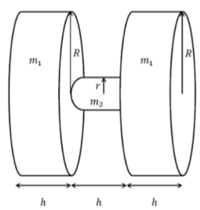
Examen janvier 2022

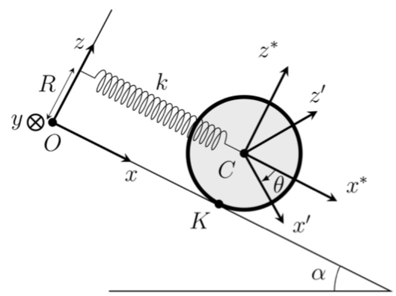
Question 1.

Question 1

Une bobine supposée homogène et de masse M est constituée de trois cylindres pleins concentriques d'épaisseur h. Les cylindres externes sont de rayon R et de masse m_1 et le cylindre central est de rayon r (avec $r < R$) et de masse m_2 (voir figure (a)). Cette bobine roule sans glisser sur un plan incliné d'un angle α. Elle est attachée en son centre de masse C à un ressort de longueur au repos $l_0 > 0$, de constante de raideur k et dont l'autre extrémité est attachée à un point fixe par rapport au plan incliné et situé à une distance R de celui-ci (voir figure (b)). Lorsque la bobine roule sur le plan incliné, le ressort ne s'enroule pas autour. Par symétrie, le centre de masse C se trouve au centre du système de cylindres. Ce solide subit son propre poids (on note l'accélération de la pesanteur $\vec{g}$) ainsi qu'une force de frottement statique $\vec{F_f} = F_f\vec{e_x}$ au point de contact K.
Le but est d'étudier le mouvement plan de cette bobine au cours du temps.



(a) La bobine.



(b) Vue de profil de la bobine posée sur le plan incliné et attachée au ressort.

On définit les trois systèmes de référence suivants :

- $S(O, \vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$ le système de référence absolu.
- $S^*(C, \vec{e_{x^*}}, \vec{e_{y^*}}, \vec{e_{z^*}})$ le système de référence du centre de masse de la bobine.
- $S'(C, \vec{e_{x'}}, \vec{e_{y'}}, \vec{e_{z'}})$ le système de référence attaché à la bobine.

1. Calculez la masse M en fonction de h, R, r et ρ, la masse volumique (uniforme dans la bobine).
2. Calculez le moment d'inertie d'un cylindre plein de hauteur h, de masse volumique ρ et de rayon r par rapport à l'axe de rotation. Montrez alors que le moment d'inertie I_C de la bobine est donné par

$$I_C = \frac{1}{2}M\frac{2R^4 + r^4}{2R^2 + r^2}.$$

1)

- R : rayon grand cylindre $\longrightarrow m_1$
- r : rayon petit cylindre $\longrightarrow m_2$
- h : hauteur des cylindres

Or, $\rho = \dfrac{M}{\pi h \cdot (2R^2 + r^2)}$ identique pour m_1 et m_2. $(\rho_1 = \rho_2 = \rho)$

Ainsi $M = \rho \pi h \cdot (2R^2 + r^2)$

2)

$M = 2M_1 + M_2$

• $M_1 = \rho \pi R^2 h = \dfrac{M R^2}{2R^2+r^2}$

• $M_2 = \rho \pi r^2 h = \dfrac{M r^2}{2R^2+r^2}$

Donc, pour un cylindre plein de rayon r et hauteur h :

$$I_c = \int r'^2 \, dm = \int_V \rho r'^2 \, dV \quad \text{avec } \rho = \frac{M}{\pi r^2 h}.$$

$$= \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^r r \rho r'^2 \, dr' \, d\varphi \, dh$$

$$= 2\pi h \cdot \frac{r^4}{4} \cdot \rho$$

$$= 2\cancel{\pi}\cancel{h} \cdot \frac{r^4}{4} \cdot \frac{M}{\cancel{\pi} r^2 \cancel{h}} = \frac{1}{2} M r^2$$

Ainsi

$$I_1 = \frac{1}{2} M_1 R^2 = \frac{1}{2} \frac{M R^4}{2R^2+r^2}$$

$$I_2 = \frac{1}{2} M_2 r^2 = \frac{1}{2} \frac{M r^4}{2R^2+r^2}$$

Pour un solide composé comme la bobine, on trouve :

$$I_c = 2 I_1 + I_2 = \frac{M R^4}{2R^2+r^2} + \frac{1}{2} \frac{M r^4}{2R^2+r^2}$$

$$= \frac{1}{2} M \cdot \left(\frac{2R^4 + r^4}{2R^2+r^2} \right)$$

3. Déterminez les liaisons et le nombre de degrés de liberté du système. Exprimez la condition de roulement sans glissement en termes des paramètres introduits.

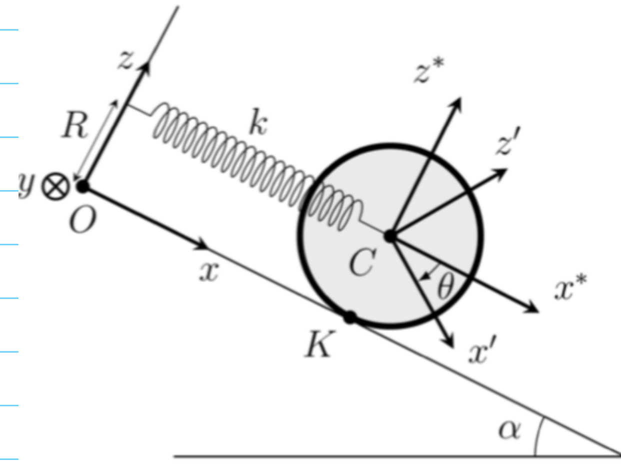
4. Faites le bilan des forces. A partir du théorème du centre de masse, déduisez une équation différentielle d'évolution de la position du centre de masse C de la bobine.

5. En utilisant la loi d'évolution du moment cinétique, établissez l'expression de $\vec{F}_f$ en fonction de I_C, R et $\ddot{x}_C$ (x_C est la composante suivant x de la position du centre de masse)

6. En utilisant l'expression obtenue au point précédent, résolvez l'équation différentielle d'évolution de la position du centre de masse obtenue au point 4. (conditions initiales: $\dot{x}_C(0) = 0$ et $x_C(0) = \frac{4}{3}l_0$).

7. Calculez la solution obtenue au point précédent dans le cas limite $I_C \to 0$. Que représente cette solution ? Répondez en trois lignes maximum.

8. Discutez brièvement de la variante du problème dans laquelle le plan incliné serait parfaitement lisse. Dans cette situation, le solide glisse sans frottement sur le plan. Que devient l'équation différentielle décrivant le mouvement du centre de masse du système ainsi que celle décrivant la rotation de la bobine ? Le nombre de degrés de liberté a-t-il changé ? Si oui, de combien ? Quel rôle jouaient les forces de frottement dans la situation précédente (roulement sans glissement) qu'elles ne jouent plus dans la situation présente (glissement sans frottement) ? Répondez en dix lignes maximum.



3) • Force de liaison du sol : $\vec{N} = N\vec{e}_z$

• Une restriction : $z_C = R$ $\rightarrow$ 3 ddl $- 1 = 2$ ddl

On exprimera le mvt du système avec x_C et θ.

Vecteurs de Poisson

$\vec{\omega}_{S^*/S} = \vec{0}$ (transl.)

$\vec{\omega}_{S'/S^*} = \dot{\theta}\,\vec{e}_y$

• Condition de roulement sans glissement :

La vitesse du pt K doit être égale à celle du sol

$\rightarrow$ Champ de vitesse du solide : $\vec{v}_K = \vec{v}_C + \vec{\omega}_{S'/S} \wedge \underbrace{\overrightarrow{CK}}_{-R\vec{e}_z} = \vec{0}$

$\Rightarrow (\dot{x}_C - R\dot{\theta})\vec{e}_x = 0$

$\Leftrightarrow \dot{x}_C = R\dot{\theta}$

4) Bilan des forces

• Poids : $\vec{P} = mg\sin(\alpha)\,\vec{e}_x - mg\cos(\alpha)\,\vec{e}_z$ appliquée en C

• Force de liaison : $\vec{N} = N\,\vec{e}_z$ appliquée en K

• Force de frott : $\vec{F_f} = -F_f\cdot\vec{e}_x$ appliquée en K

• Rappel du ressort : $\vec{F_r} = -k\,(x_C - l_0)\,\vec{e}_x$ appliquée en C.

$\hookrightarrow$ l_0 = longueur au repos.

Théorème du C.M : $m a_c = \sum_\alpha \vec{F}_\alpha$.

$$\begin{cases} \vec{e}_x : & m\ddot{x}_c = mg \sin(\alpha) - F_f - k(x_c - l_0) \quad (1) \\ \vec{e}_y : & 0 = 0 \quad (\text{mvt plan } x z) \quad (2) \\ \vec{e}_z : & 0 = -mg\cos(\alpha) + N \quad (3) \end{cases}$$

(3) $\rightarrow mg\cos(\alpha) = N$.

(1) $\rightarrow \ddot{x}_c = g\sin(\alpha) - \frac{F_f}{m} - \frac{k}{m}(x_c - l_0)$

Posons $\frac{k}{m} = \omega_0^2$

$\rightarrow \ddot{x}_c + \omega_0^2 x_c = g\sin(\alpha) - \frac{F_f}{m} + \omega_0^2 l_0$.

5)

Appliquons le théorème du moment cinétique

$$\frac{dL_c}{dt} = \sum_\alpha \vec{CP_\alpha} \wedge \vec{F_\alpha} = I_c \ddot{\theta} \, \vec{e}_y$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\vec{CC} \wedge \vec{P}}_{=0} + \underbrace{\vec{CK} \wedge \vec{N}}_{-R\underbrace{\vec{e}_z \wedge \vec{e}_z}_{=0}} + \vec{CK} \wedge \vec{F_f} + \underbrace{\vec{CC} \wedge \vec{F}_R}_{=0} = I_c \ddot{\theta} \, \vec{e}_y$$

$$\Leftrightarrow -R\vec{e}_z \wedge -F_f\vec{e}_x = I_c \ddot{\theta} \, \vec{e}_y$$

$$R F_f \, \vec{e}_y = I_c \ddot{\theta} \, \vec{e}_y$$

En projetant, on trouve $F_f = \frac{I_c \ddot{\theta}}{R}$

Or, $\dot{x}_c = R\dot{\theta} \Rightarrow \ddot{x}_c = R\ddot{\theta}$

On trouve $\boxed{F_f = \frac{I_c \ddot{x}_c}{R^2}}$

6)

$$\ddot{x}_c + \omega_0^2 x_c = g\sin(\alpha) - \frac{I_c}{mR^2}\ddot{x}_c + \omega_0^2 l_0$$

$$\Leftrightarrow \ddot{x}_c \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{I_c}{mR^2}\right)}_{\beta^2 > 0} + \omega_0^2 x_c = g\sin(\alpha) + \omega_0^2 l_0$$

→ Sol. générale : $\beta^2 p^2 + \omega_0^2 = 0$

$$p^2 = -\frac{\omega_0^2}{\beta^2} \Rightarrow p = \pm i\frac{\omega_0}{\beta}$$

$$\Rightarrow x_c(t) = A e^{i\frac{\omega_0}{\beta}t} + B e^{-i\frac{\omega_0}{\beta}t}$$

$$= A\cos\left(\frac{\omega_0}{\beta}t\right) + B\sin\left(\frac{\omega_0}{\beta}t\right)$$

→ Sol part : $x_p(t) = \frac{g\sin(\alpha)}{\omega_0^2} + l_0$

On trouve $x_c(t) = A\cos\left(\frac{\omega_0}{\beta}t\right) + B\sin\left(\frac{\omega_0}{\beta}\cdot t\right) + \frac{g}{\omega_0^2}\sin(\alpha) + l_0$

CI : $\dot{x}_c(t=0) = 0$

$x_c(t=0) = \frac{4}{3}l_0$

- En $t=0$: $x_c(0) = A + \frac{g}{\omega_0^2}\sin(\alpha) + l_0 = \frac{4}{3}l_0$

$$\Rightarrow A = \frac{4}{3}l_0 - \frac{g}{\omega_0^2}\sin(\alpha)$$

- En $t=0$: $\dot{x}_c(0) = B\frac{\omega_0}{\beta} = 0 \Leftrightarrow B = 0$.

Donc on trouve $x_c(t) = \left(\frac{1}{3}l_0 - \frac{g}{\omega_0^2}\sin(\alpha)\right)\cos\left(\frac{\omega_0}{\beta}t\right)$

$$+ \frac{g}{\omega_0^2}\sin(\alpha) + l_0$$

$$\boxed{x_c(t) = \frac{g}{\omega_0^2}\sin(\alpha)\cdot\underbrace{\left(1 - \cos\left(\frac{\omega_0}{\beta}\cdot t\right)\right)}_{\geq 0} + l_0\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{3}\cos\left(\frac{\omega_0}{\beta}t\right) + 1\right)}_{> 0}}$$

7) Si $I_c \to 0$, $\beta^2 \to 1$.