0y} - g \frac{m}{\beta} \right) \right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{g^2 m^2}{B^2}} = \frac{g \cdot m}{B}$$

$$\dot{x} = \frac{v_{0x} m}{B} \cdot \frac{B}{m} \cdot e^{-\frac{\beta}{m}t} = v_{0x} \cdot e^{-\frac{\beta}{m}t}$$

$$\dot{y} = \frac{g \cdot m}{B} + e^{-\frac{\beta}{m}t} \cdot \frac{B}{m} \cdot \left(\frac{m}{\beta} v_{0y} - g \frac{m^2}{\beta^2} \right)$$

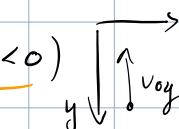
$$= \frac{g \cdot m}{B} + e^{-\frac{\beta}{m}t} \cdot \left(v_{0y} - g \frac{m}{\beta} \right)$$

y_{\max} est atteint lorsque $\dot{y} = 0$ (on a que l'enjette vers le haut: $v_{0y} < 0$)

$$\dot{y} = \frac{g \cdot m}{B} + e^{-\frac{\beta}{m}t} \cdot \frac{B}{m} \left(\frac{m}{\beta} v_{0y} - g \frac{m^2}{\beta^2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{-\frac{\beta}{m}t} \left(\frac{B}{m} v_{0y} - g \frac{m^2}{\beta^2} \right) = -g \frac{m^2}{\beta^2}$$

$$\Leftrightarrow -1 = e^{-\frac{\beta}{m}t} \cdot \left(\frac{B}{m} v_{0y} - 1 \right)$$

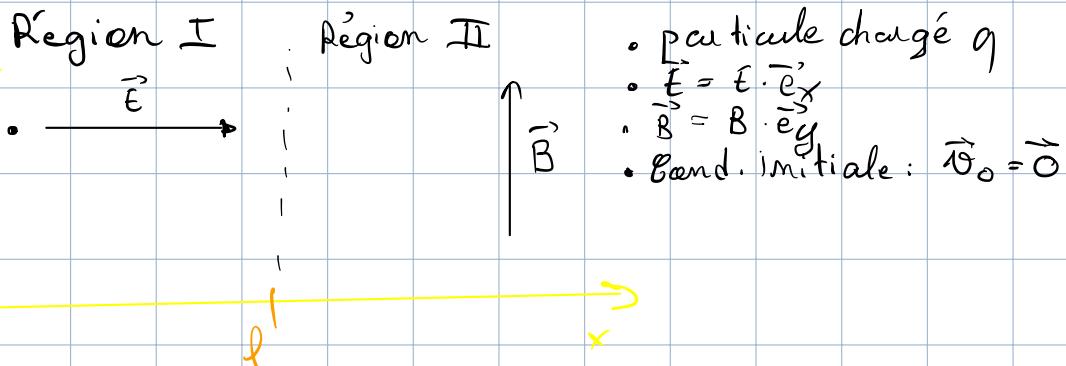


$$\hookrightarrow -e^{\frac{q}{m} \cdot t} = \frac{v_{oy}}{mg} \cdot \frac{t}{\cancel{m}} \Rightarrow e^{\frac{q}{m} \cdot t} = \frac{1 - \frac{v_{oy} \cdot \beta}{mg}}{\cancel{m}}$$

$$\Rightarrow \frac{q}{m} \cdot t = \ln \left(\frac{1 - \frac{v_{oy} \cdot \beta}{mg}}{\cancel{m}} \right)$$

$$t_{\max} = \ln \left(\frac{1 - \frac{v_{oy} \cdot \beta}{mg}}{\cancel{m}} \right) \cdot \frac{m}{\beta}$$

2.1.4. Mvt d'une particule soumise à des forces E. M.



- ① Mvt de la particule q dans \textcircled{I} et \textcircled{II}
- ② Le temps la particule passe dans \textcircled{I}
- ③ Mq la particule décrit un cercle dans la région \textcircled{II}
 ↳ $u \cdot q : \frac{q}{m} = f(\vec{E}, \vec{B}, t, R)$
 ↳ rayon du cercle

④ On a par Newton :

$$\vec{F} = m \vec{a} \Rightarrow q \vec{E} = m \cdot \vec{a} \Rightarrow \begin{cases} q \vec{E}_x = m \ddot{x} \\ q \vec{E}_y = m \ddot{y} \\ q \vec{E}_z = m \ddot{z} \end{cases}$$

$$\text{Né que } \vec{E} = E \cdot \vec{e}_x$$

$$\rightarrow q E = m \ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} = \frac{q}{m} E$$

$$\ddot{x} = \frac{q}{m} E t + C_1 \rightarrow N(t_0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$\left(\ddot{x}(t) = \frac{q}{m} E t + \frac{C_2}{2} \right) \quad \dot{y} = C_2 = 0 \quad y = C_3 = 0$$

$$\dot{z} = C_4 = 0 \quad z = C_5 = 0$$

$$\text{Donc la particule atteint l'autre temps : } t = x(t_f) = \frac{q}{m} E \frac{t_f^2}{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{2lm}{qE}} = t_f$$

II

$$\theta_x(t) = \frac{q}{m} E \cdot t$$

$$ct \quad \vec{F} = m \vec{a} \Leftrightarrow q \vec{v} \wedge \vec{B} = m \vec{a} \Leftrightarrow q \vec{B} \vec{v} \wedge \vec{e}_y$$

$$\Rightarrow q \vec{B} (\dot{x} \vec{e}_x + \dot{y} \vec{e}_y + \dot{z} \vec{e}_z) \wedge \vec{e}_y$$

$$q \vec{B} (\dot{z} \vec{e}_z - \dot{x} \vec{e}_x) = m \vec{a}$$

Donc en projetant :

$$\int q \vec{B} \dot{x} = m \ddot{z} \quad (1)$$

$$0 = m \dot{y} \quad (2)$$

$$-q \vec{B} \dot{z} = m \ddot{x} \quad (3)$$

En dérivant (1) :

$$(3) \quad \ddot{z} \cdot \frac{-q \vec{B}}{m} = \ddot{x} \quad \downarrow \text{Ouvert connexe}$$

$$\frac{d}{dt} (2 \cdot \frac{-q \vec{B}}{m}) = \frac{d}{dt} (\dot{x})$$

$$\Rightarrow -\frac{q \vec{B}}{m} \cdot 2 + C_1 = \dot{x} \quad \rightarrow z=0 \text{ et } x=l \Rightarrow \dot{x} = \frac{q E}{m} \sqrt{\frac{2 l g E}{q E}}$$

$$\text{Donc } C_1 = \sqrt{\frac{2 l g E}{m}}$$

$$\text{Donc } \dot{x} = -\frac{q \vec{B}}{m} \cdot 2 + \sqrt{\frac{2 l g E}{m}}$$

$$\dot{x} = \frac{\sqrt{2 l g E}}{\sqrt{m}}$$

$$(2) \quad 0 = m \dot{y} \rightarrow \dot{y} = C_2 = 0$$

$$(1) \quad q \vec{B} \dot{x} = m \ddot{z} \Leftrightarrow q \frac{\vec{B} \dot{x}}{m} = \ddot{z}$$

$$\text{Donc } q \frac{\vec{B}}{m} \cdot x + C_3 = \ddot{z} \quad x=l \rightarrow z=0 \Leftrightarrow \ddot{z}=0$$

$$\cdot \frac{q \vec{B}}{m} \cdot l + C_3 = 0 \Rightarrow C_3 = -\frac{q \vec{B} l}{m}$$

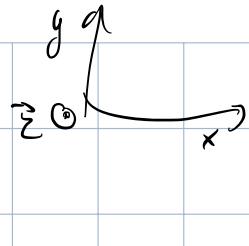
$$\text{Donc } \ddot{z} = \frac{q \vec{B}}{m} (x-l)$$

Done Si on reprend les eq. de base

$$-\frac{q^2 \vec{B}^2}{m} (x-l) = m \ddot{x} \Leftrightarrow \ddot{x} = -\frac{q^2 \vec{B}^2}{m^2} (x-l)$$

$$\ddot{x} + \frac{q^2 \vec{B}^2}{m^2} x = \frac{q^2 \vec{B}^2}{m^2} l$$

$$\text{Eq. coract : } z^2 + \frac{q^2 \vec{B}^2}{m^2} = 0 \rightarrow z = \pm i \frac{q \vec{B}}{m}$$



Donc Sol gen. $\times(t) = C \cos(\frac{qB}{m}t) + D \sin(\frac{qB}{m}t)$
avec $C, D \in \mathbb{C}$

vu que sol. part. $\frac{q^2 B^2 l}{m^2} e^{i\frac{qB}{m}t} \rightarrow 0$ pas sol.

Donc $u_p(x) = a$

$$\text{D}^j L(z) \\ z^2 \rightarrow \frac{q^2 B^2}{m^2}$$

$$\text{D}^j L(s) \\ \frac{q^2 B^2}{m^2}$$

$$a \quad 1$$

$$\rightarrow \frac{q^2 B^2}{m^2} l = \frac{q^2 B^2}{m^2} \cdot a \\ \Rightarrow a = l$$

Donc $x(t) = C \cos(\frac{qB}{m}t) + D \sin(\frac{qB}{m}t) + l$

Correction ①

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{qB}{m} z \quad (1) \\ \ddot{z} = \frac{qB}{m} \dot{x} \quad (3) \end{cases}$$

équation de la trajectoire $x(z)$; $y(x)$...

on intègre

$$\dot{x} = -\frac{qB}{m} z + K_1 \rightarrow C.I$$

$$\text{en } t = t_l \rightarrow \vec{r}_0 = (l, 0, 0)$$

$$\vec{v}_0 = (0, l, 0)$$

$$= \left(\frac{2lqE}{m}, 0, 0 \right)$$

$$\text{Donc } K_1, \text{ en } t = t_l \rightarrow \sqrt{\frac{2lqE}{m}} = -\frac{qB}{m} \cdot 0 + K_1$$

$$\Rightarrow K_1 = \sqrt{\frac{2lqE}{m}}$$

$$\bullet \dot{x} = -\frac{qB}{m} z + \sqrt{\frac{2lqE}{m}} \quad (4)$$

Intégrons ③

$$\dot{z} = \frac{qB}{m} x + K_2 \rightarrow \begin{aligned} x = l & \quad \dot{z} = 0 \\ 0 = \frac{qB}{m} l + K_2 & \rightarrow K_2 = -\frac{qBl}{m} \end{aligned}$$

$$\dot{z} = \frac{qB}{m} (x - l) \quad (5)$$

$$\text{C.A. } \dot{x} + (4) \circ \dot{z}$$

$$\gamma = 0$$

$$\frac{d}{dt}(\dot{x}\dot{x} + \dot{z}\dot{z}) = -\frac{qB}{m}\dot{z}\dot{x} + \frac{qB}{m}\dot{x}\dot{z}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) = 0$$

Intégrons: $\dot{x}^2 + \dot{z}^2 = K_3$

$$\text{CI: } \dot{x} = \sqrt{\frac{2lqE}{m}} \quad \dot{z} = 0 \quad \Rightarrow \quad K_3 = \frac{2lqE}{m}$$

$$\dot{x}^2 + \dot{z}^2 = \frac{2lqE}{m}$$

REMPLACEMENTS (UL 5) DANS (6)

$$\left(-\frac{qB}{m}z + \sqrt{\frac{2lqE}{m}} \right)^2 + \left(\frac{qB}{m}(x-l) \right)^2 = \frac{2lqE}{m}$$

$$= \left(z - \sqrt{\frac{2lqE}{m}} \right)^2 + (x-l)^2 = \frac{2lE_m}{qB^2}$$

→ équation d'un cercle de centre de rayon $\sqrt{\frac{2lE_m}{qB^2}}$

$$\text{ct } \frac{q}{m} = \frac{2lE}{B^2 R^2}$$

$$\ddot{z} = i \frac{qB}{m} (\dot{x} + i\dot{z})$$

$$\begin{aligned} z &= x + iy \\ \dot{z} &= \dot{x} + i\dot{y} \\ \ddot{z} &= \ddot{x} + i\ddot{y} \end{aligned}$$

$$\ddot{z} - i \frac{qB}{m} \dot{z} = 0$$

$$\text{Pol. caract. } \sigma^2 - i \frac{qB}{m} \sigma = 0$$

$$\sigma \leftarrow \sigma' + i \frac{qB}{m}$$

$$\text{Solen: } A e^{0\sigma'} + C e^{i \frac{qB}{m} \sigma'}$$

$$z(t) = A + C e^{i \frac{qB}{m} t}$$

$$z(t) = C \cdot i \frac{qB}{m} \cdot e^{i \frac{qB}{m} t}$$

$$\text{Donc } |z| = \sqrt{A^2 + C^2} \text{ en } t=0$$

$$|\dot{z}| = \sqrt{\dot{C}^2 + \dot{z}^2}$$

$$= C \frac{qB}{m} = \sqrt{\frac{2lqE}{m}}$$

$$\text{En } t=0$$

$$z(t) = A + C = l$$

$$\Rightarrow C = \sqrt{\frac{2lE_m}{B^2 q}}$$

$$\frac{1}{i} = \frac{i}{-1} = -i$$

$$z(t_0) = C \cdot \frac{qB}{m} \cdot i e^{i \frac{qB}{m} t_0} = \sqrt{\frac{2lqE}{m}} + 0$$

$$\Rightarrow C = \sqrt{\frac{2lEm}{B^2q}} i$$

$$A - i\sqrt{\frac{2lEm}{B^2q}} = l \Rightarrow A = l + i\sqrt{\frac{2lEm}{B^2q}}$$

$$\text{Donc } z(t) = l + i\sqrt{\frac{2lEm}{B^2q}} - i\sqrt{\frac{2lEm}{B^2q}} \cdot e^{i\frac{qB}{m}t}$$

$$z(t) = l + i\sqrt{\frac{2lEm}{B^2q}} (1 - e^{i\frac{qB}{m}t})$$

\star $\Re(z) = R_0(z) = l + \sqrt{\frac{2lEm}{B^2q}} \cdot \sin\left(\frac{qB}{m}t\right)$

$$x(t) = \sqrt{\frac{2mlE}{qB^2}} \sin\left(\frac{qB}{m}t\right) + l$$

$$z(t) = \sqrt{\frac{2mlE}{qB^2}} \left(1 - \cos\left(\frac{qB}{m}t\right)\right)$$

\star $\Im(z) = \sqrt{\frac{2lEm}{B^2q}} - \cos\left(\frac{qB}{m}t\right)\sqrt{\frac{2lEm}{B^2q}}$

$$= \sqrt{\frac{2lEm}{B^2q}} \cdot (1 - \cos\left(\frac{qB}{m}t\right))$$

$$\star z - i\frac{qB}{m}z = 0 \quad z = x + iy$$

$$k = \sqrt{\frac{2ml}{qE}}$$

$$\Rightarrow p^2 - i\frac{qB}{m}p = 0 \Rightarrow p_{n,2} = 0, i\frac{qB}{m}$$

Sol gen: $\begin{cases} z = C e^{i\frac{qB}{m}t} \\ \dot{z} = i\frac{qB}{m}C e^{i\frac{qB}{m}t} \end{cases} \quad \text{①}$

CI: $z(t=0) = z_c(t=\sqrt{-}) + iz(t=\sqrt{-}) \rightarrow t = \sqrt{\frac{2ml}{qE}}$

$$\begin{cases} z(t=0) = l = c + \text{①} \\ \dot{z}(t=0) = \sqrt{\frac{2lqE}{m}} = i\frac{qB}{m}C \end{cases}$$

$$\vec{r} = (l, 0, 0)$$

$$\vec{v} = \sqrt{\frac{2lqE}{m}}, 0, 0)$$

On peut redéfinir $t = 0$

$$\begin{aligned} C &= -i\sqrt{\frac{2mlE}{qB^2}} \\ \Rightarrow l + i\sqrt{\frac{2mlE}{qB}} &= \text{①} \end{aligned}$$

$$\rightarrow z = -i\sqrt{\frac{2mlE}{qB^2}} \left[\cos\left(\frac{qB}{m}t\right) + i\sin\left(\frac{qB}{m}t\right) \right]$$

$$= \sqrt{\frac{2mlE}{qB^2}} \left[\sin\left(\frac{qB}{m}t\right) + l + i\sqrt{\frac{2mlE}{qB^2}} \cdot (1 - \cos\left(\frac{qB}{m}t\right)) \right]$$

$$\begin{cases} x = C_1 t + C_4 \\ y = C_2 t + C_5 \\ z = -\frac{1}{2} g t^2 + C_3 t + C_6 \end{cases}$$

où $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ sont les constantes d'intégration déterminées par les conditions initiales. En $t = 0$ on a :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \dot{x} = v_{0,x} = v_0 \cos \alpha \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = v_{0,z} = v_0 \sin \alpha \end{cases}$$

On obtient :

$$\begin{cases} C_1 = v_0 \cos \alpha \\ C_2 = 0 \\ C_3 = v_0 \sin \alpha \\ C_4 = C_5 = C_6 = 0 \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} x = v_0 \cos(\alpha) t \\ y = 0 \\ z = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin(\alpha) t \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \dot{x} = v_0 \cos \alpha \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = -g t + v_0 \sin \alpha \end{cases}$$

2. Altitude maximale.

L'altitude maximale est atteinte lorsque la vitesse verticale \dot{z} s'annule. On a alors :

$$\dot{z} = 0 \Rightarrow t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

Et

$$z_{max} = -\frac{1}{2} g \left(\frac{v_0 \sin \alpha}{g} \right)^2 + v_0 \sin \alpha \left(\frac{v_0 \sin \alpha}{g} \right) = \frac{1}{2g} (v_0 \sin \alpha)^2$$

3. Temps de vol.

La particule regagne le sol lorsque la hauteur z s'annule (et bien sûr $t > 0$). On a alors :

$$0 = (-\frac{1}{2} g t + v_0 \sin \alpha) t \Rightarrow t_{vol} = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$$

On remarque que le projectile atteint son altitude maximale exactement à la moitié de la durée du vol.

4. Portée du tir.

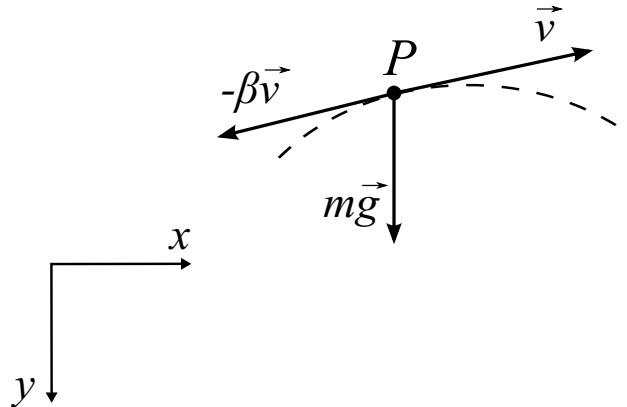
La portée du tir x_{max} est donnée en $t_{vol} = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$. On a alors :

$$x_{max} = v_0 \cos \alpha t_{vol} = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}$$

2.1.2 Mouvement d'un projectile dans un milieu résistant

Etudier le mouvement d'un point matériel P pesant subissant une force de résistance proportionnelle à la vitesse, égale à $-\beta \vec{v}$. (Note : un corps sphérique en mouvement lent dans un fluide visqueux subit une résistance de cette forme. Pour une sphère de rayon R , β est donné par la formule de Stokes $\vec{F} = -6\pi\eta R\vec{v}$, où η est le coefficient de viscosité du fluide). On donne comme conditions initiales : $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, $z(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_{0,x}$, $\dot{y}(0) = v_{0,y}$ et $\dot{z}(0) = 0$. On suppose que la force de pesanteur est orientée comme \vec{e}_y .

Montrer ensuite que la vitesse tend vers une limite finie. Si le point matériel est lancé vers le haut, calculer la hauteur maximale atteinte.



La somme des forces s'appliquant au point P s'écrit :

$$\vec{F} = m\vec{g} - \beta\vec{v}$$

L'équation de Newton $\vec{F} = m\vec{\gamma}$ implique donc :

$$\begin{aligned}\vec{\gamma} &= \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z \\ &= \vec{g} - \frac{\beta}{m}\vec{v} = g\vec{e}_y - \frac{\beta}{m}(\dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z)\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{\beta}{m}\dot{x} \\ \ddot{y} = g - \frac{\beta}{m}\dot{y} \\ \ddot{z} = -\frac{\beta}{m}\dot{z} \end{cases}$$

On doit résoudre trois équations différentielles d'ordre deux, linéaires à coefficients constants.

La première équation, $\ddot{x} + \frac{\beta}{m}\dot{x} = 0$, est une équation homogène. La solution la plus générale de cette équation s'écrit :

$$x(t) = P_1(t) e^{z_1 t} + P_2(t) e^{z_2 t}$$

où z_1 et z_2 sont les zéros distincts du polynôme caractéristique de l'équation, à savoir $z^2 + \frac{\beta}{m}z = 0$, et où $P_i(t)$ ($i = 1, 2$) sont des polynômes de degré inférieur ou égal à $m_i - 1$, m_i étant la multiplicité du zéro z_i . On trouve les zéros du polynôme caractéristique directement : $z_1 = -\frac{\beta}{m}$ et $z_2 = 0$, de multiplicité $m_1 = m_2 = 1$. Les polynômes sont donc réduits à des constantes A et B . Au final, on a :

$$x(t) = Ae^{-\frac{\beta}{m}t} + B$$

Au temps $t = 0$, $x = 0$ et $\dot{x} = v_{0,x}$, donc :

$$\begin{cases} x(0) = A + B = 0 \\ \dot{x}(0) = -A\frac{\beta}{m} = v_{0,x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{m}{\beta}v_{0,x} \\ B = -A = \frac{m}{\beta}v_{0,x} \end{cases}$$

Finalement :

$$x = \frac{m}{\beta}v_{0,x}(1 - e^{-\frac{\beta}{m}t})$$

Notons qu'on aurait pu réduire l'équation différentielle à une équation différentielle d'ordre un, tout simplement en posant $X = \dot{x}$. On aurait alors trouvé les solutions de :

$$\dot{X} = -\frac{\beta}{m}X = 0$$

qui s'écrivent :

$$X(t) = Ce^{-\frac{\beta}{m}t}$$

avec C une constante à déterminer. On aurait ensuite intégré l'équation $\dot{x} = X$ pour trouver une solution $x(t)$ identique à celle trouvée précédemment.

La troisième équation, $\ddot{z} + \frac{\beta}{m}\dot{z} = 0$, est identique à la première, si bien que :

$$z(t) = Ce^{-\frac{\beta}{m}t} + D$$

Les conditions initiales, $z(0) = 0$ et $\dot{z}(0) = 0$, impliquent :

$$\begin{cases} z(0) = C + D = 0 \\ \dot{z}(0) = -C\frac{\beta}{m} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = 0 \\ D = 0 \end{cases}$$

On a donc $z(t) = 0$. L'expression de $z(t)$ aurait pu se déduire sans calcul. En effet, comme $\dot{z} = 0$ à l'instant initial, la somme des forces selon z , qui se limite à $F_z = -\beta\dot{z}$, est également nulle au temps initial. Si elle est nulle, la loi de Newton implique que l'accélération selon z l'est aussi et par conséquent \ddot{z} n'a pas changé un intervalle infinitésimal de temps plus tard. Comme \dot{z} était nul au temps initial, la force selon z reste donc nulle à cet instant ultérieur et il n'y a donc à nouveau pas d'accélération selon z . La vitesse n'évolue donc toujours pas. Comme ce raisonnement peut être répété indéfiniment, on en conclut que $\ddot{z}(t) = 0 = \dot{z}(t) \forall t$ et que $z(t) = z_0 = 0$.

La deuxième équation, $\ddot{y} + \frac{\beta}{m}\dot{y} = g$, est non-homogène. On trouve sa solution générale en additionnant la solution générale de l'équation homogène (SGEH) à une solution particulière de l'équation non homogène (SPENH). L'équation homogène s'écrit $\ddot{y} + \frac{\beta}{m}\dot{y} = 0$ et est identique à la première équation. Sa solution générale s'écrit :

$$y_H(t) = Ae^{-\frac{\beta}{m}t} + B$$

Une solution particulière de l'équation non-homogène est fournie par $y_p = \frac{mg}{\beta}t$. La solution cherchée s'écrit donc :

$$y(t) = Ae^{-\frac{\beta}{m}t} + B + \frac{mg}{\beta}t$$

Au temps $t = 0$, $y = 0$ et $\dot{y} = v_{0,y}$, donc :

$$\begin{cases} y(0) = A + B = 0 \\ \dot{y}(0) = -A\frac{\beta}{m} + \frac{mg}{\beta} = v_{0,y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = m^2 \frac{g}{\beta^2} - \frac{m}{\beta} v_{0,y} \\ B = -A = -g \frac{m^2}{\beta^2} + \frac{m}{\beta} v_{0,y} \end{cases}$$

Finalement :

$$y = \left(\frac{m}{\beta}v_{0,y} - g \frac{m^2}{\beta^2}\right)(1 - e^{-\frac{\beta}{m}t}) + \frac{mg}{\beta}t$$

Montrons que la vitesse tend alors vers une limite finie. On sait que $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$. On a :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \left(-\frac{\beta}{m}\right) \left(-\frac{m}{\beta}v_{0,x}\right) e^{-\frac{\beta}{m}t} = v_{0,x}e^{-\frac{\beta}{m}t} \\ \dot{y} &= \left(-\frac{m}{\beta}v_{0,y} + g \frac{m^2}{\beta^2}\right) \left(-\frac{\beta}{m}\right) e^{-\frac{\beta}{m}t} + \frac{mg}{\beta} \\ &= \left(v_{0,y} - \frac{mg}{\beta}\right) e^{-\frac{\beta}{m}t} + \frac{mg}{\beta} \end{aligned}$$

Quand $t \rightarrow \infty$, on voit que $\dot{x} \rightarrow 0$ et $\dot{y} \rightarrow \frac{mg}{\beta}$. Donc la vitesse v tend vers $\frac{mg}{\beta}$.

Si on lance le projectile vers le haut ($v_{0,y} < 0$), la hauteur maximale h sera atteinte lorsque la vitesse verticale \dot{y} s'annule. On a alors :

$$\begin{aligned} 0 &= (v_{0,y} - \frac{mg}{\beta})e^{-\frac{\beta}{m}t} + \frac{mg}{\beta} \\ &= (\frac{\beta}{mg}v_{0,y} - 1)e^{-\frac{\beta}{m}t} + 1 \\ \Rightarrow -1 &= (\frac{\beta}{mg}v_{0,y} - 1)e^{-\frac{\beta}{m}t} \\ \Rightarrow e^{\frac{\beta}{m}t} &= 1 - \frac{\beta}{mg}v_{0,y} \\ \Rightarrow t &= \frac{m}{\beta} \ln(1 - \frac{\beta}{mg}v_{0,y}) \end{aligned}$$

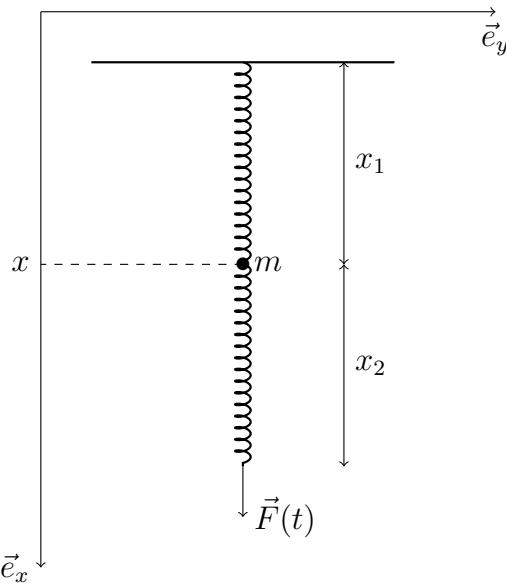
Et en remplaçant t dans y :

$$\begin{aligned}
-h = y_{max} &= \left(\frac{m}{\beta} v_{0,y} - g \frac{m^2}{\beta^2} \right) \left(1 - e^{-\ln(1 - \frac{\beta}{mg} v_{0,y})} \right) + \frac{mg}{\beta} \left(\frac{m}{\beta} \ln(1 - \frac{\beta}{mg} v_{0,y}) \right) \\
&= g \frac{m^2}{\beta^2} \left(\frac{\beta}{mg} v_{0,y} - 1 \right) \left(1 - \frac{1}{1 - \frac{\beta}{mg} v_{0,y}} \right) + g \frac{m^2}{\beta^2} \ln(1 - \frac{\beta}{mg} v_{0,y}) \\
&= g \frac{m^2}{\beta^2} \left(\frac{\beta}{mg} v_{0,y} - 1 + 1 \right) + g \frac{m^2}{\beta^2} \ln(1 - \frac{\beta}{mg} v_{0,y}) \\
&= \frac{m}{\beta} v_{0,y} + g \frac{m^2}{\beta^2} \ln(1 - \frac{\beta}{mg} v_{0,y})
\end{aligned}$$

2.1.3 Inertie et poids

Une balle de masse m est suspendue au plafond par un ressort de masse nulle, de constante de raideur k et de longueur naturelle égale à 0. Le ressort se casse s'il subit une force telle que sa longueur est plus grande que la longueur critique l_c ($l_c > \frac{mg}{k}$). Un ressort identique pend en-dessous de la balle. Lorsque l'on tire lentement sur l'extrémité du ressort inférieur, le ressort supérieur se casse. Lorsque l'on tire trop rapidement sur l'extrémité du ressort inférieur, celui-ci se casse. Déterminer la force $F(t)$ qui, appliquée à l'extrémité du ressort inférieur, provoque la rupture des deux ressorts simultanément.

$$\vec{F}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \alpha t \vec{e}_x & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

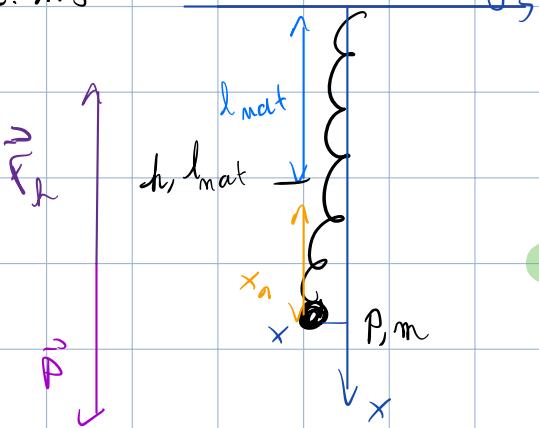


Au temps initial, $F(0) = 0$ donc les conditions initiales sont :

$$\begin{aligned}
x(0) &= \frac{mg}{k} \\
\dot{x}(0) &= 0
\end{aligned}$$

2.1.3

cas I



• Restant de longueur mat l_{mat}

- Constante de raideur h

- Masse du ressort négligeable

• Part P

- masse m

- Elongation du ressort $x_n = (l - l_{\text{mat}})$

$$x_c = x_{c_n} + l_{\text{mat}}$$

• CI: $k=0 \quad x(0) = x_0 \quad \dot{x}(0) = 0$

① Etudier le mouvement

↳ $x(t)$ ou $x_c(t)$

On a 2 forces: - Poïds: $\vec{P} = mg\vec{e}_z$

- Force de rappel du ressort: $\vec{F}_h = -h x_n \vec{e}_x$

On a position donnée par $\vec{r}(t) = r\vec{e}_x + r\vec{e}_y + r\vec{e}_z$

$$\vec{a}(t) = \ddot{r}(t) = \ddot{r}\vec{e}_x + \ddot{r}\vec{e}_y + \ddot{r}\vec{e}_z$$

Par Newton:

$$\bullet \vec{P} + \vec{F}_h = m\vec{a}$$

→ Après projection (tout se passe selon \vec{e}_x)

$$mg - h x_n = m \ddot{x} \quad \ddot{x} = \ddot{x}_n$$

$$\rightarrow m \ddot{x} + h x_n - mg = 0 \quad \rightarrow \text{on va noter } x_1 = x \quad \boxed{x_1 = x}$$

Donc on a l'éq. diff: $m \ddot{x} + h x = mg$

• Poly ceu. $m \ddot{x}^2 + h = 0$

$$\ddot{x} = \pm i \sqrt{\frac{h}{m}}$$

$$\bullet x(t) = A e^{i \sqrt{\frac{h}{m}} t} + B e^{-i \sqrt{\frac{h}{m}} t}$$

$$\text{Posons } \sqrt{\frac{h}{m}} = \omega_0$$

Équation poly : $mg \cdot e^0 \rightarrow u_p(x) = x^0 \cdot a \cdot e^0$

$$\begin{array}{r} mp^2 + d \\ \hline 2mp \end{array} \quad \begin{array}{ccc} h & a & a \\ 0 & 0 & - \end{array}$$

Donc $h \cdot a = mg$

$$\Rightarrow a = \frac{mg}{h} \quad \rightarrow \quad mg - k \frac{mg}{h} = m \cdot o$$

$$o = \underline{\underline{0}} \quad \underline{\underline{OK}}$$

Finalement : $x_1(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + \frac{mg}{h}$

On a $x(t=0) = x_{1,0} = A + \frac{mg}{h} \rightarrow A = x_{1,0} - \frac{mg}{h}$

$$\dot{x}(t=0) = v_0 = -\omega_0 \cdot A \underset{=0}{\cancel{\sin(\omega_0 t)}} + B \omega_0 \cdot \cos(\omega_0 t)$$

$$\rightarrow v_0 = B \omega_0 \Rightarrow B = \frac{v_0}{\omega_0}$$

On trouve $x_1(t) = x_{1,0} - \frac{g}{\omega_0^2} \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + mg$

Unité

On doit avoir A et B en unité de longueur

fm.a

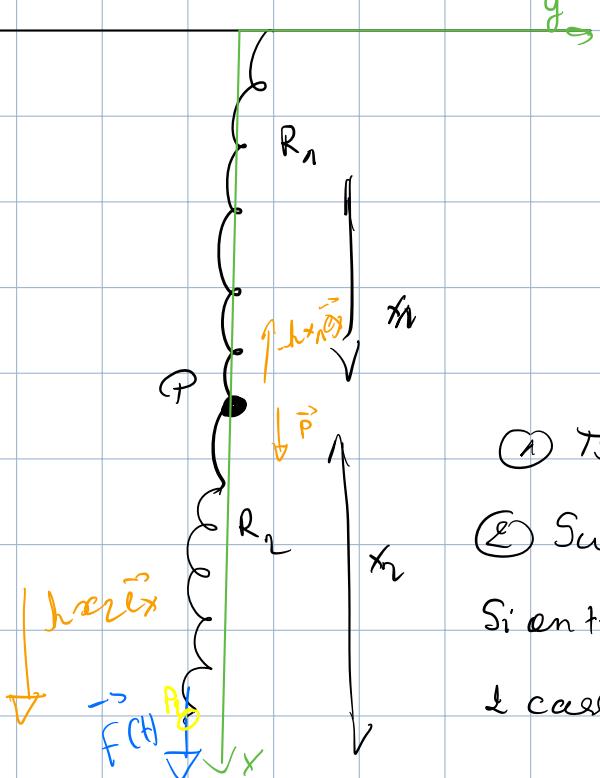
$$A = x_{1,0} - \frac{mg}{h} \rightarrow \left[\frac{mg}{h} \right] = \frac{kg \cdot m \cdot s^{-2}}{kg \cdot s^{-2}} = m \underline{\underline{OK}}$$

$$N/m = kg \cdot m \cdot s^{-2} \cdot m$$

$$B = \frac{v_0}{\omega_0} = v_0 \left(\frac{ch}{m} \right)^{-n} \rightarrow \left([v_0 \sqrt{\frac{h}{m}}]^{-n} \right) = m \cdot s^{-1} \left(\frac{kg \cdot s^{-2}}{kg} \right)^{-1} = m \cdot s^{-1} \cdot s = m \underline{\underline{OK}}$$

Tous intérressent

$$\text{Si } x_{1,0} = \frac{mg}{h}, v_{1,0} = 0 \text{ alors } C = 0 = D, x_1(t) = \frac{mg}{h}$$



• 2 ressort identiques

• Force appliquée au bout du ressort 2

$$\vec{F}(t) = \alpha t \vec{e}_x \quad x_{1,0} = \frac{mg}{h} \quad v_{1,0} = 0$$

x_1, x_2 : les elongations des ressorts 1 et 2

① Trouver $x_1(t)$ et $x_2(t)$.

② Supposons que les ressorts sont initialement "droitement".

Si on tire "rapidement" sur le ressort 2, le ressort 1 cède en premier. Que doit valoir $\vec{F}(t)$ pour que les 2 ressorts cassent en même temps.

• On a par Newton

$$m\ddot{x} = mg - h x_1 + h x_2$$

$$\rightarrow m\ddot{x} = mg - h x_1 + F(t)$$

$$\ddot{x} = \frac{g}{m} - \frac{h}{m} x + \frac{\alpha t}{m}$$

$$\ddot{x} + \frac{h}{m} x = \frac{g}{m} + \alpha t \quad \rightarrow \quad p^2 + \frac{h}{m} = 0$$

$$\rightarrow p = \pm i \sqrt{\frac{h}{m}} \quad \rightarrow \omega_c = \sqrt{\frac{h}{m}}$$

Sol. part:

$$(a) \frac{g}{m} \rightarrow \text{sol part: } \frac{mg}{\omega_h}$$

$$(b) \frac{\alpha t}{m} \rightarrow \text{up}(x) = (ax+b) \cdot e^{i\omega_c t} \cdot x^0$$

$$\left. p^2 + \frac{h}{m} \right| \cdot \frac{h}{m} \quad ax+b \quad 1 \quad \rightarrow \frac{h}{m} \cdot (ax+b) = \frac{\alpha}{m} x \quad \Rightarrow \int a \cdot \frac{h}{m} = \frac{\alpha}{m}$$

$$x_1(t) = A \cos(\omega_c t) + B \sin(\omega_c t) + \frac{g}{h} + \frac{a}{h} \cdot t$$

$$x_1(t=0) = \frac{mg}{h} = A \frac{mg}{h} \rightarrow A = 0$$

$$x_1(t=0) = 0, B \omega_c \cos(0) + \frac{a}{h} \Rightarrow B = -\frac{a}{\omega_c h}$$

$$\begin{cases} \frac{h}{m} b = 0 \\ b = 0 \\ a = \frac{d}{h} \end{cases}$$

$$\text{Ainsi } x_1(t) = -\frac{\alpha}{\omega} \sin(\omega t) + \frac{mg}{h} + \frac{\alpha t}{\omega}$$

$$\text{et } x_2(t) = \frac{\alpha \cdot t}{\omega}$$

$$x_1(t) = x_2(t) = l_c$$

$$\text{et } F(t) = \alpha \quad \alpha = ?$$

$$\left\{ \begin{array}{l} l = -\frac{\alpha}{\omega} \sin(\omega t) + \frac{mg}{h} + \frac{\alpha t}{\omega} \\ l = \frac{\alpha t}{\omega} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\alpha}{\omega} \sin(\omega t_c) + \frac{mg}{h} + \frac{\alpha t_c}{\omega} = \frac{\alpha t_c}{\omega}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{mg \cdot \omega}{h \sin(\omega t_c)} = \frac{mg \omega}{\sin(\omega t_c)}$$

ce qui correspond à l'état d'équilibre.

La position, la vitesse et l'accélération de M sont données par :

$$\begin{aligned}\vec{r} &= x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z \\ \vec{v} &= \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z \\ \vec{\gamma} &= \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z\end{aligned}$$

L'équation de Newton est donnée par :

$$m\vec{\gamma} = \vec{F}(t) + m\vec{g} - kx_1\vec{e}_x$$

où la force poids est donnée par

$$m\vec{g} = mg\vec{e}_x$$

Par la suite, on adoptera la notation $x = x_1$. On remarque que

$$\vec{F}(t) = kx_2\vec{e}_x \quad (2.1)$$

où x_2 est l'elongation du ressort inférieur. On se limite à l'étude selon \vec{e}_x . En projetant l'équation de Newton sur l'axe \vec{e}_x , on a :

$$\begin{aligned}m\ddot{x} &= mg + F(t) - kx \\ \Rightarrow m\ddot{x} + kx &= mg + F(t)\end{aligned}$$

Cas où $t \leq 0$

L'équation à résoudre se réduit à :

$$m\ddot{x} + kx = mg$$

Recherchons la solution homogène de cette équation. Le polynôme caractéristique est :

$$P(u) = mu^2 + k = 0$$

donc les solutions sont

$$u = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} = \pm i\omega$$

et la solution homogène est donc :

$$x_H(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}$$

Une solution particulière est donnée par :

$$x_p(t) = \frac{mg}{k}$$

La solution finale est donc donnée par :

$$x(t) = C \cos(\omega t) + D \sin(\omega t) + \frac{mg}{k}$$

Cas où $t > 0$

L'équation à résoudre est la suivante :

$$m\ddot{x} + kx = mg + \alpha t$$

La solution homogène est identique, seule la solution particulière change :

$$x_p(t) = \frac{mg}{k} + \frac{\alpha}{k}t$$

La solution finale est donc donnée par :

$$x(t) = C' \cos(\omega t) + D' \sin(\omega t) + \frac{mg}{k} + \frac{\alpha}{k}t$$

Les conditions initiales sont

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} x(0) = \frac{mg}{k} \\ \dot{x}(0) = 0 \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} C' + \frac{mg}{k} = \frac{mg}{k} \\ \omega D' + \frac{\alpha}{k} = 0 \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} C' = 0 \\ D' = -\frac{\alpha}{k\omega} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Dès lors, la solution s'écrit :

$$x(t) = -\frac{\alpha}{k\omega} \sin(\omega t) + \frac{mg}{k} + \frac{\alpha}{k}t \quad (2.2)$$

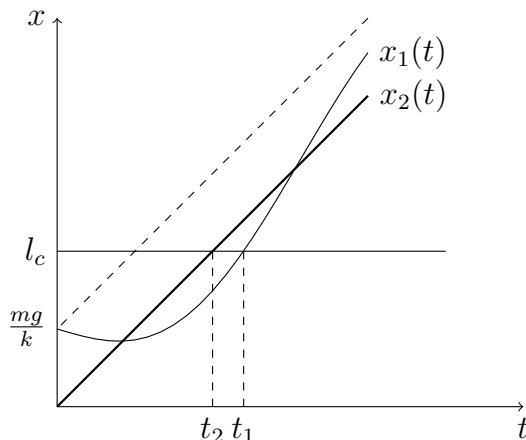
Le premier terme du membre de droite est la contribution oscillante, d'amplitude proportionnelle à α tandis que les deux autres termes forment la contribution linéaire.

Pour rappel, x est l'élongation du premier ressort, $x_1(t)$. Vu l'équation [2.1], on obtient :

$$x_2(t) = \frac{F(t)}{k} = \frac{\alpha t}{k} \quad (2.3)$$

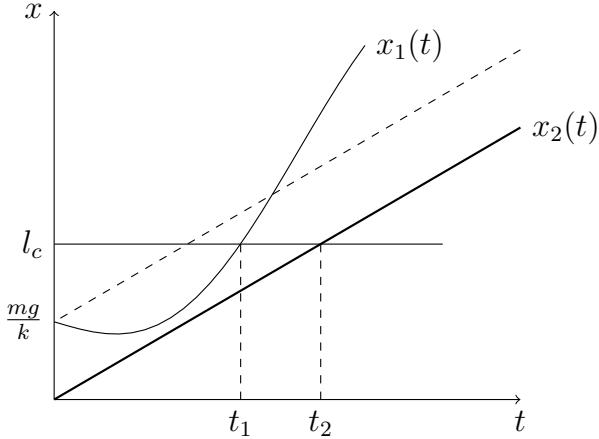
pour $t > 0$.

Lequel des deux ressorts casse en premier ? Cela dépend de α , c'est-à-dire de la "vitesse" à laquelle on tire.

Cas où $\alpha \gg$:

On constate que le ressort 2 casse en premier.

Cas où $\alpha \ll$:



On constate que le ressort 1 casse en premier.

On peut déterminer la force $F(t)$ telle que les deux ressorts cassent au même instant, noté t^* . Pour ce faire, il faut que $x_1(t^*) = x_2(t^*) = l_c$. Vu les équations (2.2) et (2.3), on a :

$$\begin{cases} l_c = -\frac{\alpha}{k\omega} \sin(\omega t^*) + \frac{mg}{k} + \frac{\alpha t^*}{k} \\ l_c = \frac{\alpha t^*}{k} \end{cases}$$

En insérant la deuxième relation dans la première, on obtient :

$$-\frac{\alpha}{k\omega} \sin(\omega t^*) + \frac{mg}{k} = 0$$

On isole α et on obtient :

$$\alpha = \frac{mg\omega}{\sin(\omega t^*)}$$

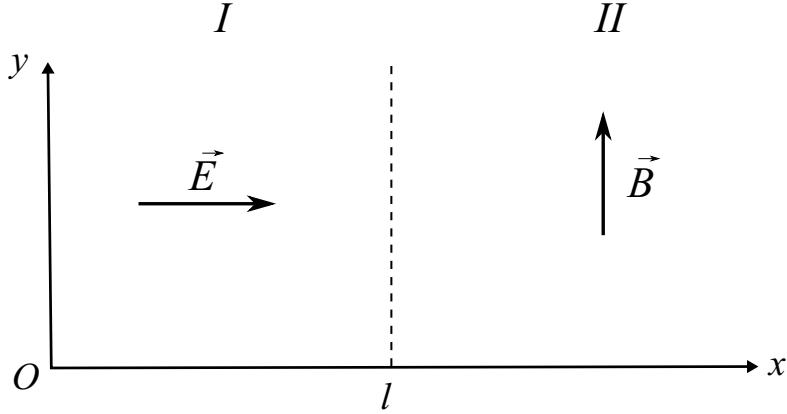
et on en déduit ainsi la force :

$$F(t) = \frac{mg\omega}{\sin(\omega t^*)} t$$

2.1.4 Mouvement d'une particule soumise à des forces électromagnétiques

Une particule chargée de charge q , de vitesse initiale nulle, est accélérée par un champ électrique homogène et stationnaire $\vec{E} = E \vec{e}_x$ sur une distance l . Elle pénètre alors dans une région où le champ électrique est nul et où règne un champ magnétique homogène stationnaire $\vec{B} = B \vec{e}_y$. On néglige la pesanteur.

Etudier le mouvement de la particule (*i.e.*, résoudre les équations de mouvement). Déterminer le temps qu'elle passe dans la première région. Montrer que dans le champ magnétique sa trajectoire est un cercle de rayon R et exprimer le rapport $\frac{q}{m}$ en fonction de E, B, l et R .



Il n'y a aucune contrainte qui s'oppose au mouvement, on en conclut qu'il existe trois degrés de liberté : \$x, y\$ et \$z\$. On utilisera les coordonnées cartésiennes \$(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)\$.

Il existe deux régions, dans chacune règne une seule force. Etudions le mouvement dans chacune de ces régions.

Région I. Dans la première région, on a \$\vec{F} = q\vec{E} = qE\vec{e}_x\$ et l'équation de Newton s'écrit \$\vec{F} = m\vec{\gamma}\$. L'intégration donne :

$$m\vec{\gamma} = qE\vec{e}_x \Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x} = qE \\ m\ddot{y} = 0 \\ m\ddot{z} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m\dot{x} = qEt + C_1 \\ m\dot{y} = C_2 \\ m\dot{z} = C_3 \end{cases}$$

La vitesse initiale est nulle donc \$C_1 = C_2 = C_3 = 0\$, et on obtient en intégrant à nouveau :

$$\begin{cases} m\dot{x} = qEt \\ m\dot{y} = 0 \\ m\dot{z} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} mx = \frac{1}{2}qEt^2 + C_4 \\ my = C_5 \\ mz = C_6 \end{cases}$$

On pose que la position initiale est l'origine, donc que \$C_4 = C_5 = C_6 = 0\$ et on trouve :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{qE}{2m}t^2 \\ y(t) = 0 \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

On quitte la première région en \$x = l\$. Le temps écoulé et la vitesse de la particule en ce point sont donnés par :

$$l = \frac{qE}{2m}t^2 \Rightarrow t_l = \sqrt{\frac{2ml}{qE}}$$

et

$$\vec{v}(t_l) = \frac{qE}{m}t_l\vec{e}_x = \frac{qE}{m}\sqrt{\frac{2ml}{qE}}\vec{e}_x = \sqrt{\frac{2lqE}{m}}\vec{e}_x$$

Région II. Dans la deuxième région, on a $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B} = qB\vec{v} \wedge \vec{e}_y$ et l'équation de Newton s'écrit $\vec{F} = m\vec{\gamma}$. On a :

$$\begin{aligned} m\vec{\gamma} &= qB\vec{v} \wedge \vec{e}_y = qB(\dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z) \wedge \vec{e}_y \\ &= qB(\dot{x}\vec{e}_z - \dot{z}\vec{e}_x) \end{aligned}$$

En projetant sur les axes, on obtient :

$$m\ddot{x} = -qB\dot{z} \quad (2.4)$$

$$m\ddot{y} = 0 \quad (2.5)$$

$$m\ddot{z} = qB\dot{x} \quad (2.6)$$

qui sont des équations différentielles linéaires couplées.

On peut réécrire (2.4) sous la forme :

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = \frac{d}{dt}(-qBz)$$

Par conséquent,

$$m\dot{x} = -qBz + K_1$$

Quand $x = l$, on a $z = 0$ et $\dot{x} = \sqrt{\frac{2lqE}{m}}$, donc $K_1 = \sqrt{2lqmE}$ et on a :

$$\dot{x} = -\frac{qB}{m}z + \sqrt{\frac{2lqE}{m}} \quad (2.7)$$

On peut de la même façon réécrire (2.6) sous la forme :

$$\frac{d}{dt}(m\dot{z}) = \frac{d}{dt}(qBx)$$

ce qui implique :

$$m\dot{z} = qBx + K_2$$

Quand $x = l$, on a $\dot{z} = 0$, donc $K_2 = -qBl$ et on a :

$$\dot{z} = \frac{qB}{m}(x - l) \quad (2.8)$$

On peut aussi multiplier (2.4) par \dot{x} et (2.6) par \dot{z} et additionner les équations obtenues. On a ainsi :

$$m(\ddot{x}\dot{x} + \ddot{z}\dot{z}) = 0$$

c'est-à-dire :

$$\frac{d}{dt}(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) = 0$$

En intégrant :

$$\dot{x}^2 + \dot{z}^2 = K$$

Quand $x = l$, on a $\dot{x} = \sqrt{\frac{2lqE}{m}}$ et $\dot{z} = 0$, donc $K = \frac{2lqE}{m}$ et on a :

$$\dot{x}^2 + \dot{z}^2 = \frac{2lqE}{m} \quad (2.9)$$

En remplaçant dans (2.9) les variables \dot{x} et \dot{z} par leurs valeurs données par (2.7) et (2.8), on obtient :

$$\left(-\frac{qB}{m}z + \sqrt{\frac{2lqE}{m}}\right)^2 + \left(\frac{qB}{m}(x - l)\right)^2 = \frac{2lqE}{m}$$

que l'on peut réécrire sous la forme :

$$\left(z - \sqrt{\frac{2lmE}{qB^2}}\right)^2 + (x - l)^2 = \frac{2lmE}{qB^2}$$

C'est l'équation d'un cercle de rayon $R = \sqrt{\frac{2lmE}{qB^2}}$. On a donc la relation :

$$\frac{q}{m} = \frac{2lE}{B^2 R^2}$$

Notons que si l'on réussit à écrire l'équation de la trajectoire liant z et x , on n'a pas encore déterminé les équations d'évolution pour $x(t)$ et $z(t)$. Pour obtenir $x(t)$, il faut isoler $x(z)$ dans l'équation de la trajectoire et l'injecter dans (2.7). On obtient alors une équation à variables séparées qui fournit, après intégration, $t(x)$. Il reste alors à inverser cette relation pour obtenir l'équation d'évolution pour $x(t)$. La démarche est similaire pour $z(t)$. Enfin, on détermine l'équation d'évolution pour $y(t)$ en intégrant deux fois l'équation (2.5) :

$$y = C_1 t + C_2$$

Or

$$\text{En } x = l, \quad \dot{y} = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$\text{En } x = l, \quad y = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

Remarque. Il existe une autre manière de résoudre le système des équations (2.4) et (2.6). Il suffit d'introduire une variable complexe Z telle que :

$$\begin{cases} Z = x + iz \\ \dot{Z} = \dot{x} + i\dot{z} \\ \ddot{Z} = \ddot{x} + i\ddot{z} \end{cases}$$

On remplace alors dans l'équation de \ddot{Z} :

$$\ddot{Z} = -\frac{qB}{m}\dot{z} + i\frac{qB}{m}\dot{x} = i\frac{qB}{m}(\dot{x} + i\dot{z}) = i\frac{qB}{m}\dot{Z}$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants. la solution est donnée par une combinaison linéaire des exponentielles des racines de l'équation caractéristique. On a donc :

$$Z = Ce^{i\frac{qB}{m}t} + D$$

avec C et D des constantes complexes qu'on va déterminer grâce aux conditions initiales. Au moment où la particule atteint le champ magnétique, on redéfinit l'origine des temps (c'est en réalité au temps $t = \sqrt{\frac{2ml}{qE}}$), et on sait que la particule est au point $(l, 0, 0)$ et est animée de la vitesse $\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x = \sqrt{\frac{2lqE}{m}}\vec{e}_x$ donc on a :

$$\begin{cases} Z(t=0) = C + D = l \\ \dot{Z}(t=0) = i\frac{qB}{m}C = \sqrt{\frac{2lqE}{m}} \end{cases}$$

On en tire :

$$\begin{cases} C = -i\sqrt{\frac{2mlE}{qB^2}} \\ D = l - C = l + i\sqrt{\frac{2mlE}{qB^2}} \end{cases}$$

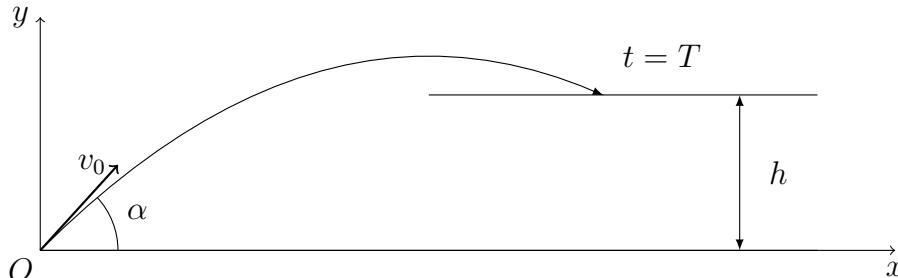
Et on peut redécomposer Z pour obtenir :

$$\begin{aligned} x(t) &= \sqrt{\frac{2mlE}{qB^2}} \sin\left(\frac{qB}{m}t\right) + l \\ z(t) &= \sqrt{\frac{2mlE}{qB^2}} \left(1 - \cos\left(\frac{qB}{m}t\right)\right) \end{aligned}$$

On peut également composer ces deux équations pour en déduire l'équation du cercle précédemment obtenue.

2.1.5 Exercices proposés

- Un projectile est lancé avec une vitesse v_0 dans une direction faisant un angle α avec l'horizontale. Le projectile retombe sur un terrain horizontal situé à une altitude h au dessus de son point de lancement. Calculer la portée du tir.

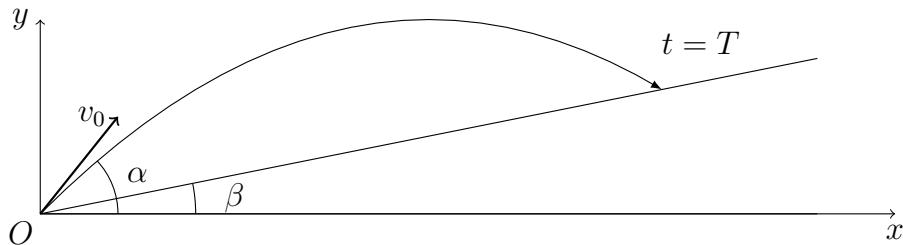


$$(R : x = \frac{v_0 \cos \alpha}{g} (v_0 \sin \alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha - 2gh}))$$

2. Une bille lancée verticalement avec la vitesse v_0 passe et repasse à hauteur h aux temps t_1 et t_2 . Calculer v_0 et h en fonction de t_1 et t_2 .

$$(R : v_0 = g \frac{(t_1+t_2)}{2}, h = g \frac{t_1 t_2}{2})$$

3. Un projectile est lancé avec une vitesse v_0 dans une direction faisant un angle α avec l'horizontale. Dans la direction du tir, le sol est incliné d'un angle β sur l'horizontale. Calculer la portée du tir. Quelle est la portée maximale ?



$$(R : x = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{g} (2 v_0^2 \cos^2 \alpha), x_{max} = \frac{v_0^2}{g} (1/\cos \beta - \tan \beta) = \frac{v_0^2}{g} \frac{\cos \beta}{1 + \sin \beta})$$

4. Une particule chargée est soumise à l'action d'un champ électrique \vec{E} homogène stationnaire et à un champ magnétique \vec{B} homogène stationnaire perpendiculaire au champ électrique. Etudier le mouvement de la particule lorsque sa vitesse initiale est nulle.

$$(R : x = \frac{m E}{q B^2} (1 - \cos \omega t), y = 0, z = \frac{m E}{q B^2} (\omega t - \sin \omega t))$$

2.2 Mouvements guidés

Dans les exercices sur l'étude de mouvements guidés, 3 types de forces sont rencontrés :

- les forces appliquées ;
- les forces de frottement :
 - frottement fluide visqueux : $\vec{F}_f = -\beta \vec{v}$;
 - frottement sec : $\vec{F}_s = -\mu N \frac{\vec{v}}{v}$;
- et les forces de liaisons (« réactions normales »), perpendiculaires à la courbe ou surface de guidage et imposées *a priori* au mouvement (inconnues).

La démarche de résolution est la suivante :

1. Identifier le nombre de degrés de liberté et le nombre de liaisons (forces de liaisons) : $N_{ddl} = N - N_{liaisons}$, où N est le nombre de degrés de liberté du mobile en l'absence de liaison.
2. Placer les forces de liaisons sur le dessin.
3. Choisir un système de référence et un système de coordonnées approprié.
4. Ecrire l'équation de Newton dans ce système de référence et la résoudre. Pour ce faire, il faut exprimer les vecteurs position, vitesse et accélération dans ce système de référence, ainsi que les forces.

Mouvements guidés

↳ particule constrainte de se déplacer sur un support

3 types de forces apparaissent :

- forces appliquées ($\underline{ex} : \vec{P}$)
- forces de frottement dynamiques \rightarrow solide en mouvement

- Frottement fluide visqueux : $\vec{f} = -\beta \cdot \vec{v}$

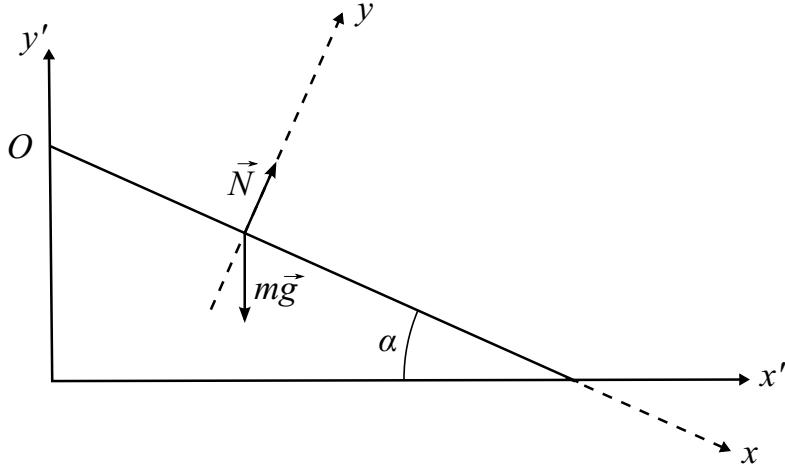
coeff. de frottement avec dynamique
normale de la normale

- Frottement sec : $\vec{f} = -\mu_e \cdot N \cdot \frac{\vec{v}}{|v|}$

- Forces / réactions de liaison \rightarrow I au support
 \rightarrow inconnues au départ.

2.2.1 Le plan incliné sans frottement

Un point matériel P de masse m glisse sans frottement sur un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale. Déterminer l'expression de la position, de la vitesse et de l'accélération du point P en fonction du temps et des conditions initiales. Montrer que l'énergie totale est conservée.



Il existe deux degrés de liberté, x et z , car la particule est contrainte à se mouvoir dans un plan. On aura donc une seule force de réaction normale, perpendiculaire à ce plan.

On choisit le système de coordonnées adapté à la géométrie du problème, c'est-à-dire le système de coordonnées cartésiennes $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Dans ce système, on a $y = 0$ à tout instant.

Les forces agissant sur la particule sont la pesanteur $\vec{P} = m\vec{g} = mg(\sin \alpha \vec{e}_x - \cos \alpha \vec{e}_y)$ et la force de réaction normale au plan $\vec{N} = N \vec{e}_y$. On applique la loi de Newton $m\vec{\gamma} = \vec{F} = \vec{P} + \vec{N}$ et on projette sur les axes :

$$m\ddot{x} = mg \sin \alpha \quad (2.10)$$

$$m\ddot{y} = -mg \cos \alpha + N \quad (2.11)$$

$$m\ddot{z} = 0 \quad (2.12)$$

L'équation (2.10) fournit :

$$\ddot{x}(t) = g \sin \alpha \Rightarrow \dot{x}(t) = g \sin(\alpha) t + v_{0x} \Rightarrow x(t) = \frac{1}{2}g \sin(\alpha) t^2 + v_{0x}t + x_0$$

si les conditions initiales sont $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = v_{0x}$.

Sachant qu'on a $y(t) = 0 \Rightarrow \dot{y}(t) = 0 \Rightarrow \ddot{y}(t) = 0$, l'équation (2.11) nous donne donc $N = mg \cos \alpha$.

On intègre facilement l'équation (2.12) :

$$\ddot{z}(t) = 0 \Rightarrow \dot{z}(t) = C_1 \Rightarrow z(t) = C_1 t + C_2$$

Les conditions initiales sont $z(0) = z_0$ et $\dot{z}(0) = v_{0z}$. Par conséquent, on trouve :

$$z(t) = v_{0z}t + z_0$$

Pour montrer que l'énergie mécanique totale est conservée, il faut montrer que toutes les forces qui travaillent sont conservatives. La réaction normale \vec{N} ne travaille pas puisqu'elle est perpendiculaire à la vitesse \vec{v} . Reste la force de pesanteur, qui s'écrit :

$$\vec{P} = m\vec{g} = mg(\sin \alpha \vec{e}_x - \cos \alpha \vec{e}_y).$$

Elle ne dépend ni du temps ni de la vitesse. De plus, $\vec{\nabla} \wedge \vec{P} = 0$ et on peut donc écrire

$$\vec{P} = -\vec{\nabla}V.$$

Pour déterminer V , il faut résoudre

$$\begin{aligned}-\frac{\partial V}{\partial x} &= mg \sin \alpha \\-\frac{\partial V}{\partial y} &= -mg \cos \alpha\end{aligned}$$

La première équation donne $V = -mgx \sin \alpha + f(y)$. En injectant ce résultat dans la deuxième équation, on obtient

$$-\frac{\partial f}{\partial y} = -mg \cos \alpha$$

et donc

$$f(y) = mg y \cos \alpha + C$$

Le potentiel V s'écrit donc

$$V = mg(-x \sin \alpha + y \cos \alpha)$$

Par conséquent, l'énergie mécanique totale de la particule (avec $y = 0$)

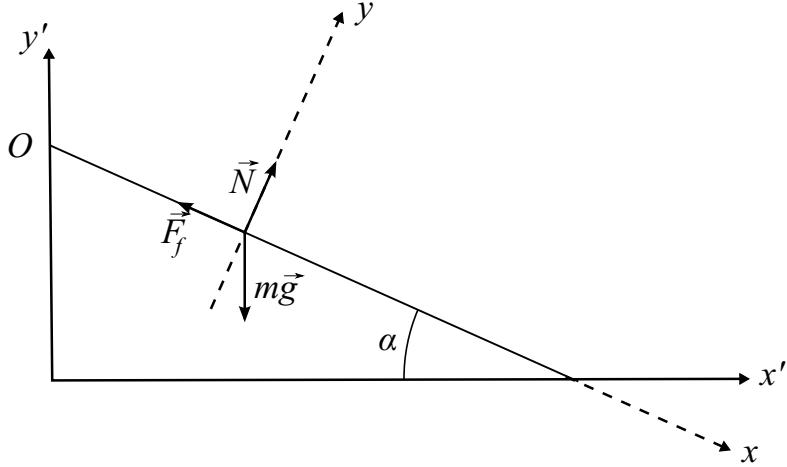
$$E = \frac{1}{2}mv^2 - mg x \sin \alpha$$

est conservée. Si, à l'instant initial, $v = v_0$ et $x = x_0$, sa valeur à tout instant est donnée par :

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 - mg x_0 \sin \alpha.$$

2.2.2 Le plan incliné avec frottement

Une particule de masse m glisse le long d'un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale et ayant un coefficient de friction sèche μ . Si la particule part du sommet du plan incliné avec une vitesse nulle, trouver l'accélération, la vitesse et la distance parcourue au temps t .



Il existe toujours deux degrés de liberté et on utilise le même système de coordonnées qu'au problème précédent.

Les forces agissant sur la particule sont la force de pesanteur $\vec{P} = m\vec{g} = mg(\sin \alpha \vec{e}_x - \cos \alpha \vec{e}_y)$, la force de réaction normale au plan $\vec{N} = N \vec{e}_y$ et la force de frottement opposée au mouvement $\vec{F}_f = -\mu N \frac{\vec{v}}{v}$ où v est la norme du vecteur vitesse \vec{v} . Le mouvement étant contraint dans le plan (x, z) , cette dernière se décompose comme suit :

$$\vec{F}_f = -\mu N \frac{\vec{v}}{v} = -\mu N \frac{\dot{x}\vec{e}_x + \dot{z}\vec{e}_z}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2}}$$

On applique la loi de Newton $m\vec{\gamma} = \vec{F} = (mg \sin \alpha - \mu N \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2}})\vec{e}_x + (N - mg \cos \alpha)\vec{e}_y - \mu N \frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2}}\vec{e}_z$ et on projette sur les axes :

$$m\ddot{x} = mg \sin \alpha - \mu N \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2}} \quad (2.13)$$

$$m\ddot{y} = N - mg \cos \alpha = 0 \quad (2.14)$$

$$m\ddot{z} = -\mu N \frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2}} \quad (2.15)$$

Le système d'équations couplées (2.13)-(2.15) peut sembler a priori compliqué à résoudre, mais on peut intuitivement se persuader que l'accélération \ddot{z} est en réalité nulle au cours du temps. En effet, la particule, partant du repos, ne peut acquérir d'accélération selon z que si une force s'exerce sur celle-ci dans la direction z . Or, seule la force de frottement possède potentiellement une composante selon cet axe. Néanmoins, la vitesse initiale de la particule étant nulle, la force de frottement ne possède initialement pas de composante selon z . Par conséquent, l'accélération \ddot{z} est nulle à l'instant initial. A un instant ultérieur, la vitesse selon z est toujours nulle et donc la composante z de la force de frottement également. Ainsi, l'accélération \ddot{z} reste nulle (et, par conséquent, la vitesse \dot{z} également) durant toute la descente le long du plan incliné, et les équations précédentes se réécrivent plus simplement :

$$m\ddot{x} = mg \sin \alpha - \mu N \quad (2.16)$$

$$m\ddot{y} = N - mg \cos \alpha = 0 \quad (2.17)$$

$$m\ddot{z} = 0 \quad (2.18)$$

On primitive deux fois l'équation (2.18) et on tire :

$$z = C_1 t + C_2$$

avec C_1, C_2 des constantes, qui sont nulles si on considère qu'au temps $t = 0$ on a $\dot{z} = z = 0$ ¹¹.

De la relation (2.14), on tire que $N = mg \cos \alpha$ à tout moment. On peut donc substituer la valeur de N dans l'équation (2.13) :

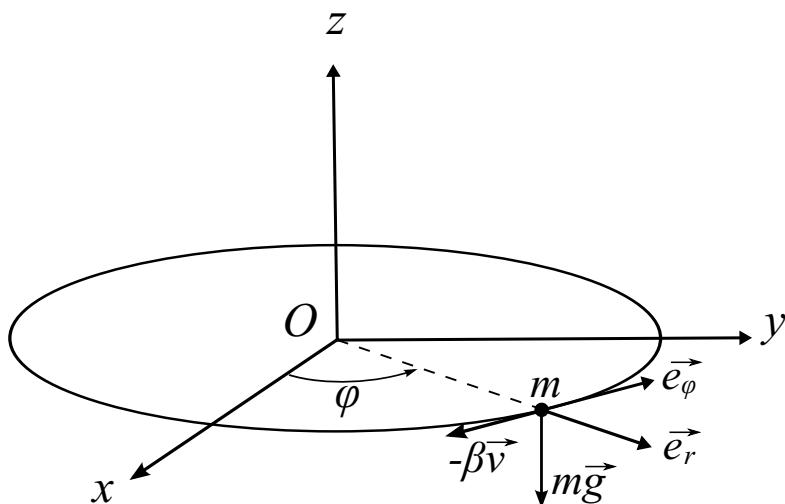
$$\begin{aligned}\ddot{x} &= g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \\ \dot{x} &= g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)t + v_0 \quad \text{avec } v_0 = v(t = 0) = 0 \\ x &= \frac{1}{2}g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)t^2 + x_0 \quad \text{avec } x_0 = x(t = 0) = 0\end{aligned}$$

Condition de glissement

Nous venons de caractériser le mouvement d'une masse glissant sur un plan incliné et soumise à une force de frottement. Cependant, ce mouvement n'est pas déclenché pour toute valeur α de l'angle d'inclinaison. En partant de l'expression pour un frottement statique, quelle devrait être la valeur minimale de cet angle afin que la masse se mette à glisser sur le plan ?

2.2.3 Mouvement sur un cercle avec frottement

Une particule de masse m se déplace sur un cercle horizontal de rayon R . Elle est soumise à une force de frottement proportionnelle à sa vitesse $\vec{F}_f = -\beta \vec{v}$ (avec β une constante positive). Elle est lancée avec une vitesse initiale \vec{v}_0 . Etablir les équations différentielles qui régissent le mouvement de la particule. Résoudre ces équations et en déduire la distance parcourue par la particule avant de s'arrêter. Déterminer également l'expression de la réaction normale.



Il n'existe ici qu'un seul degré de liberté, la particule étant contrainte d'évoluer sur une courbe. On aura donc deux forces de réaction normale.

1. Notons qu'on peut éviter le raisonnement intuitif proposé ci-dessus pour arriver à (2.18) à partir de (2.15) en constatant simplement que $z(t) = 0$ est bien solution de (2.15). Comme la solution d'une équation différentielle est unique, cette solution $z(t) = 0$ est bien la "bonne" solution de (2.15).

On utilise le système de coordonnées cylindriques, le plus naturel dans ce contexte.
On a :

$$\vec{r} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z = R\vec{e}_r$$

puisque la particule évolue sur un cercle de rayon constant R situé dans le plan (O, x, y). Par conséquent,

$$\vec{v} = R\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$

et

$$\vec{\gamma} = -R\dot{\varphi}^2\vec{e}_r + R\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi.$$

Les forces agissant sur la particule sont la force de pesanteur $\vec{P} = mg\vec{j}$, les forces de réaction normale \vec{N}_r et \vec{N}_z , ainsi que la force de frottement $\vec{F}_f = -\beta\vec{v}$.

La loi de Newton s'écrit donc :

$$\begin{aligned} m\vec{\gamma} &= \vec{F} \\ m(-R\dot{\varphi}^2\vec{e}_r + R\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi) &= N_r\vec{e}_r - \beta R\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + (N_z - mg)\vec{e}_z \end{aligned}$$

En projetant sur les axes, on obtient :

$$-mR\dot{\varphi}^2 = N_r \quad (2.19)$$

$$mR\ddot{\varphi} = -\beta R\dot{\varphi} \quad (2.20)$$

$$0 = N_z - mg \quad (2.21)$$

On tire immédiatement de (2.21) que $N_z = mg$. Intéressons-nous ensuite à l'équation (2.20) réécrite sous la forme $\ddot{\varphi} + \frac{\beta}{m}\dot{\varphi} = 0$. C'est une équation différentielle linéaire à coefficients constants homogène d'ordre deux. On se rappelle que la solution la plus générale de cette équation va s'écrire :

$$\varphi(t) = P_1 e^{z_1 t} + P_2 e^{z_2 t}$$

où z_1 et z_2 sont les zéros distincts du polynôme caractéristique de l'équation, à savoir $z^2 + \frac{\beta}{m}z = 0$, et P_1 , P_2 sont des polynômes de degré inférieur ou égal à la multiplicité du zéro correspondant moins un.

Les zéros du polynôme caractéristique sont donnés par $z_1 = -\frac{\beta}{m}$ et $z_2 = 0$, tous deux de multiplicité 1. Les polynômes sont donc réduits à des constantes A et B . On a donc :

$$\varphi(t) = Ae^{-\frac{\beta}{m}t} + B$$

On suppose que $\varphi(0) = 0$ et on a $\dot{\varphi}(0) = \frac{v_0}{R}$ car $\vec{v}(0) = \vec{v}_0 = R\dot{\varphi}(0)\vec{e}_\varphi$. Par conséquent :

$$\begin{cases} \varphi(0) = A + B = 0 \\ \dot{\varphi}(0) = -A\frac{\beta}{m} = \frac{v_0}{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{m v_0}{\beta R} \\ B = -A = \frac{m v_0}{\beta R} \end{cases}$$

Finalement :

$$\varphi(t) = \frac{m}{\beta} \frac{v_0}{R} (1 - e^{-\frac{\beta}{m}t})$$

et

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{v_0}{R} e^{-\frac{\beta}{m}t}$$

Lorsque t tend vers l'infini, $\dot{\varphi}$ tend vers zéro et φ tend vers $\frac{mv_0}{\beta R}$. Par conséquent, la particule aura parcouru une distance égale à $R(\varphi(\infty) - \varphi(0)) = \frac{mv_0}{\beta}$ avant de s'arrêter. On déduit l'expression de N_r de l'équation (2.19) :

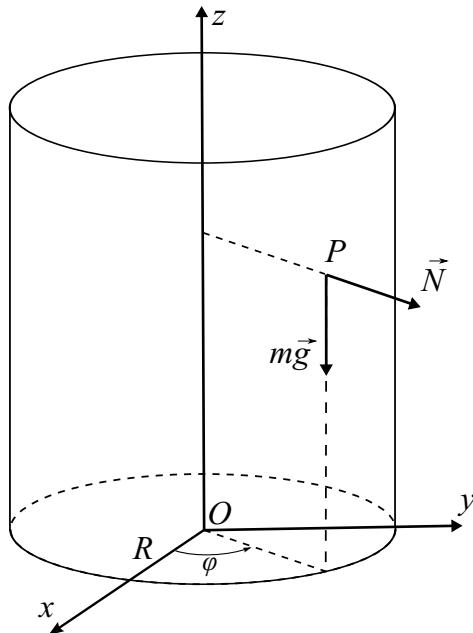
$$N_r = -mR\dot{\varphi}^2 = -\frac{mv_0^2}{R}e^{-\frac{2\beta}{m}t}.$$

La réaction normale totale vaut donc :

$$\vec{N} = -\frac{mv_0^2}{R}e^{-\frac{2\beta}{m}t} \vec{e}_r + mg \vec{e}_z$$

2.2.4 Mouvement sur un cylindre sans frottement

Une particule P de masse m glisse sans frottement sur un cylindre circulaire droit d'axe vertical et de rayon R . Résoudre les équations du mouvement et calculer la réaction normale.



Le mouvement de P est lié à la surface du cylindre donc il y a deux degrés de liberté. Le système de coordonnées le plus adapté à la géométrie du problème est bien entendu le système de coordonnées cylindriques $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$.

Les forces agissant sur P sont la force de pesanteur $\vec{F}_g = -mg \vec{e}_z$ et la réaction normale $\vec{N} = N \vec{e}_\rho$.

On écrit l'accélération en coordonnées cylindriques :

$$\vec{\gamma} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) \vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}) \vec{e}_\varphi + \ddot{z} \vec{e}_z$$

Comme la particule bouge sur un cylindre de rayon constant, on a $\rho = R$ et $\dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$. On a alors :

$$m\vec{\gamma} = -mR\dot{\varphi}^2 \vec{e}_\rho + mR\ddot{\varphi} \vec{e}_\varphi + m\ddot{z} \vec{e}_z$$

Par la loi de Newton $m\vec{\gamma} = \vec{F} = N\vec{e}_\rho - mg\vec{e}_z$ et en projetant sur les axes, on a :

$$-mR\dot{\varphi}^2 = N \quad (2.22)$$

$$mR\ddot{\varphi} = 0 \quad (2.23)$$

$$m\ddot{z} = -mg \quad (2.24)$$

Les équations (2.23) et (2.24) peuvent être intégrées deux fois :

$$\begin{cases} \ddot{z} = -g \\ \ddot{\varphi} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{z} = -gt + C_1 \\ \dot{\varphi} = C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_3 \\ \varphi = C_2t + C_4 \end{cases}$$

Et avec les conditions initiales $z(t=0) = z_0$, $\dot{z}(t=0) = v_{0z}$, $\varphi(t=0) = \varphi_0$ et $\dot{\varphi}(t=0) = \frac{v_{0\varphi}}{R}$:

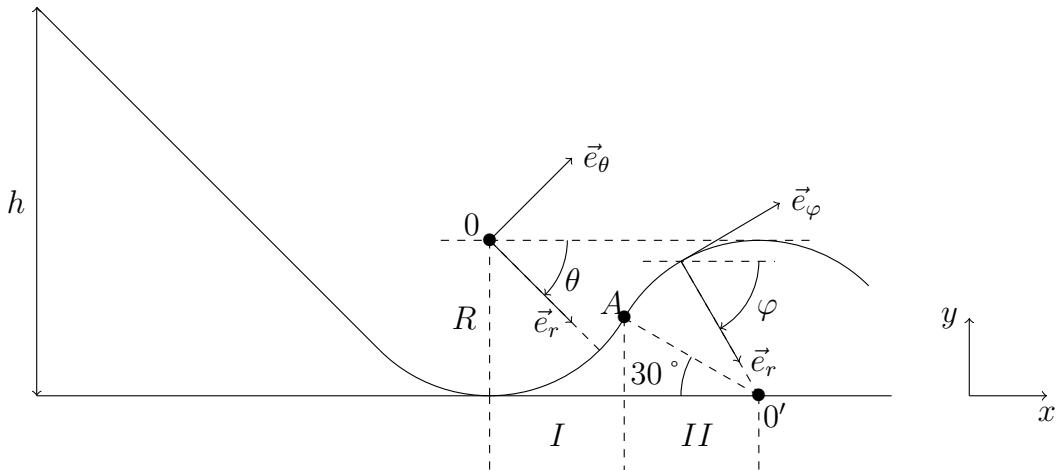
$$\begin{cases} z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0z}t + z_0 \\ \varphi = \frac{v_{0\varphi}}{R}t + \varphi_0 \end{cases}$$

Le mouvement en z est un mouvement uniformément accéléré (chute libre) et la vitesse en φ est constante. Finalement, en remplaçant $\dot{\varphi}$ dans l'équation (2.22), on a :

$$\vec{N} = N\vec{e}_\rho = -\frac{mv_{0\varphi}^2}{R}\vec{e}_\rho$$

2.2.5 Montagnes russes

Une masse M glisse sans frottement sur des montagnes russes. Les sections courbes de la piste ont un rayon de courbure R . La masse commence sa descente à partir d'une hauteur h . Indiquer dans quelle région la masse pourrait perdre contact avec la piste et calculer la hauteur minimum critique h_c pour que cela arrive.



Dans la région I, $\vec{\omega}_I = -\dot{\theta}\vec{e}_z$

Dans la région II, $\vec{\omega}_{II} = -\dot{\varphi}\vec{e}_z$

Région I

La position, la vitesse et l'accélération sont données par :

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \overrightarrow{OP} = R\vec{e}_r \\ \vec{v} &= -R\dot{\theta}\vec{e}_\theta \\ \vec{\gamma} &= -R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - R\dot{\theta}(-\dot{\theta}\vec{e}_z \wedge \vec{e}_\theta) \\ &= -R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{e}_r\end{aligned}$$

L'équation de Newton est donnée par :

$$m\vec{\gamma} = \vec{N} + m\vec{g}$$

où les deux forces apparaissant dans le membre de droite sont la normale

$$\vec{N} = -N\vec{e}_r + N_z\vec{e}_z$$

et le poids

$$m\vec{g} = mg \sin \theta \vec{e}_r - mg \cos \theta \vec{e}_\theta$$

En projetant l'équation de Newton sur l'axe \vec{e}_θ , on a :

$$mR\ddot{\theta} = -mg \cos \theta$$

En projetant l'équation de Newton sur l'axe \vec{e}_r , on a :

$$\begin{aligned}-mR\dot{\theta}^2 &= -N + mg \sin \theta \\ \Rightarrow N &= mR\dot{\theta}^2 + mg \sin \theta \\ &= m\frac{v^2}{R} + mg \sin \theta\end{aligned}$$

Région II

La position, la vitesse et l'accélération sont données par :

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \overrightarrow{O'P} = -R\vec{e}_r \\ \vec{v} &= R\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \\ \vec{\gamma} &= R\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi + R\dot{\varphi}(-\dot{\varphi}\vec{e}_z \wedge \vec{e}_\varphi) \\ &= R\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi - R\dot{\varphi}^2\vec{e}_r\end{aligned}$$

L'équation de Newton est donnée par :

$$m\vec{\gamma} = \vec{N} + m\vec{g}$$

où les deux forces apparaissant dans le membre de droite sont la normale

$$\vec{N} = -N\vec{e}_r + N_z\vec{e}_z$$

et le poids

$$m\vec{g} = mg \sin \varphi \vec{e}_r - mg \cos \varphi \vec{e}_\varphi$$

En projetant l'équation de Newton sur l'axe \vec{e}_φ , on a :

$$mR\ddot{\varphi} = -mg \cos \varphi$$

En projetant l'équation de Newton sur l'axe \vec{e}_r , on a :

$$\begin{aligned} mR\dot{\varphi}^2 &= -N + mg \sin \varphi \\ \Rightarrow N &= -mR\dot{\varphi}^2 + mg \sin \varphi \\ &= -m\frac{v^2}{R} + mg \sin \varphi \end{aligned}$$

De cette analyse dans chacune des deux régions, on en déduit que le décollage est possible uniquement dans la région II puisque la normale est toujours strictement positive dans la région I et ne peut s'annuler que dans la région II.

Pour déterminer la hauteur h_c critique, on applique la loi de conservation de l'énergie entre le départ et le point de décollage :

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + mgh'$$

avec $h' = R \sin \varphi$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} v^2 &= 2g(h - h') \\ &= 2g(h - R \sin \varphi) \end{aligned}$$

On insère cette relation dans l'expression de la normale et on obtient :

$$N = mg \sin \varphi - \frac{2mg}{R}(h - R \sin \varphi) = 3mg(\sin \varphi - \frac{2h}{3R})$$

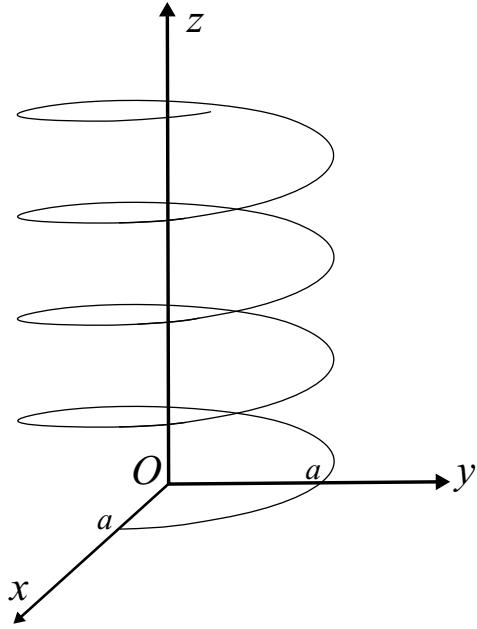
Il est clair que N est une fonction croissante de φ . Dès lors, le décollage se produira pour la plus petite valeur de φ appartenant à la région II. Il s'agit du point A , où $\varphi = 30^\circ$.

Ainsi, au point A et à une hauteur initiale $h = h_c$, on a :

$$\begin{aligned} R \sin \varphi &= 2h_c - 2R \sin \varphi \\ \Leftrightarrow h_c &= \frac{3R \sin \varphi}{2} \\ &= \frac{3R}{4} \quad \text{si } \varphi = 30^\circ \end{aligned}$$

2.2.6 Perle sur une hélice

Une perle, assimilée à un point matériel pesant P , se meut sans frottement sur une hélice d'équation paramétrique $\vec{r} = (a \cos \varphi, a \sin \varphi, b\varphi)$ dans un système d'axes cartésiens (avec z vertical). Etudier le mouvement de cette perle P en la supposant initialement au repos au point $\varphi = 0$.



Il existe un seul degré de liberté car la perle est contrainte à se mouvoir sur une hélice. La position de la perle est définie dans le système de référence $S(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, en coordonnées cartésiennes. Les vecteurs position, vitesse et accélération par rapport au système de référence fixe S , exprimés en coordonnées cylindriques et dans la base associée $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ sont donnés par :

$$\begin{aligned}
 \vec{r} &= \vec{OP} = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z = a \vec{e}_\rho + b\varphi \vec{e}_z \\
 \vec{v} &= a \frac{d\vec{e}_\rho}{dt} + b\dot{\varphi} \vec{e}_z + b\varphi \frac{d\vec{e}_z}{dt} \\
 &= a\dot{\varphi} \vec{e}_z \wedge \vec{e}_\rho + b\dot{\varphi} \vec{e}_z + b\varphi\dot{\varphi} \vec{e}_z \wedge \vec{e}_z \\
 &= a\dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + b\dot{\varphi} \vec{e}_z \\
 \vec{\gamma} &= a\ddot{\varphi} \vec{e}_\varphi + a\dot{\varphi} \frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} + b\ddot{\varphi} \vec{e}_z + b\dot{\varphi} \frac{d\vec{e}_z}{dt} \\
 &= a\ddot{\varphi} \vec{e}_\varphi + a\dot{\varphi}\dot{\varphi} \vec{e}_z \wedge \vec{e}_\varphi + b\ddot{\varphi} \vec{e}_z + b\dot{\varphi}\dot{\varphi} \vec{e}_z \wedge \vec{e}_z \\
 &= a\ddot{\varphi} \vec{e}_\varphi - a\dot{\varphi}^2 \vec{e}_\rho + b\ddot{\varphi} \vec{e}_z
 \end{aligned}$$

Les forces agissant sur la perle sont la pesanteur $m\vec{g} = -mg \vec{e}_z$ et les forces de réaction normale $\vec{N} = N_\rho \vec{e}_\rho + N_\varphi \vec{e}_\varphi + N_z \vec{e}_z$. On applique la loi de Newton $m\vec{\gamma} = \vec{F} = \vec{P} + \vec{N}$ et on projette sur les axes $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$:

$$\begin{aligned}
 -am\dot{\varphi}^2 &= N_\rho \\
 am\ddot{\varphi} &= N_\varphi \\
 bm\ddot{\varphi} &= -mg + N_z
 \end{aligned}$$

Il reste 3 équations pour 4 inconnues, le problème ne peut donc pas être résolu. Nous avons en réalité omis la condition d'orthogonalité de la normale vis à vis de la trajectoire. Cette information sera plus facile à prendre en compte en utilisant le

trièdre de Frenet. Considérons ce trièdre :

$$\begin{aligned}\vec{t} &= \frac{\vec{v}}{v} = \frac{\dot{\varphi}(a\vec{e}_\varphi + b\vec{e}_z)}{\dot{\varphi}\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}(a\vec{e}_\varphi + b\vec{e}_z) \\ \vec{n} &= \frac{\frac{d\vec{t}}{ds}}{\left|\frac{d\vec{t}}{ds}\right|} = \frac{\frac{d\vec{t}}{dt}\frac{dt}{ds}}{\left|\frac{d\vec{t}}{dt}\right|\frac{dt}{ds}} = \frac{\frac{d\vec{t}}{dt}}{\left|\frac{d\vec{t}}{dt}\right|} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}a\dot{\varphi}\vec{e}_\rho}{\frac{a\dot{\varphi}}{\sqrt{a^2+b^2}}} = -\vec{e}_\rho \\ \vec{b} &= \vec{t} \wedge \vec{n} = -\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}(a\vec{e}_\varphi + b\vec{e}_z) \wedge \vec{e}_\rho \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}(a\vec{e}_z - b\vec{e}_\varphi)\end{aligned}$$

La perle est contrainte à se mouvoir sur une hélice et la force de réaction normale se décompose naturellement en deux composantes selon \vec{b} et \vec{n} (\vec{B} et \vec{N} , respectivement). On applique la loi de Newton :

$$m\vec{\gamma} = \vec{B} + \vec{N} + \vec{P} = B\vec{b} + N\vec{n} - mg\vec{e}_z \quad (2.25)$$

Si on projette l'équation (2.25) sur l'axe \vec{t} , on obtient :

$$\begin{aligned}m\gamma_t &= B\vec{b} \cdot \vec{t} + N\vec{n} \cdot \vec{t} - mg\vec{e}_z \cdot \vec{t} \\ &= -mg\vec{e}_z \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}(a\vec{e}_\varphi + b\vec{e}_z)\right) \\ &= -mg\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\end{aligned}$$

Or, $\dot{s} = |v| = \dot{\varphi}\sqrt{a^2 + b^2}$ et $\gamma_t = \ddot{s} = \ddot{\varphi}\sqrt{a^2 + b^2}$. Par conséquent, on obtient :

$$\begin{aligned}m\ddot{\varphi}\sqrt{a^2 + b^2} &= -mg\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \ddot{\varphi} &= -\frac{gb}{a^2 + b^2} \\ \Rightarrow \dot{\varphi} &= -\frac{gb}{a^2 + b^2}t + \dot{\varphi}_0 = -\frac{gb}{a^2 + b^2}t \\ \Rightarrow \varphi(t) &= -\frac{gb}{2(a^2 + b^2)}t^2 + \varphi_0 = -\frac{gb}{2(a^2 + b^2)}t^2\end{aligned}$$

avec $\dot{\varphi}_0 = 0$ et $\varphi_0 = 0$.

Le mouvement de la perle sur l'hélice est donc un mouvement uniformément accéléré où l'accélération dépend, outre de l'accélération de la pesanteur g , des caractéristiques géométriques de l'hélice.

Si on projette l'équation (2.25) sur l'axe \vec{n} , on obtient :

$$\begin{aligned}m\gamma_n &= B\vec{b} \cdot \vec{n} + N\vec{n} \cdot \vec{n} - mg\vec{e}_z \cdot \vec{n} \\ &= N\end{aligned}$$

Or, $\vec{\gamma}_n = \vec{\gamma} - \vec{\gamma}_t = a\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi - a\dot{\varphi}^2\vec{e}_\rho + b\ddot{\varphi}\vec{e}_z - \ddot{\varphi}(a\vec{e}_\varphi + b\vec{e}_z) = -a\dot{\varphi}^2\vec{e}_\rho = a\dot{\varphi}^2\vec{n}$. On obtient alors :

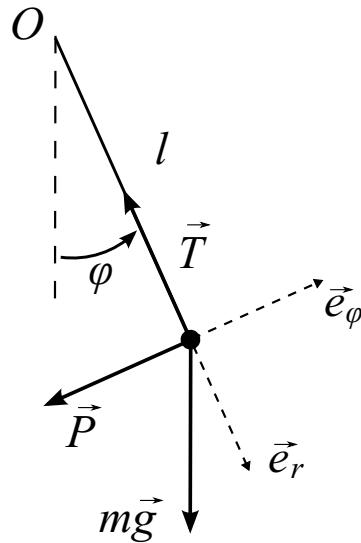
$$\begin{aligned}N &= ma\dot{\varphi}^2 \\ &= ma\frac{g^2b^2}{(a^2 + b^2)^2}t^2\end{aligned}$$

Si on projette l'équation (2.25) sur l'axe \vec{b} , on obtient :

$$\begin{aligned} m\gamma_b &= B\vec{b} \cdot \vec{b} + N\vec{n} \cdot \vec{b} - mg\vec{e}_z \cdot \vec{b} \\ 0 &= B - mg\vec{e}_z \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}(a\vec{e}_z - b\vec{e}_\varphi) \right) \\ 0 &= B - mga \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ B &= \frac{mga}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{aligned}$$

2.2.7 La balançoire

Un enfant de masse $m = 20 \text{ kg}$ est assis sur une balançoire de masse négligeable et suspendue par une corde de longueur $l = 3 \text{ m}$. Son père le tire en arrière (en gardant la corde tendue) jusqu'à ce que la corde fasse un angle de $\varphi_0 = 50$ degrés avec la verticale. Il pousse ensuite avec une force tangentielle $P = mg$ jusqu'à ce que la corde soit verticale, et lâche ensuite la balançoire. Résoudre les équations de Newton en utilisant l'approximation $\sin \varphi \simeq \varphi$ pour les angles inférieurs à un radian. En déduire le temps pendant lequel le père aura poussé la balançoire. Sachant que la tension maximale supportable avant que la corde ne casse est de 850 N, celle-ci va-t-elle casser ? Si oui, à quel moment ?



On utilise bien sûr ici les coordonnées polaires $(\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi)$. Les forces qui s'appliquent sur la balançoire sont la pesanteur $m\vec{g}$, la tension \vec{T} dans la corde et la poussée tangentielle \vec{P} . La somme des forces s'écrit donc :

$$\vec{F} = \vec{T} + \vec{P} + m\vec{g} = -T\vec{e}_r - mg\vec{e}_\varphi + mg(\cos \varphi \vec{e}_r - \sin \varphi \vec{e}_\varphi)$$

L'accélération en coordonnées polaires s'écrit :

$$\vec{\gamma} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi$$

Avec ici $r = l$, $\dot{r} = \ddot{r} = 0$. En appliquant la loi de Newton $\vec{F} = m\vec{\gamma}$ et en projetant sur les axes on obtient :

$$-ml\dot{\varphi}^2 = mg \cos \varphi - T \quad (2.26)$$

$$ml\ddot{\varphi} = -mg \sin \varphi - mg \Rightarrow \ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}(1 + \sin \varphi) \quad (2.27)$$

Si on approxime $\sin \varphi$ par φ (l'angle restera inférieur à un radian), l'équation (2.27) devient :

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = -\frac{g}{l}$$

C'est une équation différentielle linéaire du deuxième ordre non-homogène. On doit trouver une solution particulière et l'ajouter à la solution du problème homogène associé. La solution homogène (qui est celle de l'oscillateur harmonique) s'écrit :

$$\varphi = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

Avec A et B des constantes à déterminer par les conditions initiales et $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$. La solution particulière est simplement $\varphi = -1$. La solution est donc :

$$\varphi = A \cos \omega t + B \sin \omega t - 1$$

Si on dérive $\varphi(t)$ par rapport au temps, on a :

$$\dot{\varphi} = -A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t$$

Au temps $t = 0$ on a $\varphi = \varphi_0$ et $\dot{\varphi} = 0$. On a donc :

$$\varphi(t = 0) = \varphi_0 = A + 0 - 1 \Rightarrow A = \varphi_0 + 1$$

et

$$\dot{\varphi}(t = 0) = B\omega = 0 \Rightarrow B = 0$$

Finalement :

$$\begin{cases} \varphi = (\varphi_0 + 1) \cos \omega t - 1 \\ \dot{\varphi} = -\omega(\varphi_0 + 1) \sin \omega t \end{cases}$$

Le père lâche la balançoire quand elle est à la verticale, donc quand $\varphi = 0$. On en tire le temps écoulé t_e :

$$(\varphi_0 + 1) \cos \omega t_e - 1 = 0 \Rightarrow t_e = \frac{1}{\omega} \arccos \left(\frac{1}{\varphi_0 + 1} \right)$$

Avec les valeurs données dans l'énoncé, on a :

$$t_e = \sqrt{\frac{3}{9.81}} \arccos \left(\frac{1}{50 \times \frac{\pi}{180} + 1} \right) = 0.557 \text{ s}$$

La tension dans le fil obéit à l'équation (2.26), donc :

$$T = ml\dot{\varphi}^2 + mg \cos \varphi$$

De l'instant initial où $\varphi = \varphi_0$ jusqu'en $\varphi = 0$, l'angle φ décroît et la fonction $\cos \varphi$ croît. D'autre part, La vitesse angulaire $\dot{\varphi}$ croît également puisqu'elle est proportionnelle à $\sin \omega t$. Comme les deux termes intervenant dans l'expression de T sont positifs durant cet intervalle de temps, on en déduit que la tension T passe par son maximum lorsque $\varphi = 0$, c'est-à-dire lorsque $t = t_e$. Par conséquent :

$$T_{max} = ml\dot{\varphi}^2|_{\varphi=0} + mg \cos 0 = ml\omega^2(\varphi_0 + 1)^2 \sin^2 \omega t_e + mg$$

c'est-à-dire :

$$T_{max} = 20 \times 3 \times \frac{9.81}{3} \times \left(50 \times \frac{\pi}{180} + 1\right)^2 \sin^2 \left(\sqrt{\frac{9.81}{3}} \times 0.557\right) + 20 \times 9.81 = 688 \text{ N}$$

ce qui est inférieur à la valeur limite 850 N , donc la corde ne cassera pas.

2.2.8 Exercices proposés

- Un point matériel P se déplace sans frottement sur une courbe d'équation paramétrique $\vec{r} = \vec{r}(s)$ où s est la longueur de l'arc de courbe OP (O étant un point fixe de la courbe). Etudier le mouvement et la réaction normale dans le cas où aucune autre force n'est appliquée à P .

$$(R : s(t) = v_0 t + s_0, N_n = m v_0^2 / R \text{ et } N_b = 0)$$

- Un point matériel pesant se meut sans frottement sur un axe x faisant un angle α avec la verticale. Il subit une force répulsive $F_x = kx$ ($k > 0$). Ecrire l'intégrale première d'énergie, rechercher la position d'équilibre et étudier le mouvement.

$$(R : E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + m g x \cos \alpha - \frac{k x^2}{2}, x_{eq} = \frac{m g \cos \alpha}{k})$$

- Un point matériel pesant se meut sans frottement sur une hélice d'équation paramétrique $\vec{r} = (a \cos \varphi, a \sin \varphi, b\varphi)$ dans un système d'axes cartésiens (z vertical). Etudier le mouvement du point matériel en le supposant initialement au repos au point défini par $\varphi = 0$.

$$(R : \varphi(t) = \frac{-g b}{(a^2 + b^2)^{1/2}} \frac{t^2}{2})$$

- Etudier le mouvement d'un point matériel pesant glissant sans frottement sur une circonférence horizontale. Calculer la réaction normale.

$$(R : \text{en coordonnées polaires : } \varphi = \dot{\varphi}_0 t + \varphi_0, \vec{N} = (-m R \dot{\varphi}_0^2, 0, mg))$$

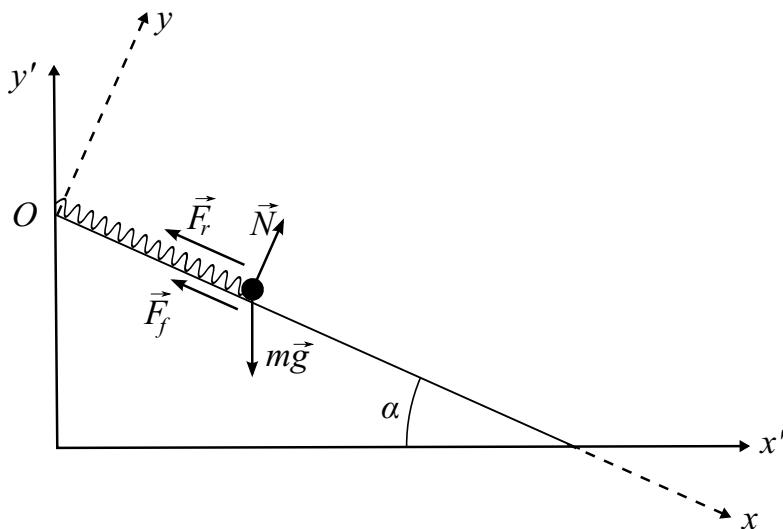
- Un point matériel pesant P se meut sans frottement sur la surface d'un cône circulaire droit de sommet O et d'ouverture 2α . A partir des intégrales premières, calculer ρ_{min} , ρ représentant la distance de P à l'axe du cône. Suggestion : travailler en coordonnées cylindriques et utiliser le fait que $z = \rho / \tan(\alpha)$ sur la surface du cône.

$$(R : \rho_{min} \text{ et } \rho_{max} \text{ sont solutions de } V_{eff} = m \left(\frac{C}{2\rho^2} + g \frac{\rho}{\tan \alpha} \right))$$

2.3 Oscillateurs harmoniques

2.3.1 L'oscillateur sur une tige inclinée

Une perle de masse m , enfilée sur une tige rectiligne rigide, est attachée à un ressort, lui-même fixé à un point O d'un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale. Le ressort a une longueur naturelle l_0 et une constante de raideur k . On lâche la bille à l'origine O des axes avec une vitesse nulle. Elle est freinée par une force de frottement de type $\vec{F}_f = -\beta \vec{v}$ avec β une constante positive. Discuter le mouvement de la bille en fonction des valeurs de m , β et k . Déterminer dans chaque cas la position d'équilibre et la longueur maximale qui sera atteinte par le ressort au cours du temps.



On travaille dans le système de coordonnées cartésiennes $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. L'origine des axes est choisie à l'extrémité fixe du ressort, l'axe x parallèle à la tige et l'axe y perpendiculaire au plan incliné. Les forces s'appliquant à la particule sont la pesanteur $m\vec{g}$, la réaction normale au plan \vec{N} , la réaction normale à la tige \vec{R} , la force de frottement \vec{F}_f et la force de rappel du ressort \vec{F}_r . Au total :

$$\begin{aligned}\vec{F} &= m\vec{g} + \vec{N} + \vec{R} + \vec{F}_f + \vec{F}_r \\ &= mg(\sin \alpha \vec{e}_x - \cos \alpha \vec{e}_y) + N \vec{e}_y + R \vec{e}_z - \beta \dot{x} \vec{e}_x - k(x - l_0) \vec{e}_x \\ &= (mg \sin \alpha - \beta \dot{x} - k(x - l_0)) \vec{e}_x + (-mg \cos \alpha + N) \vec{e}_y + R \vec{e}_z\end{aligned}$$

La force de frottement n'a pas de composantes selon y et selon z puisque le mouvement est contraint par la tige à se faire selon x ($\dot{y} = \dot{z} = 0$ à tout instant).

En appliquant la loi de Newton $\vec{F} = m\vec{\gamma}$ et en projetant sur les axes, on a :

$$m\ddot{x} = mg \sin \alpha - \beta \dot{x} - k(x - l_0) \quad (2.28)$$

$$0 = -mg \cos \alpha + N \quad (2.29)$$

$$0 = R \quad (2.30)$$

L'équation (2.29) fournit directement l'expression de N :

$$N = mg \cos \alpha$$

L'équation (2.28) peut être réécrite sous la forme :

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = mg \sin \alpha + kl_0 \quad (2.31)$$

C'est une équation différentielle linéaire du deuxième ordre à coefficients constants. La solution de ce problème s'écrit comme la somme de la solution du problème homogène associé et d'une solution particulière x_p , qu'on peut prendre ici égale à une constante :

$$x_p = l_0 + \frac{mg \sin \alpha}{k}$$

On remarque que x_p est aussi le seul point d'équilibre du système puisque

$$\dot{x} = \ddot{x} = 0 \Rightarrow x_E = x_p.$$

On résout ensuite l'équation homogène associée $m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = 0$. La solution de cette équation est de la forme :

$$x_H(t) = P_1 e^{\omega_1 t} + P_2 e^{\omega_2 t}$$

où ω_1 et ω_2 sont les racines distinctes du polynôme caractéristique de l'équation différentielle, c'est-à-dire ici $mz^2 + \beta z + k = 0$, et P_1 , P_2 sont des polynômes de degré inférieur ou égal à la multiplicité du zéro correspondant moins un. Les racines ω du polynôme caractéristique s'écrivent :

$$\omega = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4mk}}{2m}$$

Le terme $\sqrt{\beta^2 - 4mk}$ est à discuter. Selon les valeurs de β , m et k , la racine peut être positive, nulle ou imaginaire. Chaque cas doit être considéré séparément.

a) $\beta^2 < 4mk$

Le terme sous la racine carrée étant négatif, les racines ont une partie imaginaire :

$$\omega = -\frac{\beta}{2m} \pm i\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\beta^2}{4m^2}} = -\frac{\beta}{2m} \pm i\omega_0$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\beta^2}{4m^2}}$. La solution du problème homogène s'écrit :

$$\begin{aligned} x_H(t) &= Ae^{\omega_1 t} + Be^{\omega_2 t} \\ &= e^{-\frac{\beta}{2m}t} (Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t}) \\ &= e^{-\frac{\beta}{2m}t} (A(\cos \omega_0 t + i \sin \omega_0 t) + B(\cos \omega_0 t - i \sin \omega_0 t)) \\ &= e^{-\frac{\beta}{2m}t} (C \cos \omega_0 t + D \sin \omega_0 t) \end{aligned}$$

avec A , B , C , D des constantes arbitraires, éventuellement complexes, qu'on peut déterminer avec les conditions initiales. La solution du problème non-homogène s'écrit comme la somme de la solution du problème homogène et

de la solution particulière $x_p = x_E$.

On a donc :

$$x(t) = e^{-\frac{\beta}{2m}t} (C \cos \omega_0 t + D \sin \omega_0 t) + l_0 + \frac{mg \sin \alpha}{k}$$

et :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= e^{-\frac{\beta}{2m}t} \left(-\frac{\beta}{2m} (C \cos \omega_0 t + D \sin \omega_0 t) + \omega_0 (-C \sin \omega_0 t + D \cos \omega_0 t) \right) \\ &= e^{-\frac{\beta}{2m}t} \left(\left(-C \frac{\beta}{2m} + D \omega_0 \right) \cos \omega_0 t - \left(D \frac{\beta}{2m} + C \omega_0 \right) \sin \omega_0 t \right)\end{aligned}$$

Les conditions initiales sont : $x(0) = \dot{x}(0) = 0$. On a donc :

$$\begin{cases} x(0) = 0 = C + x_p \\ \dot{x}(0) = 0 = -C \frac{\beta}{2m} + D \omega_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = -x_p \\ D = -\frac{\beta}{2m} \frac{x_p}{\omega_0} \end{cases}$$

Au final :

$$\begin{aligned}x(t) &= x_E \left[1 - e^{-\frac{\beta}{2m}t} \left(\cos \omega_0 t + \frac{\beta}{2m \omega_0} \sin \omega_0 t \right) \right] \\ \dot{x}(t) &= x_E \frac{\omega_0^2 + (\frac{\beta}{2m})^2}{\omega_0} e^{-\frac{\beta}{2m}t} \sin \omega_0 t\end{aligned}$$

La trajectoire est donc sinusoïdale, mais d'amplitude décroissante au cours du temps. On remarque que $x \rightarrow x_E$ quand $t \rightarrow \infty$.

Puisque le mouvement est amorti, le ressort atteindra sa longueur maximale lors de la première phase d'extension qui suit les conditions initiales, lorsque cette extension atteint son maximum. Cet instant correspond évidemment à la première annulation de $\dot{x}(t)$ pour $t > 0$, c'est-à-dire pour $t = \pi/\omega_0$. En injectant cette valeur de t dans $x(t)$, on trouve que la longueur maximale atteinte est donnée par :

$$l_{max} = x_E \left(1 + e^{-\frac{\beta \pi}{2m \omega_0}} \right)$$

b) $\beta^2 = 4mk$

Le terme sous la racine étant nul, les deux racines sont confondues et valent :

$$\omega = -\frac{\beta}{2m}$$

La solution du problème prend donc la forme :

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\frac{\beta}{2m}t} + x_p$$

et :

$$\dot{x}(t) = e^{-\frac{\beta}{2m}t} \left(B - \frac{\beta}{2m}(A + Bt) \right)$$

où x_p est une solution particulière de l'équation non homogène (inchangée) et où A et B sont des constantes déterminées par les conditions initiales. On a :

$$\begin{cases} x(0) = 0 = A + x_p \\ \dot{x}(0) = 0 = B - A \frac{\beta}{2m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -x_p \\ B = -\frac{\beta}{2m}x_p \end{cases}$$

Au final :

$$\begin{aligned} x(t) &= x_E \left[1 - \left(1 + \frac{\beta}{2m}t \right) e^{-\frac{\beta}{2m}t} \right] \\ \dot{x}(t) &= x_E \left(\frac{\beta}{2m} \right)^2 t e^{-\frac{\beta}{2m}t} \end{aligned}$$

Le point matériel tend toujours vers sa position d'équilibre $x_E = x_p$ lorsque $t \rightarrow \infty$ mais le mouvement n'est plus oscillatoire. La longueur maximale est atteinte pour $t \rightarrow \infty$, avec

$$l_{max} = x_E.$$

c) $\beta^2 > 4mk$

La racine carrée est alors à valeur réelle et les racines du polynôme caractéristique valent :

$$\omega = -\frac{\beta}{2m} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{4m^2} - \frac{k}{m}} = -\frac{\beta}{2m} \pm \omega_0$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{\beta^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}$. La solution du problème homogène s'écrit :

$$\begin{aligned} x_H(t) &= Ae^{\omega_1 t} + Be^{\omega_2 t} \\ &= e^{-\frac{\beta}{2m}t} (Ae^{\omega_0 t} + Be^{-\omega_0 t}) \end{aligned}$$

avec A et B des constantes déterminées par les conditions initiales. La solution du problème non-homogène est obtenue en ajoutant la solution particulière x_p à x_H :

$$x(t) = e^{-\frac{\beta}{2m}t} (Ae^{\omega_0 t} + Be^{-\omega_0 t}) + x_p$$

et

$$\dot{x}(t) = e^{-\frac{\beta}{2m}t} \left[A(\omega_0 - \frac{\beta}{2m})e^{\omega_0 t} - B(\omega_0 + \frac{\beta}{2m})e^{-\omega_0 t} \right]$$

Les conditions initiales fournissent :

$$\begin{cases} x(0) = 0 = A + B + x_p \\ \dot{x}(0) = 0 = A(\omega_0 - \frac{\beta}{2m}) - B(\omega_0 + \frac{\beta}{2m}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -x_p \left(\frac{\frac{\beta}{2m} + \omega_0}{2\omega_0} \right) \\ B = x_p \left(\frac{\frac{\beta}{2m} - \omega_0}{2\omega_0} \right) \end{cases}$$

Finalement,

$$\begin{aligned} x(t) &= x_E \left[\frac{1}{2\omega_0} e^{-\frac{\beta}{2m}t} \left[-\left(\frac{\beta}{2m} + \omega_0 \right) e^{\omega_0 t} + \left(\frac{\beta}{2m} - \omega_0 \right) e^{-\omega_0 t} \right] \right] \\ \dot{x}(t) &= \frac{x_E}{2\omega_0} \left(\left(\frac{\beta}{2m} \right)^2 - \omega_0^2 \right) \left(e^{\omega_0 t} - e^{-\omega_0 t} \right) e^{-\frac{\beta}{2m}t} \end{aligned}$$

Le mouvement est une décroissance exponentielle vers la position d'équilibre car $e^{(-\frac{\beta}{2m}+\omega_0)t} \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$. En effet,

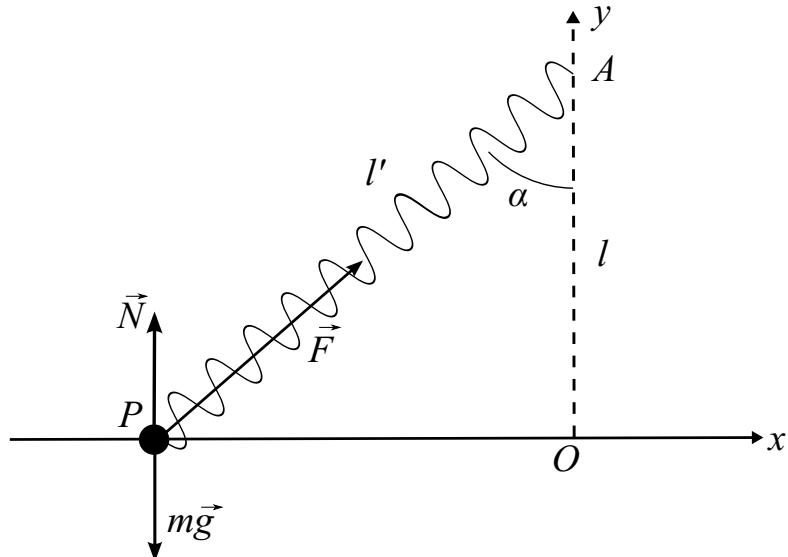
$$-\frac{\beta}{2m} + \omega_0 = -\frac{\beta}{2m} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4m^2} - \frac{k}{m}} < 0.$$

Ici aussi, l'elongation maximale, atteinte pour $t \rightarrow \infty$, vaut :

$$l_{max} = x_E.$$

2.3.2 L'oscillateur lié à une droite

Une perle, assimilable à un point matériel P de masse m , est astreinte à se déplacer sur une tige horizontale. Elle est attachée à un ressort dont l'autre extrémité est attachée à un point fixe A situé à une distance l de la tige (cf. figure). Sachant que la raideur du ressort est k et que sa longueur naturelle vaut l_0 , déterminer quels vont être les points d'équilibre en fonction des valeurs relatives de l et l_0 . Etudier ensuite l'évolution de petites perturbations autour de ces points d'équilibre, et en déduire leur stabilité. On suppose les frottements inexistant.



On travaille dans le système de coordonnées cartésiennes $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Les forces s'appliquant à la particule sont la pesanteur $m\vec{g}$, la réaction normale au plan $\vec{N} = N_y\vec{e}_y + N_z\vec{e}_z$ et la force de rappel du ressort $\vec{F}_r = -k(l' - l_0)\vec{e}_r$ (avec $\vec{e}_r = -\sin \alpha \vec{e}_x - \cos \alpha \vec{e}_y$). Au total :

$$\begin{aligned}\vec{F} &= m\vec{g} + N_y\vec{e}_y + N_z\vec{e}_z + \vec{F}_r \\ &= -mg\vec{e}_y + N_y\vec{e}_y + N_z\vec{e}_z + k(l' - l_0)(\sin \alpha \vec{e}_x + \cos \alpha \vec{e}_y)\end{aligned}$$

Les vecteurs position, vitesse et accélération sont :

$$\begin{aligned}\vec{r} &= x\vec{e}_x \\ \vec{v} &= \dot{x}\vec{e}_x \\ \vec{\gamma} &= \ddot{x}\vec{e}_x\end{aligned}$$

En appliquant la loi de Newton $\vec{F} = m\vec{\gamma}$ et en projetant sur les axes, on a :

$$\begin{aligned}m\ddot{x}\vec{e}_x &= -mg\vec{e}_y + N_y\vec{e}_y + N_z\vec{e}_z + k(l' - l_0)(\sin \alpha \vec{e}_x + \cos \alpha \vec{e}_y) \\ (. \vec{e}_x) \quad : \quad m\ddot{x} &= k(l' - l_0)\sin \alpha = -xk\left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{l^2 + x^2}}\right)\end{aligned}\tag{2.32}$$

$$\begin{aligned}(. \vec{e}_y) \quad : \quad 0 &= -mg + N_y + k(l' - l_0)\cos \alpha \\ &= -mg + N_y + lk\left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{l^2 + x^2}}\right)\end{aligned}\tag{2.33}$$

$$(. \vec{e}_z) \quad : \quad 0 = N_z\tag{2.34}$$

avec $\cos \alpha = l/l'$, $\sin \alpha = -x/l'$ et $l'^2 = l^2 + x^2$. Les équations (2.33) et (2.34) permettent de déterminer la force de réaction. Le mouvement du point P est défini par l'équation (2.32).

Les positions d'équilibre x_E sont telles que $\dot{x} = \ddot{x} = 0$. En repartant de l'équation (2.32), on obtient :

$$0 = -xk\left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{l^2 + x^2}}\right)$$

— Soit $x_E = 0$.

Cette position d'équilibre est valable quelles que soient les valeurs relatives de l et l_0 .

— Soit $1 = \frac{l_0}{\sqrt{l^2 + x_E^2}} \implies l^2 + x_E^2 = l_0^2 \implies x_E = \pm\sqrt{l_0^2 - l^2}$.

Cette position d'équilibre n'est valable que si $l_0^2 - l^2 > 0$, donc si $l_0 > l$. Pour $l = l_0$, on retrouve $x_E = 0$.

Pour étudier l'évolution de petites perturbations autour de ces positions d'équilibre, on considère :

$$x = x_E + \tilde{x}$$

L'équation (2.32) devient :

$$m\ddot{x} = m(\ddot{x}_E + \ddot{\tilde{x}}) = m\ddot{\tilde{x}} = -xk\left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{l^2 + x^2}}\right) = f(x)\tag{2.35}$$

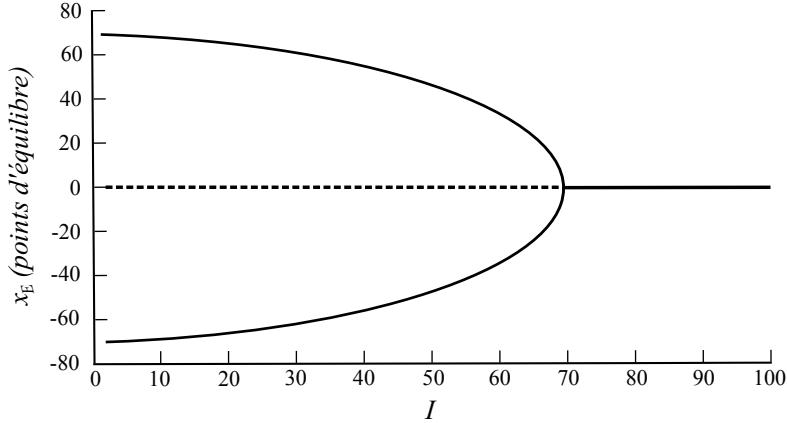


FIGURE 2.1 – Diagramme de bifurcation de x_E en fonction de l . Les positions d'équilibre stables sont représentées en trait continu et celles instables en pointillés.

Le développement en série de Taylor de $f(x)$, limité au premier ordre, donne :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_E + \tilde{x}) = f(x_E) + \tilde{x} \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_E} \\ &= 0 + \tilde{x} \left(-k \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{l^2 + x_E^2}} \right) - x_E^2 k \left(\frac{l_0}{\sqrt{(l^2 + x_E^2)^3}} \right) \right) \end{aligned} \quad (2.36)$$

Cas 1 : $x_E = 0$. En repartant des équations (2.35) et (2.36), on a :

$$m\ddot{\tilde{x}} = -k\tilde{x} \left(1 - \frac{l_0}{l} \right)$$

— Si $l_0 < l$:

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{x}} &= -\omega^2 \tilde{x} \\ \Rightarrow \tilde{x}(t) &= A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \end{aligned}$$

avec $\omega^2 = k \left(1 - \frac{l_0}{l} \right) / m$. La position d'équilibre est stable étant donné qu'il s'agit d'oscillations d'amplitude fixe autour de cette position d'équilibre.

— Si $l_0 > l$:

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{x}} &= \alpha^2 \tilde{x} \\ \Rightarrow \tilde{x}(t) &= C \exp^{(\alpha t)} + D \exp^{(-\alpha t)} \end{aligned}$$

avec $\alpha^2 = -k \left(1 - \frac{l_0}{l} \right) / m$. La position d'équilibre est instable sauf si $C = 0$ (cas particulier).

Cas 2 : $x_E = \pm\sqrt{l_0^2 - l^2}$. Ce cas n'est valable que si $l_0 > l$. En repartant des équations (2.35) et (2.36), on a :

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -k\frac{l_0^2 - l^2}{l_0^2}\tilde{x} = -k\left(1 - \frac{l^2}{l_0^2}\right)\tilde{x} = -m\Omega^2\tilde{x} \\ \ddot{x} &= -\Omega^2\tilde{x} \\ \implies \tilde{x}(t) &= A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t) \end{aligned}$$

avec $\Omega^2 = k\left(1 - \frac{l^2}{l_0^2}\right)/m$. La position d'équilibre est stable étant donné qu'il s'agit d'oscillations d'amplitude fixe autour de cette position d'équilibre.

Au final, l'étude de la stabilité des positions d'équilibre se résume comme suit.

- $l_0 < l$, il n'existe qu'une seule position d'équilibre : $x_E = 0$, stable.
- $l_0 > l$, il existe trois positions d'équilibre : $x_E = 0$, instable ; $x_E = \pm\sqrt{l_0^2 - l^2}$, stables.

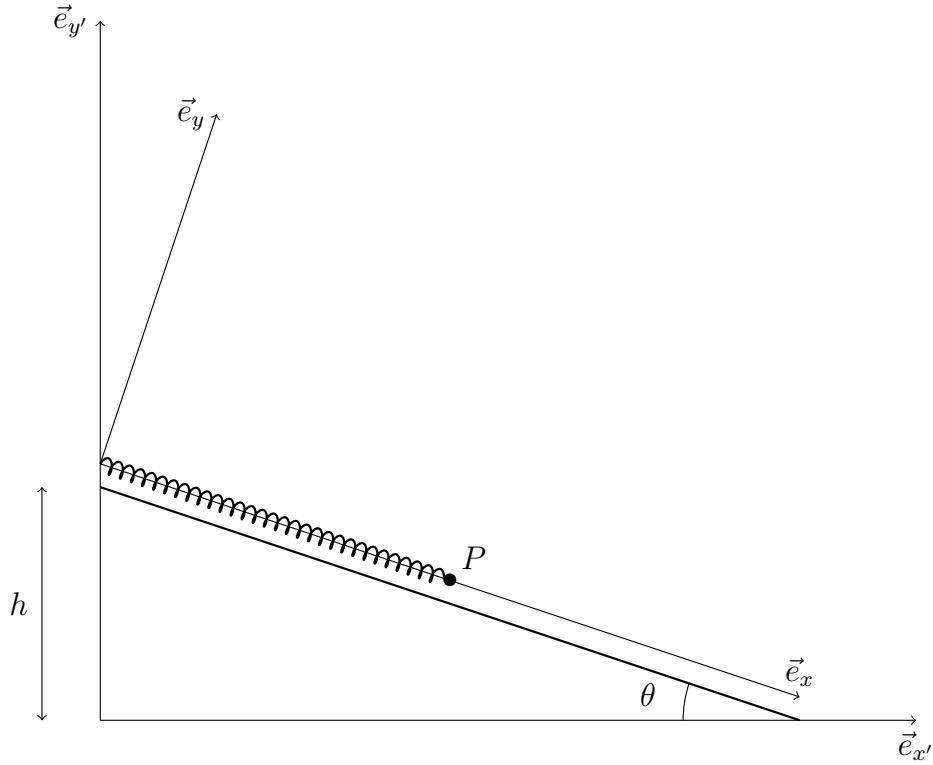
Ces résultats peuvent être représentés dans ce que l'on appelle un diagramme de bifurcation (Figure 2.1). Dans un tel diagramme, les positions d'équilibre, ainsi que leurs propriétés de stabilité sont représentées géométriquement en fonction d'un paramètre dont le système dépend et qui est ici la distance l .

2.3.3 Ressort non linéaire

Une particule P de masse m glisse sans frottement le long d'une tige inclinée sur une tige rigide comme schématisé sur la figure suivante. La particule est attachée à un ressort non linéaire dont la force de rappel est donnée par :

$$\vec{F}_r = -kL \left(\exp\left(\frac{x - l_0}{L}\right) - 1 \right) \vec{e}_x$$

où l_0 est la longueur naturelle de ressort et L est un paramètres strictement positif. Ecrivez les équations de Newton dans le système de coordonnées cartésiennes (x, y, z) et déterminer la position d'équilibre. Etudier l'évolution de petites perturbations selon x , déduire la stabilité de l'équilibre et déterminer la période des petites oscillations. Montrer que l'énergie mécanique totale est conservée et écrire l'intégrale première d'énergie. Les conditions initiales sont $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$.



La position, la vitesse et l'accélération sont données par :

$$\begin{aligned}\vec{r} &= x\vec{e}_x \\ \vec{v} &= \dot{x}\vec{e}_x \\ \vec{\gamma} &= \ddot{x}\vec{e}_x\end{aligned}$$

L'équation de Newton est donnée par :

$$m\vec{\gamma} = \vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}_r$$

où les deux forces apparaissant dans le membre de droite sont la force de rappel définie dans l'énoncé, la normale

$$\vec{N} = N_y\vec{e}_y + N_z\vec{e}_z$$

et le poids

$$m\vec{g} = mg \sin \theta \vec{e}_x - mg \cos \theta \vec{e}_y$$

En projetant l'équation de Newton sur les axes \$\vec{e}_y\$ et \$\vec{e}_z\$, on a :

$$\begin{cases} 0 = N_y - mg \cos \theta \\ 0 = N_z \end{cases}$$

En projetant l'équation de Newton sur l'axe \$\vec{e}_x\$, on a :

$$m\ddot{x} = -kL \left(\exp \left(\frac{x - l_0}{L} \right) - 1 \right) + mg \sin \theta$$

Pour déterminer la position d'équilibre, on annule \ddot{x} , donc :

$$\begin{aligned} 0 &= -kL \left(\exp \left(\frac{x_E - l_0}{L} \right) - 1 \right) + mg \sin \theta \\ \Leftrightarrow \exp \left(\frac{x_E - l_0}{L} \right) &= \frac{mg \sin \theta}{kL} + 1 \\ \Leftrightarrow x_E &= L \ln \left(\frac{mg \sin \theta}{kL} + 1 \right) + l_0 \end{aligned}$$

Petites perturbations

Désignons par $f(x)$ le membre de droite de l'équation de Newton projetée sur \vec{e}_x :

$$f(x) = -kL \left(\exp \left(\frac{x - l_0}{L} \right) - 1 \right) + mg \sin \theta$$

On développe $f(x)$ en série limitée au premier ordre autour de la position d'équilibre :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_E) + \frac{df}{dx} \Big|_{x=x_E} \tilde{x} \\ &= 0 + \left[-kL \frac{1}{L} \exp \left(\frac{x - l_0}{L} \right) \right]_{x=x_E} \tilde{x} \\ &= -k \left(\frac{mg \sin \theta}{kL} + 1 \right) \tilde{x} \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$m\ddot{\tilde{x}} = -k \left(\frac{mg \sin \theta}{kL} + 1 \right) \tilde{x}$$

La solution est :

$$\tilde{x}(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

avec

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} \left(\frac{mg \sin \theta}{kL} + 1 \right)}$$

donc on en déduit que l'équilibre est stable. On a que

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m} \left(\frac{mg \sin \theta}{kL} + 1 \right)}}$$

La force du ressort dérive-t-elle d'un potentiel ?

La particule étant enfilée sur une tige, la force du ressort n'a de composante non nulle que suivant x . Dès lors, $\frac{\partial V_r}{\partial y} = \frac{\partial V_r}{\partial z} = 0$. Le potentiel V_r ne dépend donc que de x . On a :

$$F_r = -\frac{\partial V_r}{\partial x} = -kL \left(\exp \left(\frac{x - l_0}{L} \right) - 1 \right)$$

On déduit :

$$V_r = kL^2 \exp\left(\frac{x - l_0}{L}\right) - kLx$$

La force poids est conservative et dérive du potentiel $V_p = mgy' = mg(h + y \cos \theta - x \sin \theta)$ avec $y = 0$.

On en conclut que l'énergie mécanique est bien conservée car toutes les forces qui travaillent dérivent d'un potentiel.

Donc

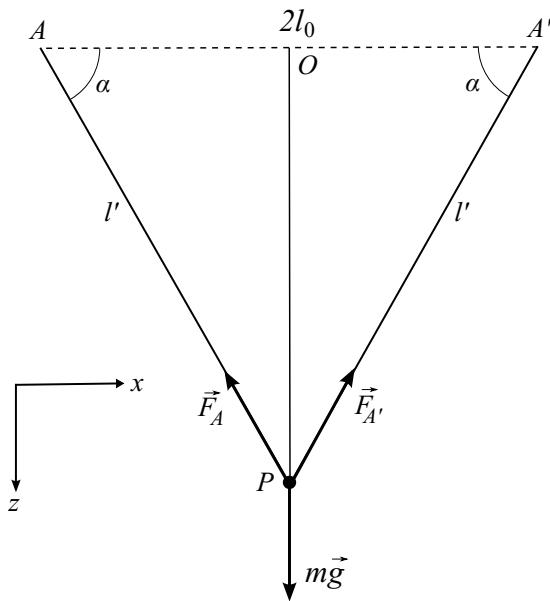
$$E = E_0 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + kL^2 \exp\left(\frac{x - l_0}{L}\right) - kLx + mgh - mgx \sin \theta$$

avec

$$E_0 = \frac{1}{2}m\dot{x}_0^2 + kL^2 \exp\left(\frac{-l_0}{L}\right) + mgh = cste$$

2.3.4 La particule sur l'élastique

Un point matériel P de masse m est attaché au milieu d'un élastique de longueur naturelle $2l_0$ dont les extrémités sont attachées en deux points fixes A et A' , situés à la même hauteur et distants de $2l_0$. A l'équilibre, les points A , A' et P forment un triangle équilatéral. Calculer la période des petites oscillations verticales de P au voisinage de sa position d'équilibre.



Soient \vec{e}_A et $\vec{e}_{A'}$ les vecteurs unitaires pointant dans les directions PA et PA' , et O le point milieu du segment AA' . Si on suppose que la force de rappel de l'élastique est linéaire, on a, tant que le point P reste à la verticale du point O :

$$\begin{aligned}\vec{F}_A &= k(l' - l_0) \vec{e}_A = k(l' - l_0)(-\cos \alpha \vec{e}_x - \sin \alpha \vec{e}_z) \\ \vec{F}_{A'} &= k(l' - l_0) \vec{e}_{A'} = k(l' - l_0)(\cos \alpha \vec{e}_x - \sin \alpha \vec{e}_z)\end{aligned}$$

avec l' la distance PA ou PA' . Si on choisit le point O comme origine des axes, le mouvement vertical du point P est régi par l'équation :

$$m\ddot{z} = mg - 2k(l' - l_0) \sin \alpha = mg - 2k(l' - l_0) \frac{z}{l'} = mg - 2k \left(1 - \frac{l_0}{l'}\right) z = f(z)$$

où $l' = \sqrt{z^2 + l_0^2}$. Cette équation est donc non linéaire en z .

A l'équilibre, on sait que $l' = 2l_0$, par conséquent z_E vérifie la relation $z_E^2 + l_0^2 = 4l_0^2$ et on obtient $z_E = \sqrt{3}l_0$.

Etudions les petites oscillations de P autour de la position d'équilibre, *i.e.* supposons que $z = z_E + \tilde{z}$ avec $|\tilde{z}| \ll$. On trouve alors que :

$$m\ddot{z} = m\ddot{\tilde{z}} = f(z_E + \tilde{z}) = f(z_E) + \tilde{z} \left. \frac{df}{dz} \right|_{z_E} = \tilde{z} \left. \frac{df}{dz} \right|_{z_E} = \dots = -\frac{7}{4}k\tilde{z}$$

c'est-à-dire :

$$\ddot{\tilde{z}} = -\omega^2 \tilde{z}$$

où $\omega = \sqrt{\frac{7}{4} \frac{k}{m}}$. Le mouvement est donc harmonique et la période des oscillations vaut :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{4m}{7k}}$$

2.3.5 Exercices proposés

1. Etudier le mouvement d'un point matériel soumis à une force de rappel vers un point fixe O , proportionnelle à la distance au point O .

$$(R : \vec{r} = \vec{r}_0 \cos \omega t + \frac{\vec{v}_0}{\omega} \sin \omega t, \omega = \sqrt{\frac{k}{m}})$$

2. Un point matériel pesant se meut sans frottement sur une tige rectiligne faisant un angle α avec la verticale. Il est attaché à l'extrémité libre d'un ressort linéaire dont l'autre extrémité est attachée à un point fixe de la tige. Ecrire l'intégrale première d'énergie, rechercher la position d'équilibre et étudier le mouvement.

$$(R : U = \frac{kx^2}{2} - mgx \cos \alpha, x_{eq} = \frac{mg}{k} \cos \alpha)$$

2.4 Forces centrales

2.4.1 Rappels théoriques

Une force centrale \vec{F} est une force constamment dirigée vers un point fixe O . Si on choisit ce point O comme origine du système de référence et si P est le point matériel qui subit la force \vec{F} , on a $\vec{F} \parallel \vec{OP}$ et on en déduit la conservation du moment cinétique. En effet, on a :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{OP} \wedge \vec{F} = 0$$

et par conséquent :

$$\vec{L}_O = \vec{OP} \wedge m\vec{v} = \text{constante.}$$

Le vecteur $\vec{r} = \vec{OP}$ est donc toujours perpendiculaire à un vecteur \vec{L}_O constant, ce qui implique que le mouvement est plan et se fait dans le plan passant par O et perpendiculaire à \vec{L}_O .

Par ailleurs, il est intéressant de remarquer que toute force centrale à symétrie sphérique (c'est-à-dire ne dépendant que de la coordonnée radiale r) dérive d'un potentiel. Cela résulte du fait que le rotationnel de toute fonction vectorielle du type $f(r)\vec{e}_r$ est nul. Par conséquent, l'énergie totale est toujours conservée pour ce type de forces :

$$E = T + V = \text{constante}$$

où V est tel que $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$. C'est le cas notamment de la force de gravitation universelle :

$$\vec{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

pour laquelle on a

$$V = -G \frac{Mm}{r}$$

et par conséquent :

$$T + V = \frac{1}{2}mv^2 - G \frac{Mm}{r} = \text{constante.}$$

Pour résoudre un problème à force centrale, on utilise généralement les coordonnées polaires dans le plan du mouvement, avec le centre O de la force comme origine du système de coordonnées. En effet, la force ne possède alors pas de composante selon \vec{e}_φ , ni selon \vec{e}_z , et cela simplifie les équations à résoudre. Pour rappel, on a en coordonnées polaires :

$$\begin{cases} \vec{r} = r\vec{e}_r \\ \vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \\ \vec{\gamma} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi \end{cases}$$

Puisque $\vec{F} = F\vec{e}_r$, la loi de Newton s'écrit :

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F \quad (2.37)$$

$$r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 0 \quad (2.38)$$

En multipliant l'équation (2.38) par r , on obtient :

$$r^2\ddot{\varphi} + 2r\dot{r}\dot{\varphi} = \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = 0$$

On en déduit que :

$$r^2\dot{\varphi} = \text{constante} = h \quad (2.39)$$

où h est appelée la *constante des aires*.

Ce résultat équivaut à la conservation du *module* du moment cinétique puisque

$$\vec{L}_O = \vec{r} \wedge m\vec{v} = r\vec{e}_r \wedge (\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi) = mr^2\dot{\varphi}\vec{e}_z$$

La conservation du moment cinétique en tant que vecteur découle quant à elle du fait que $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = 0$.

Les équations (2.37) et (2.38) deviennent donc :

$$m \left(\ddot{r} - \frac{h^2}{r^3} \right) = F \quad (2.40)$$

$$r^2\dot{\varphi} = h \quad (2.41)$$

2.4.2 Gravitation universelle : la masse de la galaxie

Sachant que le Soleil se trouve à 25000 années-lumière du centre de la galaxie et que sa trajectoire, circulaire en première approximation, a une période de 1.7×10^8 années, trouver la masse gravitationnelle de la galaxie. On donne la vitesse de la lumière $c = 3 \times 10^8$ m/s et la constante de la gravitation universelle $G = 6.67 \times 10^{-11}$ m³/kg.s.

Afin de résoudre l'exercice, on fait les deux hypothèses suivantes :

- 1) La totalité de la galaxie se situe à l'intérieur de l'orbite solaire. Cela revient à négliger la masse présente au-delà de cette orbite.
- 2) La distribution de masse au sein de la galaxie est à symétrie sphérique. Grâce à cette hypothèse, on peut montrer (nous l'admettrons) que tout se passe comme si la force de gravitation s'exerçait sur le Soleil provenait d'un point matériel unique situé au centre de la galaxie et de masse équivalente à la masse totale de la galaxie.

La première méthode consiste à résoudre l'équation de Newton $\vec{F} = m\vec{\gamma}$.

$$\vec{F} = -G \frac{M_G M_\odot}{R^2} \vec{e}_r$$

où M_G est la masse de la galaxie et M_\odot celle du Soleil, et R est la distance du Soleil par rapport au centre de la galaxie. D'autre part, comme $r = R$ est une constante, l'accélération s'écrit :

$$\vec{\gamma} = -R\dot{\varphi}^2\vec{e}_r + R\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$

et on obtient, en projetant sur les axes :

$$\begin{aligned} -M_\odot R\dot{\varphi}^2 &= -G \frac{M_G M_\odot}{R^2} \\ M_\odot R\ddot{\varphi} &= 0 \end{aligned}$$

La deuxième équation fournit $\dot{\varphi} = cst$, par conséquent le mouvement est uniforme. La première équation fournit la masse de la galaxie :

$$M_G = \frac{R^3 \dot{\varphi}^2}{G}$$

R est donné dans l'énoncé et $\dot{\varphi}$ peut être déterminé à partir de la période T du mouvement : $T = \frac{2\pi}{\dot{\varphi}}$ puisque $\dot{\varphi}$ est constant. Par conséquent,

$$M_G = \frac{R^3 4\pi^2}{GT^2}.$$

La distance R est donnée dans l'énoncé en années-lumière, une année-lumière représentant la distance parcourue par la lumière à la vitesse c en un an. On commence par calculer la durée d'une année en secondes :

1 an = 365 jours \times 24 heures \times 60 minutes \times 60 secondes = 3.1536×10^7 secondes.
Une année lumière vaut donc : $1 \text{ AL} = 3 \times 10^8 \text{ m/s} \times 3.1536 \times 10^7 \text{ s} = 9.4608 \times 10^{15} \text{ m}$.
Par conséquent, la distance R vaut en mètres $R = 25000 \times 9.4608 \times 10^{15} = 2.3652 \times 10^{20} \text{ m}$ et la période T vaut en secondes : $T = 170 \times 10^6 \times 3.1536 \times 10^7 = 5.36 \times 10^{15} \text{ s}$.
On trouve ainsi que :

$$M_G = 2.72 \times 10^{41} \text{ kg}$$

La deuxième méthode consiste à utiliser directement la troisième loi de Kepler :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_G} \Rightarrow M_G = \frac{4\pi^2 a^3}{GT^2}$$

avec a le demi-grand axe de l'ellipse (R s'il s'agit d'un cercle). Cette expression est la même que celle obtenue précédemment.

2.4.3 Gravitation universelle : satellite géostationnaire

Quel doit-être le rayon d'une orbite circulaire équatoriale d'un satellite artificiel pour que celui-ci soit fixe par rapport à la Terre ? On donne la masse de la terre $M_T = 5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$ et son rayon $R = 6378 \text{ km}$.

La période de rotation du satellite doit être la même que la période de rotation de la Terre, c'est-à-dire un jour. On utilise la troisième loi de Kepler :

$$\frac{\tau^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow a &= \left(\frac{GM_T \tau^2}{4\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{6.67 \times 10^{-11} \times 5.97 \times 10^{24} \times (23 \times 60 \times 60 + 56 \times 60 + 4)^2}{4\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}} \\ &= 4.223 \times 10^7 \text{ m} \end{aligned}$$

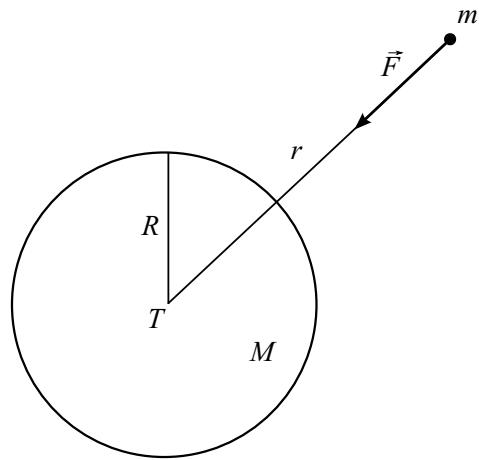
Ci-dessus, la période de rotation de la Terre à considérer est le *jour sidéral*, c'est à dire la période de rotation réelle de la planète et non pas sa période par rapport au soleil (la Terre tournant autour du Soleil, le jour solaire de 24h n'est pas parfaitement

équivalent à sa période de rotation de 23h56min4s). Et donc on trouve l'altitude h à partir de la surface de la Terre :

$$h = a - R = 4.223 \times 10^7 - 6378 \times 10^3 = 3.5849 \times 10^7 \text{ m} = 35\,849 \text{ km}$$

2.4.4 Gravitation universelle : vitesse de libération

Un objet de masse m est projeté verticalement à partir de la surface de la Terre (de masse M et de rayon R), à une vitesse initiale v_0 . Négligeant la résistance de l'air, trouver la vitesse de l'objet à une distance H au dessus de la surface de la Terre. Quelle est la valeur minimale de v_0 telle que l'objet ne retombe jamais sur Terre ?



La première méthode consiste à résoudre l'équation de Newton $\vec{F} = m\vec{\gamma}$. Comme le mouvement se fait dans une direction radiale ($\varphi = 0 \forall t$), on a $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r$ et $\vec{\gamma} = \ddot{r}\vec{e}_r$. Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned} m\ddot{r}\vec{e}_r &= -G\frac{Mm}{r^2}\vec{e}_r \\ \implies \ddot{r} &= -\frac{GM}{r^2} \end{aligned}$$

Si on multiplie par $2\dot{r}$:

$$2\dot{r}\ddot{r} = -2GM\frac{\dot{r}}{r^2}$$

et qu'on intègre ensuite :

$$\dot{r}^2 = 2\frac{GM}{r} + C$$

La constante C est déterminée par les conditions initiales : en $t = 0$, $r = R$ et $v = v_0$. D'où :

$$C = v_0^2 - 2\frac{GM}{R}$$

Donc :

$$\dot{r}^2 = v^2 = v_0^2 - 2GM \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right) = v_0^2 - 2GM \frac{r - R}{rR}$$

A l'altitude H , on a $r = R + H$ et

$$v^2 = v_0^2 - \frac{2GMH}{R(R+H)}$$

L'objet ne retombera pas si sa vitesse à l'infini ne s'est pas annulée. Quand H tend vers l'infini, on a :

$$\lim_{H \rightarrow \infty} v = \sqrt{v_0^2 - \frac{2GM}{R}}$$

Il faut donc une vitesse initiale v_0 plus grande ou égale à $v_l = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$.

Pour la Terre, avec $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg.s}$, $M = 5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$ et $R = 6378 \text{ km}$ on obtient une valeur de $v_l = 11.2 \text{ km/s}$.

La deuxième méthode consiste à utiliser l'intégrale première d'énergie $E = T + V = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}$. A la surface de la Terre on a $v = v_0$ et $r = R$. A l'infini, dans le cas limite, la vitesse v s'annule (pour $v_0 = v_l$) et la distance r est infinie. On a donc :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{R} = 0$$

Par conséquent,

$$v_l = v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{R}}.$$

2.4.5 Gravitation universelle : astéroïde

Estimer la taille maximum d'un astéroïde dont on pourrait s'échapper en sautant.

Réponse

Avant de sauter, on plie généralement les genoux pour abaisser le centre de gravité du corps d'environ 50 cm et puis on saute vers le haut. D'habitude, on peut atteindre une hauteur de 60 cm au-dessus de notre taille normale. Durant ce processus, le travail effectué (W) est de

$$(0,5 + 0,6)mg$$

où m est la masse de notre corps et g l'accélération de la gravité.

On suppose que lorsque l'on saute sur un astéroïde de masse M et de rayon R , on consomme la même énergie que sur Terre. Donc, pour s'échapper d'un astéroïde en sautant, il faut que :

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R} = 0$$

avec v la vitesse de libération. Ici, l'énergie cinétique $\frac{1}{2}mv^2$ est le travail produit par les muscles pendant le saut (W). Dès lors, la condition se résume à :

$$1,1mg = \frac{GMm}{R}$$

Si on suppose que la densité d'un astéroïde est la même que celle de la Terre, alors

$$\frac{M}{M_T} = \frac{R^3}{R_T^3}$$

où M_T et R_T sont la masse et le rayon de la Terre. Etant donné que

$$g = \frac{GM_T}{R_T^2}$$

on trouve :

$$R = \frac{GM}{1,1g} = \frac{R^3}{1,1R_T}$$

donc, finalement :

$$R = \sqrt{1,1R_T} = \sqrt{1,1 \times 6400 \times 10^3} = 2,7 \times 10^3 m$$

2.4.6 Gravitation universelle : composition de la Lune

Sachant qu'un satellite de la Terre en orbite circulaire près de la surface de la Terre prend environ 90 minutes pour faire une révolution et qu'un satellite en orbite circulaire autour de la Lune prend aussi environ 90 minutes pour faire une révolution, que peut-on dire à propos de la composition de la Lune ?

Réponse

Pour un corps de masse m en orbite autour d'un corps de masse M sous l'effet de l'attraction gravitationnelle, on a :

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2} \vec{e}_r$$

On utilise la loi de Newton $\vec{F} = m\vec{\gamma}$ avec l'expression de l'accélération en coordonnées polaires :

$$m\vec{\gamma} = m(\ddot{r} - r\dot{\theta})\vec{e}_r + m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta$$

Comme on a une orbite circulaire, r est constant donc $\dot{r} = \ddot{r} = 0$. Il s'ensuit que :

$$m\vec{\gamma} = -mr\dot{\theta}\vec{e}_r + mr\ddot{\theta}\vec{e}_\theta$$

En projetant sur l'axe \vec{e}_θ , on a : $mr\ddot{\theta} = 0$.

En projetant sur l'axe \vec{e}_r , on a :

$$mr\dot{\theta}^2 = \frac{GMm}{r^2}$$

donc

$$r^3\dot{\theta}^2 = GM$$

Soient M_T et M_L les masses et R_T et R_L les rayons de la Terre et de la Lune respectivement. Les périodes de révolution d'un satellite autour de la Terre ou de la Lune étant les mêmes, on obtient :

$$\frac{R_L^3}{R_T^3} = \frac{M_L}{M_T}$$

donc

$$\frac{M_T}{V_T} = \frac{M_L}{V_L}$$

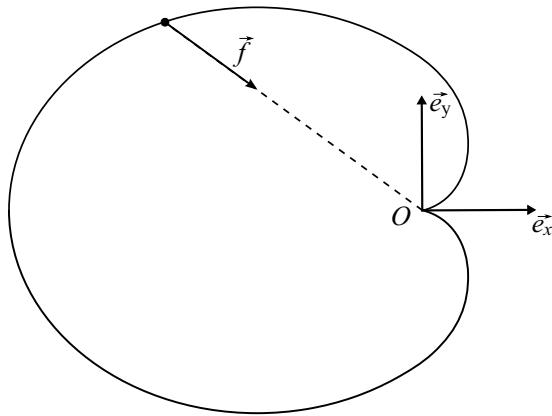
où V_T et V_L sont les volumes de la Terre et de la Lune respectivement. Il s'ensuit que la Terre et la Lune ont la même densité, donc on s'attend à ce que la composition chimique de ces deux corps célestes soit identique.

2.4.7 La cardioïde

Une particule de masse m se déplace sous l'action d'une force centrale $\vec{F} = F \vec{e}_r$ le long d'une trajectoire d'équation polaire $r = a(1 - \cos \varphi)$. Cette trajectoire est nommée cardioïde du grec *kardia*, "œur". Montrer que

$$\vec{F} = -\frac{3aL_0^2}{mr^4} \vec{e}_r$$

et déterminer la valeur de l'énergie totale (expliquer pourquoi elle est conservée).



Les équations de Newton s'écrivent en coordonnées polaires :

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F \quad (2.42)$$

$$r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 0 \quad (2.43)$$

Comme on sait que l'on doit obtenir $F = F(r)$, il s'agit d'exprimer l'accélération radiale en fonction de r uniquement. On déduit immédiatement de la deuxième équation que $r^2\dot{\varphi} = h$. Par conséquent, on peut facilement exprimer le terme $-r\dot{\varphi}^2$ en fonction de r uniquement : $-r\dot{\varphi}^2 = -h^2/r^3$. Reste à calculer \ddot{r} :

$$r = a(1 - \cos \varphi) \Rightarrow \dot{r} = a\dot{\varphi} \sin \varphi = a\frac{h}{r^2} \sin \varphi$$

En dérivant une seconde fois on obtient :

$$\ddot{r} = a \frac{h}{r^2} \dot{\varphi} \cos \varphi - a \frac{2h}{r^3} \dot{r} \sin \varphi = \dots = \frac{h^2}{r^3} \left(\frac{a}{r} - 1 - \frac{2a^2 \sin^2 \varphi}{r^2} \right)$$

Par conséquent,

$$F = m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = m \frac{h^2}{r^3} \left(\frac{a}{r} - 2 - \frac{2a^2 \sin^2 \varphi}{r^2} \right) = \dots = -\frac{3mah^2}{r^4}$$

où on a tenu compte du fait que

$$\sin^2 \varphi = 1 - \cos^2 \varphi = 1 - \left(\frac{a-r}{a} \right)^2$$

Par ailleurs, $L_O^2 = m^2 h^2$. On parvient donc bien au résultat demandé.

L'énergie totale est conservée car on a affaire à une force centrale à symétrie sphérique. Le potentiel correspondant obéit à l'équation :

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V = - \left(\frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{e}_z \right).$$

Comme $\vec{F} = F(r) \vec{e}_r$, on doit avoir :

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

et :

$$F(r) = -\frac{dV}{dr}.$$

Par conséquent,

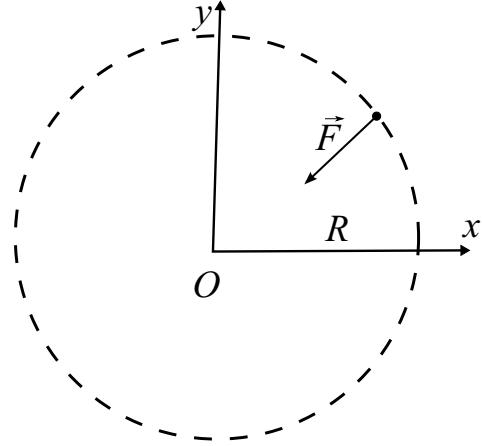
$$V(r) = -\frac{mah^2}{r^3}.$$

L'énergie s'écrit donc

$$E = T + V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{mah^2}{r^3} = \dots = 0.$$

2.4.8 Le potentiel $\mathbf{U} = k\mathbf{r}$

Une particule P de masse m est soumise au potentiel $U = kr$ où $r = |OP|$. Pour quelles valeurs de l'énergie E et du moment cinétique \vec{L}_O l'orbite de la particule sera-t-elle un cercle de rayon R autour de l'origine O ? Montrer que ce mouvement circulaire est uniforme et calculer sa période.



On commence par calculer la force qui dérive du potentiel U par la relation $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$. Pour rappel, on a en coordonnées cylindriques :

$$\vec{\nabla}U = \frac{\partial U}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{e}_z.$$

Par conséquent,

$$\vec{F} = -k\vec{e}_r$$

Il s'agit d'une force centrale et par conséquent, le mouvement est plan. On utilise dès lors les coordonnées polaires pour décrire la trajectoire.

L'expression de $\vec{\gamma}$ en coordonnées polaires s'écrit :

$$\vec{\gamma} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi$$

La loi de Newton $\vec{F} = m\vec{\gamma}$ fournit donc :

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = -k \quad (2.44)$$

$$r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 0 \quad (2.45)$$

La loi de conservation de l'énergie E s'écrit :

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + kr \quad (2.46)$$

Le moment cinétique \vec{L}_0 s'écrit quant à lui :

$$\vec{L}_0 = L_0\vec{e}_z = \vec{r} \wedge m\vec{v} = r\vec{e}_r \wedge m(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi) = mr^2\dot{\varphi}\vec{e}_z \quad (2.47)$$

Si l'orbite est circulaire et de rayon R , alors $r = R$ et $\dot{r} = \ddot{r} = 0$. L'équation (2.44) se réduit donc à :

$$-mR\dot{\varphi}^2 = -k.$$

Par conséquent,

$$\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{k}{mR}} \quad (2.48)$$

Cette valeur étant constante, le mouvement est uniforme. En utilisant les équations (2.46), (2.47) et (2.48), on trouve que l'énergie vaut :

$$E = \frac{1}{2}mR^2 \frac{k}{mR} + kR = \frac{3}{2}kR$$

et que le moment cinétique vaut :

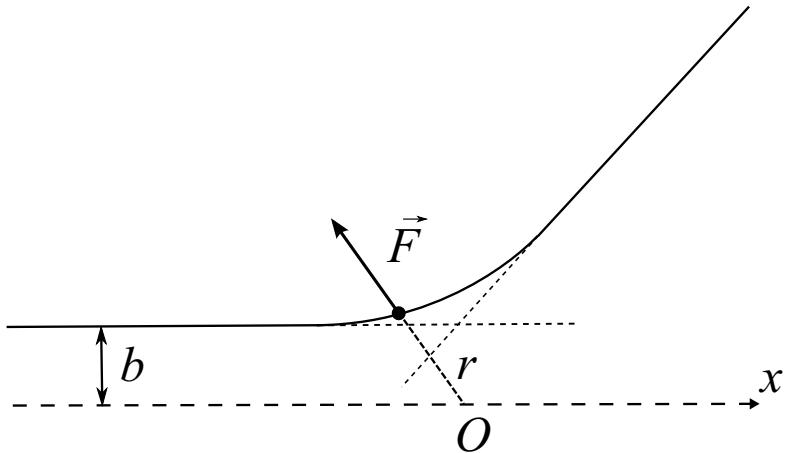
$$L_0 = mR^2 \sqrt{\frac{k}{mR}} = R\sqrt{kmR}.$$

La période T d'un mouvement circulaire uniforme est le rapport entre la circonference du cercle et la vitesse de la particule :

$$T = \frac{2\pi R}{R\dot{\varphi}} = 2\pi \sqrt{\frac{mR}{k}}.$$

2.4.9 Le potentiel de Rutherford, loi répulsive en r^{-2}

Une particule de masse m est lancée de l'infini avec une vitesse \vec{v}_0 et se rapproche d'un centre répulsif O . Le paramètre d'impact, c'est-à-dire la distance de O au support de \vec{v}_0 , est b . La force répulsive est donnée par $\vec{F} = \frac{k}{r^2} \vec{e}_r$, où k est une constante positive. Calculer les deux intégrales premières du mouvement en termes des conditions initiales. En déduire l'expression de la distance minimale d'approche r_m .



Une des deux intégrales premières est l'énergie totale $E = T + V$. En effet, la force $\vec{F} = \frac{k}{r^2} \vec{e}_r$, centrale, ne dépend que de r et dérive donc d'un potentiel. Ce potentiel V obéit à la relation $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$ avec l'opérateur $\vec{\nabla}$ en coordonnées cylindriques donné par :

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

On voit que pour une force de type $\vec{F}(r) = \frac{k}{r^2} \vec{e}_r$, V ne peut dépendre ni de φ , ni de z , et on a :

$$\frac{k}{r^2} = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

Par conséquent $V(r) = \frac{k}{r}$ convient. On a donc :

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{k}{r}$$

On peut déterminer la constante E par les conditions initiales. En effet, à l'infini, la vitesse de la particule vaut \vec{v}_0 et le potentiel est nul. On a donc :

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{k}{r} = \frac{1}{2}mv_0^2 \quad (2.49)$$

D'autre part, le moment cinétique \vec{L}_O est conservé puisque l'unique force est centrale. On a par définition :

$$\vec{L}_O = L_O \vec{e}_z = \vec{r} \wedge m\vec{v} = r \vec{e}_r \wedge m(\dot{r} \vec{e}_r + r\dot{\varphi} \vec{e}_\varphi) = mr^2\dot{\varphi} \vec{e}_z$$

Là encore, on peut déterminer la constante L_O par l'étude des conditions initiales. A l'infini, le vecteur \vec{r} peut se décomposer en deux parties :

$$\vec{r} = r_{\parallel} \frac{\vec{v}_0}{v_0} + r_{\perp} \frac{\vec{v}_0 \wedge \vec{e}_z}{v_0}$$

où r_{\perp} est la composante de \vec{r} perpendiculaire à \vec{v}_0 en l'infini (c'est-à-dire b) et r_{\parallel} la composante parallèle. Par conséquent :

$$\vec{L}_O(r = \infty) = \vec{r} \wedge m\vec{v}_0 = (r_{\parallel} \frac{\vec{v}_0}{v_0} + r_{\perp} \frac{\vec{v}_0 \wedge \vec{e}_z}{v_0}) \wedge m\vec{v}_0 = mr_{\perp}v_0 \vec{e}_z$$

On a donc $L_O = mbv_0$ en tout temps, vu la conservation du moment cinétique. La constante des aires s'écrit :

$$r^2\dot{\varphi} = bv_0 \quad (2.50)$$

La distance minimale d'approche est réalisée lorsque $\dot{r} = 0$. La vitesse vaut alors $v = r_m\dot{\varphi}$. On remplace dans les équations (2.49) et (2.50) et on obtient :

$$\frac{1}{2}mr_m^2\dot{\varphi}^2 + \frac{k}{r_m} = \frac{1}{2}mv_0^2 \quad (2.51)$$

$$r_m^2\dot{\varphi} = bv_0 \quad (2.52)$$

On peut isoler $\dot{\varphi}$ de l'équation (2.52) :

$$\dot{\varphi} = \frac{bv_0}{r_m^2}$$

et introduire cette expression dans l'équation (2.51) pour obtenir finalement :

$$r_m^2 - \frac{2k}{mv_0^2}r_m - b^2 = 0$$

La résolution de cette équation du second degré en r_m fournit :

$$r_m = \frac{k}{mv_0^2} + \sqrt{\left(\frac{k}{mv_0^2}\right)^2 + b^2},$$

l'autre racine étant négative et devant donc être rejetée puisque r est toujours défini positif ou nul.

2.4.10 Déduction de l'expression de la force de gravitation universelle

Montrer que les lois de Kepler couplées à la loi fondamentale de la Mécanique permettent de déduire que la force de gravitation qui s'exerce sur une planète de masse m s'écrit

$$\vec{F} = m \frac{\alpha}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

où α est une constante indépendante de la planète.

Première loi de Kepler (loi des ellipses) :

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + e \cos \varphi} \quad (2.53)$$

où $0 < e < 1$ et l'angle φ est mesuré à partir du périhélie.

Deuxième loi de Kepler (loi des aires) :

$$r^2 \dot{\varphi} = h \quad (2.54)$$

On peut directement déduire :

$$\begin{aligned} 2r\dot{r}\dot{\varphi} + r^2\ddot{\varphi} &= 0 \\ r(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) &= 0 \\ r\gamma_\varphi &= 0 \end{aligned}$$

Par conséquent, la force est une force centrale : $\vec{F} = \vec{F}(r) \vec{e}_r$.

Troisième loi de Kepler (loi harmonique) :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \quad (2.55)$$

où a est le demi-grand axe de l'ellipse. Ce rapport est une constante indépendante de la planète considérée.

Loi de Newton :

$$m\vec{\gamma} = \vec{F}$$

On peut directement déduire, en projetant sur l'axe \vec{e}_r :

$$\begin{aligned} m\gamma_r &= F(r) \\ m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) &= F(r) \end{aligned} \quad (2.56)$$

En utilisant les lois (2.53) et (2.54), on peut calculer \ddot{r} :

$$\begin{aligned}
 r &= \frac{p}{1 + e \cos \varphi} \\
 \dot{r} &= \frac{p}{(1 + e \cos \varphi)^2} e \sin \varphi \dot{\varphi} \\
 &= \frac{p}{(1 + e \cos \varphi)^2} e \sin \varphi \frac{h}{r^2} = \frac{p}{(1 + e \cos \varphi)^2} e \sin \varphi \frac{h(1 + e \cos \varphi)^2}{p^2} \\
 &= \frac{eh}{p} \sin \varphi \\
 \ddot{r} &= \frac{eh}{p} \cos \varphi \dot{\varphi} = \frac{eh}{p} \cos \varphi \frac{h}{r^2} = \frac{h^2}{pr^2} e \cos \varphi \\
 &= \frac{h^2}{pr^2} \left(\frac{p}{r} - 1 \right)
 \end{aligned}$$

En remplaçant l'expression de \ddot{r} dans (2.56) et en utilisant la relation (2.54), on obtient :

$$\begin{aligned}
 F(r) &= m \frac{h^2}{r^3} - m \frac{h^2}{pr^2} - mr \frac{h^2}{r^4} \\
 &= -m \frac{h^2}{pr^2} = \left(-\frac{h^2}{p} \right) \frac{m}{r^2} = \alpha \frac{m}{r^2}
 \end{aligned}$$

en posant $\alpha = \left(-\frac{h^2}{p} \right)$. On a alors l'expression demandée :

$$\vec{F} = F(r) \vec{e}_r = \alpha \frac{m}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

Il reste à montrer que la constante α est indépendante de la planète considérée. Calculons l'aire A d'une ellipse :

$$\begin{aligned}
 A &= \pi ab \\
 A &= \frac{1}{2} h T \\
 \implies T &= \frac{2\pi ab}{h} \\
 \implies \frac{T^2}{a^3} &= \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{h^2 a^3} = \frac{4\pi^2}{h^2} \frac{b^2}{a} = \frac{4\pi^2}{h^2} p \\
 \implies \frac{h^2}{p} &= 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2}
 \end{aligned}$$

avec $a = p/(1 - e^2)$, le demi-grand axe de l'ellipse, et $b = p/\sqrt{1 - e^2}$, le demi-petit axe de l'ellipse. Ce rapport ne dépend pas de la planète considérée car $\frac{a^3}{T^2}$ n'en dépend pas (troisième loi de Kepler).

2.4.11 Exercices proposés

- On donne le même énoncé qu'à l'exercice (2.4.2) mais on demande de trouver la masse gravitationnelle en unités de masse solaire. La Terre se trouve à 8 minutes-lumière du Soleil.

$$(R : \frac{M_G}{M_\odot} = 1.533 \times 10^{11})$$

2. Etant donné que la lune est 81 fois moins massive que la terre et que son rayon vaut 0.27 fois le rayon terrestre, quelle est la vitesse d'échappement de la lune, sachant qu'à la surface de la terre elle est de 11.2 km/s ?

$$(R : 2.4 \text{ km/s})$$

3. Sachant que la distance Terre-Soleil est approximativement 150×10^6 km et que la Terre complète son orbite autour du Soleil en 365 jours, calculer la masse du Soleil.

$$(R : M_\odot = \frac{4\pi^2 r_{\odot T}^3}{GP_T^2} = 2 \times 10^{30} \text{ kg})$$

4. Trouver l'expression de la force centrale qui engendre l'orbite suivante pour une particule de masse m :

$$r = a(1 + \cos \theta)$$

où r et θ sont les coordonnées polaires de la particule.

$$(R : F(r) = \frac{3mh^2a}{r^4}, \text{ où } h \text{ est la constante des aires.})$$

Chapitre 3

Mécanique en axes relatifs

3.1 Rappels théoriques

Soient S et S' deux systèmes de référence en mouvement relatif, $\vec{\omega}$ le vecteur de Poisson de S' par rapport à S , O un point de S et O' un point de S' . La loi de composition des vitesses pour un point matériel P s'écrit :

$$\vec{v} = \vec{v}' + \underbrace{\vec{v}_{O'}}_{\vec{v}_e} + \vec{\omega} \wedge \vec{O'P}$$

où \vec{v} est la vitesse de P par rapport à S , \vec{v}' est la vitesse de P par rapport à S' et $\vec{v}_{O'}$ la vitesse du point O' par rapport à S . \vec{v}_e est appelée la *vitesse d'entraînement*. La loi de composition des accélérations s'écrit quant à elle :

$$\vec{\gamma} = \vec{\gamma}' + \underbrace{\vec{\gamma}_{O'} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{O'P}) + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{O'P}}_{\vec{\gamma}_e} + \underbrace{2\vec{\omega} \wedge \vec{v}'}_{\vec{\gamma}_C}$$

où $\vec{\gamma}$ est l'accélération de P par rapport à S , $\vec{\gamma}'$ l'accélération de P par rapport à S' et $\vec{\gamma}_{O'}$ l'accélération du point O' par rapport à S . $\vec{\gamma}_e$ et $\vec{\gamma}_C$ sont respectivement l'*accélération d'entraînement* et l'*accélération de Coriolis*.

Si S est un système de référence inertiel, la loi de Newton est d'application :

$$\vec{F} = m\vec{\gamma}$$

où \vec{F} est la somme des forces s'appliquant sur P . Si S' n'est pas en translation rectiligne uniforme par rapport à S (c'est-à-dire si $\vec{\omega}$ ou $\vec{\gamma}_{O'}$ est non nul), alors S' n'est pas inertiel (puisque S l'est) mais comme on a

$$\vec{\gamma} = \vec{\gamma}' + \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_C,$$

on peut écrire

$$m\vec{\gamma}' = \vec{F} + \vec{F}_e + \vec{F}_C$$

où la force d'entraînement \vec{F}_e et la force de Coriolis \vec{F}_C sont définies comme suit :

$$\begin{aligned}\vec{F}_e &= -m\vec{\gamma}_{O'} - \underbrace{m\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{O'P}) - m \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{O'P}}_{\vec{F}_{cf}} \\ \vec{F}_C &= -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}'\end{aligned}$$

On peut donc étudier le mouvement du point P dans le repère non inertiel S' à l'aide d'une loi de forme similaire à la loi de Newton à condition de tenir compte des forces fictives d'inertie \vec{F}_e et \vec{F}_C en plus des forces \vec{F} réelles dans le second membre de l'équation.

Démarche pour la résolution des exercices de *Mécanique en axes relatifs*

Comment étudier le mouvement d'un point P dans un système de référence non inertiel ?

1. Définir les systèmes de référence : un système de référence *absolu* S + un/des système(s) de référence *non inertiel(s)*, et identifier le(s) vecteur(s) de Poisson associés.
2. Identifier les forces **réelles** s'appliquant sur l'objet considérés : poids, forces de liaison, forces de frottement, les forces appliquées...
3. Exprimer les vecteurs position \vec{r}' , vitesse \vec{v}' et accélération $\vec{\gamma}'$ dans le système de référence *non inertiel* S' choisi.
4. Ecrire l'équation de Newton dans S' :

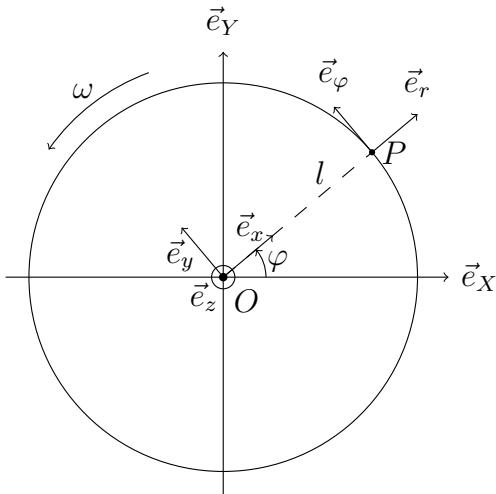
$$\begin{aligned} m\vec{\gamma}' &= \vec{F} + \vec{F}_e + \vec{F}_C \\ \text{avec } \vec{F} &= \sum \vec{F}_{\text{réelles}} \quad \text{identifiées au point 2} \\ \vec{F}_e &= -m\vec{\gamma}_{O'} - m\vec{\omega}_{S'\div S} \wedge (\vec{\omega}_{S'\div S} \wedge \vec{r}') - m \frac{d\vec{\omega}_{S'\div S}}{dt} \wedge \vec{r}' \\ \vec{F}_C &= -2m\vec{\omega}_{S'\div S} \wedge \vec{v}' \end{aligned}$$

Lors du calcul des forces fictives, on regarde le mouvement du système de référence choisi S' , par rapport à un système de référence absolu, S . Le vecteur de Poisson apparaissant dans les expressions de \vec{F}_e et \vec{F}_C correspond donc à $\vec{\omega}_{S'\div S}$.

3.2 Exercices résolus

3.2.1 Le carrousel et la balle

Un carrousel part de l'arrêt et accélère avec une accélération angulaire constante de $0.02 \text{ tours}/s^2$ (c'est-à-dire $0.02 \cdot 2\pi \text{ rad}/s^2$). Une personne est assise sur un siège (fixe) à $l = 6$ mètres de l'axe de révolution et porte une balle de 2 kg. Déterminer la direction et le module de la force qu'elle doit exercer sur la balle (assimilée à un point matériel) pour la tenir, cinq secondes après le départ du carrousel.



1. On définit le système de référence absolu $S(O, \vec{e}_X, \vec{e}_Y, \vec{e}_Z)$, le système de référence lié au carrousel $S'(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et le système de référence des coordonnées polaires centré sur la balle (désignée par P) $S''(P, \vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$. Les vecteurs de Poisson sont : $\vec{\omega}_{S' \div S} = \omega \vec{e}_z$, $\vec{\omega}_{S'' \div S'} = 0$ (la balle ne se déplace pas par rapport au carrousel) et donc $\vec{\omega}_{S'' \div S} = \vec{\omega}_{S'' \div S'} + \vec{\omega}_{S' \div S} = \omega \vec{e}_z$.
2. Les forces réelles \vec{F} s'appliquant sur la balle sont la force de pesanteur $m\vec{g}$ et la force \vec{F}_p que la personne exerce pour tenir la balle.
3. Calcul des vecteurs position \vec{r}' , vitesse \vec{v}' et accélération $\vec{\gamma}'$ dans le système de référence S' lié au carrousel.

$$\begin{aligned}\vec{r}' &= l \vec{e}_r \\ \vec{v}' &= l \frac{d\vec{e}_r}{dt} = l \vec{\omega}_{S'' \div S'} \wedge \vec{e}_r = 0 \\ \vec{\gamma}' &= 0\end{aligned}$$

Ce résultat est logique étant donné que la balle ne se déplace pas par rapport au carrousel.

4. Ecrire l'équation de Newton dans S' :

$$\begin{aligned}m\vec{\gamma}' &= \vec{F} + \vec{F}_e + \vec{F}_C \\ \text{avec } \vec{F} &= m\vec{g} + \vec{F}_p = -mg\vec{e}_z + \vec{F}_p \\ \vec{F}_e &= -m\vec{\gamma}_{O'} - m\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}') - m \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r}' \\ \vec{F}_C &= -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}'\end{aligned}$$

Lors du calcul des forces fictives, on regarde le mouvement du système de référence choisi S' , par rapport à un système de référence absolu, S . Le vecteur de Poisson apparaissant dans les expressions de \vec{F}_e et \vec{F}_C correspond donc à $\vec{\omega}_{S' \div S} = \omega \vec{e}_z$. L'origine de S' coïncide avec l'origine de S et par conséquent

l'accélération $\gamma_{O'}^r$ est nulle. Par conséquent, il reste :

$$\begin{aligned}\vec{F}_e &= -m\omega \vec{e}_z \wedge (\omega \vec{e}_z \wedge l \vec{e}_r) - m \frac{d(\omega \vec{e}_z)}{dt} \wedge l \vec{e}_r \\ &= -ml\omega^2 \vec{e}_z \wedge \vec{e}_\varphi - m\dot{\omega} \vec{e}_z \wedge l \vec{e}_r \\ &= ml\omega^2 \vec{e}_r - ml\dot{\omega} \vec{e}_\varphi \\ \vec{F}_C &= 0\end{aligned}$$

Au final, l'équation de Newton s'écrit :

$$\begin{aligned}0 &= -mg \vec{e}_z + \vec{F}_p + ml\omega^2 \vec{e}_r - ml\dot{\omega} \vec{e}_\varphi \\ .\vec{e}_r &: 0 = F_{p,r} + ml\omega^2 \implies F_{p,r} = -ml\omega^2 \\ .\vec{e}_\varphi &: 0 = F_{p,\varphi} - ml\dot{\omega} \implies F_{p,\varphi} = ml\dot{\omega} \\ .\vec{e}_z &: 0 = -mg + F_{p,z} \implies F_{p,z} = mg\end{aligned}$$

L'expression de la force \vec{F}_p est : $-ml\omega^2 \vec{e}_r + ml\dot{\omega} \vec{e}_\varphi + mg \vec{e}_z$, avec $m = 2 \text{ kg}$, $l = 6 \text{ m}$, $t = 5 \text{ s}$, $\dot{\omega} = 0.02 \times 2\pi \text{ rad/s}^2$ et $\omega = \dot{\omega}t + \omega_0$ avec $\omega_0 = 0$ vu que le carrousel part du repos. La force \vec{F}_p vaut :

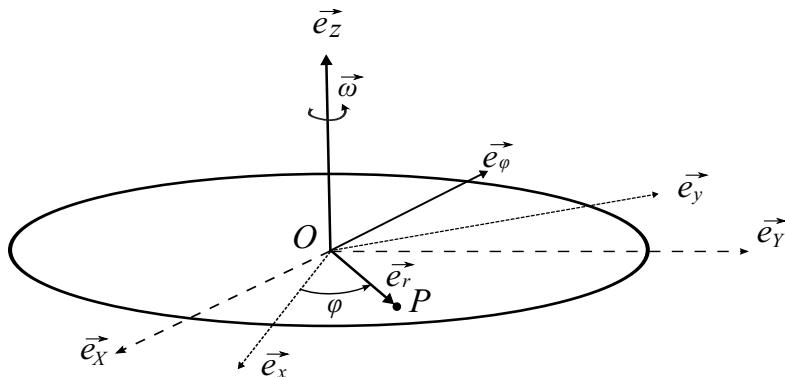
$$\begin{aligned}\vec{F}_p &= -ml\omega^2 \vec{e}_r + ml\dot{\omega} \vec{e}_\varphi + mg \vec{e}_z \\ &= -2 \times 6 \times (0.02 \times 2\pi \times 5)^2 \vec{e}_r + 2 \times 6 \times 0.02 \times 2\pi \vec{e}_\varphi + 2 \times 9.81 \vec{e}_z \\ &= -4.74 \vec{e}_r + 1.51 \vec{e}_\varphi + 19.62 \vec{e}_z\end{aligned}$$

Et son module vaut :

$$|\vec{F}_p| = \sqrt{(-4.74)^2 + (1.51)^2 + (19.62)^2} = 20.24 \text{ N}$$

3.2.2 Le projectile sur le carrousel

Un observateur est situé au centre O d'un carrousel tournant à vitesse angulaire $\vec{\omega}$ constante autour d'un axe vertical. Il lance un projectile P avec une vitesse \vec{v}_0 horizontale par rapport au carrousel. Le projectile glisse sans frottement sur le carrousel. L'équation du mouvement dans des axes fixes est alors : $\ddot{\vec{r}} = 0$. On demande d'écrire l'équation du mouvement dans des axes liés au carrousel, de la résoudre et d'établir l'équation de la trajectoire.



1. On définit le système de référence absolu $S(O, \vec{e}_X, \vec{e}_Y, \vec{e}_Z)$, le système de référence lié au carrousel $S'(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_Z)$ et le système de référence des coordonnées polaires centré sur le point P, que nous désignerons par $S''(P, \vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_Z)$. Les vecteurs de Poisson sont : $\vec{\omega}_{S' \div S} = \omega \vec{e}_Z$, $\vec{\omega}_{S'' \div S'} = \dot{\varphi} \vec{e}_Z$ et donc $\vec{\omega}_{S'' \div S} = \vec{\omega}_{S'' \div S'} + \vec{\omega}_{S' \div S} = (\omega + \dot{\varphi}) \vec{e}_Z$.
2. Les forces réelles \vec{F} s'appliquant sur le projectile sont la force de pesanteur $m\vec{g}$ et la force de liaison \vec{N} .
3. Calcul des vecteurs position \vec{r}' , vitesse \vec{v}' et accélération $\vec{\gamma}'$ dans le système de référence S' lié au carrousel.

$$\begin{aligned}
\vec{r}' &= r \vec{e}_r \\
\vec{v}' &= \dot{r} \vec{e}_r + r \frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{r} \vec{e}_r + r \vec{\omega}_{S'' \div S'} \wedge \vec{e}_r \\
&= \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_z \wedge \vec{e}_r = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi \\
\vec{\gamma}' &= \ddot{r} \vec{e}_r + \dot{r} \frac{d\vec{e}_r}{dt} + \dot{r} \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + r \ddot{\varphi} \vec{e}_\varphi + r \dot{\varphi} \frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} \\
&= \ddot{r} \vec{e}_r + \dot{r} \vec{\omega}_{S'' \div S'} \wedge \vec{e}_r + \dot{r} \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + r \ddot{\varphi} \vec{e}_\varphi + r \dot{\varphi} \vec{\omega}_{S'' \div S'} \wedge \vec{e}_\varphi \\
&= \ddot{r} \vec{e}_r + \dot{r} \dot{\varphi} \vec{e}_z \wedge \vec{e}_r + \dot{r} \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + r \ddot{\varphi} \vec{e}_\varphi + r \dot{\varphi} \dot{\varphi} \vec{e}_z \wedge \vec{e}_\varphi \\
&= \ddot{r} \vec{e}_r + \dot{r} \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + \dot{r} \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + r \ddot{\varphi} \vec{e}_\varphi - r \dot{\varphi}^2 \vec{e}_r \\
&= (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) \vec{e}_r + (2\dot{r} \dot{\varphi} + r \ddot{\varphi}) \vec{e}_\varphi
\end{aligned}$$

Ici, lors du calcul des vecteurs \vec{v}' et $\vec{\gamma}'$, il faut considérer le mouvement des vecteurs \vec{e}_r et \vec{e}_φ (de S'') par rapport au système de référence dans lequel on travaille, ici S' . Il faut donc utiliser le vecteur de Poisson du mouvement de S'' par rapport à S' , $\vec{\omega}_{S'' \div S'}$.

4. Ecrire l'équation de Newton dans S' :

$$\begin{aligned}
m\vec{\gamma}' &= \vec{F} + \vec{F}_e + \vec{F}_C \\
\text{avec } \vec{F} &= m\vec{g} + \vec{N} = -mg \vec{e}_Z + N \vec{e}_Z \\
\vec{F}_e &= -m\vec{\gamma}_{O'} - m\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}') - m \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r}' \\
\vec{F}_C &= -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}'
\end{aligned}$$

Lors du calcul des forces fictives, on regarde le mouvement du système de référence choisi S' , par rapport à un système de référence absolu, S . Le vecteur de Poisson apparaissant dans les expressions de \vec{F}_e et \vec{F}_C correspond donc à $\vec{\omega}_{S' \div S} = \omega \vec{e}_Z$ (vecteur constant). L'origine de S' coïncide avec l'origine de S et par conséquent l'accélération $\vec{\gamma}_{O'}$ est nulle. Par conséquent, il reste :

$$\begin{aligned}
\vec{F}_e &= -m\omega \vec{e}_Z \wedge (\omega \vec{e}_Z \wedge \vec{r}') - m \frac{d(\omega \vec{e}_Z)}{dt} \wedge \vec{r}' \\
&= -mr\omega^2 \vec{e}_Z \wedge \vec{e}_\varphi = mr\omega^2 \vec{e}_r \\
\vec{F}_C &= -2m\omega \vec{e}_Z \wedge (\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi) \\
&= -2mr\dot{r}\omega \vec{e}_\varphi + 2mr\dot{\varphi}\omega \vec{e}_r
\end{aligned}$$

Au final, l'équation de Newton s'écrit :

$$m \left((\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) \vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) \vec{e}_\varphi \right) = -mg \vec{e}_z + N \vec{e}_z + mr\omega^2 \vec{e}_r - 2m\dot{r}\omega \vec{e}_\varphi + 2mr\dot{\varphi}\omega \vec{e}_r$$

$$\cdot \vec{e}_r : m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = mr\omega^2 + 2mr\dot{\varphi}\omega = mr\omega(\omega + 2\dot{\varphi}) \quad (3.1)$$

$$\cdot \vec{e}_\varphi : 2m\dot{r}\dot{\varphi} + mr\ddot{\varphi} = -2m\dot{r}\omega \quad (3.2)$$

$$\cdot \vec{e}_z : 0 = -mg + N \implies N = mg \quad (3.3)$$

En multipliant l'équation (3.2) par r , on obtient la relation :

$$\begin{aligned} 2r\dot{r}\dot{\varphi} + r^2\ddot{\varphi} + 2r\dot{r}\omega &= 0 \\ 2r\dot{r}(\dot{\varphi} + \omega) + r^2\ddot{\varphi} &= 0 \\ \frac{d}{dt}(r^2(\dot{\varphi} + \omega)) &= 0 \end{aligned}$$

On sait donc que $r^2(\dot{\varphi} + \omega) = C_1$ avec C_1 une constante. Or en $t = 0$, on a $r = 0$ donc $C_1 = 0$ et $r^2(\dot{\varphi} + \omega) = 0$. Ce qui implique :

$$\dot{\varphi} = -\omega \Rightarrow \varphi(t) = -\omega t + C_2$$

avec C_2 une constante. En $t = 0$, on a $\varphi = 0$ et donc :

$$\varphi(t) = -\omega t \quad (3.4)$$

Substituons $\dot{\varphi} = -\omega$ dans l'équation (3.1) :

$$\ddot{r} - r\omega^2 = r\omega(\omega - 2\omega) = -r\omega^2$$

$$\Rightarrow \ddot{r} = 0$$

On primitive deux fois et on a :

$$r(t) = C_3t + C_4$$

avec C_3 et C_4 des constantes de primitivation. Or en $t = 0$, on a $r = 0$, $\dot{r} = v_0$, donc on a :

$$r(t) = v_0t \quad (3.5)$$

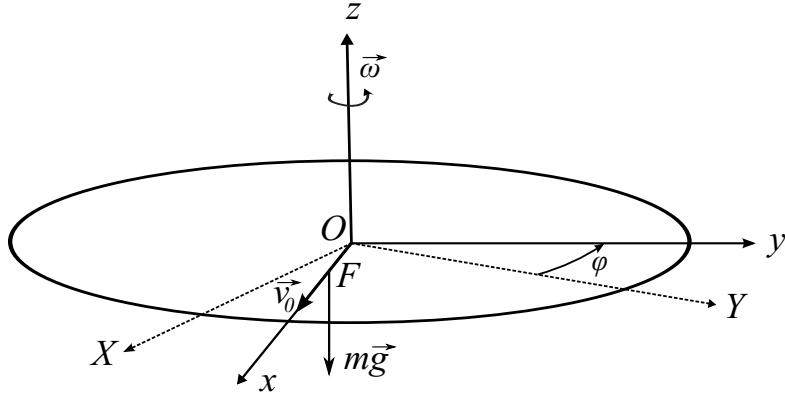
Pour trouver l'équation de la trajectoire, on élimine le temps des équations (3.4) et (3.5) et on trouve :

$$r(\varphi) = -\frac{v_0 \varphi}{\omega}$$

ce qui est l'équation d'une spirale.

3.2.3 La fourmi sur le disque

Un disque tourne avec une vitesse angulaire constante $\vec{\omega}$ autour d'un axe vertical passant par le centre O du disque. Une fourmi de masse m , partie du centre O du disque, trottine le long d'un rayon à vitesse v_0 constante par rapport au disque. Déterminer la force de frottement statique¹ qui doit s'exercer sur la fourmi pour qu'un tel mouvement soit possible.



- On définit le système de référence absolu $S(O, \vec{e}_X, \vec{e}_Y, \vec{e}_Z)$ et le système de référence lié au disque $S'(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_Z)$. Le vecteur de Poisson est $\vec{\omega}_{S' \div S} = \omega \vec{e}_Z$.
- Les forces réelles \vec{F} s'appliquant sur la fourmi sont la force de pesanteur $m\vec{g}$, la force de liaison \vec{N} et la force de frottement \vec{F}_f (dans le plan (\vec{e}_x, \vec{e}_y)).
- Calcul des vecteurs position \vec{r}' , vitesse \vec{v}' et accélération $\vec{\gamma}'$ dans le système de référence S' lié au disque.

$$\begin{aligned}\vec{r}' &= x \vec{e}_x \\ \vec{v}' &= \dot{x} \vec{e}_x = v_0 \vec{e}_x \\ \vec{\gamma}' &= 0\end{aligned}$$

On notera que le vecteur \vec{e}_x est bien un vecteur constant par rapport au système S' . On remarque également que le mouvement de la fourmi est un mouvement rectiligne uniforme (le long d'un rayon du disque).

- Ecrire l'équation de Newton dans S' :

$$\begin{aligned}m\vec{\gamma}' &= \vec{F} + \vec{F}_e + \vec{F}_C \\ \text{avec } \vec{F} &= m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_f = -mg \vec{e}_Z + N \vec{e}_Z + F_{f,x} \vec{e}_x + F_{f,y} \vec{e}_y \\ \vec{F}_e &= -m\vec{\gamma}_{O'} - m\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}') - m \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r}' \\ \vec{F}_C &= -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}'\end{aligned}$$

1. À tout instant, la fourmi utilise les forces de frottement au niveau de ses pattes qui sont en contact avec le sol, de sorte à garder le mouvement prescrit. Ces pattes sont fixes par rapport au disque et la force de liaison qui permet à la fois d'éviter le glissement par rapport au disque et de maintenir le mouvement est donc bien une force de frottement statique.

Lors du calcul des forces fictives, on regarde le mouvement du système de référence choisi S' , par rapport à un système de référence absolu, S . Le vecteur de Poisson apparaissant dans les expressions de \vec{F}_e et \vec{F}_C correspond donc à $\vec{\omega}_{S' \div S} = \omega \vec{e}_Z$. L'origine de S' coïncide avec l'origine de S et par conséquent l'accélération $\gamma_{O'}^S$ est nulle. Par conséquent, il reste :

$$\begin{aligned}\vec{F}_e &= -m\omega \vec{e}_Z \wedge (\omega \vec{e}_Z \wedge x \vec{e}_x) \\ &= -mx\omega^2 \vec{e}_Z \wedge \vec{e}_y = mx\omega^2 \vec{e}_x \\ \vec{F}_C &= -2m\omega \vec{e}_Z \wedge v_0 \vec{e}_x = -2m\omega v_0 \vec{e}_y\end{aligned}$$

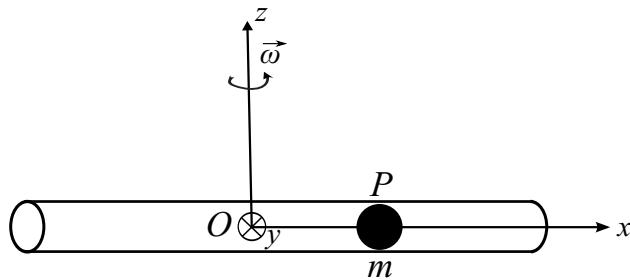
Au final, l'équation de Newton s'écrit :

$$\begin{aligned}0 &= -mg \vec{e}_Z + N \vec{e}_Z + F_{f,x} \vec{e}_x + F_{f,y} \vec{e}_y + mx\omega^2 \vec{e}_x - 2m\omega v_0 \vec{e}_y \\ .\vec{e}_x &: 0 = F_{f,x} + mx\omega^2 \implies F_{f,x} = -mx\omega^2 \\ .\vec{e}_y &: 0 = F_{f,y} - 2m\omega v_0 \implies F_{f,y} = 2m\omega v_0 \\ .\vec{e}_Z &: 0 = -mg + N \implies N = mg\end{aligned}$$

L'expression de la force de frottement \vec{F}_f est : $-mx\omega^2 \vec{e}_x + 2m\omega v_0 \vec{e}_y$, avec $x = v_0 t$. Il s'agit de la force exercée par le disque sur la fourmi. Par la loi d'action-réaction, la force exercée par la fourmi sur le disque vaut : $mx\omega^2 \vec{e}_x - 2m\omega v_0 \vec{e}_y$. On remarque que la composante $F_{f,x}$ dépend du temps alors que la composante $F_{f,y}$ est constante.

3.2.4 La bille dans un tube en rotation

Une bille de masse m se meut sans frottement dans un tube cylindrique creux de longueur $2a$. Ce tube est en rotation autour de l'axe z à la vitesse angulaire constante ω . L'axe z est vertical et passe par le centre O du tube. La bille est initialement au repos, à la distance $x_0 < a$ du centre O . A quel moment la bille sortira-t-elle du tube ?



- On définit le système de référence absolu $S(O, \vec{e}_X, \vec{e}_Y, \vec{e}_Z)$ et le système de référence lié au tube $S'(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_Z)$ (avec \vec{e}_x suivant la direction du tuyau et ayant comme origine le centre O du tuyau). Le vecteur de Poisson est $\vec{\omega}_{S' \div S} = \omega \vec{e}_Z$.
- Les forces réelles \vec{F} s'appliquant sur la bille sont la force de pesanteur $m\vec{g}$ et la force de liaison $\vec{N} = N_y \vec{e}_y + N_z \vec{e}_Z$.

3. Calcul des vecteurs position \vec{r}' , vitesse \vec{v}' et accélération $\vec{\gamma}'$ dans le système de référence S' lié au tube.

$$\begin{aligned}\vec{r}' &= x \vec{e}_x \\ \vec{v}' &= \dot{x} \vec{e}_x \\ \vec{\gamma}' &= \ddot{x} \vec{e}_x\end{aligned}$$

4. Ecrire l'équation de Newton dans S' :

$$\begin{aligned}m\vec{\gamma}' &= \vec{F} + \vec{F}_e + \vec{F}_C \\ \text{avec } \vec{F} &= m\vec{g} + \vec{N} = -mg \vec{e}_z + N_y \vec{e}_y + N_z \vec{e}_Z \\ \vec{F}_e &= -m\vec{\gamma}_{O'} - m\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}') - m \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r}' \\ \vec{F}_C &= -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}'\end{aligned}$$

Lors du calcul des forces fictives, on regarde le mouvement du système de référence choisi S' , par rapport à un système de référence absolu, S . Le vecteur de Poisson apparaissant dans les expressions de \vec{F}_e et \vec{F}_C correspond donc à $\vec{\omega}_{S' \div S} = \omega \vec{e}_Z$. L'origine de S' coïncide avec l'origine de S et par conséquent l'accélération $\vec{\gamma}_{O'}$ est nulle. Par conséquent, il reste :

$$\begin{aligned}\vec{F}_e &= -m\omega \vec{e}_Z \wedge (\omega \vec{e}_Z \wedge x \vec{e}_x) \\ &= -mx\omega^2 \vec{e}_Z \wedge \vec{e}_y = mx\omega^2 \vec{e}_x \\ \vec{F}_C &= -2m\omega \vec{e}_Z \wedge \dot{x} \vec{e}_x = -2m\omega \dot{x} \vec{e}_y\end{aligned}$$

Au final, l'équation de Newton s'écrit :

$$\begin{aligned}m\ddot{x} \vec{e}_x &= -mg \vec{e}_z + N_y \vec{e}_y + N_z \vec{e}_Z + mx\omega^2 \vec{e}_x - 2m\omega \dot{x} \vec{e}_y \\ .\vec{e}_x &: m\ddot{x} = mx\omega^2 \implies \ddot{x} - \omega^2 x = 0 \\ .\vec{e}_y &: 0 = N_y - 2m\omega \dot{x} \implies N_y = 2m\omega \dot{x} \\ .\vec{e}_Z &: 0 = -mg + N_z \implies N_z = mg\end{aligned}$$

L'expression de la force de liaison \vec{N} est : $2m\omega \dot{x} \vec{e}_y + mg \vec{e}_Z$. L'équation du mouvement est donnée par :

$$\ddot{x} - \omega^2 x = 0$$

qui est une équation différentielle linéaire à coefficients constants du second ordre homogène.

- Polynôme caractéristique : $u^2 - \omega^2 = 0 \implies u_{1,2} = \pm\omega$.
- Solution générale : $x(t) = P_1 e^{u_1 t} + P_2 e^{u_2 t}$ où P_1, P_2 sont des polynômes de degrés inférieurs ou égaux à la multiplicité du zéro correspondant moins un. Les zéros du polynôme caractéristique sont de multiplicités 1 et les polynômes sont donc réduits à des constantes A et B . On a :

$$x(t) = A e^{-\omega t} + B e^{\omega t}$$

- Détermination des constantes : on pose qu'au temps $t = 0$, $x = x_0$ et $\dot{x} = 0$. On a :

$$\begin{cases} x(0) = A + B = x_0 \\ \dot{x}(0) = -\omega A + \omega B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = B \\ B = \frac{x_0}{2} \end{cases}$$

- Solution finale :

$$x(t) = \frac{x_0}{2}(e^{-\omega t} + e^{\omega t}) = x_0 \cosh(\omega t)$$

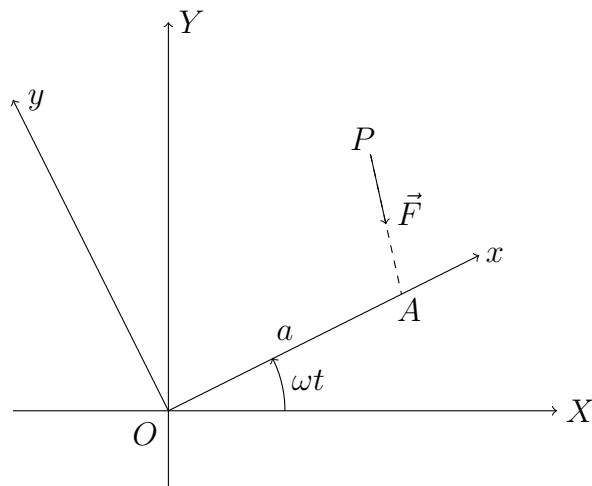
La bille sort du tube quand $x = a$. (Bien sûr, si on a posé la bille au centre du tube, on aura pour tout temps t : $x = x_0 = 0$.) Si on suppose x_0 positif, on a :

$$t = \frac{1}{\omega} \operatorname{arcosh}\left(\frac{a}{x_0}\right)$$

3.2.5 Point attractif sur un disque tournant

Un disque tourne avec une vitesse angulaire constante $\vec{\omega}$ autour d'un axe vertical passant par le centre O du disque. Un point matériel P de masse m , astreint à se mouvoir sans frottement sur ce disque, subit une force attractive $\vec{F} = -k\vec{AP}$ où k est une constante positive et A un point lié au disque et situé à une distance a (constante) de O .

- Ecrire les équations de Newton dans le repère attaché au disque.
- Déterminer les positions d'équilibre relatif.
- Montrer qu'une grandeur analogue à l'énergie totale est conservée en considérant la force centrifuge comme dérivant d'un potentiel.



- Ecrire les équations de Newton.

1. On définit le système de référence absolu $S(O, \vec{e}_X, \vec{e}_Y, \vec{e}_Z)$ et le système de référence lié au disque $S'(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et tel que l'axe x contient le point A . Le vecteur de Poisson est $\vec{\omega}_{S' \div S} = \omega \vec{e}_Z$.

2. Les forces réelles \vec{F} s'appliquant sur le point P sont la force de pesanteur $m\vec{g}$, la force de liaison $\vec{N} = N_z \vec{e}_Z$ et la force attractive $\vec{F}_A = -k\vec{AP}$ (avec $\vec{AP} = \vec{AO} + \vec{OP} = (x - a)\vec{e}_x + y\vec{e}_y$).
3. Calcul des vecteurs position \vec{r}' , vitesse \vec{v}' et accélération $\vec{\gamma}'$ dans le système de référence S' lié au disque.

$$\begin{aligned}\vec{r}' &= x\vec{e}_x + y\vec{e}_y \\ \vec{v}' &= \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y \\ \vec{\gamma}' &= \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y\end{aligned}$$

4. Ecrire l'équation de Newton dans S' :

$$\begin{aligned}m\vec{\gamma}' &= \vec{F} + \vec{F}_e + \vec{F}_C \\ \text{avec } \vec{F} &= -mg\vec{e}_Z + N_z\vec{e}_Z - k((x - a)\vec{e}_x + y\vec{e}_y) \\ \vec{F}_e &= -m\vec{\gamma}_{O'} - m\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}') - m \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r}' \\ \vec{F}_C &= -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}'\end{aligned}$$

Lors du calcul des forces fictives, on regarde le mouvement du système de référence choisi S' , par rapport à un système de référence absolu, S . Le vecteur de Poisson apparaissant dans les expressions de \vec{F}_e et \vec{F}_C correspond donc à $\vec{\omega}_{S' \div S} = \omega\vec{e}_Z$. L'origine de S' coïncide avec l'origine de S et par conséquent l'accélération $\vec{\gamma}_{O'}$ est nulle. Par conséquent, il reste :

$$\begin{aligned}\vec{F}_e &= -m\omega\vec{e}_Z \wedge (\omega\vec{e}_Z \wedge (x\vec{e}_x + y\vec{e}_y)) \\ &= -m\omega\vec{e}_Z \wedge (\omega x\vec{e}_y - \omega y\vec{e}_x) \\ &= -m\omega(-\omega x\vec{e}_x - \omega y\vec{e}_y) = m\omega^2(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y) \\ \vec{F}_C &= -2m\omega\vec{e}_Z \wedge (\dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y) = -2m\omega(\dot{x}\vec{e}_y - \dot{y}\vec{e}_x)\end{aligned}$$

Au final, l'équation de Newton s'écrit :

$$\begin{aligned}m\ddot{x}\vec{e}_x + m\ddot{y}\vec{e}_y &= -mg\vec{e}_Z + N_z\vec{e}_Z - k((x - a)\vec{e}_x + y\vec{e}_y) + m\omega^2(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y) \\ &\quad - 2m\omega(\dot{x}\vec{e}_y - \dot{y}\vec{e}_x) \\ .\vec{e}_x &: m\ddot{x} = -k(x - a) + m\omega^2x + 2m\omega\dot{y} \\ .\vec{e}_y &: m\ddot{y} = -ky + m\omega^2y - 2m\omega\dot{x} \\ .\vec{e}_Z &: 0 = -mg + N_z \implies N_z = mg\end{aligned}$$

En notant $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, il vient :

$$\ddot{x} = (\omega^2 - \omega_0^2)x + \omega_0^2a + 2\omega\dot{y} = F(x) + 2\omega\dot{y}$$

où $F(x) = (\omega^2 - \omega_0^2)x + \omega_0^2a$ représente l'effet sur le mouvement en x de la force du ressort combinée avec la force centrifuge.

De même selon \vec{e}_y , on trouve :

$$\ddot{y} = (\omega^2 - \omega_0^2)y - 2\omega\dot{x} = G(y) - 2\omega\dot{x}$$

où $G(y) = (\omega^2 - \omega_0^2)y$.

- Déterminer les positions d'équilibre relatif.

Les positions d'équilibre relatif (x_E, y_E) s'obtiennent en annulant les vecteurs \vec{v} et $\vec{\gamma}$: $\dot{x} = \dot{y} = 0$ et $\ddot{x} = \ddot{y} = 0$. En remplaçant dans les équations de Newton, on obtient :

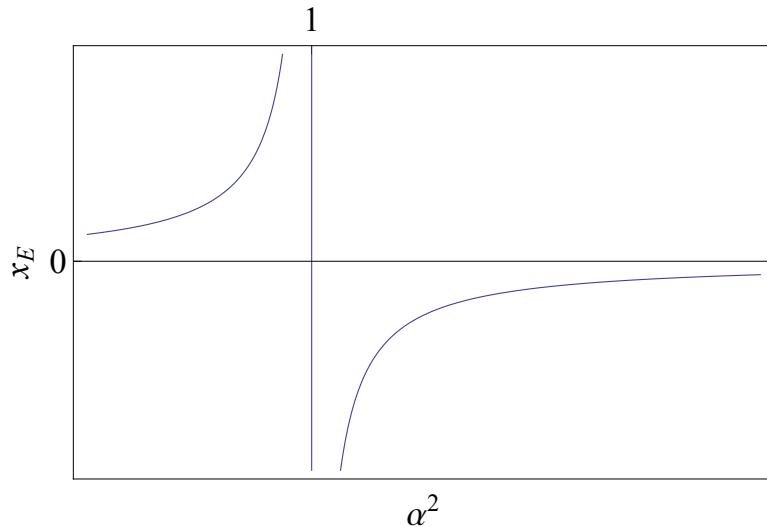
$$\begin{aligned} 0 &= F(x_E) \implies 0 = (\omega^2 - \omega_0^2)x_E + \omega_0^2 a \\ 0 &= G(y_E) \implies 0 = (\omega^2 - \omega_0^2)y_E \end{aligned}$$

Envisageons le cas $\omega^2 = \omega_0^2$. Si $a = 0$, alors les conditions d'équilibre sont toujours vérifiées. Tous les points (x, y) sont donc des positions d'équilibre. Si $a \neq 0$, aucune position d'équilibre n'existe (tous les mouvements tendent vers l'infini).

Par contre, si $\omega^2 \neq \omega_0^2$, la position d'équilibre est :

$$(x_E, y_E) = \left(\frac{-a}{\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1}, 0 \right) = \left(\frac{a}{1 - \alpha^2}, 0 \right)$$

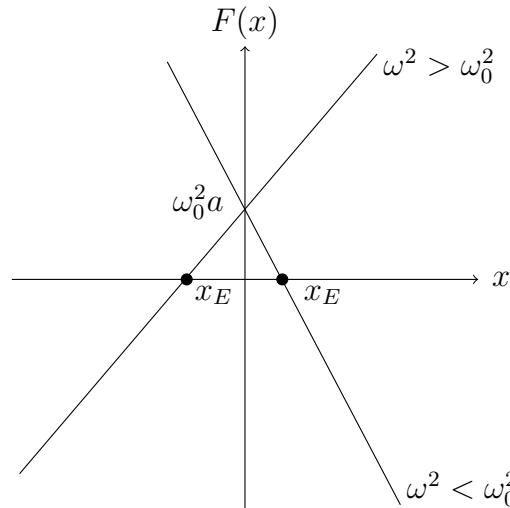
avec $\alpha = \frac{\omega}{\omega_0}$. Le point d'équilibre, qui se trouve donc toujours sur l'axe x , est représenté ci-dessous en fonction de α^2 .



- Stabilité de la position d'équilibre.

Il est intéressant à présent d'examiner si le point d'équilibre qui vient d'être mis en évidence est stable ou instable.

Comme première étape de cette étude, il est intéressant de représenter la fonction $F(x)$, qui décrit l'effet sur le mouvement en x de la force du ressort et de la force centrifuge. Suivant que $\omega^2 > \omega_0^2$ (rotation rapide) ou $\omega^2 < \omega_0^2$ (rotation lente), on a les deux droites représentées ci-dessous.



Sur base de ce graphique, étudions l'influence de F sur de petites perturbations en x par rapport à la position d'équilibre. Dans le cas $\omega^2 > \omega_0^2$, la “force” $F(x)$ est négative (resp. positive) à gauche (resp. droite) du point d'équilibre. Ce terme tend donc à éloigner le mobile du point d'équilibre et la combinaison de la force du ressort et de l'effet centrifuge est donc déstabilisante. Dans le cas $\omega^2 < \omega_0^2$, c'est l'inverse : la “force” $F(x)$ est négative (resp. positive) à droite (resp. gauche) du point d'équilibre. L'effet combiné du ressort et de la force centrifuge ramène alors le mobile vers le point d'équilibre et est donc stabilisant.

Il importe à présent de bien noter qu'on ne peut pas tirer de conclusions définitives quant à la stabilité du point d'équilibre à partir du raisonnement qui vient d'être mené, car nous n'avons envisagé que des perturbations par rapport à x !

Une analyse de stabilité complète ne peut se faire qu'en envisageant des petites perturbations \tilde{x} et \tilde{y} tout à fait générales autour de l'équilibre. Autrement dit, écrivons :

$$x(t) = x_E + \tilde{x}(t) \quad (3.6)$$

$$y(t) = y_E + \tilde{y}(t) \quad (3.7)$$

Des équations du mouvement obtenues précédemment pour x et y , on peut déduire les équations d'évolution des perturbations :

$$\ddot{\tilde{x}} = (\omega^2 - \omega_0^2)\tilde{x} + 2\omega\dot{\tilde{y}} \quad (3.8)$$

$$\ddot{\tilde{y}} = (\omega^2 - \omega_0^2)\tilde{y} - 2\omega\dot{\tilde{x}} \quad (3.9)$$

En introduisant une variable complexe $z = \tilde{x} + i\tilde{y}$ et à l'aide des deux équations précédentes, on obtient :

$$\ddot{z} = (\omega^2 - \omega_0^2)z - 2\omega i\dot{z}$$

Le polynôme caractéristique s'écrit :

$$u^2 + 2\omega iu - (\omega^2 - \omega_0^2) = 0$$

Les solutions sont données par :

$$u_{1,2} = -i(\omega \pm \omega_0)$$

La variable $z(t)$ évolue donc comme suit :

$$z(t) = C_1 e^{-i(\omega + \omega_0)t} + C_2 e^{-i(\omega - \omega_0)t}$$

La décomposition en parties réelle et imaginaire fournit l'évolution des perturbations $\tilde{x}(t)$ et $\tilde{y}(t)$. Ces dernières s'expriment comme une somme de sinus ou de cosinus et sont donc des fonctions bornées du temps. Par conséquent, la position d'équilibre est stable vis-à-vis de perturbations infinitésimales, que la rotation soit lente ($\omega^2 < \omega_0^2$) ou rapide ($\omega^2 > \omega_0^2$) !

Ce résultat peut sembler un peu étonnant, puisque notre analyse préalable de la "force" $F(x)$ avait montré que, dans le cas de la rotation rapide, cette force pouvait être déstabilisante. Cependant, le terme $F(x)$ ne représente pas toute la physique du phénomène. En effet, dans l'équation (3.6), on voit apparaître un terme supplémentaire, qui est en fait la projection en x de la force de Coriolis. C'est donc cette force de Coriolis qui stabilise la position d'équilibre, en compensant les effets déstabilisants de $F(x)$. (On notera aussi que si les mouvements de la particule étaient a priori contraints à se faire sur l'axe x (perle enfilée sur une tige), le point d'équilibre resterait inchangé, mais celui-ci serait instable.)

- Montrer qu'une grandeur analogue à l'énergie totale est conservée en considérant la force centrifuge comme dérivant d'un potentiel.

Pour ce faire, on va calculer l'énergie potentielle fictive d'inertie, c'est-à-dire l'énergie totale du système en considérant les forces réelles et les forces fictives.

- La force attractive : $\vec{F}_A = -k\vec{AP} = -k(x-a)\vec{e}_x - ky\vec{e}_y$. Montrons que cette force dérive d'un potentiel $\vec{F}_A = -\vec{\nabla}V_A$:

$$-k(x-a)\vec{e}_x - ky\vec{e}_y = -\frac{\partial V_A}{\partial x}\vec{e}_x - \frac{\partial V_A}{\partial y}\vec{e}_y - \frac{\partial V_A}{\partial z}\vec{e}_z$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial V_A}{\partial x} &= -k(x-a) \implies V_A(x, y, z) = \frac{1}{2}k(x-a)^2 + f(y, z) \\ -\frac{\partial V_A}{\partial y} &= -ky \implies f(y, z) = \frac{1}{2}ky^2 + g(z) \\ -\frac{\partial V_A}{\partial z} &= 0 \implies g(z) = C \end{aligned}$$

Il existe donc un potentiel V_A qui vérifie que $\vec{F}_A = -\vec{\nabla}V_A$. De manière arbitraire, on considère $C = 0$, ce qui donne $V_A = \frac{1}{2}k(x-a)^2 + \frac{1}{2}ky^2$.

- La force centrifuge : $\vec{F}_{cf} = m\omega^2(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y)$. Montrons que cette force dérive d'un potentiel $\vec{F}_{cf} = -\vec{\nabla}V_{cf}$:

$$m\omega^2(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y) = -\frac{\partial V_{cf}}{\partial x}\vec{e}_x - \frac{\partial V_{cf}}{\partial y}\vec{e}_y - \frac{\partial V_{cf}}{\partial z}\vec{e}_z$$

$$\begin{aligned}-\frac{\partial V_{cf}}{\partial x} &= m\omega^2 x \implies V_{cf}(x, y, z) = -\frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + f(y, z) \\-\frac{\partial V_{cf}}{\partial y} &= m\omega^2 y \implies f(y, z) = -\frac{1}{2}m\omega^2 y^2 + g(z) \\-\frac{\partial V_{cf}}{\partial z} &= 0 \implies g(z) = C\end{aligned}$$

Le potentiel $V_{cf} = -\frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2)$ est arbitrairement choisi (valeur nulle pour la constante résiduelle).

- La force de pesanteur : $m\vec{g}$. On sait que cette force dérive du potentiel mgz , avec z qui reste constant vu les liaisons. On notera aussi que la force ne travaille pas et que le potentiel qui lui est associé ne doit donc pas obligatoirement être pris en compte dans le raisonnement en cours.
- La force de liaison : $\vec{N} = N_z \vec{e}_Z$. Cette force est dirigée selon \vec{e}_Z et est donc perpendiculaire à la vitesse \vec{v}' , comprise dans le plan (\vec{e}_x, \vec{e}_y) . Par conséquent, cette force ne travaille pas.
- La force de Coriolis : $\vec{F}_C = -2m\omega(\dot{x}\vec{e}_y - \dot{y}\vec{e}_x)$. Cette force est perpendiculaire à la vitesse \vec{v}' par définition. Par conséquent, cette force ne travaille pas.

Etant donné qu'une force dérivant d'un potentiel est conservative, toutes les forces (réelles et fictives) sont conservatives et donc on peut écrire :

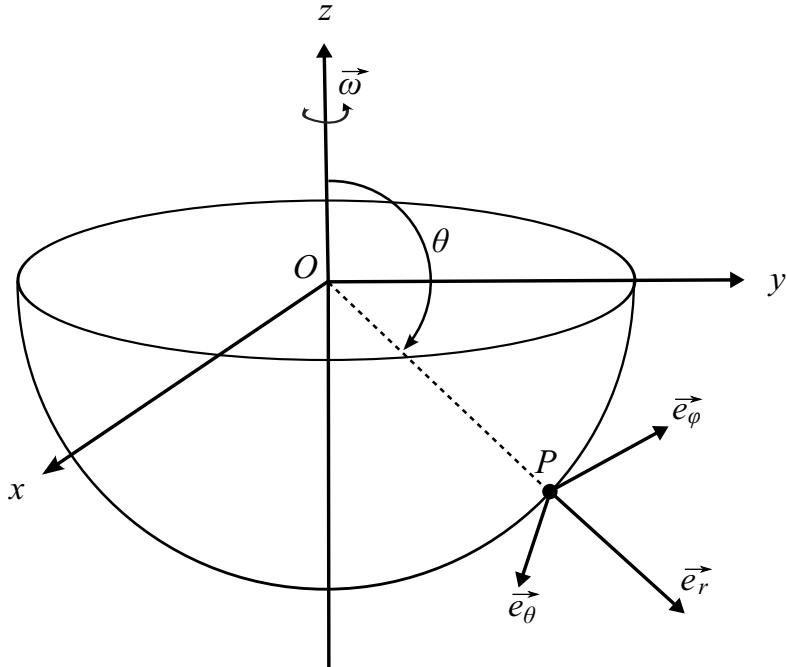
$$\begin{aligned}E' &= V' + T' \\ \text{avec } T' &= \frac{1}{2}mv'^2 \quad (\text{énergie cinétique relative}) \\ V' &= V_A + V_{cf} \quad (\text{énergie potentielle relative})\end{aligned}$$

Remarquons que l'énergie potentielle relative V' possède un extremum en le point d'équilibre étudié ci-dessus. Cet extremum est en outre un maximum dans le cas $\omega^2 < \omega_0^2$ mais le point d'équilibre est néanmoins stable.

3.2.6 Le bol hémisphérique tournant

Un bol hémisphérique de rayon R tourne autour d'un axe vertical à vitesse angulaire constante $\bar{\omega}$. Une particule P de masse m se trouve dans le bol. Elle est soumise à la gravité, ainsi qu'à une force de frottement $\vec{F}_f = -k\vec{v}'$ où k est une constante positive et \vec{v}' la vitesse de la particule par rapport au bol.

- Ecrire les équations de Newton en coordonnées sphériques dans le repère attaché au bol.
- Déterminer les positions d'équilibre relatif et la valeur de la réaction normale lorsque le point matériel se trouve en ces positions.
- Ces positions d'équilibre existent-elles pour toute valeur de ω ? Justifier.
- Entreprendre l'étude de stabilité de ces positions d'équilibre relatif.



— Ecrire les équations de Newton en coordonnées sphériques dans le repère attaché au bol.

1. On définit le système de référence absolu $S(O, \vec{e}_X, \vec{e}_Y, \vec{e}_Z)$, le système de référence lié au bol $S'(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et le système de référence associé aux coordonnées sphériques $S''(P, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$. Les vecteurs de Poisson sont : $\vec{\omega}_{S' \div S} = \omega \vec{e}_z$, $\vec{\omega}_{S'' \div S'} = \dot{\varphi} \vec{e}_z + \dot{\theta} \vec{e}_\varphi$ et donc $\vec{\omega}_{S'' \div S} = \vec{\omega}_{S'' \div S'} + \vec{\omega}_{S' \div S} = (\omega + \dot{\varphi}) \vec{e}_z + \dot{\theta} \vec{e}_\varphi$.
2. Les forces réelles \vec{F} s'appliquant sur le point P sont la force de pesanteur $m\vec{g} = -mg \vec{e}_z$ (avec $\vec{e}_z = \cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta$), la force de liaison $\vec{N} = -N \vec{e}_r$ et la force de frottement $\vec{F}_f = -kv'$.
3. Calcul des vecteurs position \vec{r}' , vitesse \vec{v}' et accélération $\vec{\gamma}'$ dans le système de référence S' lié au bol.

$$\begin{aligned}
 \vec{r}' &= R\vec{e}_r \\
 \vec{v}' &= R\vec{\omega}_{S'' \div S'} \wedge \vec{e}_r = R(\dot{\varphi} \vec{e}_z + \dot{\theta} \vec{e}_\varphi) \wedge \vec{e}_r \\
 &= R\dot{\varphi} \sin \theta \vec{e}_\varphi + R\dot{\theta} \vec{e}_\theta \\
 \vec{\gamma}' &= R\ddot{\varphi} \sin \theta \vec{e}_\varphi + R\dot{\varphi}\dot{\theta} \cos \theta \vec{e}_\varphi + R\dot{\varphi} \sin \theta \vec{\omega}_{S'' \div S'} \wedge \vec{e}_\varphi + R\ddot{\theta} \vec{e}_\theta \\
 &\quad + R\dot{\theta}\vec{\omega}_{S'' \div S'} \wedge \vec{e}_\theta \\
 &= R\ddot{\varphi} \sin \theta \vec{e}_\varphi + R\dot{\varphi}\dot{\theta} \cos \theta \vec{e}_\varphi + R\dot{\varphi} \sin \theta (\dot{\varphi} \vec{e}_z + \dot{\theta} \vec{e}_\varphi) \wedge \vec{e}_\varphi + R\ddot{\theta} \vec{e}_\theta \\
 &\quad + R\dot{\theta}(\dot{\varphi} \vec{e}_z + \dot{\theta} \vec{e}_\varphi) \wedge \vec{e}_\theta \\
 &= R\ddot{\varphi} \sin \theta \vec{e}_\varphi + R\dot{\varphi}\dot{\theta} \cos \theta \vec{e}_\varphi + R\dot{\varphi} \sin \theta \dot{\varphi}(-\cos \theta \vec{e}_\theta - \sin \theta \vec{e}_r) + R\ddot{\theta} \vec{e}_\theta \\
 &\quad + R\dot{\theta}(\dot{\varphi} \cos \theta \vec{e}_\varphi - \dot{\theta} \vec{e}_r) \\
 &= -R(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) \vec{e}_r + (R\ddot{\varphi} \sin \theta + 2R\dot{\varphi}\dot{\theta} \cos \theta) \vec{e}_\varphi \\
 &\quad + (R\ddot{\theta} - R\dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta) \vec{e}_\theta
 \end{aligned}$$

Ici, lors du calcul des vecteurs \vec{v}' et $\vec{\gamma}'$, il faut considérer les variations des vecteurs \vec{e}_r , \vec{e}_φ et \vec{e}_θ (de S'') par rapport au système de référence dans lequel on travaille, ici S' . Il faut donc utiliser le vecteur de Poisson du mouvement de S'' par rapport à S' , $\vec{\omega}_{S'' \div S'}$.

4. Ecrire l'équation de Newton dans S' :

$$\begin{aligned} m\vec{\gamma}' &= \vec{F} + \vec{F}_e + \vec{F}_C \\ \text{avec } \vec{F} &= -mg\vec{e}_Z - N\vec{e}_r - k(R\dot{\varphi}\sin\theta\vec{e}_\varphi + R\dot{\theta}\vec{e}_\theta) \\ \vec{F}_e &= -m\vec{\gamma}_{O'} - m\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}') - m\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r}' \\ \vec{F}_C &= -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}' \end{aligned}$$

Lors du calcul des forces fictives, on regarde le mouvement du système de référence choisi S' , par rapport à un système de référence absolu, S . Le vecteur de Poisson apparaissant dans les expressions de \vec{F}_e et \vec{F}_C correspond donc à $\vec{\omega}_{S' \div S} = \omega\vec{e}_Z$. L'origine de S' coïncide avec l'origine de S et par conséquent l'accélération $\vec{\gamma}_{O'}$ est nulle. Par conséquent, il reste :

$$\begin{aligned} \vec{F}_e &= -m\omega\vec{e}_Z \wedge (\omega\vec{e}_Z \wedge R\vec{e}_r) \\ &= -mR\omega^2\vec{e}_Z \wedge \sin\theta\vec{e}_\varphi \\ &= -mR\omega^2\sin\theta(-\cos\theta\vec{e}_\theta - \sin\theta\vec{e}_r) \\ \vec{F}_C &= -2m\omega\vec{e}_Z \wedge (R\dot{\varphi}\sin\theta\vec{e}_\varphi + R\dot{\theta}\vec{e}_\theta) \\ &= -2m\omega R\dot{\varphi}\sin\theta(-\cos\theta\vec{e}_\theta - \sin\theta\vec{e}_r) - 2m\omega R\dot{\theta}\cos\theta\vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

Au final, l'équation de Newton s'écrit :

$$\begin{aligned} .\vec{e}_r &: -mR(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta) = -mg\cos\theta - N + mR\omega^2\sin^2\theta + 2m\omega R\dot{\varphi}\sin^2\theta \\ .\vec{e}_\theta &: m(R\ddot{\theta} - R\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta) = mg\sin\theta - kR\dot{\theta} + mR\omega^2\sin\theta\cos\theta \\ &\quad + 2m\omega R\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta \\ .\vec{e}_\varphi &: m(R\ddot{\varphi}\sin\theta + 2R\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta) = -kR\dot{\varphi}\sin\theta - 2m\omega R\dot{\theta}\cos\theta \end{aligned}$$

- Déterminer les positions d'équilibre relatif et la valeur de la réaction normale lorsque le point matériel se trouve en ces positions.

Les positions d'équilibre relatif s'obtiennent en annulant les vitesse et accélération par rapport au bol, \vec{v}' et $\vec{\gamma}'$: $\dot{\varphi} = \dot{\omega} = 0$ et $\ddot{\varphi} = \ddot{\omega} = 0$. En remplaçant dans les équations de Newton, on obtient :

$$\begin{aligned} 0 &= -mg\cos\theta - N + mR\omega^2\sin^2\theta \\ 0 &= mg\sin\theta + mR\omega^2\sin\theta\cos\theta \end{aligned}$$

La première équation fait intervenir l'inconnue N . La deuxième se factorise comme suit :

$$\sin\theta(g + \omega^2R\cos\theta) = 0$$

ce qui fournit

$$\theta = \pi \text{ ou } \cos \theta = -\frac{g}{\omega^2 R}$$

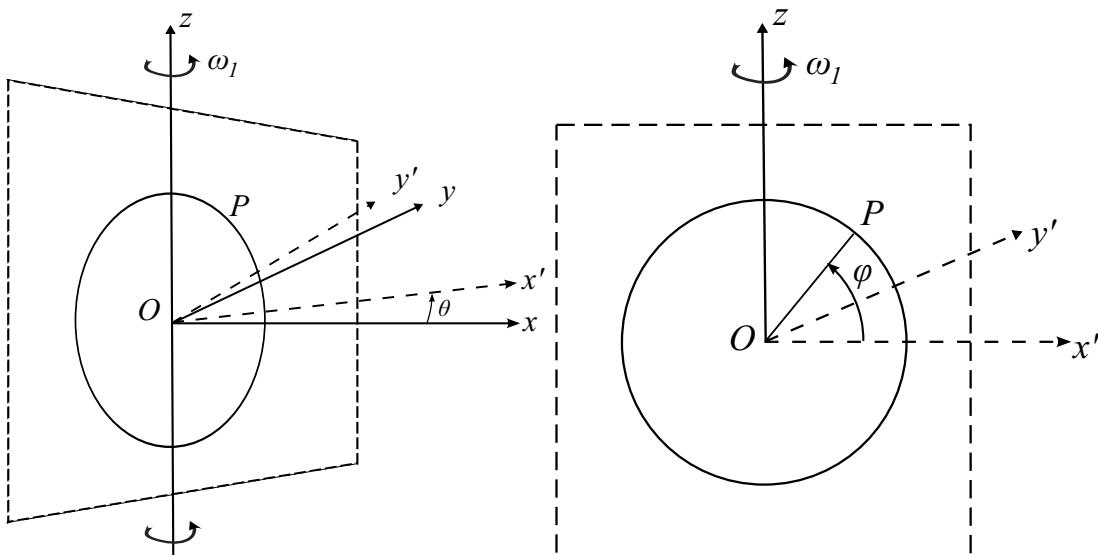
avec $\varphi = \varphi_0$ quelconque. Dans le premier cas, on trouve, sans surprise, $N = mg$ et dans le second, $N = m\omega^2 R$.

- Ces positions d'équilibre relatif existent-elles pour toute valeur de ω ? Justifier.

Comme le cosinus d'un angle est toujours compris entre -1 et 1, la deuxième solution n'existe que pour $\omega > \sqrt{\frac{g}{R}}$. En réalité cette deuxième solution est une famille de solutions puisque les équations pour les équilibres relatifs n'imposent pas de condition sur la valeur de φ . Tous les points de la section circulaire du bol correspondant à $\cos \theta = -\frac{g}{\omega^2 R}$ sont donc des équilibres relatifs pour $\omega > \sqrt{\frac{g}{R}}$.

3.2.7 Bille oscillant sur un cercle tournant

Un anneau circulaire de rayon R est situé dans un plan vertical en rotation de vitesse angulaire ω_1 constante autour du diamètre de l'anneau. Une particule P est liée à l'anneau et glisse dessus sans frottement. Donner l'expression de la vitesse et de l'accélération de la particule (par rapport à un système de référence absolu) en discutant chaque fois les cas particuliers du plan fixe et de la bille fixe sur l'anneau. On suppose la vitesse de rotation du plan uniforme.



1. On définit le système de référence absolu $S(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ (ayant pour origine le centre de cercle), le système de référence lié au plan $S'(O, \vec{e}'_x, \vec{e}'_y, \vec{e}_z)$ (ayant le même centre et la même direction verticale) et le système de référence lié à la particule $P''(P, \vec{e}_r, \vec{e}'_y, \vec{e}_\varphi)$ (avec \vec{e}_r dans la même direction et le même sens que le vecteur \vec{OP}). Les vecteurs de Poisson sont : $\vec{\omega}_{S' \div S} = \omega_1 \vec{e}_z = \dot{\theta} \vec{e}_z$, $\vec{\omega}_{S'' \div S'} = -\dot{\varphi} \vec{e}'_y$ et donc $\vec{\omega}_{S'' \div S} = \vec{\omega}_{S'' \div S'} + \vec{\omega}_{S' \div S} = \dot{\theta} \vec{e}_z - \dot{\varphi} \vec{e}'_y$.

2. Calcul des vecteurs position \vec{r} , vitesse \vec{v} et accélération $\vec{\gamma}$ dans le système de référence absolu S .

$$\begin{aligned}
 \vec{r} &= R\vec{e}_r = R(\cos \varphi \vec{e}_{x'} + \sin \varphi \vec{e}_z) \\
 \vec{v} &= R\vec{\omega}_{S'' \div S} \wedge \vec{e}_r = R(\dot{\theta}\vec{e}_z - \dot{\varphi}\vec{e}_{y'}) \wedge (\cos \varphi \vec{e}_{x'} + \sin \varphi \vec{e}_z) \\
 &= R\dot{\theta} \cos \varphi \vec{e}_{y'} + R\dot{\varphi} \cos \varphi \vec{e}_z - R\dot{\varphi} \sin \varphi \vec{e}_{x'} \\
 \vec{\gamma} &= -R\dot{\theta}\dot{\varphi} \sin \varphi \vec{e}_{y'} + R\dot{\theta} \cos \varphi \vec{\omega}_{S' \div S} \wedge \vec{e}_{y'} + R\ddot{\varphi} \cos \varphi \vec{e}_z - R\dot{\varphi}^2 \sin \varphi \vec{e}_z \\
 &\quad + R\dot{\varphi} \cos \varphi \vec{\omega}_{S' \div S} \wedge \vec{e}_z - R\ddot{\varphi} \sin \varphi \vec{e}_{x'} - R\dot{\varphi}^2 \cos \varphi \vec{e}_{x'} - R\dot{\varphi} \sin \varphi \vec{\omega}_{S' \div S} \wedge \vec{e}_{x'} \\
 &= -R\dot{\theta}\dot{\varphi} \sin \varphi \vec{e}_{y'} + R\dot{\theta} \cos \varphi \dot{\theta} \vec{e}_z \wedge \vec{e}_{y'} + R\ddot{\varphi} \cos \varphi \vec{e}_z - R\dot{\varphi}^2 \sin \varphi \vec{e}_z \\
 &\quad + R\dot{\varphi} \cos \varphi \dot{\theta} \vec{e}_z \wedge \vec{e}_z - R\ddot{\varphi} \sin \varphi \vec{e}_{x'} - R\dot{\varphi}^2 \cos \varphi \vec{e}_{x'} - R\dot{\varphi} \sin \varphi \dot{\theta} \vec{e}_z \wedge \vec{e}_{x'} \\
 &= -R\dot{\theta}\dot{\varphi} \sin \varphi \vec{e}_{y'} - R\dot{\theta}^2 \cos \varphi \vec{e}_{x'} + R\ddot{\varphi} \cos \varphi \vec{e}_z - R\dot{\varphi}^2 \sin \varphi \vec{e}_z \\
 &\quad - R\ddot{\varphi} \sin \varphi \vec{e}_{x'} - R\dot{\varphi}^2 \cos \varphi \vec{e}_{x'} - R\dot{\varphi} \sin \varphi \dot{\theta} \vec{e}_{y'} \\
 &= [-R(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2) \cos \varphi - R\ddot{\varphi} \sin \varphi] \vec{e}_{x'} - 2R\dot{\theta}\dot{\varphi} \sin \varphi \vec{e}_{y'} \\
 &\quad + [R\ddot{\varphi} \cos \varphi - R\dot{\varphi}^2 \sin \varphi] \vec{e}_z
 \end{aligned}$$

Ici, lors du calcul du vecteur \vec{v} , il faut considérer le mouvement du vecteur \vec{e}_r (de S'') par rapport au système de référence absolu S . Il faut donc utiliser le vecteur de Poisson du mouvement de S'' par rapport à S , $\vec{\omega}_{S'' \div S}$.

Lors du calcul du vecteur $\vec{\gamma}$, il faut considérer le mouvement des vecteurs $\vec{e}_{x'}$, $\vec{e}_{y'}$ et \vec{e}_z (de S') par rapport au système de référence absolu S . Il faut donc utiliser le vecteur de Poisson du mouvement de S' par rapport à S , $\vec{\omega}_{S' \div S}$.

Cas 1 : plan fixe, $\dot{\theta} = 0$

$$\begin{aligned}
 \vec{v} &= R\dot{\varphi} \cos \varphi \vec{e}_z - R\dot{\varphi} \sin \varphi \vec{e}_{x'} \\
 &= R\dot{\varphi}(\cos \varphi \vec{e}_z - \sin \varphi \vec{e}_{x'}) = R\dot{\varphi} \vec{e}_\varphi \\
 \vec{\gamma} &= [-R\dot{\varphi}^2 \cos \varphi - R\ddot{\varphi} \sin \varphi] \vec{e}_{x'} + [R\ddot{\varphi} \cos \varphi - R\dot{\varphi}^2 \sin \varphi] \vec{e}_z \\
 &= R\ddot{\varphi}(-\sin \varphi \vec{e}_{x'} + \cos \varphi \vec{e}_z) - R\dot{\varphi}^2(\cos \varphi \vec{e}_{x'} + \sin \varphi \vec{e}_z) \\
 &= R\ddot{\varphi} \vec{e}_\varphi - R\dot{\varphi}^2 \vec{e}_r
 \end{aligned}$$

avec $\vec{e}_\varphi = \cos \varphi \vec{e}_z - \sin \varphi \vec{e}_{x'}$ et $\vec{e}_r = \cos \varphi \vec{e}_{x'} + \sin \varphi \vec{e}_z$.

Cas 2 : bille fixe sur le cercle, $\dot{\varphi} = 0$

$$\begin{aligned}
 \vec{v} &= R\dot{\theta} \cos \varphi \vec{e}_{y'} \\
 \vec{\gamma} &= -R\dot{\theta}^2 \cos \varphi \vec{e}_{x'}
 \end{aligned}$$

3.3 Exercices proposés

1. Un point matériel pesant se déplace sans frottement sur une circonference située dans un plan vertical fixe. Le centre de cette circonference subit des déplacements horizontaux décrits par $O\vec{O}' = a \sin \omega t \vec{e}_{x'}$. Ecrire l'équation différentielle du mouvement en θ (angle entre le rayon vecteur et l'axe $\vec{e}_{x'}$).

$$(R : \ddot{\theta} + \frac{g}{R} \cos \theta + \frac{a\omega^2}{R} \sin \omega t \sin \theta = 0)$$

2. Un point matériel pesant glisse sans frottement sur une droite d qui tourne dans un plan vertical autour d'un de ses points O , avec une vitesse angulaire constante ω . Etudier le mouvement du point.

$$(R : y = (y_0 - \frac{g}{\omega^2}) \cosh(\omega t) + \frac{\dot{y}_0}{\omega} \sinh(\omega t) + \frac{g}{\omega^2} \cos(\omega t))$$

3. Sur un plancher horizontal tournant dans son plan avec une vitesse angulaire constante ω autour d'un point O , on lance radialement à partir d'un point A un point matériel pesant P avec une vitesse initiale v_0 . Etudier le mouvement du point matériel par rapport au plancher en supposant les frottements négligeables.

$$(R : x(t) = (a + v_0 t) \cos(\omega t) + \omega a t \sin(\omega t), \\ y(t) = -(a + v_0 t) \sin(\omega t) + \omega a t \cos(\omega t))$$

4. Un plan horizontal tourne sur lui-même autour d'un de ses points O , avec une vitesse angulaire constante ω . En prenant un système d'axes, d'origine O et d'axe z vertical, lié au plan, la droite d a pour équations $y = a$, $z = 0$. Un point matériel pesant P se meut sur d , sans frottement, et subit la force attractive $\vec{F} = -k \vec{AP}$. A est le point de coordonnées $(0, a, 0)$. Etudier le mouvement et rechercher les positions d'équilibre.

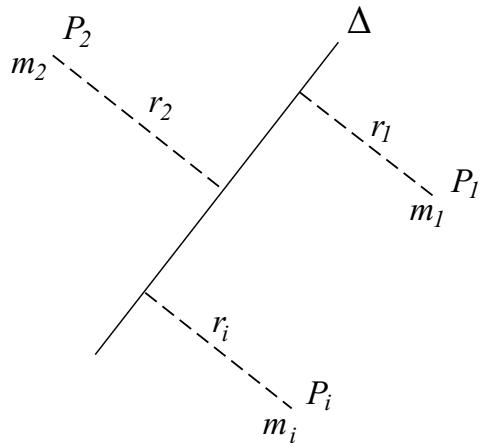
$$(R : \ddot{x} + (\omega_0^2 - \omega^2) x = 0, \omega_0^2 = \frac{k}{m})$$

Chapitre 4

Moments d’Inertie

4.1 Rappels théoriques

4.1.1 Moment d’inertie



Le moment d’inertie par rapport à un axe Δ d’un système de points matériels P_i de masses respectives m_i s’écrit :

$$I_\Delta = \sum_i m_i r_i^2$$

où r_i est la distance du point P_i à l’axe Δ . Si la distribution de masse est continue et occupe un volume V , on a :

$$I_\Delta = \int_V r^2 dm = \int_V r^2 \rho dV$$

où r représente la distance de l’élément de masse dm à l’axe Δ et ρ la masse volumique (à remplacer par la masse surfacique ou la masse linéique lorsque l’on a affaire à une surface S ou à une courbe C , respectivement).

4.1.2 Théorème des axes parallèles (théorème d’Huygens)

Soit I_Δ le moment d’inertie d’un système par rapport à l’axe Δ et soit I_{Δ_c} le moment d’inertie du système par rapport à un axe parallèle à l’axe Δ passant par le

centre de masse C du système. Soit b la distance entre ces deux axes et M la masse totale du système. On a :

$$I_{\Delta} = I_{\Delta c} + Mb^2$$

Ainsi, pour une famille d'axes de direction donnée, l'axe passant par le centre de masse donne toujours lieu au moment d'inertie minimum. Autrement dit, il est plus simple de faire tourner le système autour du centre de masse qu'autour de tout autre point.

Préalablement à la démonstration du théorème d'Huygens, rappelons brièvement la notion de centre de masse.

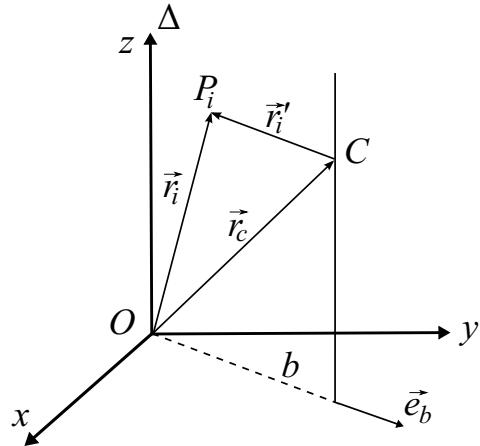
Le centre de masse C d'un système de points matériels P_i de masses respectives m_i est défini par :

$$\overrightarrow{OC} = \frac{\sum_i m_i \overrightarrow{OP}_i}{\sum_i m_i} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \overrightarrow{OP}_i$$

où O est l'origine du repère utilisé. Dans le cas d'une distribution de masse continue, on a :

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{M} \int_V \overrightarrow{OP} dm$$

Démonstration du théorème des axes parallèles



Prenons comme axe Δ l'axe $z = O + \vec{e}_z$. On peut décomposer tout vecteur position $\vec{r}_i = \overrightarrow{OP}_i$ d'un point P_i en :

$$\vec{r}_i = (\vec{r}_i \cdot \vec{e}_b) \vec{e}_b + (\vec{r}_i \cdot \vec{e}_z) \vec{e}_z$$

où \vec{e}_b est un vecteur perpendiculaire à \vec{e}_z . La distance b_i du point P_i à l'axe z vaut donc : $b_i = \vec{r}_i \cdot \vec{e}_b$. Par définition d'un moment d'inertie, on a alors :

$$I_z = \sum_i m_i (\vec{r}_i \cdot \vec{e}_b)^2$$

D'autre part, $\vec{r}_i = \vec{r}_c + \vec{r}'_i$ où $\vec{r}_c = \overrightarrow{OC}$ et $\vec{r}'_i = \overrightarrow{CP}_i$. On a :

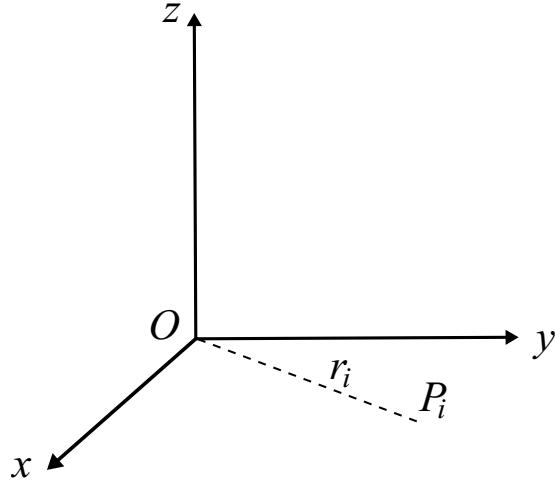
$$\begin{aligned}
I_z &= \sum_i m_i (\vec{r}_c \cdot \vec{e}_b + \vec{r}'_i \cdot \vec{e}_b)^2 \\
&= \sum_i m_i \left[(\vec{r}_c \cdot \vec{e}_b)^2 + (\vec{r}'_i \cdot \vec{e}_b)^2 + 2(\vec{r}_c \cdot \vec{e}_b)(\vec{r}'_i \cdot \vec{e}_b) \right] \\
&= \sum_i m_i (\vec{r}_c \cdot \vec{e}_b)^2 + \sum_i m_i (\vec{r}'_i \cdot \vec{e}_b)^2 + 2(\vec{r}_c \cdot \vec{e}_b) \left(\sum_i m_i \vec{r}'_i \right) \cdot \vec{e}_b \\
&= \sum_i m_i b^2 + \sum_i m_i b'_i{}^2 = Mb^2 + I_c
\end{aligned}$$

où on a tenu compte du fait que $\sum_i m_i \vec{r}'_i = 0$ par définition du centre de masse. On a appelé $b = \vec{r}_c \cdot \vec{e}_b$ la distance du centre de masse C à l'axe z et $b'_i = \vec{r}'_i \cdot \vec{e}_b$ la distance du point P_i à l'axe $C + \vec{e}_z$. I_c est donc le moment d'inertie de P_i par rapport à l'axe $C + \vec{e}_z$.

4.1.3 Théorème des axes perpendiculaires

Soient un système d'axes cartésiens (O, x, y, z) et une distribution de masses $\{m_i\}$ dans le plan (O, x, y) . Soient I_x, I_y, I_z les moments d'inertie du point matériel P_i de masse m_i par rapport aux axes x, y et z concourant en O . On a :

$$I_z = I_x + I_y$$



Démonstration :

Le vecteur position \vec{r}_i du point P_i s'écrit :

$$\vec{r}_i = x_i \vec{e}_x + y_i \vec{e}_y$$

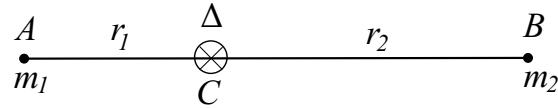
Son moment d'inertie par rapport à l'axe z vaut donc :

$$I_z = \sum_i m_i r_i^2 = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) = \sum_i m_i x_i^2 + \sum_i m_i y_i^2 = I_y + I_x$$

4.2 Calculs de moments d'inertie

4.2.1 Moment d'inertie d'un système de deux masses ponctuelles

Calculer le moment d'inertie I_Δ d'un système composé de deux masses ponctuelles A et B , de masses m_1 et m_2 liées par une tige non massive de longueur a , par rapport à un axe perpendiculaire à la tige et passant par le centre de masse C .



D'abord, on calcule la position du centre de masse C en utilisant la définition :

$$\vec{AC} = \frac{\sum_i m_i \vec{AP}_i}{\sum_i m_i} = \frac{m_1 \vec{AA} + m_2 \vec{AB}}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{AB}$$

Calculons les distances r_1 entre C et A et r_2 entre C et B :

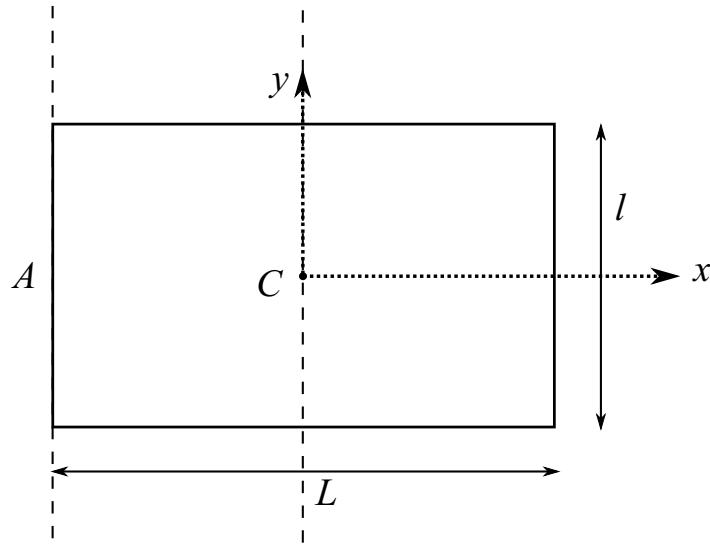
$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{m_2 a}{m_1 + m_2} \\ r_2 &= a - r_1 = \frac{m_1 a}{m_1 + m_2} \end{aligned}$$

Le moment d'inertie I_Δ s'écrit alors :

$$I_\Delta = \sum m_i r_i^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 = \frac{m_1 m_2^2 a^2 + m_2 m_1^2 a^2}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{m_1 m_2 a^2}{m_1 + m_2}$$

4.2.2 Moment d'inertie d'une plaque

Calculer le moment d'inertie d'une plaque homogène, d'épaisseur négligeable, de longueur L , de largeur l et de masse M par rapport à l'axe parallèle au petit côté et passant par le centre de masse C , puis passant par le point A .



Pour des raisons de symétrie, on sait que le centre de masse C est au milieu de la plaque. On place la plaque sur un plan (x, y) dont l'origine est placée en C , l'axe x parallèle à la longueur de la plaque et l'axe y parallèle à sa largeur. On a le moment d'inertie :

$$I_c = \int_S x^2 dm$$

On définit $dm = \rho dx dy$ avec $\rho = \frac{M}{Ll}$ la masse surfacique, et on calcule :

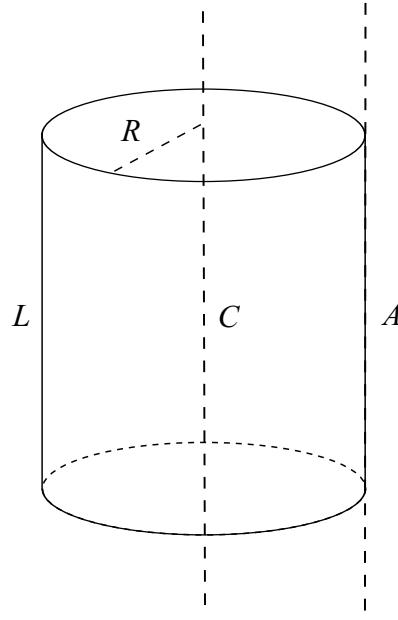
$$I_c = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \rho x^2 dy dx = l\rho \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} = \rho l \frac{L^3}{12} = \frac{1}{12} ML^2$$

On remarque que le moment d'inertie ne dépend pas de la largeur l de la plaque, et si on calculait le même moment d'inertie pour une tige de largeur négligeable, on obtiendrait le même résultat (pour autant que tous ces objets aient la même masse M). Pour calculer le moment d'inertie I_A par rapport au point A , on utilise le théorème des axes parallèles et on a :

$$I_A = I_c + M \left(\frac{L}{2} \right)^2 = ML^2 \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{3} ML^2$$

4.2.3 Moment d'inertie d'un cylindre creux

Calculer le moment d'inertie I_A d'un cylindre creux homogène, d'épaisseur négligeable, de masse M , de longueur L et de rayon R par rapport à l'axe parallèle à la longueur du cylindre et passant par un point A du cylindre.



Par symétrie, on sait que le centre de masse C se situe au centre du cylindre. Pour des raisons de facilité, on va calculer le moment d'inertie I_c par rapport à l'axe parallèle à la longueur du cylindre et passant par le point C . Ensuite, on va utiliser le théorème des axes parallèles, qui dit :

$$I_A = I_c + MR^2$$

On calcule I_c , qui par définition vaut :

$$I_c = \int_V r^2 dm$$

Dans ce problème, on a toujours $r = R$ et cela simplifie énormément les calculs car :

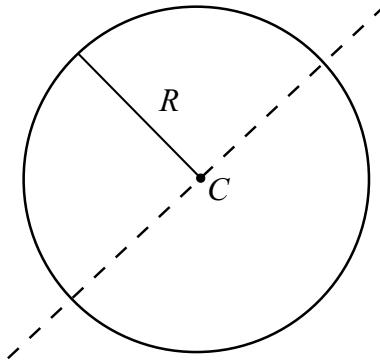
$$I_c = \int_V r^2 dm = \int_V R^2 dm = R^2 \int_V dm = MR^2$$

En fait, la longueur L du cylindre ne joue aucun rôle dans le calcul du moment d'inertie. On peut calculer le moment d'inertie d'un cerceau (donc un cylindre de longueur négligeable) et on obtient le même résultat. Calculons maintenant I_A :

$$I_A = I_c + MR^2 = 2MR^2$$

4.2.4 Moment d'inertie d'un cerceau

Calculer le moment d'inertie I_C^h d'un cerceau homogène, de masse M , de rayon R et couché dans le plan (x, y) par rapport à un axe passant par le centre de masse C du cerceau et se trouvant dans le plan de cerceau.



On a déjà calculé dans la section 4.2.3 le moment d'inertie I_z du cylindre creux (ou du cerceau) par rapport à un axe parallèle à l'axe z et passant par C . On avait :

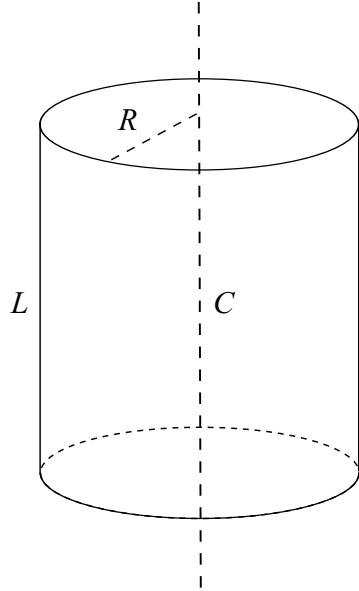
$$I_z = MR^2$$

Les conditions du théorème des axes perpendiculaires sont ici remplies, donc on applique ce théorème, sachant que par symétrie, on a $I_x = I_y$:

$$I_z = I_x + I_y = 2I_x \Rightarrow I_C^h = I_x = \frac{1}{2}I_z = \frac{1}{2}MR^2$$

4.2.5 Moment d'inertie d'un cylindre plein

Calculer le moment d'inertie I_C d'un cylindre plein homogène, de masse M , de longueur L et de rayon R par rapport à l'axe parallèle à la longueur du cylindre et passant par le centre de masse C du cylindre.



Par symétrie, on sait que le centre de masse C se situe au centre du cylindre. On doit donc calculer I_c , qui par définition vaut :

$$I_c = \int_V r^2 dm$$

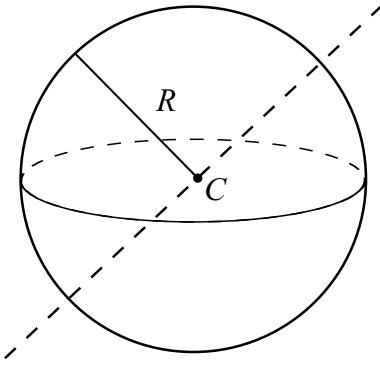
On identifie l'axe du moment d'inertie à l'axe z . On va donc passer en coordonnées cylindriques, sachant que $dm = \rho dx dy dz$, avec $\rho = \frac{M}{\pi R^2 L}$. On a, sans oublier le jacobien r :

$$\begin{aligned} I_c &= \int_V r^2 \rho dx dy dz = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^L \rho r^3 dz dr d\varphi = \rho \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R [\varphi]_0^{2\pi} [z]_0^L = \rho \frac{2\pi R^4 L}{4} \\ &= \frac{M}{\pi R^2 L} \frac{2\pi R^4 L}{4} = \frac{1}{2} M R^2 \end{aligned}$$

On remarque ici aussi que la longueur L du cylindre ne joue aucun rôle dans le calcul du moment d'inertie. On peut donc calculer le moment d'inertie d'un disque d'épaisseur négligeable et on obtient le même résultat.

4.2.6 Moment d'inertie d'une sphère creuse

Calculer le moment d'inertie I_c d'une sphère creuse d'épaisseur négligeable, homogène, de masse M et de rayon R par rapport à un axe passant par le centre de masse C de la sphère.



Par symétrie, on sait que le centre de masse C de la sphère se trouve en son centre. Calculons I_c :

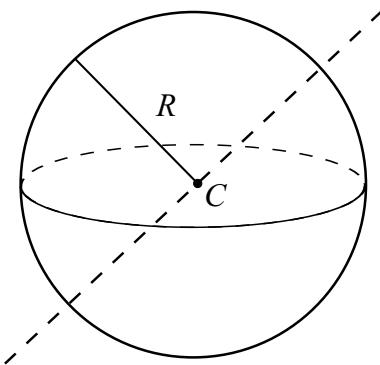
$$I_c = \int_S d^2 dm$$

avec d la distance des points à l'axe choisi. On définit encore une fois $dm = \rho dx dy$ avec $\rho = \frac{M}{4\pi R^3}$ la densité surfacique de la sphère. On va passer en coordonnées sphériques sans oublier le jacobien $r^2 \sin \theta$ et on a :

$$\begin{aligned} I_c &= \int_S d^2 \rho dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \rho (R \sin \theta)^2 (R^2 \sin \theta) d\theta d\varphi \\ &= 2\pi R^4 \rho \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = 2\pi R^4 \rho \int_0^\pi (\sin \theta - \sin \theta \cos^2 \theta) d\theta \\ &= 2\pi R^4 \rho \left[-\cos \theta + \frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_0^\pi = 2\pi R^4 \rho (1 + 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}) \\ &= \frac{8}{3}\pi R^4 \frac{M}{4\pi R^3} = \frac{2}{3}MR^2 \end{aligned}$$

4.2.7 Moment d'inertie d'une sphère pleine

Calculer le moment d'inertie I_c d'une sphère pleine homogène, de masse M et de rayon R par rapport à un axe passant par le centre de masse C de la sphère.



Par symétrie, on sait que le centre de masse C de la sphère se trouve en son centre. Calculons I_c :

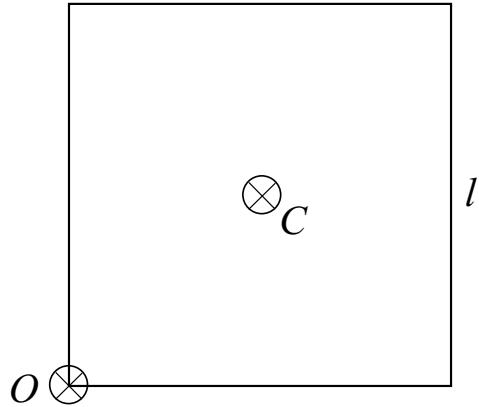
$$I_c = \int_V d_i^2 dm$$

avec d_i la distance des points à l'axe choisi. On définit $dm = \rho dx dy dz$ avec $\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ la densité volumique de la sphère. On va passer en coordonnées sphériques sans oublier le jacobien $r^2 \sin \theta$ et on a :

$$\begin{aligned} I_c &= \int_V d^2\rho dx dy dz = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \rho \int_0^R (r \sin \theta)^2 (r^2 \sin \theta) dr d\theta d\varphi \\ &= 2\pi\rho \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \int_0^R r^4 dr = 2\pi\rho \left(\frac{R^5}{5}\right) \left(\frac{4}{3}\right) \\ &= \frac{8}{15}\pi R^5 \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{2}{5}MR^2 \end{aligned}$$

4.2.8 Moment d'inertie d'un carré plein

Calculer le moment d'inertie I_0 d'un carré plein homogène, d'épaisseur négligeable, de masse M et de côté l par rapport à un axe perpendiculaire au plan du carré et passant par un sommet O , puis I_c le moment d'inertie par rapport à un axe parallèle passant par le centre de masse C .



On pose que le carré est dans un plan (x, y) dont O est l'origine des axes. Par définition, on a :

$$I_O = \int_S d_i^2 dm$$

Avec d_i la distance d'un point P_i au sommet O . On définit $dm = \rho dx dy$ avec $\rho = \frac{M}{l^2}$ la densité surfacique du carré. On a :

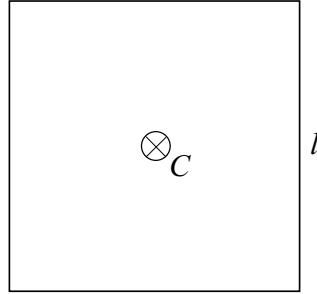
$$\begin{aligned} I_0 &= \int_S d^2\rho dx dy = \rho \int_0^l \int_0^l (x^2 + y^2) dx dy = \rho \int_0^l \left[\frac{x^3}{3} + xy^2 \right]_0^l dy \\ &= \rho \int_0^l \left(\frac{l^3}{3} + ly^2 \right) dy = \rho \left[y \frac{l^3}{3} + l \frac{y^3}{3} \right]_0^l = \rho \frac{2}{3}l^4 \\ &= \frac{M}{l^2} \frac{2}{3}l^4 = \frac{2}{3}Ml^2 \end{aligned}$$

Pour avoir le moment d'inertie I_c , il suffit d'appliquer le théorème des axes parallèles et on a :

$$I_c = I_0 - M \left(\frac{\sqrt{2}l}{2} \right)^2 = Ml^2 \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{6} Ml^2$$

4.2.9 Moment d'inertie d'un carré vide

Calculer le moment d'inertie I_c d'un carré vide homogène, d'épaisseur négligeable, de masse M et de côté l par rapport à un axe perpendiculaire au plan du carré et passant par le centre de masse C .



Le carré est en fait composé de quatre tiges qu'on peut traiter séparément. On pose que le carré est dans un plan (x, y) dont C est l'origine des axes. Calculons le moment d'inertie I_x par rapport à l'axe x (qui est en fait le même que le moment d'inertie par rapport à l'axe y par symétrie). Les tiges placées parallèlement à l'axe x contribuent comme des points matériels puisque la distance à l'axe x est partout la même et les tiges perpendiculaires à l'axe x contribuent en $\frac{1}{12} \frac{M}{4} l^2$ comme montré dans la section [4.2.2]. On somme et on obtient :

$$I_x = 2 \frac{M}{4} \left(\frac{l}{2} \right)^2 + 2 \frac{1}{12} \frac{M}{4} l^2 = \frac{1}{6} Ml^2$$

On peut calculer le moment d'inertie I_c par rapport à l'axe z par le théorème des axes perpendiculaires. On a :

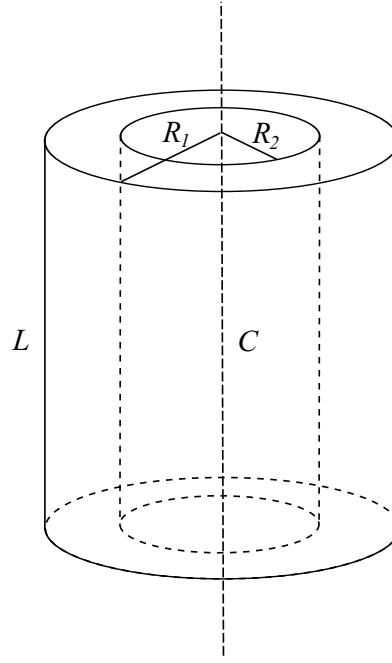
$$I_c = 2I_x = \frac{1}{3} Ml^2$$

Si on veut calculer le moment d'inertie I_0 par rapport à un axe parallèle à z et passant par le sommet du carré O , on a par le théorème des axes parallèles :

$$I_0 = I_c + M \left(\frac{\sqrt{2}l}{2} \right)^2 = Ml^2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) = \frac{5}{6} Ml^2$$

4.2.10 Moment d'inertie d'un tube épais

Calculer le moment d'inertie I_c d'un tube creux homogène, de masse M , de longueur L , de rayon extérieur R_1 et d'épaisseur $R_1 - R_2$ par rapport à l'axe parallèle à la longueur du tube et passant par le centre de masse C du tube.



Par symétrie, on sait que le centre de masse C du tube se trouve en son centre. On sait aussi que la longueur du tube ne jouera pas, donc on se bornera à étudier une section de tube. On peut utiliser deux méthodes. La première consiste à intégrer. On place la section sur un plan (x, y) dont l'origine est placée en C et on a le moment d'inertie :

$$I_c = \int_S d^2 dm$$

Avec d la distance d'un point au centre du tuyau. On identifie l'axe du moment d'inertie à l'axe z . On va passer en coordonnées polaires, sachant que $dm = \rho dx dy$, avec $\rho = \frac{M}{\pi(R_1^2 - R_2^2)}$. On a, sans oublier le jacobien r :

$$\begin{aligned} I_c &= \int_S r^2 \rho dx dy = \int_0^{2\pi} \int_{R_2}^{R_1} \rho r^3 dr d\varphi = 2\pi\rho \left[\frac{r^4}{4} \right]_{R_2}^{R_1} = \frac{1}{2}\rho\pi(R_1^4 - R_2^4) \\ &= \frac{M}{\pi(R_1^2 - R_2^2)} \frac{1}{2}\pi(R_1^4 - R_2^4) = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2) \end{aligned}$$

Cette méthode reste efficace tant que la symétrie est respectée. Mais si, par exemple, le trou dans le cylindre était décentré, on ne pourrait plus appliquer cette méthode. On applique alors un autre raisonnement.

Dans ce système, tout se passe comme si on avait deux cylindres, un plein de rayon R_1 et un vide de rayon R_2 , qui seraient superposés. On va donc faire comme si le cylindre de rayon R_1 apportait une contribution à la masse et au moment d'inertie *positive* et le tuyau de rayon R_2 une contribution *négative*. Notons I_1 le moment d'inertie, M_1 la masse du grand cylindre, et I_2 le moment d'inertie, M_2 la masse du petit cylindre. La différence des masses doit valoir M :

$$M = M_1 - M_2$$

De la même manière, la différence des moments d'inertie doit valoir I_c :

$$I_c = I_1 - I_2$$

Les deux cylindres doivent avoir la même masse surfacique ρ (on travaille bien sûr avec des sections de cylindres) que le vrai tuyau, c'est-à-dire :

$$\rho = \frac{M}{\pi(R_1^2 - R_2^2)}$$

Comme on connaît la masse surfacique et la surface des cylindres, on peut calculer leur masse :

$$\begin{aligned} M_1 &= \rho\pi R_1^2 = \frac{MR_1^2}{R_1^2 - R_2^2} \\ M_2 &= \rho\pi R_2^2 = \frac{MR_2^2}{R_1^2 - R_2^2} \end{aligned}$$

Ce qui vérifie bien $M = M_1 - M_2$. Ensuite, on peut calculer leur moment d'inertie :

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2}M_1R_1^2 = \frac{1}{2}\frac{MR_1^4}{R_1^2 - R_2^2} \\ I_2 &= \frac{1}{2}M_2R_2^2 = \frac{1}{2}\frac{MR_2^4}{R_1^2 - R_2^2} \end{aligned}$$

Finalement :

$$I_c = I_1 - I_2 = \frac{1}{2}M\frac{R_1^4 - R_2^4}{R_1^2 - R_2^2} = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$$

Si le cylindre de rayon R_2 avait été décentré, si par exemple son centre était à une distance a du centre de l'autre cylindre, on aurait utilisé le théorème des axes parallèles et on aurait trouvé un moment I'_2 :

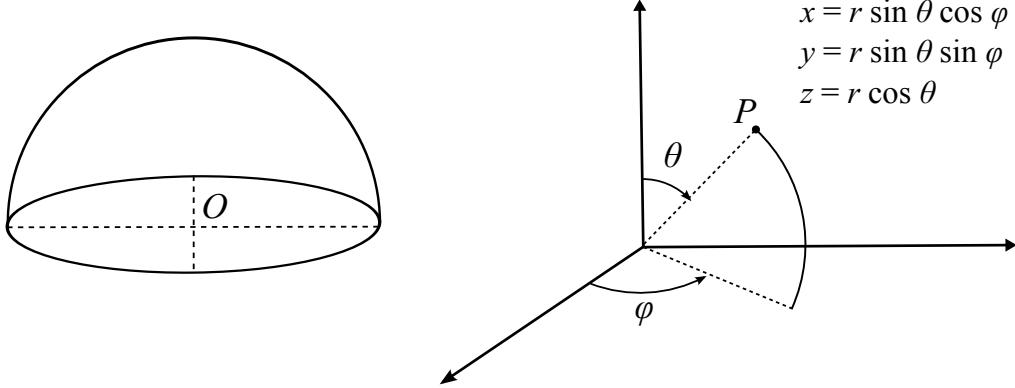
$$I'_2 = I_2 + M_2a^2$$

On aurait alors eu comme moment d'inertie I_c :

$$\begin{aligned} I_c &= I_1 - I'_2 = I_1 - I_2 - M_2a^2 \\ &= \frac{1}{2}\frac{MR_1^4}{R_1^2 - R_2^2} - \frac{1}{2}\frac{MR_2^4}{R_1^2 - R_2^2} - \left(\frac{MR_2^2}{R_1^2 - R_2^2}\right)a^2 \\ &= \frac{M}{2(R_1^2 - R_2^2)}(R_1^4 - R_2^4 - 2a^2R_2^2) \end{aligned}$$

4.3 Calcul d'un centre de masse

Calculer le centre de masse d'une demi-sphère pleine de masse M et de rayon R .



En prenant 0 au « centre » de la sphère, nous avons :

$$\begin{aligned}\vec{OC} &= x_C \vec{e}_x + y_C \vec{e}_y + z_C \vec{e}_z \\ &= \frac{1}{M} \int_V \vec{OC} \rho dV = \frac{1}{M} \int_0^R \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} (x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z) \rho r^2 \sin \theta d\varphi d\theta dr\end{aligned}$$

avec $dm = \rho dV$, où ρ est la masse volumique d'une demi-sphère : $\rho = \frac{M}{2/3\pi R^3}$.

$$\begin{aligned}x_C &= \vec{OC} \cdot \vec{e}_x = \frac{1}{M} \int_0^R \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} x \rho r^2 \sin \theta d\varphi d\theta dr \\ &= \frac{1}{M} \rho \int_0^R \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} (r \sin \theta \cos \varphi) r^2 \sin \theta d\varphi d\theta dr \\ &= \frac{1}{M} \rho \int_0^R r^3 dr \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_C &= \vec{OC} \cdot \vec{e}_y = \frac{1}{M} \int_0^R \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} y \rho r^2 \sin \theta d\varphi d\theta dr \\ &= \frac{1}{M} \rho \int_0^R \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} (r \sin \theta \sin \varphi) r^2 \sin \theta d\varphi d\theta dr \\ &= \frac{1}{M} \rho \int_0^R r^3 dr \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z_C &= \vec{OC} \cdot \vec{e}_z = \frac{1}{M} \int_0^R \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} z \rho r^2 \sin \theta d\varphi d\theta dr \\ &= \frac{1}{M} \rho \int_0^R \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} (r \cos \theta) r^2 \sin \theta d\varphi d\theta dr \\ &= \frac{1}{M} \rho \int_0^R r^3 dr \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= \frac{1}{M} \rho \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R \left[\frac{\sin^2 \theta}{2} \right]_0^{\pi/2} [\varphi]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{M} \rho \frac{R^4}{4} \frac{1}{2} 2\pi = \frac{1}{M} \frac{M}{2/3\pi R^3} \frac{R^4}{4} \frac{1}{2} 2\pi \\ &= \frac{3R}{8}\end{aligned}$$

avec $\int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = 0$ et $\int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi = 0$.

Le centre de masse est donc $(0, 0, \frac{3R}{8})$. Vu la symétrie du problème, il n'est pas étonnant que $x_C = 0$ et $y_C = 0$.

Chapitre 5

Mécanique du Solide

5.1 Rappels théoriques

5.1.1 Lois de conservation pour les systèmes de points matériels

L'impulsion (ou quantité de mouvement), théorème du centre de masse :

$$\vec{p} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} = m \vec{v}_C \quad (5.1)$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}_C}{dt} = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha}^{ext} \quad (5.2)$$

Moment cinétique par rapport à un point O :

$$\vec{L}_O = \sum_{\alpha} \left(O \vec{P}_{\alpha} \wedge m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} \right) \quad (5.3)$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_{\alpha} \left(O \vec{P}_{\alpha} \wedge \vec{F}_{\alpha}^{ext} \right) = \sum_{\alpha} \vec{M}_{O,\alpha}^{ext} = \vec{M}_O^{ext} \quad (5.4)$$

La première égalité de l'équation (5.4) n'est valable que si le point O est fixe par rapport au système de référence dans lequel sont évalués la dérivée temporelle et le moment cinétique.

Moment cinétique par rapport au centre de masse $C^{\text{[1]}}$ du système :

$$\vec{L}_C = \sum_{\alpha} \left(C \vec{P}_{\alpha} \wedge m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} \right) \quad (5.5)$$

$$\frac{d\vec{L}_C}{dt} = \sum_{\alpha} \left(C \vec{P}_{\alpha} \wedge \vec{F}_{\alpha}^{ext} \right) = \sum_{\alpha} \vec{M}_{C,\alpha}^{ext} = \vec{M}_C^{ext} \quad (5.6)$$

Energie cinétique :

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} v_{\alpha}^2 \quad (5.7)$$

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha}^{ext} \cdot \vec{v}_{\alpha} + \underbrace{\sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha}^{int} \cdot \vec{v}_{\alpha}}_{= 0 \text{ si le système étudié est un solide}} \quad (5.8)$$

1. C n'est pas un point fixe en général.

5.1.2 Lois de conservation pour les systèmes de points matériels dans S^*

Dans le système du centre de masse S^* , le moment cinétique \vec{L}_O^* par rapport à un point O est défini par l'expression (5.9) et est indépendant du point O par rapport auquel on le calcule.

$$\vec{L}_O^* = \sum_{\alpha} \left(\vec{OP}_{\alpha} \wedge m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}^* \right) = \vec{L}_{O'}^* = \vec{L}^* \text{ car } \vec{p}^* = 0 \quad (5.9)$$

1^{er} théorème de Koenig. Relation entre les moments cinétiques dans S et S^* , respectivement \vec{L}_O et \vec{L}^* .

$$\vec{L}_O = \vec{OC} \wedge m \vec{v}_C + \vec{L}^* \quad (5.10)$$

$$\vec{L}_C = \vec{L}^* \quad (5.11)$$

On peut déduire la loi de conservation de \vec{L}^* :

$$\frac{d\vec{L}^*}{dt} = \sum_{\alpha} \left(\vec{CP}_{\alpha} \wedge \vec{F}_{\alpha}^{ext} \right) = \sum_{\alpha} \vec{M}_{C,\alpha}^{ext} = \vec{M}_C^{ext} \quad (5.12)$$

2^{ème} théorème de Koenig. Relation entre les énergies cinétiques dans S et S^* , respectivement T et T^* .

$$T = \frac{1}{2} m v_C^2 + T^* \text{ avec } T^* = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} v_{\alpha}^{*2} \quad (5.13)$$

On peut déduire la loi de conservation de T^* :

$$\frac{dT^*}{dt} = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha}^{ext} \cdot \vec{v}_{\alpha}^* + \underbrace{\sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha}^{int} \cdot \vec{v}_{\alpha}^*}_{= 0 \text{ si le système étudié est un solide}} \quad (5.14)$$

5.1.3 Dynamique des solides en mouvement plan

Dynamique du solide plan à point fixe

- Définition des systèmes de référence (figure 5.1) :

$S(0, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$	Système de référence absolu (par rapport auquel on étudie le mouvement)
$S'(0, \vec{e}'_x, \vec{e}'_y, \vec{e}'_z)$ $\vec{\omega}_{S'/S} = \dot{\varphi} \vec{e}$	Système de référence attaché au solide \vec{e} s'obtient en tire-bouchonnant selon φ

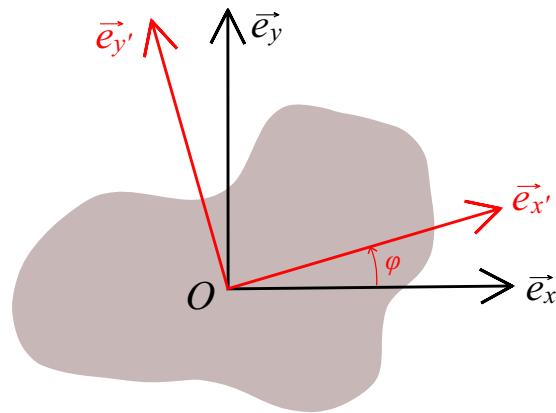


FIGURE 5.1 – Solide plan avec un point 0 fixe

- Système à 1 degré de liberté : $\varphi \rightarrow$ une seule équation nécessaire : conservation de \vec{L} ou T .

$$\begin{aligned} \text{Conservation de } L_{\Delta} \quad & L_{\Delta} = \vec{L}_O \cdot \vec{e}_{\Delta} = I_{\Delta} \dot{\varphi} \\ & \frac{dL_{\Delta}}{dt} = I_{\Delta} \ddot{\varphi} = \sum_{\alpha} (\vec{O} \vec{P}_{\alpha} \wedge \vec{F}_{\alpha}^{ext}) \cdot \vec{e}_{\Delta} = M_{\Delta}^{ext} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Conservation de } T \quad & T = \frac{1}{2} I_{\Delta} \dot{\varphi}^2 \\ & \frac{dT}{dt} = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha}^{ext} \cdot \vec{v}_{\alpha} \end{aligned}$$

Dynamique générale du solide plan

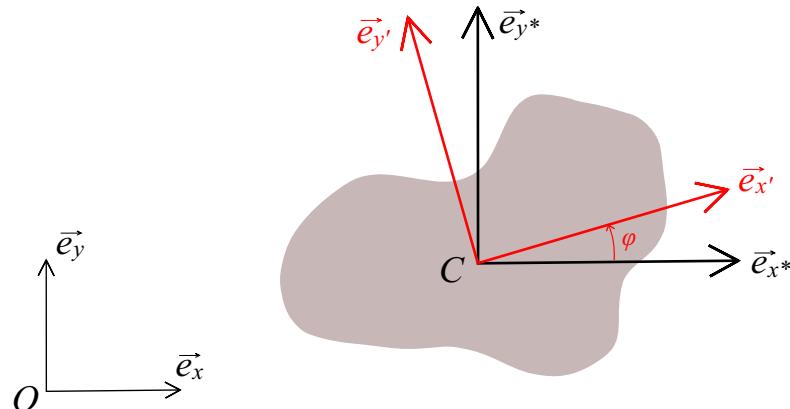


FIGURE 5.2 – Solide plan sans point fixe

— Définition des systèmes de référence (figure 5.2) :

$S(0, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ Système de référence absolu

$S^*(C, \vec{e}_{x^*}, \vec{e}_{y^*}, \vec{e}_{z^*})$ Système de référence du centre de masse

$S'(C, \vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_{z'})$ Système de référence attaché au solide

$\vec{\omega}_{S^*/S} = 0$ (translation)

$\vec{\omega}_{S'/S} = \dot{\varphi} \vec{e}$ \vec{e} s'obtient en tire-bouchonnant selon φ

— Système à 3 degrés de liberté : x_C , y_C et φ \rightarrow trois équations nécessaires : théorème du centre de masse (qui fournit 2 équations qui permettent de calculer l'évolution de x_C et y_C) et conservation de \vec{L}^* ou T .

$$\text{Théorème du centre de masse} \quad m \frac{d\vec{v}_C}{dt} = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha}^{ext}$$

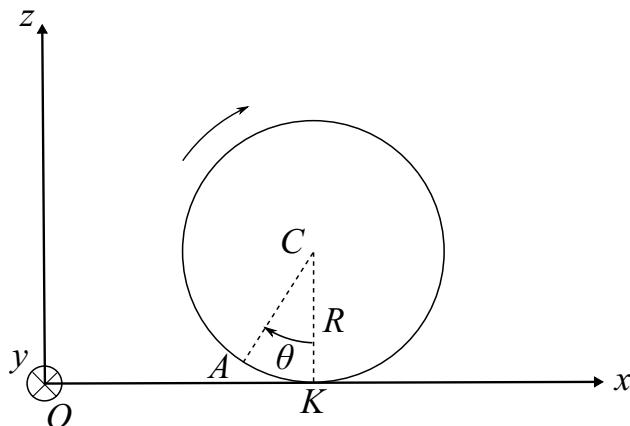
$$\begin{aligned} \text{Conservation de } L^* & \quad L^* = \vec{L}^* \cdot \vec{e} = \vec{L}_C^* \cdot \vec{e} = I_C \dot{\varphi} \\ & \quad \frac{d(\vec{L}^* \cdot \vec{e})}{dt} = I_C \ddot{\varphi} = \frac{d(\vec{L}^*)}{dt} \vec{e} = \sum_{\alpha} (C \vec{P}_{\alpha} \wedge \vec{F}_{\alpha}^{ext}) \cdot \vec{e} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Conservation de } T & \quad T = \frac{1}{2} m v_C^2 + T^* = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \dot{\varphi}^2 \\ & \quad \frac{dT}{dt} = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha}^{ext} \cdot \vec{v}_{\alpha} \end{aligned}$$

5.2 Mouvements d'un disque roulant

5.2.1 Mouvement plan d'un disque

Un disque plein, homogène, ayant une masse M et de rayon R roule en mouvement plan sur une surface horizontale. Déterminer ses équations de mouvement à partir de la conservation de la quantité de mouvement \vec{p} , de la conservation du moment cinétique \vec{L}_0 et de la conservation de l'énergie cinétique T si le disque peut glisser sans frottement sur le sol, si le mouvement est un roulement sans glissement et si le disque glisse avec une force de frottement visqueux entre celui-ci et le sol.



En l'absence de liaison, il s'agit d'un système à 3 degrés de liberté (mouvement plan) : x_C , z_C et θ . Cependant, $z_C = R$ car le disque est astreint à se mouvoir sur un plan horizontal. Par conséquent, il reste 2 degrés de liberté au maximum (voir suite - cas 2) et seules 2 équations seront nécessaires : le théorème du centre de masse (qui fournit l'équation permettant de calculer l'évolution de x_C) et la conservation de \vec{L}^* ou T .

1. On définit le système de référence absolu $S(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, le système de référence lié au centre de masse $S^*(C, \vec{e}_{x^*}, \vec{e}_{y^*}, \vec{e}_{z^*})$ et le système de référence lié au disque $S'(C, \vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_{z'})$. Les vecteurs de Poisson sont : $\vec{\omega}_{S^*\div S} = 0$ (translation), $\vec{\omega}_{S'\div S^*} = \dot{\theta} \vec{e}_y$ et donc $\vec{\omega}_{S'\div S} = \vec{\omega}_{S'\div S^*} + \vec{\omega}_{S^*\div S} = \dot{\theta} \vec{e}_y$ (avec θ l'angle entre le rayon CK et le rayon AC , A étant un point fixe de la circonférence).
2. Les forces extérieures \vec{F} s'appliquant sur le disque sont :
 - la force de pesanteur totale $M \vec{g}$, appliquée en C ,
 - la force de liaison du sol $\vec{N} = N \vec{e}_z$, appliquée en K (point de contact du disque avec le sol),
 - et la force de frottement $\vec{F}_f = -F_f \vec{e}_x$ du sol sur le disque, appliquée en K .
3. Théorème du centre de masse.

Commençons par calculer les vecteurs position \vec{r}_C , vitesse \vec{v}_C et accélération $\vec{\gamma}_C$ dans le système de référence absolu S .

$$\begin{aligned}\vec{r}_C &= x_C \vec{e}_x + R \vec{e}_z \\ \vec{v}_C &= \dot{x}_C \vec{e}_x \\ \vec{\gamma}_C &= \ddot{x}_C \vec{e}_x\end{aligned}$$

Appliquons le théorème du centre de masse :

$$\begin{aligned} M \frac{d\vec{v}_C}{dt} &= \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha}^{ext} = -Mg \vec{e}_z + N \vec{e}_z - F_f \vec{e}_x \\ \cdot \vec{e}_x &: M \ddot{x}_C = -F_f \\ \cdot \vec{e}_y &: 0 = 0 \\ \cdot \vec{e}_z &: 0 = -Mg + N \end{aligned}$$

Comme $z_C = R$, le théorème du centre de masse ne fournit que deux informations : l'expression de la force de liaison $N = Mg$ et la position x_C :

$$\ddot{x}_C = -\frac{F_f}{M} \quad (5.15)$$

4. Conservation de \vec{L}^* ou de T (au choix) :

— Conservation du moment cinétique \vec{L}_C par rapport au centre de masse :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} L_C &= \frac{d}{dt} \vec{L}_C \cdot \vec{e}_y = I_C \ddot{\theta} = (-\vec{C}\vec{C} \wedge Mg \vec{e}_z + \vec{C}\vec{K} \wedge N \vec{e}_z - \vec{C}\vec{K} \wedge F_f \vec{e}_x) \cdot \vec{e}_y \\ &= RF_f \end{aligned}$$

avec $\vec{C}\vec{K} = -R \vec{e}_z$. On a donc :

$$\ddot{\theta} = \frac{RF_f}{I_C} \quad (5.16)$$

— Conservation de l'énergie cinétique T :

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} M \dot{x}_C^2 + \frac{1}{2} I_C \dot{\theta}^2 \\ \frac{dT}{dt} &= M \dot{x}_C \ddot{x}_C + I_C \dot{\theta} \ddot{\theta} = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha}^{ext} \cdot \vec{v}_{\alpha} \\ &= -Mg \vec{e}_z \cdot \vec{v}_C + N \vec{e}_z \cdot \vec{v}_K - F_f \vec{e}_x \cdot \vec{v}_K \end{aligned}$$

Calculons la vitesse du point K en utilisant la formule de composition des vitesses d'un solide :

$$\vec{v}_K = \vec{v}_C + \vec{\omega}_{S' \div S} \wedge \vec{C}\vec{K} = \dot{x}_C \vec{e}_x + \dot{\theta} \vec{e}_y \wedge (-R \vec{e}_z) = (\dot{x}_C - R\dot{\theta}) \vec{e}_x \quad (5.17)$$

Finalement :

$$M \dot{x}_C \ddot{x}_C + I_C \dot{\theta} \ddot{\theta} = -F_f (\dot{x}_C - R\dot{\theta}) \quad (5.18)$$

On peut vérifier cette équation à l'aide des équations obtenues par application du théorème du centre de masse et par la conservation du moment cinétique \vec{L}_C par rapport au centre de masse, mais elle ne contient pas de nouvelle information. En effet, nous avons trois équations pour seulement deux degrés de liberté au maximum.

Cas 1 : glissement sans frottement

La force de frottement \vec{F}_f est nulle et les équations (5.15) et (5.16) prennent la forme suivante :

$$\begin{cases} \ddot{x}_C = 0 \\ \ddot{\theta} = 0 \end{cases}$$

Il s'agit d'un mouvement rectiligne uniforme du centre de masse et d'une rotation uniforme du disque. Les deux mouvements sont indépendants.

Cas 2 : roulement sans glissement

Si le mouvement est un roulement sans glissement, la force de frottement est une force de liaison (frottement statique) et on doit imposer au point K d'adopter la même vitesse que celle du sol, c'est-à-dire zéro. Au vu de l'équation (5.17), cela revient à imposer que :

$$\dot{x}_C = R\dot{\theta}$$

Un déplacement horizontal détermine donc un angle de rotation précis, et inversément. Il n'y a donc plus qu'un seul degré de liberté. On a, en repartant de l'équation (5.16) :

$$\ddot{\theta} = \frac{RF_f}{I_C} = \frac{\ddot{x}_C}{R}$$

Et donc :

$$\ddot{x}_C = \frac{R^2 F_f}{I_C}$$

En combinant cette équation avec (5.15), on déduit $F_f = 0$. La force de frottement statique est donc nulle et il en résulte

$$\begin{cases} \ddot{x}_C = 0 \\ \ddot{\theta} = 0 \end{cases}$$

La translation et la rotation sont donc uniformes comme dans le cas 1 mais la situation est néanmoins fort différente car ici les deux mouvement sont strictement couplés l'un à l'autre, avec $\dot{x}_C = R\dot{\theta}$ et $x_C = R\theta + \text{constante}$.

Cas 3 : glissement avec frottement visqueux

La force de frottement visqueux s'exprime comme suit :

$$\vec{F}_f = -F_f \vec{e}_x = -kv_K \vec{e}_x = -k(\dot{x}_C - R\dot{\theta}) \vec{e}_x$$

En remplaçant cette expression dans les équations (5.15) et (5.16), on trouve :

$$\ddot{x}_C = -\frac{k}{M}\dot{x}_C + \frac{kR}{M}\dot{\theta} \quad (5.19)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{kR}{I_C}\dot{x}_C - \frac{kR^2}{I_C}\dot{\theta} \quad (5.20)$$

En combinant (5.19) et (5.20) [$\frac{R}{I_C}(5.19) + \frac{1}{M}(5.20)$], on déduit :

$$\ddot{x}_C = -\frac{I_C}{RM}\ddot{\theta} \quad (5.21)$$

Ainsi, à une accélération du centre de masse correspond une décélération de la rotation, et inversement. Cet effet de compensation se poursuit jusqu'à annulation

des deux accélérations, ce qui correspond évidemment à l'annulation de la force de frottement et au fait que \dot{x}_C devient égal à $R\dot{\theta}$.

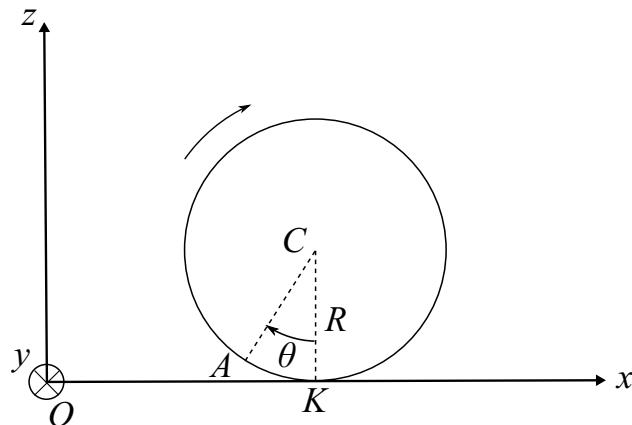
On peut ensuite intégrer (5.21) et obtenir :

$$x_C + \frac{I_C}{MR}\theta = at + b$$

Ce résultat peut ensuite être introduit dans (5.19)-(5.20) et on peut en déduire $\theta(t)$ et $x_C(t)$ (le faire comme exercice).

5.2.2 La boule de bowling

Soit une boule homogène de masse M et de rayon R en mouvement sur un plan horizontal. A l'instant $t = 0$, la boule est lancée avec une vitesse $\vec{v}_c(0) = v_0\vec{e}_x$ et une vitesse angulaire $\omega(0) = 0$. Le coefficient de frottement sec est μ . Calculer le temps t_f nécessaire pour que la boule soit en mouvement de RSG (roulement sans glissement) ainsi que la vitesse $v_c(t_f)$ et la vitesse angulaire $\dot{\theta}(t_f)$ à cet instant. L'énergie est-elle conservée pour $t > t_f$? Expliquer.



Le théorème du centre de masse nous dit que :

$$M\vec{\gamma}_c = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha}^{ext} = M\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_F$$

avec

$$\vec{F}_F = -\mu\|\vec{N}\| \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

L'équation précédente se réécrit donc :

$$M\ddot{x}_c\vec{e}_x = -Mg\vec{e}_z + N\vec{e}_z - \mu N\vec{e}_x$$

On projette sur les trois axes :

$$\begin{cases} (\vec{e}_x) : M\ddot{x}_c = -\mu N \\ (\vec{e}_z) : 0 = -Mg + N \\ (\vec{e}_y) : 0 = 0 \end{cases}$$

On en déduit donc que

$$\ddot{x}_c = -\mu g \quad (5.22)$$

On applique la conservation du moment cinétique par rapport au point C :

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_c = \sum_{\alpha} \overrightarrow{CP}_{\alpha} \wedge \vec{F}_{\alpha}^{ext}$$

et on déduit que

$$I_c \ddot{\theta} \vec{e}_y = \underbrace{\overrightarrow{CC} \wedge (-Mg \vec{e}_z)}_{=0} + \underbrace{\overrightarrow{CK} \wedge (N \vec{e}_z)}_{=0} + \overrightarrow{CK} \wedge (-F_F \vec{e}_x)$$

En projetant sur l'axe \vec{e}_y , on obtient :

$$\begin{aligned} I_c \ddot{\theta} &= R F_F = R \mu N = \mu R M g \\ \Leftrightarrow \frac{2}{5} M R^2 \ddot{\theta} &= \mu R M g \\ \Leftrightarrow \ddot{\theta} &= \frac{5 \mu g}{2R} \end{aligned} \quad (5.23)$$

Calcul de t_f : il y aura RSG lorsque $v_c(t_f) = R \dot{\theta}(t_f)$. Les équations (5.22) et (5.23) donnent directement, pour $t \in [t_0, t_f]$:

$$\begin{cases} \ddot{x}_c = -\mu g \\ \ddot{\theta} = \frac{5 \mu g}{2R} \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} \dot{x}_c = -\mu g t + v_0 & \text{car } \dot{x}_c(0) = v_0 \\ \dot{\theta} = \frac{5 \mu g}{2R} t & \text{car } \dot{\theta}(0) = 0 \end{cases}$$

On a donc

$$\begin{aligned} -\mu g t_f + v_0 &= R \frac{5 \mu g}{2R} t_f \\ \Rightarrow t_f &= \frac{2v_0}{7\mu g} \end{aligned}$$

Et on obtient finalement que

$$v_c(t_f) = \frac{5}{7} v_0$$

et

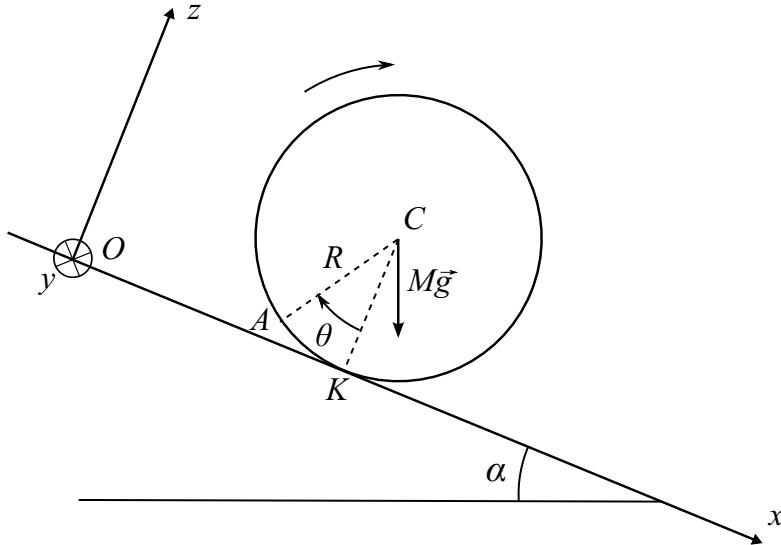
$$\dot{\theta}(t_f) = \frac{5v_0}{7R}$$

A-t-on conservation de l'énergie pour $t > t_f$?

On est exactement dans le cas de l'exercice précédent. En effet, on avait montré que $\vec{F}_F = \vec{0}$ et que les forces \vec{N} et $M\vec{g}$ ne travaillent pas donc l'énergie est conservée.

5.2.3 Mouvement plan d'un disque sur un plan incliné

Un disque de masse M et de rayon R roule en mouvement plan sur une surface inclinée d'un angle α avec l'horizontale. Déterminer ses équations de mouvement à partir de la conservation de l'énergie cinétique T si le mouvement est un roulement sans glissement.



Il s'agit d'un système à 3 degrés de liberté (mouvement plan) : x_C , z_C et θ . Cependant, $z_C = R$ car le disque est astreint à se mouvoir sur un plan incliné. Par conséquent, il reste 2 degrés de liberté et seules 2 équations seront nécessaires : le théorème du centre de masse (qui fournit l'équation permettant de calculer l'évolution de x_C) et la conservation de T (comme demandé dans l'énoncé).

1. On définit le système de référence absolu $S(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, le système de référence lié au centre de masse $S^*(C, \vec{e}_{x^*}, \vec{e}_{y^*}, \vec{e}_{z^*})$ et le système de référence lié au disque $S'(C, \vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_{z'})$. Les vecteurs de Poisson sont : $\vec{\omega}_{S^*\div S} = 0$ (translation), $\vec{\omega}_{S'\div S^*} = \dot{\theta} \vec{e}_y$ et donc $\vec{\omega}_{S'\div S} = \vec{\omega}_{S'\div S^*} + \vec{\omega}_{S^*\div S} = \dot{\theta} \vec{e}_y$ (avec θ l'angle entre le rayon CK et le rayon AC , A étant un point fixe de la circonférence).
2. Les forces extérieures \vec{F} s'appliquant sur le disque sont :
 - la force de pesanteur totale $M\vec{g}$, appliquée en C ,
 - la force de liaison du sol $\vec{N} = N\vec{e}_z$, appliquée en K (point de contact du disque avec le sol),
 - et la force de frottement $\vec{F}_f = -F_f\vec{e}_x$ du sol sur le disque, appliquée en K .
3. Condition de roulement sans glissement : on doit imposer au point K d'adopter la même vitesse que celle du sol, c'est-à-dire zéro. La vitesse du point K se calcule en utilisant la formule de composition des vitesses d'un solide :

$$\vec{v}_K = \vec{v}_C + \vec{\omega}_{S'\div S} \wedge \vec{CK} = \dot{x}_C \vec{e}_x + \dot{\theta} \vec{e}_y \wedge (-R \vec{e}_z) = (\dot{x}_C - R\dot{\theta})\vec{e}_x$$

Et par conséquent :

$$\dot{x}_C = R\dot{\theta}$$

La position en x du centre de masse, x_C , et l'angle θ sont liés et il ne reste donc qu'un degré de liberté (x_C ou θ) et une seule équation suffit.

4. Conservation de l'énergie cinétique T :

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}Mv_C^2 + \frac{1}{2}I_C\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_C\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}(MR^2 + I_C)\dot{\theta}^2 \\ \frac{dT}{dt} &= (MR^2 + I_C)\dot{\theta}\ddot{\theta} = \sum_{\alpha} F_{\alpha}^{\text{ext}} \cdot \vec{v}_{\alpha} \\ &= Mg(-\cos \alpha \vec{e}_z + \sin \alpha \vec{e}_x) \cdot \vec{v}_C + N \vec{e}_z \cdot \vec{v}_K \\ &= Mg\dot{x}_C \sin \alpha = MgR\dot{\theta} \sin \alpha \end{aligned}$$

avec $\vec{r}_C = x_C \vec{e}_x$ et $\vec{v}_C = \dot{x}_C \vec{e}_x$.

Finalement :

$$\ddot{x}_C = R\ddot{\theta} = \frac{MgR^2 \sin \alpha}{I_C + MR^2} = \frac{g \sin \alpha}{1 + \frac{I_C}{MR^2}}$$

Si on pose comme conditions initiales une vitesse et une position nulles, on résout pour x_C et on a :

$$x_C = \frac{1}{2} \frac{g \sin \alpha}{(1 + \frac{I_C}{MR^2})} t^2$$

— Si le disque est un cerceau, le moment d'inertie I_C vaut $I_C = MR^2$ et on a :

$$x_C = \frac{1}{4}g \sin \alpha t^2$$

— Si le disque est plein, le moment d'inertie I_C vaut $I_C = \frac{1}{2}MR^2$ et on a :

$$x_C = \frac{1}{3}g \sin \alpha t^2$$

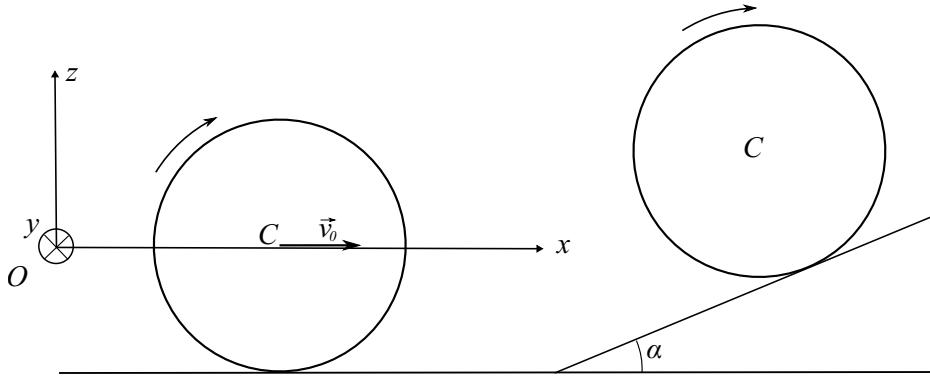
— Si le disque se rapproche d'un point matériel, le moment d'inertie I_C tend vers zéro et on a à la limite :

$$x_C = \frac{1}{2}g \sin \alpha t^2$$

Donc, plus le disque a une configuration proche d'un point matériel, plus il accélère.

5.2.4 Mouvement plan d'un disque qui rencontre un plan incliné

Un disque de masse M et de rayon R roule en mouvement plan sur une surface horizontale avec une vitesse \vec{v}_0 et rencontre un plan incliné d'un angle α avec l'horizontale. Calculer la hauteur maximale z_M que le disque va atteindre si le mouvement est un roulement sans glissement dans le cas d'un disque plein et celui d'un disque creux (cerceau).



Il s'agit d'un système à 3 degrés de liberté (mouvement plan) : x_C , z_C et θ . Notons que $z_C = R$ initialement car le disque est astreint à se mouvoir sur un plan horizontal.

1. On définit le système de référence absolu $S(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, le système de référence lié au centre de masse $S^*(C, \vec{e}_{x^*}, \vec{e}_{y^*}, \vec{e}_{z^*})$ et le système de référence lié au disque $S'(C, \vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_{z'})$. Les vecteurs de Poisson sont : $\vec{\omega}_{S^*\div S} = 0$ (translation), $\vec{\omega}_{S'\div S^*} = \dot{\theta} \vec{e}_y$ et donc $\vec{\omega}_{S'\div S} = \vec{\omega}_{S'\div S^*} + \vec{\omega}_{S^*\div S} = \dot{\theta} \vec{e}_y$ (avec θ l'angle entre le rayon CK et le rayon AC , A étant un point fixe de la circonférence).
2. Les forces extérieures \vec{F} s'appliquant sur le disque sont :
 - la force de pesanteur totale $M \vec{g}$, appliquée en C ,
 - la force de liaison du sol $\vec{N} = N \vec{e}_z$, appliquée en K (point de contact du disque avec le sol),
 - et la force de frottement statique $\vec{F}_f = -F_f \vec{e}_x$ du sol sur le disque, appliquée en K .
3. Condition de roulement sans glissement : on doit imposer au point K d'adopter la même vitesse que celle du sol, c'est-à-dire zéro. La vitesse du point K se calcule en utilisant la formule de composition des vitesses d'un solide :

$$\vec{v}_K = \vec{v}_C + \vec{\omega}_{S'\div S} \wedge \vec{CK} = \dot{x}_C \vec{e}_x + \dot{\theta} \vec{e}_y \wedge (-R \vec{e}_z) = (\dot{x}_C - R\dot{\theta}) \vec{e}_x$$

Et par conséquent :

$$\dot{x}_C = R\dot{\theta}$$

La position en x du centre de masse, x_C , et l'angle θ sont liés.

4. Conservation de l'énergie totale.

Pour calculer facilement z_M , on va utiliser la loi de la conservation de l'énergie totale E du système. En effet, on sait que :

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}(T + V) = 0$$

avec T l'énergie cinétique du système et V l'énergie potentielle. L'énergie cinétique s'écrit :

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}_C^2 + \frac{1}{2}I_C\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}M\dot{x}_C^2 \left(1 + \frac{I_C}{MR^2}\right)$$

L'énergie potentielle de la force de pesanteur s'écrit :

$$V = Mgz_C$$

avec z_C la coordonnée z de C . On a donc une valeur pour l'énergie mécanique E totale qui reste constante et qui vaut :

$$E = \frac{1}{2}M\dot{x}_C^2 \left(1 + \frac{I_C}{MR^2}\right) + Mgz_C$$

On remarque que tant que z_C ne change pas, \dot{x}_C est constant. Si on regarde la valeur de l'énergie sur la surface horizontale, aux conditions initiales $z_C = 0$ et $\dot{x}_C = v_0$, on a :

$$E = \frac{1}{2}Mv_0^2 \left(1 + \frac{I_C}{MR^2}\right)$$

A l'instant où la hauteur du disque est maximale, la vitesse doit s'annuler et on calcule :

$$E = Mgz_M$$

On égale les deux expressions pour E et on obtient :

$$z_M = \frac{v_0^2}{2g} \left(1 + \frac{I_C}{MR^2}\right)$$

— Si le disque est un cerceau, le moment d'inertie I_C vaut $I_C = MR^2$ et on a :

$$z_M = \frac{v_0^2}{g}$$

— Si le disque est plein, le moment d'inertie vaut $I_C = \frac{1}{2}MR^2$ et on a :

$$z_M = \frac{3}{4} \frac{v_0^2}{g}$$

Plus le moment d'inertie est important, plus le disque ira haut.

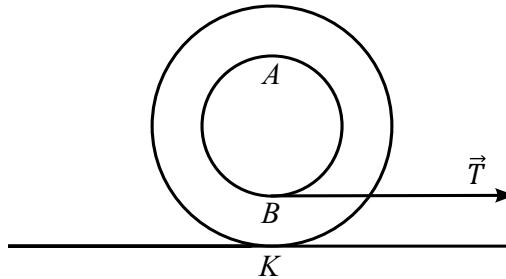
5.2.5 La bobine

Une bobine de fil, initialement au repos, roule sans glisser sur un plan horizontal (voir Figures ci-après). Le fil, supposé de masse négligeable, est enroulé autour du cylindre intérieur de la bobine et ne peut glisser par rapport à celui-ci. La bobine a une masse M , un rayon extérieur égal à R et une longueur égale à L dans la direction perpendiculaire au plan du schéma. Le cylindre intérieur est de rayon r ($r < R$).

On tire sur le fil parallèlement au plan avec une force \vec{T} . On envisage tout d'abord la situation pour laquelle la partie déroulée du fil est tangente au cylindre intérieur

en le point B (première Figure ci-après). Ensuite, on considère que le fil déroulé est tangent au cylindre intérieur en le point A (deuxième Figure ci-après).

En envisageant une description 2-D du système, montrer que dans les deux cas, la bobine va se déplacer dans le sens de la force. Déterminer également l'intensité des forces de liaison et de frottement au niveau du point de contact K entre la bobine et le plan horizontal.



Le système étudié est constitué de la bobine et du fil. On désignera par x_C et z_C les coordonnées du centre de la bobine et un angle θ , mesuré dans le sens trigonométrique, est introduit pour repérer l'orientation de la bobine autour de C . Étant donné le roulement sans glissement de la bobine sur le sol et l'absence de glissement entre le fil et le cylindre intérieur, il est clair qu'il s'agit d'un système à un seul degré de liberté.

On définit le système de référence absolu $S(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ (avec \vec{e}_x directement parallèle à la force \vec{T} et \vec{e}_y qui sort du plan du dessin), le système de référence lié au centre de masse $S^*(C, \vec{e}_{x^*}, \vec{e}_{y^*}, \vec{e}_{z^*})$ et le système de référence lié à la bobine $S'(C, \vec{e}'_x, \vec{e}'_y, \vec{e}'_z)$. Les vecteurs de Poisson sont : $\vec{\omega}_{S^*\div S} = 0$ (translation), $\vec{\omega}_{S'\div S^*} = \dot{\theta} \vec{e}_y$ et donc $\vec{\omega}_{S'\div S} = \vec{\omega}_{S'\div S^*} + \vec{\omega}_{S^*\div S} = \dot{\theta} \vec{e}_y$ (avec θ l'angle entre le rayon CK et le rayon DC , D étant un point fixe de la circonférence).

Les forces *extérieures* s'appliquant sur le système bobine + fil sont :

- la force de pesanteur totale $M \vec{g}$, appliquée en C ,
- la force de réaction du sol $\vec{N} = N \vec{e}_z$, appliquée en K (point de contact du disque avec le sol),
- la tension exercée sur le fil $\vec{T} = T \vec{e}_x$ (avec $T > 0$), appliquée à l'extrémité du fil,
- et la force de frottement $\vec{F}_f = F_f \vec{e}_x$ du sol sur le disque, appliquée en K (le sens de cette force n'est pas connu : $F_f > 0$ ou $F_f < 0$).

Vu la condition de roulement sans glissement, on doit imposer au point K d'adopter la même vitesse que celle du sol, c'est-à-dire zéro. La vitesse du point K se calcule en utilisant la formule de composition des vitesses d'un solide :

$$\vec{v}_K = \vec{v}_C + \vec{\omega}_{S'\div S} \wedge \vec{CK} = \dot{x}_C \vec{e}_x + \dot{\theta} \vec{e}_y \wedge (-R \vec{e}_z) = (\dot{x}_C - R\dot{\theta}) \vec{e}_x$$

Et par conséquent :

$$\dot{x}_C = R\dot{\theta}, \quad (5.24)$$

ce qui fournit la relation entre la position en x du centre de masse, x_C , et l'angle θ .

Pour analyser la première situation pour laquelle on tire "par le bas" (fil tangent en B), on envisagera les points suivants.

1. Théorème du centre de masse.

Commençons par calculer les vecteurs position \vec{r}_C , vitesse \vec{v}_C et accélération $\vec{\gamma}_C$ dans le système de référence absolu S .

$$\begin{aligned}\vec{r}_C &= x_C \vec{e}_x + R \vec{e}_z \\ \vec{v}_C &= \dot{x}_C \vec{e}_x \\ \vec{\gamma}_C &= \ddot{x}_C \vec{e}_x\end{aligned}$$

Appliquons le théorème du centre de masse :

$$\begin{aligned}M \frac{d\vec{v}_C}{dt} &= \sum_{\alpha} F_{\alpha}^{\vec{ext}} = -Mg \vec{e}_z + N \vec{e}_z + T \vec{e}_x + F_f \vec{e}_x \\ .\vec{e}_x &: M \ddot{x}_C = T + F_f \\ .\vec{e}_y &: 0 = 0 \\ .\vec{e}_z &: 0 = -Mg + N\end{aligned}$$

Comme le mouvement est plan, le théorème du centre de masse ne fournit que deux informations importantes : l'expression de la force de liaison et l'équation d'évolution de la position x_C , qui dépend de la force de frottement, inconnue à ce stade :

$$N = mg \quad (5.25)$$

$$F_f = M \ddot{x}_C - T \quad (5.26)$$

2. Conservation du moment cinétique \vec{L}^* :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \vec{L}^* &= I_C \ddot{\theta} \vec{e}_y = -\vec{C} \vec{C} \wedge Mg \vec{e}_z + \vec{C} \vec{K} \wedge N \vec{e}_z + \vec{C} \vec{B} \wedge T \vec{e}_x + \vec{C} \vec{K} \wedge F_f \vec{e}_x \\ &= -rT \vec{e}_y - RF_f \vec{e}_y\end{aligned}$$

avec $\vec{C} \vec{K} = -R \vec{e}_z$ et $\vec{C} \vec{B} = -r \vec{e}_z$. On a donc :

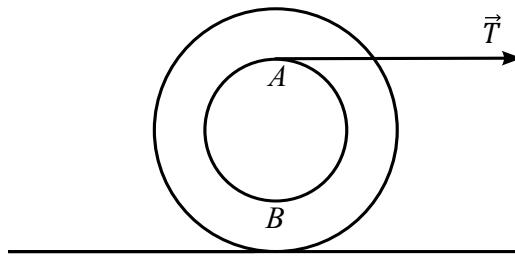
$$\ddot{\theta} = \frac{-rT - RF_f}{I_C} \quad (5.27)$$

3. Sens du mouvement ?

En combinant les expressions (5.24), (5.26) et (5.27), on obtient :

$$\begin{aligned}I_C \frac{\ddot{x}_C}{R} &= -RM \ddot{x}_C + (R - r)T \\ \left(\frac{I_C}{R} + RM \right) \ddot{x}_C &= (R - r)T \\ \ddot{x}_C &= \frac{1 - r^*}{1 + I^*} \frac{T}{M} \quad (5.28)\end{aligned}$$

avec $r^* = r/R$ et $I^* = I_C/(MR^2)$. Étant donné que $T > 0$ et $r^* < 1$, on a $\ddot{x}_C > 0$ et la bobine part vers la droite, avec le fil qui s'enroule autour de la bobine (la longueur de la partie horizontale diminue).



Si on tire “par le haut” (fil tangent en A), seule l’équation de conservation du moment cinétique est modifiée :

1. Conservation du moment cinétique \vec{L}^*

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \vec{L}^* &= I_C \ddot{\theta} \vec{e}_y = -\vec{C} \dot{C} \wedge Mg \vec{e}_z + \vec{C} \dot{K} \wedge N \vec{e}_z + \vec{C} \dot{A} \wedge T \vec{e}_x + \vec{C} \dot{K} \wedge F_f \vec{e}_x \\ &= rT \vec{e}_y - RF_f \vec{e}_y\end{aligned}$$

avec $\vec{C} \dot{K} = -R \vec{e}_z$ et $\vec{C} \dot{A} = r \vec{e}_z$.

2. Sens du mouvement ?

On a ici :

$$\ddot{x}_C = \frac{1 + r^*}{1 + I^*} \frac{T}{M} \quad (5.29)$$

On a donc $\ddot{x}_C > 0$ et la bobine part également vers la droite, mais cette fois, le fil se *déroule* de la bobine. On remarquera aussi que pour une même tension exercée sur le fil (\vec{T}), l’accélération est plus grande si on tire par au-dessus (A).

La force de réaction est donnée par (5.25) :

$$\vec{N} = mg \vec{e}_z$$

La force de frottement est déterminée à partir de (5.26) et de (5.28) ou (5.29) selon que l’on tire par le bas ou par le haut. On a d’abord :

$$\vec{F}_f = F_f \vec{e}_x = (M \ddot{x}_C - T) \vec{e}_x = \frac{\mp r^* - I^*}{1 + I^*} T \vec{e}_x$$

On en déduit donc :

- Si on tire par le bas (prendre le signe $-$ du \mp ci-dessus) :

$$F_f < 0$$

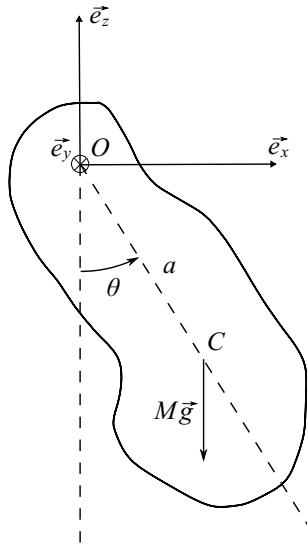
et la force de frottement est opposée à la tension.

- Si on tire par le haut (prendre le signe $+$ du \mp ci-dessus) : le signe de F_f dépend de la valeur de I^* et la force de frottement peut donc être de même sens ou opposée à la tension exercée dans le fil, en fonction de la valeur du moment d’inertie de la bobine.

5.3 Mouvements d'oscillation

5.3.1 Le pendule composé

Soit un corps solide pouvant osciller dans un plan vertical autour d'un axe horizontal fixe passant par O . Soient M sa masse, I_0 son moment d'inertie par rapport à l'axe passant par O et C son centre de masse, à la distance a de O . Calculer ses équations de mouvement et calculer la fréquence des petites oscillations.



Il s'agit d'un système à 1 degré de liberté (mouvement plan avec un point fixe) :
 θ . Par conséquent, une seule équation est nécessaire : la conservation de \vec{L}^* ou T .

1. On définit le système de référence absolu $S(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et le système de référence lié au corps solide $S'(O, \vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_{z'})$. Le vecteur de Poisson est : $\vec{\omega}_{S' \div S} = -\dot{\theta} \vec{e}_y$ (avec θ l'angle entre la verticale et l'axe OC).
2. Les forces extérieures \vec{F} s'appliquant sur le pendule sont :
 - la force de pesanteur totale $M \vec{g}$, appliquée en C ,
 - et la résultante des forces de liaison corps-axe rotation \vec{N} , appliquée en O .
3. Conservation de \vec{L} ou de T (au choix) :
 - Conservation du moment cinétique \vec{L}_O par rapport au centre de masse :

$$\begin{aligned}\vec{L}_O &= -I_O \dot{\theta} \vec{e}_y \\ \frac{d}{dt} \vec{L}_O &= -I_O \ddot{\theta} \vec{e}_y = -\vec{OC} \wedge M \vec{g} \vec{e}_z + \vec{OO} \wedge \vec{N} \\ &= Mga \sin \theta \vec{e}_y\end{aligned}$$

avec $\vec{OC} = a \sin \theta \vec{e}_x - a \cos \theta \vec{e}_z$. On a donc :

$$\ddot{\theta} = \frac{-Mga \sin \theta}{I_O} \quad (5.30)$$

— Conservation de l'énergie cinétique T :

$$T = \frac{1}{2}Mv_C^2 + \frac{1}{2}I_C\dot{\theta}^2$$

avec v_C la vitesse du centre de masse et I_C le moment d'inertie par rapport à l'axe passant par C . Par le théorème des axes parallèles, on a :

$$I_O = I_C + Ma^2$$

Donc :

$$T = \frac{1}{2}Mv_C^2 + \frac{1}{2}I_O\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}M(a\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}I_O\dot{\theta}^2$$

puisque $a\dot{\theta} = v_C$. On dérive ensuite l'expression et on a :

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= I_0\dot{\theta}\ddot{\theta} = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha}^{ext} \cdot \vec{v}_{\alpha} \\ &= M\vec{g} \cdot \vec{v}_C \\ &= -Mg \vec{e}_z \cdot (a\dot{\theta} \cos \theta \vec{e}_x + a\dot{\theta} \sin \theta \vec{e}_z) \\ &= -Mga\dot{\theta} \sin \theta \end{aligned}$$

avec $\vec{r}_C = \vec{OC} = a \sin \theta \vec{e}_x - a \cos \theta \vec{e}_z$. On tire tout de suite une équation identique à celle obtenue avec la conservation du moment cinétique \vec{L}_O , l'équation 5.30 :

$$\ddot{\theta} = -\frac{Mga \sin \theta}{I_O}$$

Dans l'approximation des petits oscillations, on pose que $\sin \theta \simeq \theta$ pour simplifier les équations. L'équation à résoudre devient alors :

$$\ddot{\theta} = -\frac{Mga}{I_0}\theta$$

ce qui est l'équation d'un oscillateur harmonique. La solution générale s'écrit alors :

$$\theta = A \cos \omega' t + B \sin \omega' t$$

avec $\omega' = \sqrt{\frac{Mga}{I_0}}$ et A et B des constantes déterminées par les conditions initiales. On a donc la fréquence recherchée. On notera que pour le pendule simple, la fréquence était :

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

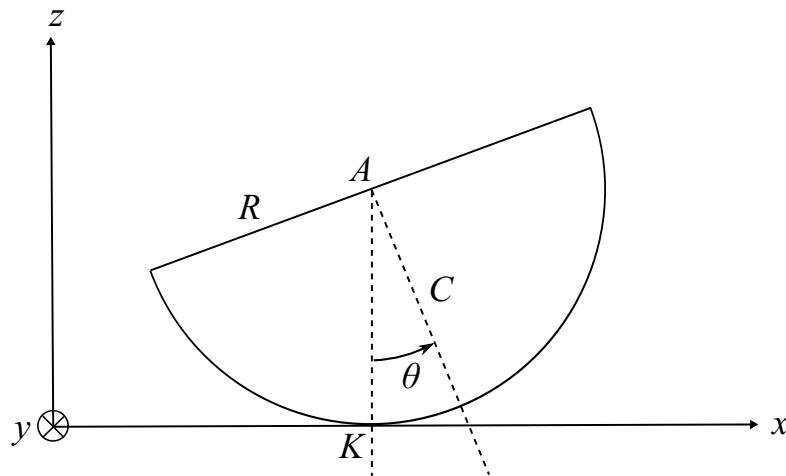
Donc pour obtenir un pendule simple équivalent au pendule composé, on doit jouer sur la longueur l du pendule pour avoir :

$$l = \frac{I_0}{Ma}$$

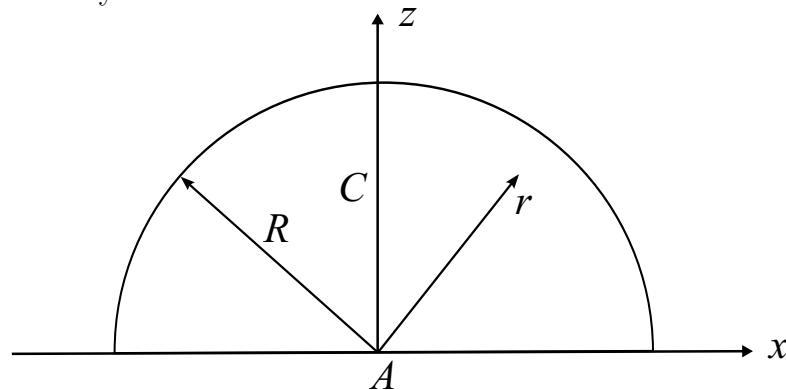
5.3.2 Le demi-cylindre

Soit un demi-cylindre plein, homogène, de masse M , de rayon R et de longueur L . Le demi-cylindre est posé sur une table horizontale sur laquelle il roule sans glisser.

- Déterminer la position du centre de masse C du demi-cylindre par rapport au centre du demi-cylindre A .
- Calculer le moment d'inertie I_A du demi-cylindre par rapport à un axe parallèle à l'axe y et passant par le point A .
- En utilisant les résultats précédents, calculer le moment d'inertie I_C du demi-cylindre par rapport à un axe parallèle à l'axe y et passant par le point C .
- Déterminer l'équation du mouvement du demi-cylindre en utilisant l'équation de conservation de l'énergie cinétique.



- Calcul de la position du centre de masse C du demi-cylindre par rapport au centre du demi-cylindre A .



Pour calculer la position \vec{AC} du centre de masse, on renverse le cylindre et on utilise la définition :

$$\vec{AC} = \frac{1}{M} \int_V \vec{r} dm$$

où $\vec{r} = \vec{AP}$ est le vecteur position du point P par rapport à A . On sait déjà, par raison de symétrie, que le centre de masse doit avoir une composante x_C égale à zéro et une composante y_C égale à $\frac{L}{2}$. On va donc considérer que le demi-cylindre est un demi-disque sans que cela ne pose aucun problème. Il reste donc à calculer la composante z_C . Comme ce demi-disque est homogène, on peut poser :

$$dm = \rho dx dz = \frac{M}{\frac{1}{2}\pi R^2} dx dz$$

où ρ est la masse surfacique.

On travaille en coordonnées polaires (r, φ) , sans oublier le jacobien r , et on a :

$$\begin{aligned} z_C &= \frac{1}{M} \int_S z \rho dx dz = \frac{\rho}{M} \int_0^\pi \int_0^R r^2 \sin \varphi dr d\varphi = \frac{\rho}{M} \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^R [-\cos \varphi]_0^\pi \\ &= \frac{\rho}{M} \frac{2R^3}{3} = \frac{1}{M} \frac{M}{\frac{1}{2}\pi R^2} \frac{2R^3}{3} = \frac{4R}{3\pi} \end{aligned}$$

- Calculer le moment d'inertie I_A du demi-cylindre par rapport à un axe parallèle à l'axe y et passant par le point A .

Avec les mêmes notations qu'avant, on a :

$$I_A = \int_S r^2 dm = \int_S r^2 \rho dx dz$$

On va encore une fois passer en coordonnées polaires et on a :

$$\begin{aligned} I_A &= \int_S r^2 \rho dx dz = \rho \int_0^\pi \int_0^R r^3 dr d\varphi = \rho \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R [\varphi]_0^\pi \\ &= \rho \frac{\pi R^4}{4} = \frac{M}{\frac{1}{2}\pi R^2} \frac{\pi R^4}{4} = \frac{1}{2} MR^2 \end{aligned}$$

- En utilisant les résultats précédents, calculer le moment d'inertie I_C du demi-cylindre par rapport à un axe parallèle à l'axe y et passant par le point C .

Pour calculer I_C , on utilise le théorème des axes parallèles :

$$I_A = I_C + M|AC|^2$$

On a donc :

$$I_C = I_A - M|AC|^2 = \frac{1}{2} MR^2 - M \left(\frac{4R}{3\pi} \right)^2 = MR^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2} \right)$$

- Déterminer l'équation du mouvement du demi-cylindre en utilisant l'équation de conservation de l'énergie cinétique.

1. On définit le système de référence absolu $S(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, le système de référence lié au centre de masse $S^*(C, \vec{e}_{x^*}, \vec{e}_{y^*}, \vec{e}_{z^*})$ et le système de référence lié au disque $S'(C, \vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_{z'})$. Les vecteurs de Poisson sont : $\vec{\omega}_{S^* \div S} = 0$ (translation), $\vec{\omega}_{S' \div S^*} = -\dot{\theta} \vec{e}_y$ et donc $\vec{\omega}_{S' \div S} = \vec{\omega}_{S' \div S^*} + \vec{\omega}_{S^* \div S} = -\dot{\theta} \vec{e}_y$ (avec θ l'angle entre le rayon AK et le rayon AC).

2. Les forces extérieures \vec{F} s'appliquant sur le demi-cylindre sont :
- la force de pesanteur totale $M\vec{g}$, appliquée en C ,
 - la force de réaction du sol $\vec{N} = N\vec{e}_z$, appliquée en K (point de contact du disque avec le sol),
 - et la force de frottement statique $\vec{F}_f = -F_f\vec{e}_x$ du sol sur le disque, appliquée en K .
3. Condition de roulement sans glissement : on doit imposer au point K d'adopter la même vitesse que celle du sol, c'est-à-dire zéro. La vitesse du point K se calcule en utilisant la formule de composition des vitesses d'un solide :

$$\vec{v}_K = \vec{v}_C + \vec{\omega}_{S' \div S} \wedge \vec{CK} = \vec{v}_C - \dot{\theta}\vec{e}_y \wedge \vec{CK} = 0$$

Comme les vecteurs $\vec{\omega}$ et \vec{CK} sont orthogonaux, on prend le module au carré de l'expression et on a :

$$v_C^2 = |KC|^2 \dot{\theta}^2$$

Vu que $\vec{KC} = \vec{KA} + \vec{AC}$, on a :

$$\begin{aligned} |KC|^2 &= |KA|^2 + |AC|^2 - 2|KA||AC|\cos\theta \\ &= R^2 + z_C^2 - 2Rz_C\cos\theta \\ &= R^2 + \left(\frac{4R}{3\pi}\right)^2 - 2R\left(\frac{4R}{3\pi}\right)\cos\theta \\ &= R^2 \left(1 + \frac{16}{9\pi^2} - \frac{8}{3\pi}\cos\theta\right) \end{aligned}$$

Et donc :

$$v_C^2 = R^2 \left(1 + \frac{16}{9\pi^2} - \frac{8}{3\pi}\cos\theta\right) \dot{\theta}^2$$

4. Conservation de l'énergie cinétique T :

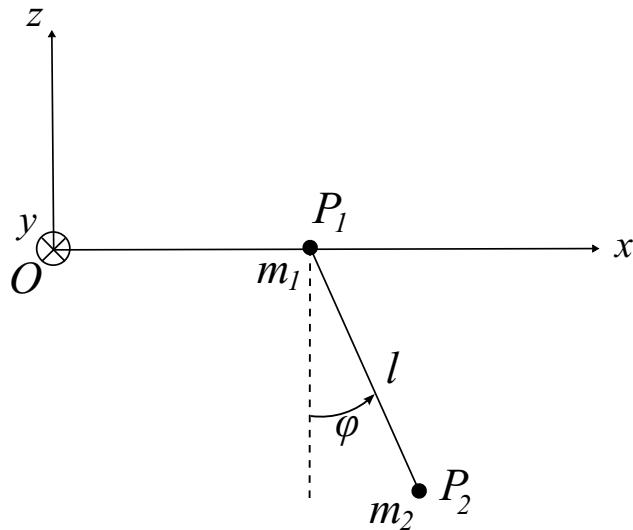
$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}Mv_C^2 + \frac{1}{2}I_C\dot{\theta}^2 \\ &= \frac{1}{2}MR^2 \left(1 + \frac{16}{9\pi^2} - \frac{8}{3\pi}\cos\theta\right) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}MR^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2}\right) \dot{\theta}^2 \\ &= \frac{1}{2}MR^2 \left(\frac{3}{2} - \frac{8}{3\pi}\cos\theta\right) \dot{\theta}^2 \\ \frac{dT}{dt} &= MR^2 \left(\frac{3}{2} - \frac{8}{3\pi}\cos\theta\right) \dot{\theta}\ddot{\theta} + \frac{1}{2}MR^2 \left(\frac{8}{3\pi}\sin\theta\right) \dot{\theta}^3 \\ &= \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha}^{ext} \cdot \vec{v}_{\alpha} = M\vec{g} \cdot \vec{v}_C + \vec{N} \cdot \vec{v}_K + \vec{F}_f \cdot \vec{v}_K = -Mg\dot{z}_C \\ &= -MgR \frac{4}{3\pi} \sin\theta\dot{\theta} \end{aligned}$$

avec $z_C = |AK| - |AC| \cos \theta = R \left(1 - \frac{4}{3\pi} \cos \theta\right)$. On a donc :

$$\begin{aligned} MR^2 \left(\frac{3}{2} - \frac{8}{3\pi} \cos \theta\right) \ddot{\theta} + \frac{1}{2} MR^2 \left(\frac{8}{3\pi} \sin \theta\right) \dot{\theta}^2 &= -MgR \frac{4}{3\pi} \sin \theta \dot{\theta} \\ \left(\frac{3}{2} - \frac{8}{3\pi} \cos \theta\right) \ddot{\theta} + \frac{4}{3\pi} \sin \theta \dot{\theta}^2 &= -\frac{4}{3R\pi} g \sin \theta \\ \ddot{\theta} \left(\frac{3}{2} - \frac{8}{3\pi} \cos \theta\right) + \frac{4}{3\pi} \sin \theta (\dot{\theta}^2 + \frac{g}{R}) &= 0 \end{aligned}$$

5.3.3 Le pendule d'Euler

Deux particules ponctuelles P_1 et P_2 de masse m_1 et m_2 sont liées par une tige de longueur l et de masse négligeable. La particule P_1 se déplace sans frottement sur l'axe horizontal x et la particule P_2 dans le plan vertical (x, z). Calculer les équations de mouvement à l'aide des lois de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique.



Le mouvement des particules va se faire dans le plan (x, z) avec z la verticale. On a deux degrés de liberté, on va donc utiliser x_1 la coordonnée x de P_1 et φ l'angle entre la verticale et P_1P_2 .

1. On définit le système de référence absolu $S(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.
2. Les forces extérieures \vec{F} s'appliquant sur le pendule sont :
 - les forces de pesanteur $m_1 \vec{g}$ et $m_2 \vec{g}$, appliquées en P_1 et P_2 , respectivement,
 - la force de réaction normale $\vec{N} = N \vec{e}_z$, appliquée en P_1 .

Les forces internes, quant à elles, n'interviennent pas car le système des deux particules peut être considéré comme un solide.

3. Conservation de la quantité de mouvement.

Commençons par calculer les quantités dont nous allons avoir besoin :

$$\begin{aligned}
 \vec{r}_1 &= \vec{OP}_1 = x_1 \vec{e}_x \\
 \vec{r}_2 &= \vec{OP}_2 = (x_1 + l \sin \varphi) \vec{e}_x - l \cos \varphi \vec{e}_z \\
 \vec{v}_1 &= \dot{x}_1 \vec{e}_x \\
 \vec{v}_2 &= (\dot{x}_1 + \dot{\varphi} l \cos \varphi) \vec{e}_x + \dot{\varphi} l \sin \varphi \vec{e}_z \\
 \vec{p} &= \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = [(m_1 + m_2) \dot{x}_1 + m_2 l \dot{\varphi} \cos \varphi] \vec{e}_x + m_2 l \dot{\varphi} \sin \varphi \vec{e}_z \\
 T &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 [(\dot{x}_1 + \dot{\varphi} l \cos \varphi)^2 + (\dot{\varphi} l \sin \varphi)^2] \\
 &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\varphi}^2 l^2 + m_2 \dot{x}_1 \dot{\varphi} l \cos \varphi
 \end{aligned}$$

La relation de la conservation de la quantité de mouvement est :

$$\begin{aligned}
 \frac{d\vec{p}}{dt} &= [(m_1 + m_2) \ddot{x}_1 + m_2 l (\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi)] \vec{e}_x + m_2 l (\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) \vec{e}_z \\
 &= \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha, \text{ext}} = m_1 \vec{g} + m_2 \vec{g} + \vec{N} = [N - (m_1 + m_2) g] \vec{e}_z
 \end{aligned}$$

$$\cdot \vec{e}_x : (m_1 + m_2) \ddot{x}_1 + m_2 l (\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) = 0 \quad (5.31)$$

$$\cdot \vec{e}_y : 0 = 0 \quad (5.32)$$

$$\cdot \vec{e}_z : N = (m_1 + m_2) g + m_2 l (\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) \quad (5.33)$$

Après primitivation, l'équation 5.31 se réécrit :

$$(m_1 + m_2) \dot{x}_1 + m_2 l \dot{\varphi} \cos \varphi = C \quad (5.34)$$

avec C une constante déterminée par les conditions initiales.

4. Conservation de T :

$$\begin{aligned}
 \frac{dT}{dt} &= (m_1 + m_2) \dot{x}_1 \ddot{x}_1 + m_2 l^2 \dot{\varphi} \ddot{\varphi} + m_2 l \cos \varphi (\ddot{x}_1 \dot{\varphi} + \dot{x}_1 \ddot{\varphi}) - m_2 l \dot{x}_1 \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \\
 &= \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha, \text{ext}} \cdot \vec{v}_{\alpha} = (m_1 \vec{g} + \vec{N}) \cdot \vec{v}_1 + m_2 \vec{g} \cdot \vec{v}_2 = m_2 \vec{g} \cdot \vec{v}_2 \\
 &= -m_2 g l \dot{\varphi} \sin \varphi
 \end{aligned}$$

Donc :

$$(m_1 + m_2) \dot{x}_1 \ddot{x}_1 + m_2 l^2 \dot{\varphi} \ddot{\varphi} + m_2 l \cos \varphi (\ddot{x}_1 \dot{\varphi} + \dot{x}_1 \ddot{\varphi}) - m_2 l \dot{x}_1 \dot{\varphi}^2 \sin \varphi + m_2 g l \dot{\varphi} \sin \varphi = 0 \quad (5.35)$$

Réécrivons l'équation :

$$\dot{x}_1 [(m_1 + m_2) \ddot{x}_1 + m_2 l (\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi)] + m_2 l \dot{\varphi} [l \ddot{\varphi} + \cos \varphi \ddot{x}_1 + g \sin \varphi] = 0$$

Le premier crochet est identique au membre de gauche de l'équation (5.31) et vaut donc zéro. Finalement on a l'équation simplifiée :

$$\ddot{x}_1 \cos \varphi + l \ddot{\varphi} + g \sin \varphi = 0$$

En utilisant l'équation (5.31), on élimine la variable x_1 pour trouver une équation ne dépendant que de φ :

$$\frac{m_2}{m_1 + m_2} l \cos \varphi (\dot{\varphi}^2 \sin \varphi - \ddot{\varphi} \cos \varphi) + l \ddot{\varphi} + g \sin \varphi = 0$$

5.4 Autres systèmes mécaniques

5.4.1 Les deux cylindres

Un cylindre plein, d'axe horizontal, de rayon r et de masse m , est astreint à rouler sans glissement sur la surface extérieure d'un cylindre fixe de rayon R dont l'axe est également horizontal. On désigne par 0 et C les traces respectives des axes du grand et du petit cylindres dans un plan qui leur est perpendiculaire. On repère la position du cylindre mobile par l'angle θ que fait OC avec la verticale. Ce cylindre est initialement posé au sommet du cylindre fixe ($\theta(0) = 0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$). Le système de référence $S^*(C, \vec{e}_x^*, \vec{e}_y^*, \vec{e}_z^*)$ est en simple translation par rapport au système absolu $S(0, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. L'angle φ permet de paramétriser la rotation du cylindre autour de C par rapport aux axes étoilés tandis que la seconde coordonnée angulaire θ permet de repérer la position de C .

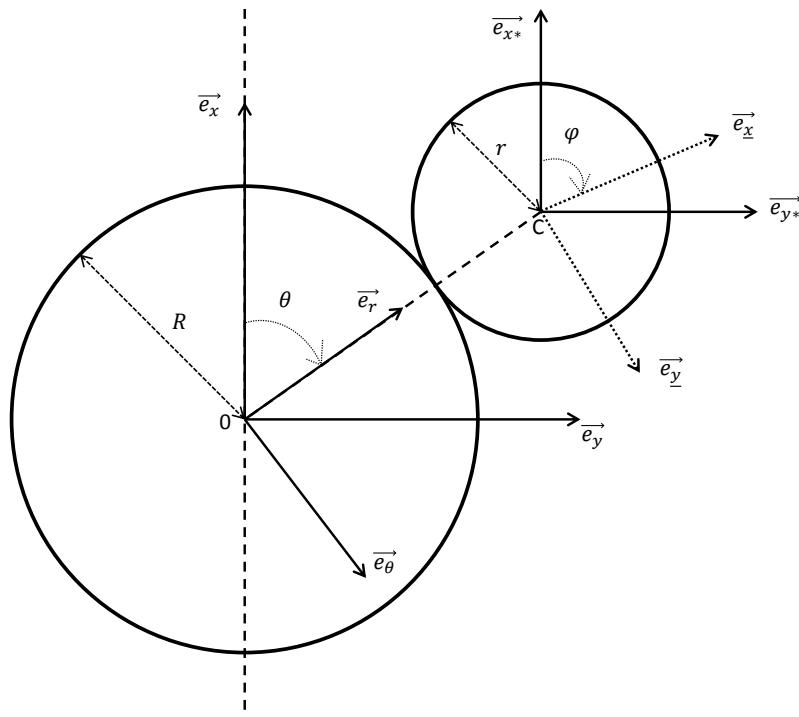


FIGURE 5.3 – Cylindre mobile sur cylindre fixe.

- Montrer que, pendant le roulement (sans glissement) du cylindre mobile, on a :

$$\dot{\varphi} = \frac{R+r}{r}\dot{\theta}$$

où $\dot{\varphi}$ est la vitesse de rotation instantanée du cylindre mobile.

- Donner l'expression de l'angle θ au moment où le cylindre mobile décolle.
— Que devient l'angle de décollage si, au lieu d'un cylindre, on considère une bille de masse m assimilable à un point matériel qui glisse sans frottement le long du cylindre fixe ?

Soit K le point de contact entre les deux cylindres. Puisque le cylindre mobile roule sans glisser, K est la trace de l'axe instantané de rotation et sa vitesse instantanée est nulle. Soit P , un point quelconque du cylindre mobile. On a, par la loi de composition des vitesses :

$$\vec{v}_P = \vec{v}_C + \vec{\omega} \wedge \vec{CP} \quad (5.36)$$

où C est le centre de masse du cylindre mobile et le vecteur de Poisson est donné par $\vec{\omega} = \dot{\varphi}\vec{e}_z$. Commençons par calculer la vitesse du centre de masse :

$$\begin{aligned} \vec{r}_C &= (R+r)\vec{e}_r \\ \vec{v}_C &= (R+r)\dot{\theta}\vec{e}_\theta \end{aligned}$$

L'équation (5.36) devient :

$$\vec{v}_P = (R+r)\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{\varphi}\vec{e}_z \wedge \vec{CK}$$

Si $P = K$ (le centre instantané de rotation), $\vec{v}_K = \vec{0}$ et on a :

$$0 = (R+r)\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{\varphi}\vec{e}_z \wedge \vec{CK}$$

avec $\vec{CK} = -r\vec{e}_r$, ce qui entraîne :

$$0 = (R+r)\dot{\theta}\vec{e}_\theta - r\dot{\varphi}\vec{e}_\theta$$

On obtient alors la relation demandée :

$$\dot{\varphi} = \frac{R+r}{r}\dot{\theta} \quad (5.37)$$

Le cylindre mobile est, a priori, un système à trois degrés de liberté. Cependant, nous venons de montrer que la condition de roulement sans glissement impose une relation entre la vitesse de translation du centre de masse C et la vitesse de rotation $\dot{\varphi}$ du cylindre mobile. D'autre part, il existe également une force de liaison $\vec{N} = N\vec{e}_r$ qui constraint le cylindre mobile dans son mouvement sur le cylindre fixe. Le cylindre mobile décolle lorsque cette liaison devient nulle. Il s'agit donc d'écrire (et de résoudre) les équations de mouvement du cylindre mobile et ensuite d'annuler la force de liaison afin de déterminer l'angle de décollage, θ_d .

Les forces extérieures intervenant dans ce problème sont :

- Pesanteur : $\vec{F}_g = m\vec{g} = -mg\vec{e}_x = -mg \cos \theta \vec{e}_r + mg \sin \theta \vec{e}_\theta$
- Réaction normale : $\vec{N} = N\vec{e}_r$
- Force de frottement : $\vec{F}_f = F_f \vec{e}_\theta$

Commençons par écrire le théorème du centre de masse. L'accélération du centre de masse est donnée par :

$$\vec{\gamma}_C = \frac{d\vec{v}_C}{dt} = (R+r)\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - (R+r)\dot{\theta}^2\vec{e}_r$$

On a donc :

$$\begin{cases} -m(R+r)\dot{\theta}^2 = -mg \cos \theta + N \\ m(R+r)\ddot{\theta} = mg \sin \theta + F_f \end{cases} \quad (5.38)$$

La force de frottement étant également une inconnue du problème, une équation supplémentaire est nécessaire, par exemple la conservation de T :

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}I_C\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}m(R+r)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_C\dot{\varphi}^2 \\ \frac{dT}{dt} &= m(R+r)^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + I_C\dot{\varphi}\ddot{\varphi} = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha}^{ext} \cdot \vec{v}_{\alpha} \\ &= mg(-\cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta) \cdot \vec{v}_C + N \vec{e}_r \cdot \vec{v}_K + F_f \vec{e}_\theta \cdot \vec{v}_K \\ &= -mg(R+r)\dot{\theta} \sin \theta \end{aligned}$$

Vu la relation (5.37) établie précédemment, on a finalement :

$$[m(R+r)^2 + \frac{(R+r)^2}{r^2}I_C]\ddot{\theta} = -mg(R+r)\sin \theta$$

En utilisant $I_C = \frac{1}{2}mr^2$, on simplifie l'équation comme suit :

$$\ddot{\theta} = -\frac{2g}{3(R+r)} \sin \theta$$

En multipliant les deux membres de l'équation par $2\dot{\theta}$, on obtient :

$$\frac{d}{dt}(\dot{\theta}^2) = \frac{d}{dt}\left(-\frac{4g}{3(R+r)} \cos \theta\right)$$

En intégrant par rapport au temps, il vient :

$$\dot{\theta}^2 = -\frac{4g}{3(R+r)} \cos \theta + C$$

Vu les conditions initiales ($\theta(0) = 0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$), on trouve $C = \frac{4g}{3(R+r)}$ et, finalement, l'intégrale première s'écrit :

$$\dot{\theta}^2 = \frac{4g}{3(R+r)}(1 - \cos \theta) \quad (5.39)$$

Insérant (5.39) dans la première équation de (5.38), on trouve l'expression de la force de liaison :

$$\begin{aligned} N &= -\frac{4mg}{3}(1 - \cos \theta) + mg \cos \theta \\ &= \frac{7}{3}mg \cos \theta - \frac{4}{3}mg \end{aligned}$$

Le cylindre mobile décolle lorsque $N = 0$, autrement dit pour un angle de décollage θ_d donné par :

$$\begin{aligned} 0 = \frac{7}{3}mg \cos \theta_d - \frac{4}{3}mg &\iff \cos \theta_d = \frac{4}{7} \\ &\iff \theta_d \approx 55^\circ \end{aligned}$$

Que devient l'angle de décollage pour un point matériel de masse m qui glisse sans frottement sur le cylindre fixe ?

Dans ce cas, les équations de Newton selon \vec{e}_r et \vec{e}_θ s'écrivent :

$$\begin{cases} -mR\dot{\theta}^2 = -mg \cos \theta + N \\ mR\ddot{\theta} = mg \sin \theta \end{cases} \quad (5.40)$$

Et la conservation de l'énergie donne :

$$\frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + mgR \cos \theta = mgR \quad (5.41)$$

En combinant (5.40) et (5.41), on trouve :

$$\begin{aligned} N &= -mR\dot{\theta}^2 + mg \cos \theta \\ &= -2mg(1 - \cos \theta) + mg \cos \theta \\ &= -2mg + 3mg \cos \theta \end{aligned}$$

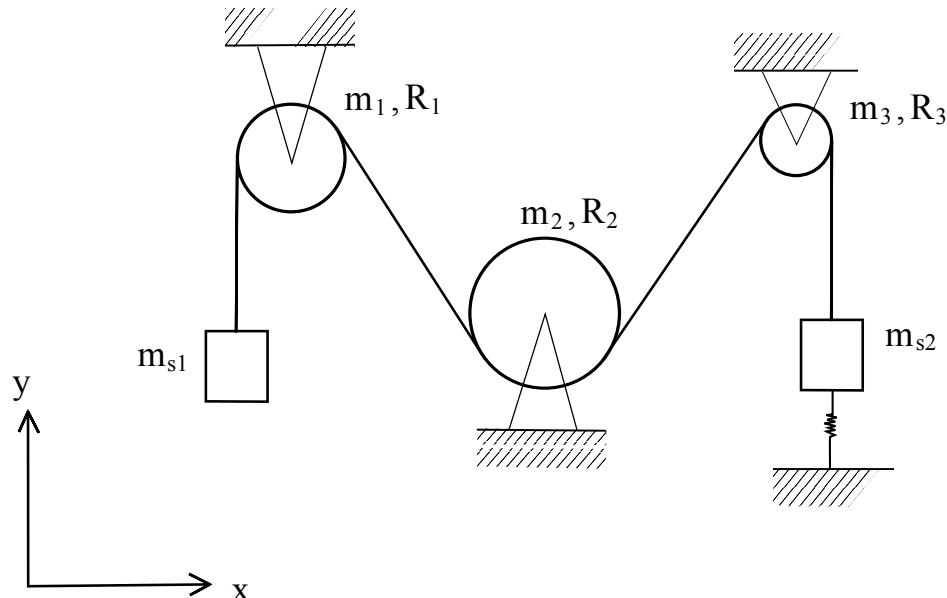
La condition de décollage $N = 0$ fournit θ_d pour un point matériel :

$$\cos \theta_d = \frac{2}{3} \iff \theta_d \approx 48^\circ$$

5.4.2 Les poulies et les masses

On considère un système formé de deux masses m_{s1} et m_{s2} reliées entre elles par une corde inextensible de masse négligeable et un système de trois poulies de masses m_1 , m_2 , et m_3 et de rayons R_1 , R_2 , R_3 (voir schéma). La deuxième masse m_{s2} est soumise à une force de rappel $\vec{F} = -k(y_2 - y_0)\vec{e}_y$ où y_2 désigne l'ordonnée du centre de masse de m_{s2} et y_0 est une constante. On néglige les frottements de l'air et les frottements au niveau des axes des poulies. On suppose aussi que la corde ne glisse pas sur les poulies.

1. Exprimer la vitesse \dot{y}_1 de la masse m_{s1} ainsi que les vitesses de rotation des trois poulies en fonction de la vitesse \dot{y}_2 de la masse m_{s2} .
2. Montrer que l'énergie cinétique du système s'écrit $T = \frac{1}{2}M_T \dot{y}_2^2$ avec $M_T = m_{s1} + m_{s2} + \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + m_3)$. Suggestion : le moment d'inertie de la poulie j vaut $\frac{1}{2}m_j R_j^2$.
3. Ecrire l'équation du mouvement de l'énergie cinétique T et en déduire l'équation d'évolution de m_2 .



Le système matériel étudié se compose de deux masses, une corde et trois poulies. On va utiliser les coordonnées cartésiennes (voir figure). On a la composition de mouvements plans de cinq solides donc on a au plus $5 \times 3 = 15$ degrés de liberté (il est clair que le mouvement de la corde est complètement asservi aux mouvements des masses et poulies, et il n'y a donc aucun degré de liberté supplémentaire à associer à cette partie du système).

1. Liaisons (NB. tous les angles θ_i sont comptés dans le sens trigonométrique) :
 - masse m_{s1} , mouvement vertical uniquement (2 liaisons), variable y_1 ;
 - poulie 1, fixée au plafond (2 liaisons) et $\dot{y}_1 = -R_1 \dot{\theta}_1$ (une liaison) ;
 - poulie 2, fixée au plancher (2 liaisons) et $R_2 \dot{\theta}_2 = -R_1 \dot{\theta}_1$ (une liaison) ;
 - poulie 3, fixée au plafond (2 liaisons) et $R_3 \dot{\theta}_3 = -R_2 \dot{\theta}_2$ (une liaison) ;
 - masse m_{s2} , mouvement vertical uniquement (2 liaisons) et $\dot{y}_2 = R_3 \dot{\theta}_3$ (une liaison).

Au total, on a 14 liaisons et donc $15 - 14 = 1$ degré de liberté. On choisit la variable indépendante y_2 . Les relations de liaison peuvent donc s'écrire :

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= -\dot{y}_2 \\ R_3 \dot{\theta}_3 &= \dot{y}_2 \\ R_2 \dot{\theta}_2 &= -\dot{y}_2 \\ R_1 \dot{\theta}_1 &= \dot{y}_2\end{aligned}$$

2. L'énergie cinétique T s'écrit :

$$T = \frac{1}{2} m_{s1} \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} I_3 \dot{\theta}_3^2 + \frac{1}{2} m_{s2} \dot{y}_2^2$$

avec I_j le moment d'inertie de la poulie j qui vaut $I_j = \frac{1}{2}m_jR_j^2$. On a donc :

$$T = \frac{1}{2} m_{s1} \dot{y}_1^2 + \frac{1}{4}(m_1 R_1^2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 R_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_3 R_3^2 \dot{\theta}_3^2) + \frac{1}{2} m_{s2} \dot{y}_2^2$$

En utilisant les liaisons établies au point 1, on obtient :

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \left(m_{s1} + \frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{2} + \frac{m_3}{2} + m_{s2} \right) \dot{y}_2^2 \\ \Rightarrow T &= \frac{M_T}{2} \dot{y}_2^2 \end{aligned}$$

avec $M_T = m_{s1} + m_{s2} + \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + m_3)$.

3. L'équation de l'énergie cinétique T s'écrit :

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\text{ext}} \cdot \vec{v}_{\alpha} + \sum_{\alpha} \vec{F}_{\text{int}} \cdot \vec{v}_{\alpha}$$

Les forces externes sont :

- les forces de pesanteur sur les masses et les poulies, appliquées aux centres de masse de chacun des solides : $-m_{s1}g \vec{e}_y$, $-m_{s2}g \vec{e}_y$, $-m_1g \vec{e}_y$, $-m_2g \vec{e}_y$ et $-m_3g \vec{e}_y$;
- la force de rappel sur la deuxième masse : $\vec{F}_R = -k(y_2 - y_0) \vec{e}_y$, appliquée au centre de masse de m_{s2} ;
- les forces de liaison au niveau des paliers de suspension des axes des poulies.

On a donc :

$$\sum_{\alpha} \vec{F}_{\text{ext}} \cdot \vec{v}_{\alpha} = -m_{s1}g \dot{y}_1 - m_{s2}g \dot{y}_2 - k(y_2 - y_0) \dot{y}_2$$

étant donné que les vitesses des centres de masse des poulies sont nulles et que les forces de liaison au niveau des paliers ne travaillent pas (*cf.* cours théorique).

Même si le système matériel complet n'est pas un solide, les forces internes sont de puissance nulle (on s'en persuade par un raisonnement semblable à celui fait dans le cours théorique lors de l'étude de la machine d'Atwood) et on a :

$$\sum_{\alpha} \vec{F}_{\text{int}} \cdot \vec{v}_{\alpha} = 0$$

On a donc finalement :

$$\frac{dT}{dt} = M_T \ddot{y}_2 \dot{y}_2 = -m_{s1} g \dot{y}_1 - m_{s2} g \dot{y}_2 - k(y_2 - y_0) \dot{y}_2$$

En utilisant la relation entre \dot{y}_1 et \dot{y}_2 , l'équation du mouvement s'écrit alors :

$$\begin{aligned} M_T \ddot{y}_2 &= m_{s1} g - m_{s2} g - k(y_2 - y_0) \\ M_T \ddot{y}_2 + k y_2 &= m_{s1} g - m_{s2} g + k y_0 \\ \ddot{y}_2 + \omega^2 y_2 &= \omega^2 \kappa \end{aligned}$$

avec $\omega^2 = k/M_T$ et $\kappa = (m_{s1} g - m_{s2} g + k y_0)/k$. La solution est une oscillation harmonique de fréquence ω :

$$y_2 = A \sin \omega t + B \cos \omega t + \kappa$$

Soit, en utilisant des conditions initiales :

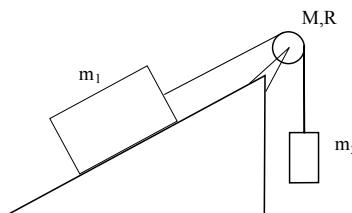
$$y_2 = (y_2(0) - \kappa) \cos \omega t + \kappa + \frac{\dot{y}_2(0)}{\omega} \sin \omega t$$

5.5 Exercices proposés

- Un cylindre d'axe horizontal, plein et homogène, de masse m et de rayon r , roule sans glissement à l'intérieur d'un cylindre fixe de rayon $R > r$ dont l'axe est également horizontal. On désigne par O et C les traces respectives des axes du grand et du petit cylindre dans un plan qui leur est perpendiculaire. On repère la position du cylindre mobile par l'angle θ que fait OC avec la verticale. Déterminer la vitesse de rotation instantanée $\dot{\varphi}$ du cylindre mobile en fonction de R , r et $\dot{\theta}$. Ensuite, en considérant ce système soumis à une force de pesanteur, écrire l'équation du mouvement du cylindre mobile. Ecrire la relation entre l'angle de décrochage θ_D et la vitesse initiale $\dot{\theta}_0$ avec laquelle on lance le cylindre mobile en $\theta = 0$.

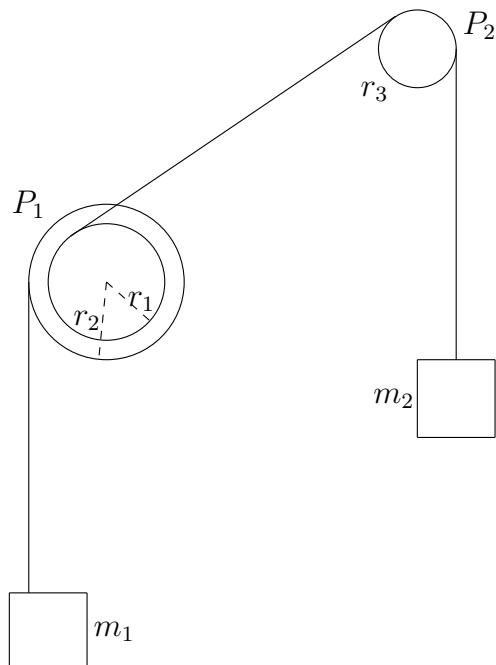
$$(R : a) \dot{\varphi} = \frac{r-R}{r} \dot{\theta} \quad b) \dot{\theta}_0^2 = \frac{4gR}{3(R-r)^2} - \frac{7g}{3(R-r)} \cos \theta_D$$

- Etant donné le système représenté sur le schéma, sans glissement ni frottement au niveau de la poulie mais bien au niveau du plan incliné (frottement proportionnel à la vitesse), étudier le mouvement du système si la vitesse initiale est nulle.



$$(R : x_1(t) = (m_2 - m_1 \sin \alpha) \frac{g}{k} [t + \frac{M_T}{k} (\exp(-k t / M_T) - 1)])$$

3. Deux masses sont reliées par un système de poulies représenté sur le schéma. Les poulies de masse M_1 et M_2 tournent sans frottement et sans glissement de corde autour d'un axe fixe. La grosse poulie P_1 est faite de deux disques collés de rayons r_1 et r_2 , dont le moment d'inertie est pris égal à celui d'un disque de rayon r_2 .
- Exprimer les relations existant entre les vitesses des différents éléments du système (masses et poulies).
 - Etudier le mouvement sur base de l'équation de T .
 - Calculer les tensions dans les différents morceaux de corde.



(R : a) $\dot{\theta}r_2 = \dot{y}_1$; $\dot{\varphi}r_2r_3 = r_1\dot{y}_1$; $r_2\dot{y}_2 = -r_1\dot{y}_1$ avec les angles θ et φ comptés dans le sens horloger. b) $y_1(t) = \frac{g}{2M_T}(m_2\frac{r_1}{r_2} - m_1)t^2 + \dot{y}_{1,0}t + y_{1,0}$. c) $T_1 = m_1g(1 + \frac{1}{M_T}(m_2\frac{r_1}{r_2} - m_1))$ et $T_2 = m_2g(1 - \frac{r_1}{r_2M_T}(m_2\frac{r_1}{r_2} - m_1))$)

4. Trouver les équations de mouvement et la fréquence d'oscillation aux petits angles d'un pendule formé d'un carré plein de côté l et de masse M suspendu par l'un de ses coins. Calculer le moment d'inertie I_0 par rapport à l'axe de rotation et la longueur L que devrait avoir un pendule simple pour osciller à la même fréquence.

$$(R : \ddot{\theta} + \frac{lMg}{\sqrt{2}I_0}\theta = 0, I_0 = \frac{2}{3}Ml^2, L = \frac{2\sqrt{2}}{3}l)$$