

Mécanique Analytique I

7 septembre 2021

Pierre C. Dauby

PC.Dauby@uliege.be

Modalités pratiques (1)

- Les notes de cours et les notes de répétitions disponibles sous format *pdf* sur le Portail eCampus.
- Des versions sous forme de *syllabus imprimés* sont également disponibles sur commande, à la fois pour les notes de cours (10€) et pour les notes de répétitions (8€).
Les commandes doivent être faites avant le lundi 20 septembre en remettant l'argent au délégué, qui prendra ensuite contact avec moi (pc.dauby@uliege.be).
- Les dias en format *pdf* sont disponibles sur le Portail eCampus.

Mécanique ?

- C'est QUOI, la mécanique ?
- La mécanique est le domaine de la physique qui étudie les mouvements de la matière par rapport à un système de référence donné, sous l'effet de forces données
- Son objet consiste donc en l'étude des

relations qui existent entre
forces et mouvements

Mécanique ?

- C'est QUI, et c'est QUAND, la mécanique ?



Isaac Newton (1642-1727), à l'âge de 46 ans.

Mécanique ?

- C'est **IMPORTANT**, la mécanique ?

Table des matières

Table des matières :

- Cinématique
- Mécanique
 - Mécanique du point
 - Mécanique des systèmes de points
 - Mécanique des solides

Table des matières

1 Cinématique

2 Mécanique du point

3 Mécanique des systèmes de points

4 Mécanique des solides

Table des matières

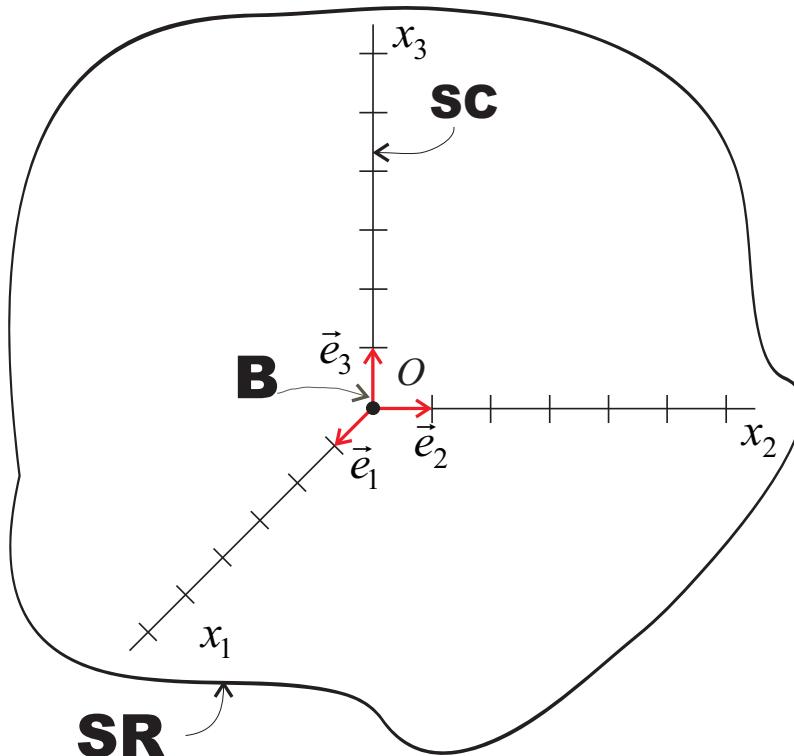
1 Cinématique

- Systèmes de référence et systèmes de coordonnées
- Vecteur fonction du temps
- Formule de Poisson
- Cinématique du point
- Cinématique du solide
- Les opérateurs différentiels de la physique

Système de référence

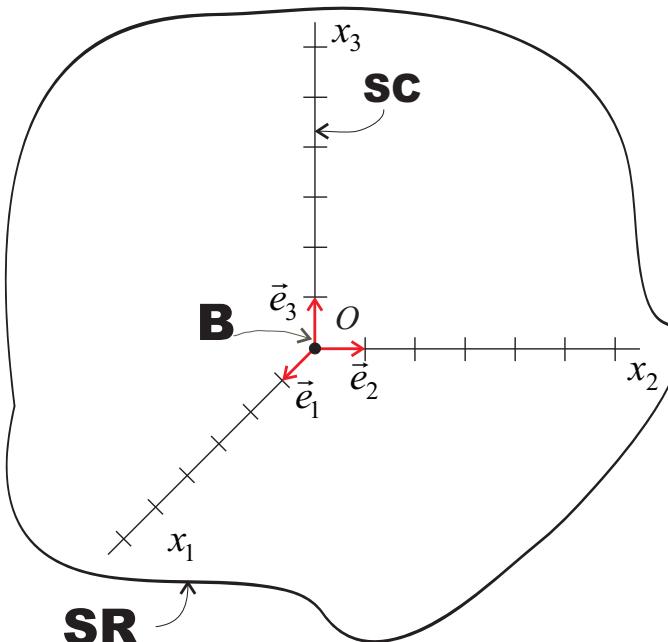
- En règle générale, la trajectoire d'un objet en mouvement **dépend de l'observateur** décrivant ce mouvement. Ex. : ... Nécessité de spécifier clairement le système de référence (SR) par rapport auquel un mouvement est étudié.
- En mécanique classique, **les SR sont**, par définition, **les corps solides**, c'est-à-dire les corps rigides, ou encore les corps indéformables, les corps dont la forme et les dimensions peuvent être supposés invariables pendant le temps que dure le mouvement étudié.
- Il est bien clair que **deux SR peuvent être en mouvement l'un par rapport à l'autre** ; c'est d'ailleurs pour cette raison que les mouvements dépendent en général du SR utilisé pour les décrire.
- En Mécanique (et en physique classique en général), on suppose que les SR sont munis d'**horloges** et que le temps mesuré par ces horloges est **absolu** : toutes les horloges sont et restent synchronisées.

Système de coordonnées cartésiennes



- $P \rightarrow (x, y, z)$ ou $P \rightarrow (x_1, x_2, x_3)$
- Infinité de SC pour un SR donné (SR souvent “représenté”, “matérialisé” par un des SC qui lui est attaché).
- Les coordonnées de P changent si on change le SC

Base associée



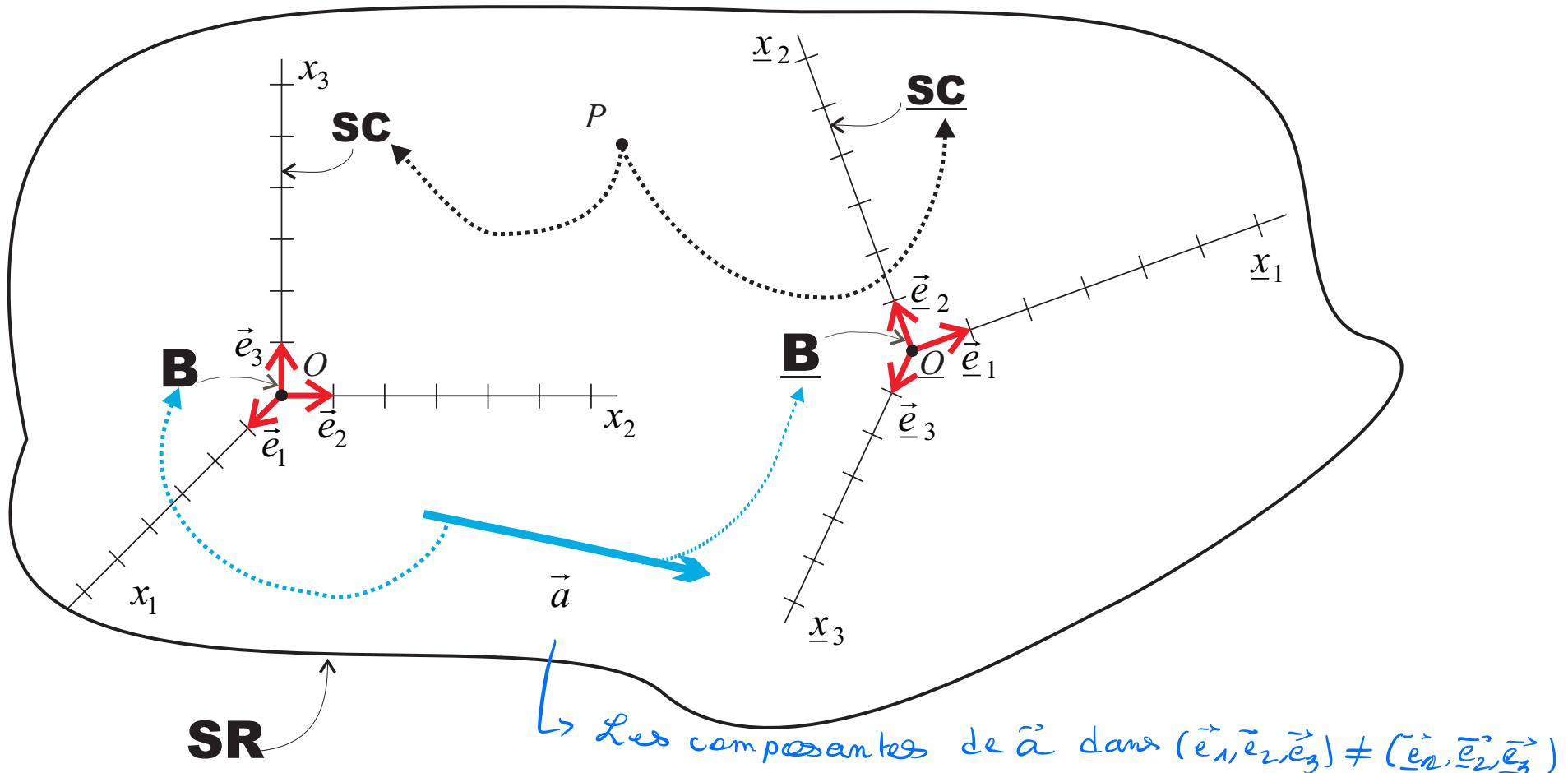
les coord. de P sont les composantes du vecteur \vec{OP} , car on a choisi de mettre la base sur les axes.

- \mathbf{B} base associée au SC : pour décomposer les vecteurs
- Vecteur position : \overrightarrow{OP} avec $P = O + \overrightarrow{OP}$. Dans base \mathbf{B} associée au SC :

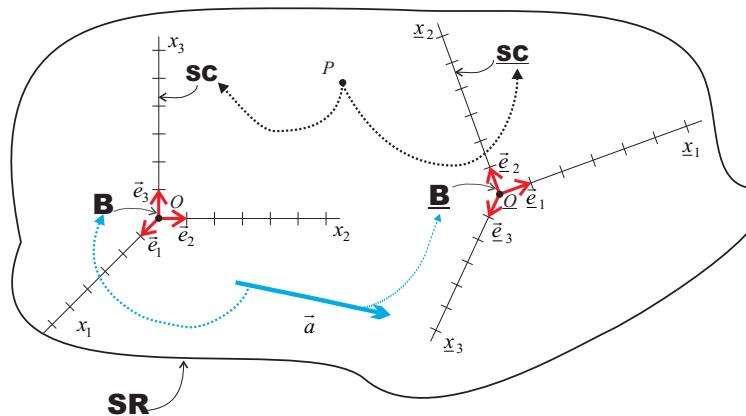
$$P \underset{\text{SC}}{\longleftrightarrow} (x_1, x_2, x_3) = (x_i) \iff \overrightarrow{OP} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3 = x_i \vec{e}_i.$$

- NB. Tous les vecteurs que nous utiliserons sont des **vecteurs libres** !
- NB. Sauf mention explicite du contraire, toutes les bases que nous utiliserons sont des bases droites !

Changements SC et B



La loi vectorielle



a_i : composante de
 \vec{a} dans $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

a_j : composante de
 \vec{a} dans $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

- La loi vectorielle s'écrit :

somme sur les j

$$a_i = \sum_j A_{ij} a_j, \quad \text{avec } A_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j,$$

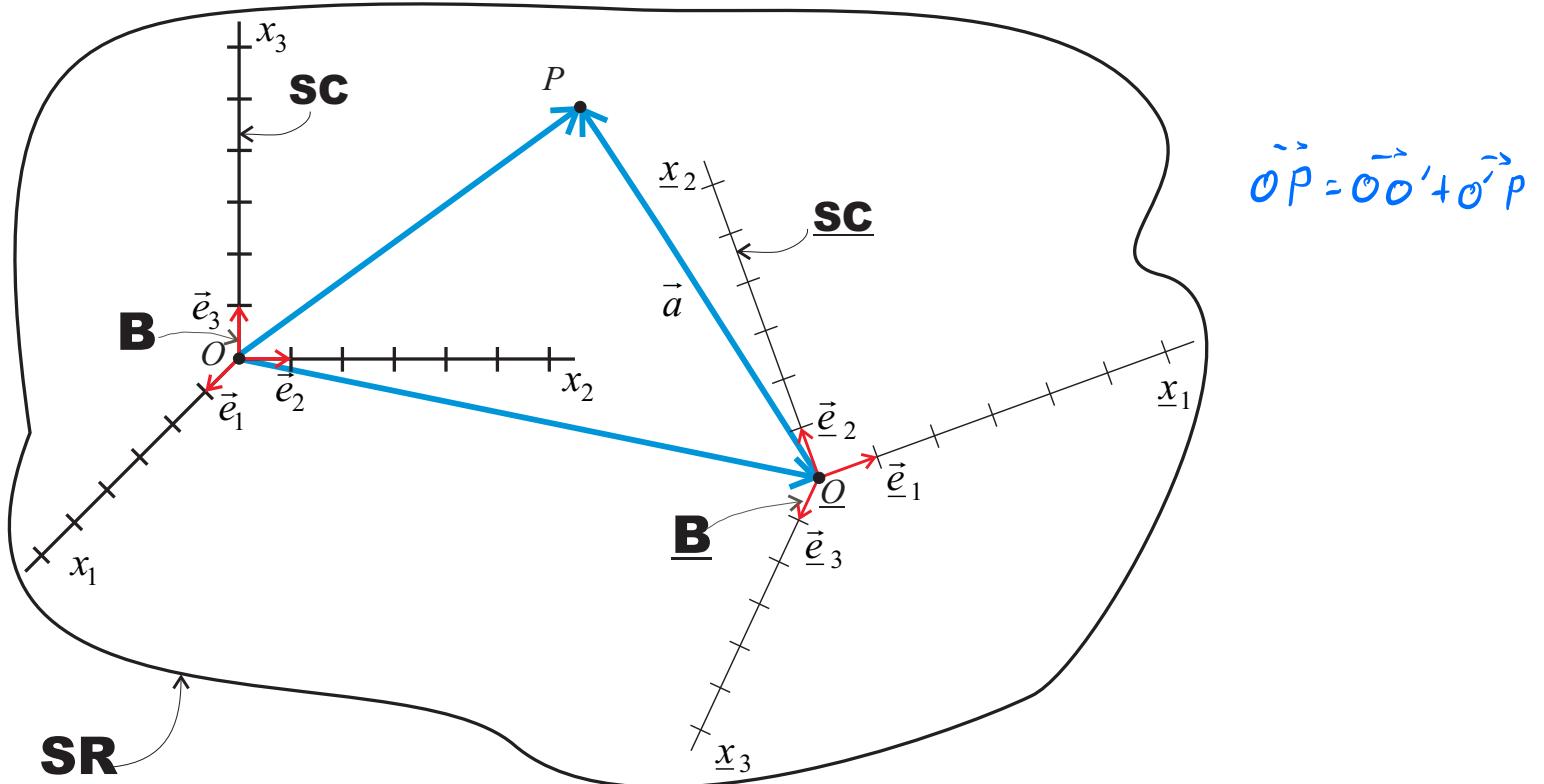
$$\underline{a}_i = \sum_j \underline{A}_{ij} a_j, \quad \text{avec } \underline{A}_{ij} = \underline{\vec{e}}_i \cdot \vec{e}_j.$$

- Les matrices A et \underline{A} sont orthogonales et inverses l'une de l'autre. On a donc les relations :

$$\underline{A} = \tilde{A} = A^{-1},$$

$$A = \tilde{A} = \underline{A}^{-1}.$$

La loi ponctuelle

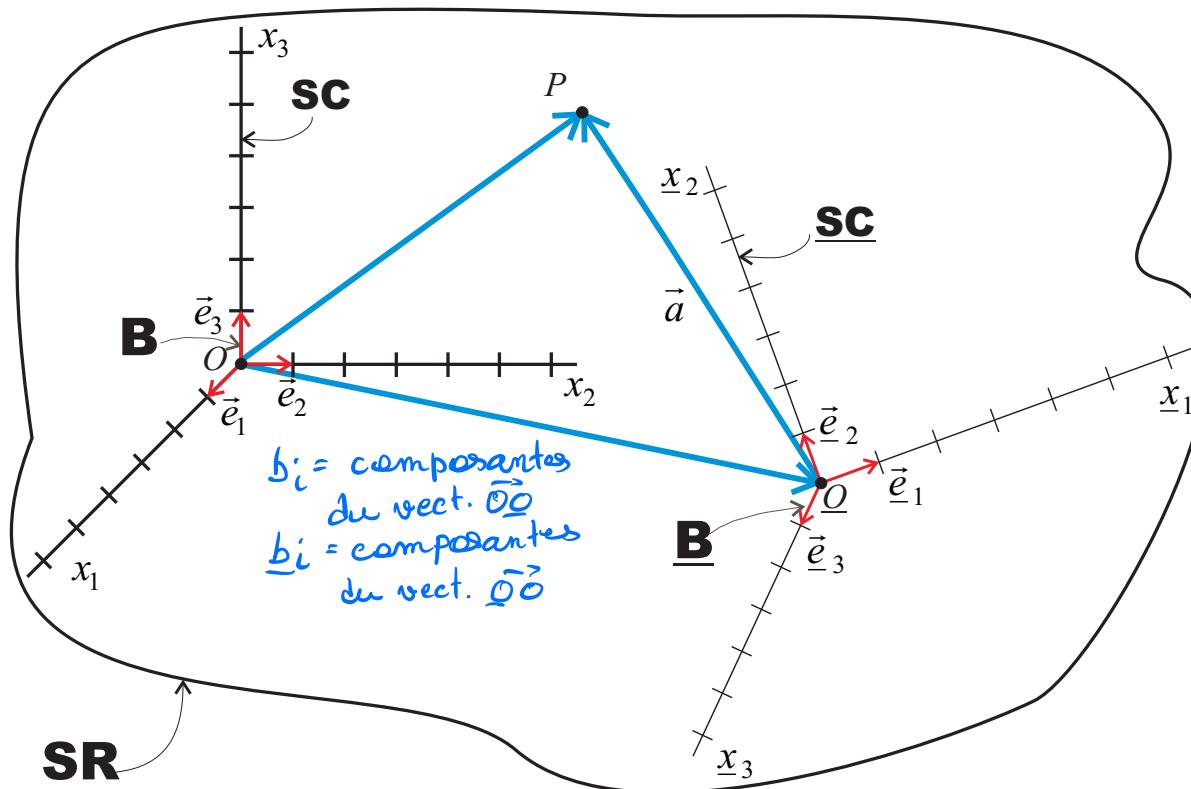


- Notons b_i les coordonnées dans SC de l'origine O du système SC et \underline{b}_i les coordonnées de O dans le système de coordonnées SC :

$$\overrightarrow{O\underline{O}} = b_i \vec{e}_i,$$

$$\overrightarrow{\underline{O}\underline{O}} = \underline{b}_i \vec{e}'_i.$$

La loi ponctuelle (2)



- La loi ponctuelle s'écrit :

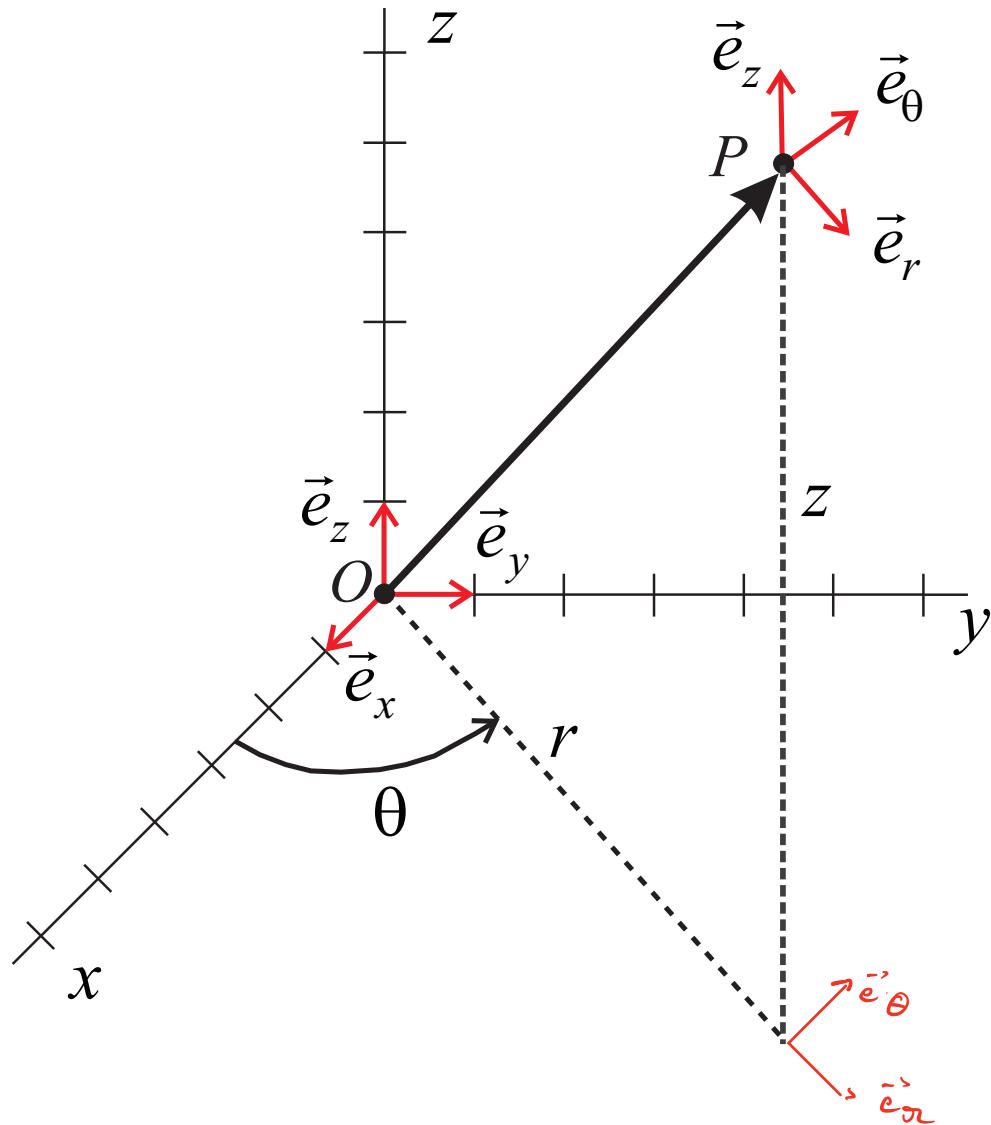
$$x_i = A_{ij} \underline{x}_j + b_i,$$

$$\underline{x}_i = \underline{A}_{ij} x_j + \underline{b}_i.$$

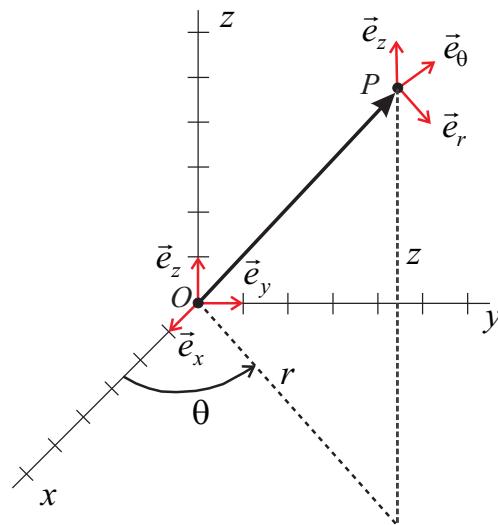
Coordonnées non cartésiennes

- Les coordonnées cartésiennes ne sont pas toujours idéales pour décrire la position des points dans l'espace !
- De même, les bases associées aux coordonnées cartésiennes ne sont pas toujours les plus commodes !
- Cela dépend de la géométrie du problème.

Coordonnées cylindriques



Coordonnées cylindriques (2)



$$\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta, \\ z = z, \end{cases}$$

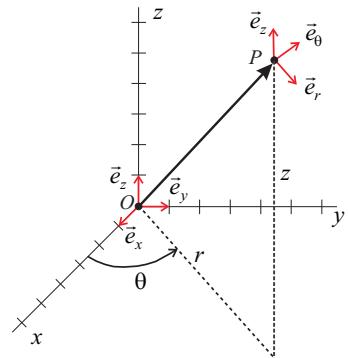
$$\begin{cases} \vec{e}_r = \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y, \\ \vec{e}_\theta = -\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y, \\ \vec{e}_z = \vec{e}_z, \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \theta = \arctan \frac{y}{x}, \\ z = z. \end{cases}$$

à ajouter aux notes

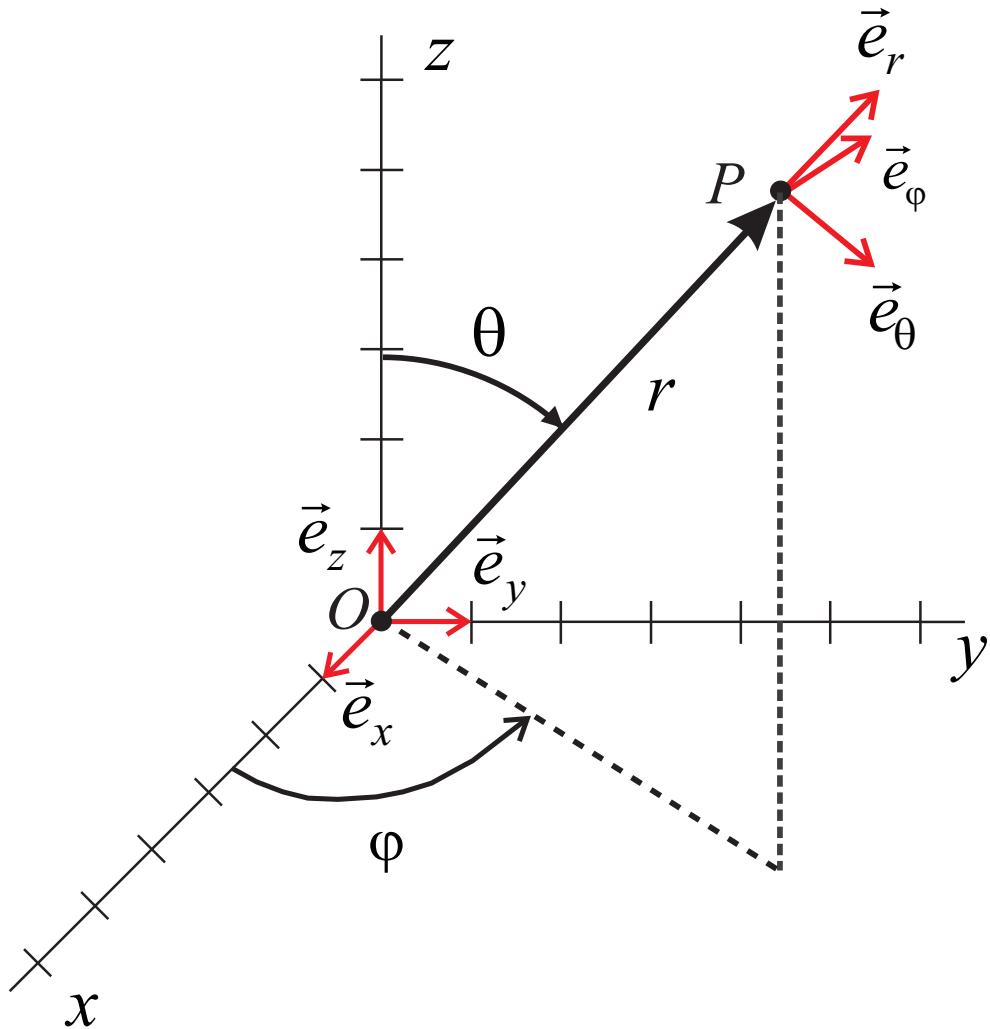
$$\begin{cases} \vec{e}_x = \cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta, \\ \vec{e}_y = \sin \theta \vec{e}_r + \cos \theta \vec{e}_\theta, \\ \vec{e}_z = \vec{e}_z. \end{cases}$$

Coordonnées cylindriques (3)

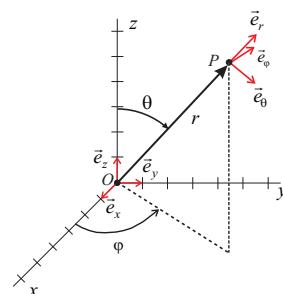


- La base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ varie avec P . Si P est une particule qui se déplace, la base est une base **mobile** et le système de référence $SR_{cyl}(P; (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z))$ est **mobile** lui aussi.
- On peut décomposer le vecteur position, la vitesse et l'accélération d'un point (ou tout autre vecteur !) dans la base mobile :
 $\vec{r} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z,$
 $\vec{v} = v_r\vec{e}_r + v_\theta\vec{e}_\theta + v_z\vec{e}_z,$
 $\vec{a} = a_r\vec{e}_r + a_\theta\vec{e}_\theta + a_z\vec{e}_z.$
pas de composante selon \vec{e}_θ
- \vec{v} et \vec{a} représentent la vitesse et l'accélération par rapport à une base "fixe" mais, ci-dessus, sont décomposés dans une base **mobile** !

Coordonnées sphériques



Coordonnées sphériques (2)



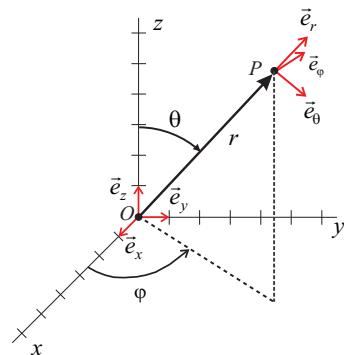
$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi, \\ y = r \sin \theta \sin \varphi, \\ z = r \cos \theta, \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \theta = \arctan \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}, \\ \varphi = \arctan \frac{y}{x}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \sin \theta \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \theta \sin \varphi \vec{e}_y + \cos \theta \vec{e}_z, \\ \vec{e}_\theta = \cos \theta \cos \varphi \vec{e}_x + \cos \theta \sin \varphi \vec{e}_y - \sin \theta \vec{e}_z, \\ \vec{e}_\varphi = -\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{e}_x = \sin \theta \cos \varphi \vec{e}_r + \cos \theta \cos \varphi \vec{e}_\theta - \sin \varphi \vec{e}_\varphi, \\ \vec{e}_y = \sin \theta \sin \varphi \vec{e}_r + \cos \theta \sin \varphi \vec{e}_\theta + \cos \varphi \vec{e}_\varphi, \\ \vec{e}_z = \cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta. \end{cases}$$

Coordonnées sphériques (3)



- La base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ varie avec P . Si P est une particule qui se déplace, la base est une base **mobile** et le système de référence $SR_{sph}(P; (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi))$ est **mobile** lui aussi.
- On peut décomposer le vecteur position, la vitesse et l'accélération d'un point (ou tout autre vecteur !) dans la base mobile :

$$\begin{aligned}\vec{r} &= r\vec{e}_r, \\ \vec{v} &= v_r\vec{e}_r + v_\theta\vec{e}_\theta + v_\varphi\vec{e}_\varphi, \\ \vec{a} &= a_r\vec{e}_r + a_\theta\vec{e}_\theta + a_\varphi\vec{e}_\varphi\end{aligned}$$

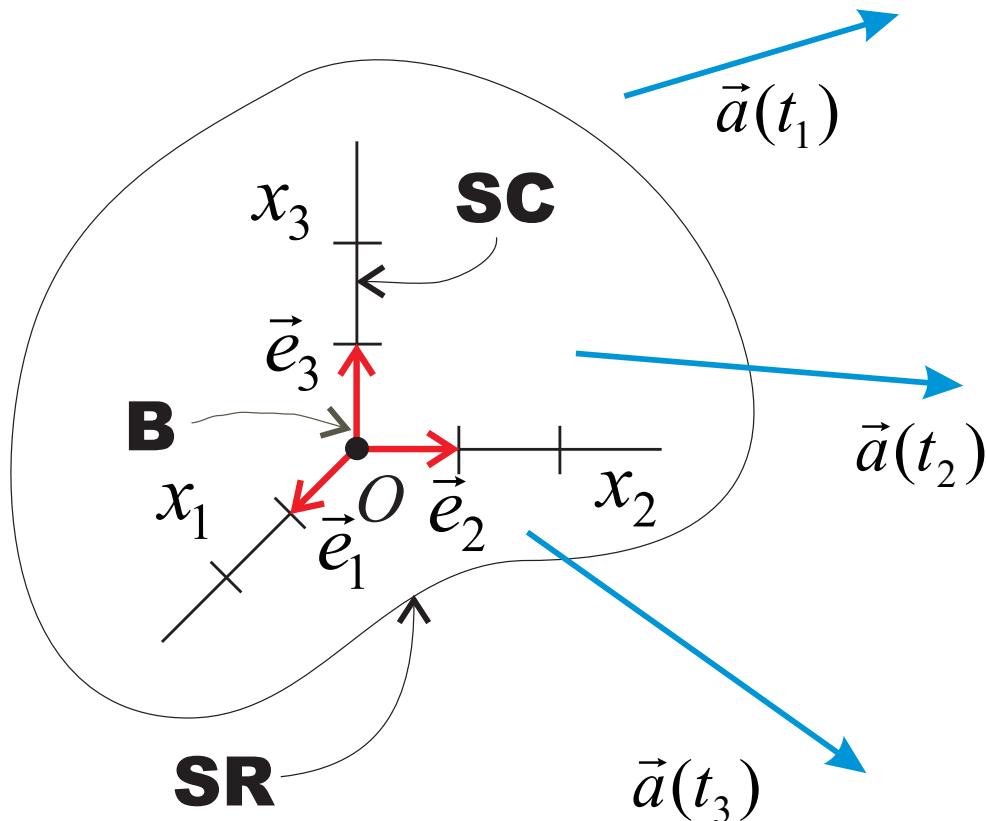
- \vec{v} et \vec{a} représentent la vitesse et l'accélération par rapport à une base “fixe” mais, ci-dessus, sont décomposés dans une base mobile !

Table des matières

1 Cinématique

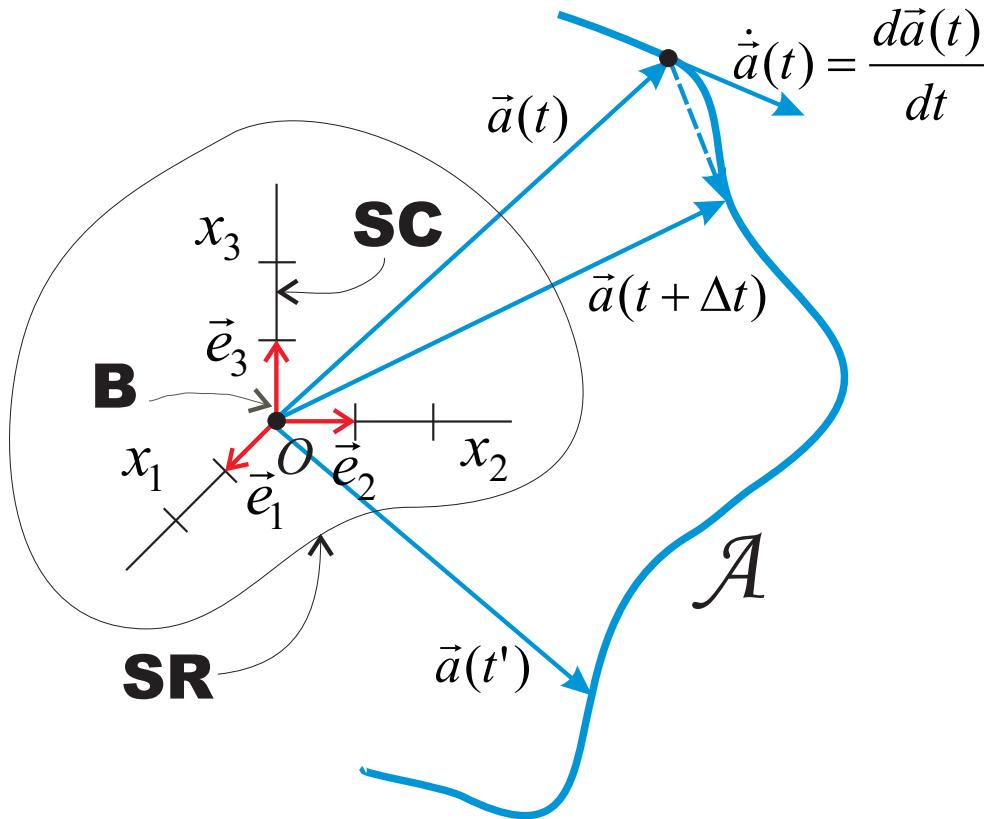
- Systèmes de référence et systèmes de coordonnées
- Vecteur fonction du temps
- Formule de Poisson
- Cinématique du point
- Cinématique du solide
- Les opérateurs différentiels de la physique

Vecteur fonction du temps



- On peut aussi imaginer un vecteur qui dépend d'un autre paramètre scalaire que le temps : l'abscisse curviligne par exemple, on en reparlera !

Vecteur fonction du temps (2)



- La courbe \mathcal{A} des points $P(t) = O + \vec{a}(t)$, où O est un point fixe du système de référence SR , permet de visualiser les variations temporelles du vecteur $\vec{a}(t)$.

Limite d'un vecteur

- La limite lorsque t tend vers t_0 d'un vecteur $\vec{a}(t)$ est le vecteur \vec{a}_0 , constant par rapport à SR , si la norme de la différence entre $\vec{a}(t)$ et \vec{a}_0 tend vers zéro :

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{a}(t) = \vec{a}_0$$

\Updownarrow

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \|\vec{a}(t) - \vec{a}_0\| = 0.$$

- Propriété importante (dans bases fixes par rapport à SR) :

$$\left[\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{a}(t) \right]_i = \lim_{t \rightarrow t_0} a_i(t).$$

Dérivée d'un vecteur

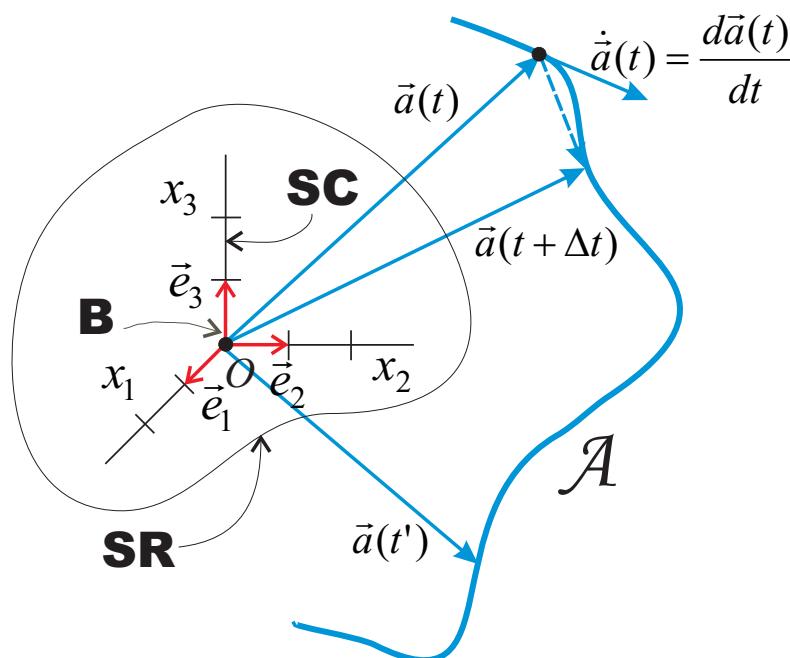
- Lorsque la limite existe, la dérivée du vecteur $\vec{a}(t)$ est définie par :

$$\dot{\vec{a}} = \frac{d\vec{a}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{a}(t + \Delta t) - \vec{a}(t)}{\Delta t}.$$

- Propriété importante (dans bases fixes par rapport à SR) :

$$\left(\frac{d\vec{a}}{dt} \right)_i = \frac{da_i}{dt}.$$

- Interprétation géométrique :



Dérivée d'un vecteur (2)

- Autres propriétés :

$$\frac{d}{dt} \sum_{\nu=1}^n \alpha_\nu(t) \vec{a}_\nu(t) = \sum_{\nu=1}^n \frac{d\alpha_\nu(t)}{dt} \vec{a}_\nu(t) + \sum_{\nu=1}^n \alpha_\nu(t) \frac{d\vec{a}_\nu(t)}{dt},$$

→ si $\vec{b} = \vec{a}$

on a: $\frac{d}{dt} (\vec{a} \cdot \vec{a}) = 2 \vec{a} \frac{d\vec{a}}{dt}$
= 0 si \vec{a} est const

⇒ $2 \vec{a} \frac{d\vec{a}}{dt} = 0$

↔ $\vec{a} \perp \frac{d\vec{a}}{dt}$

$$\frac{d}{dt} (\vec{a} \odot \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} \odot \vec{b} + \vec{a} \odot \frac{d\vec{b}}{dt},$$

produit scalaire

$\frac{d}{dt} (\vec{a} \cdot \vec{b})$

$= \frac{d}{dt} (a_i b_i) = a_i \frac{db_i}{dt} + b_i \frac{da_i}{dt}$

$$\frac{d}{dt} (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \frac{d\vec{b}}{dt}.$$

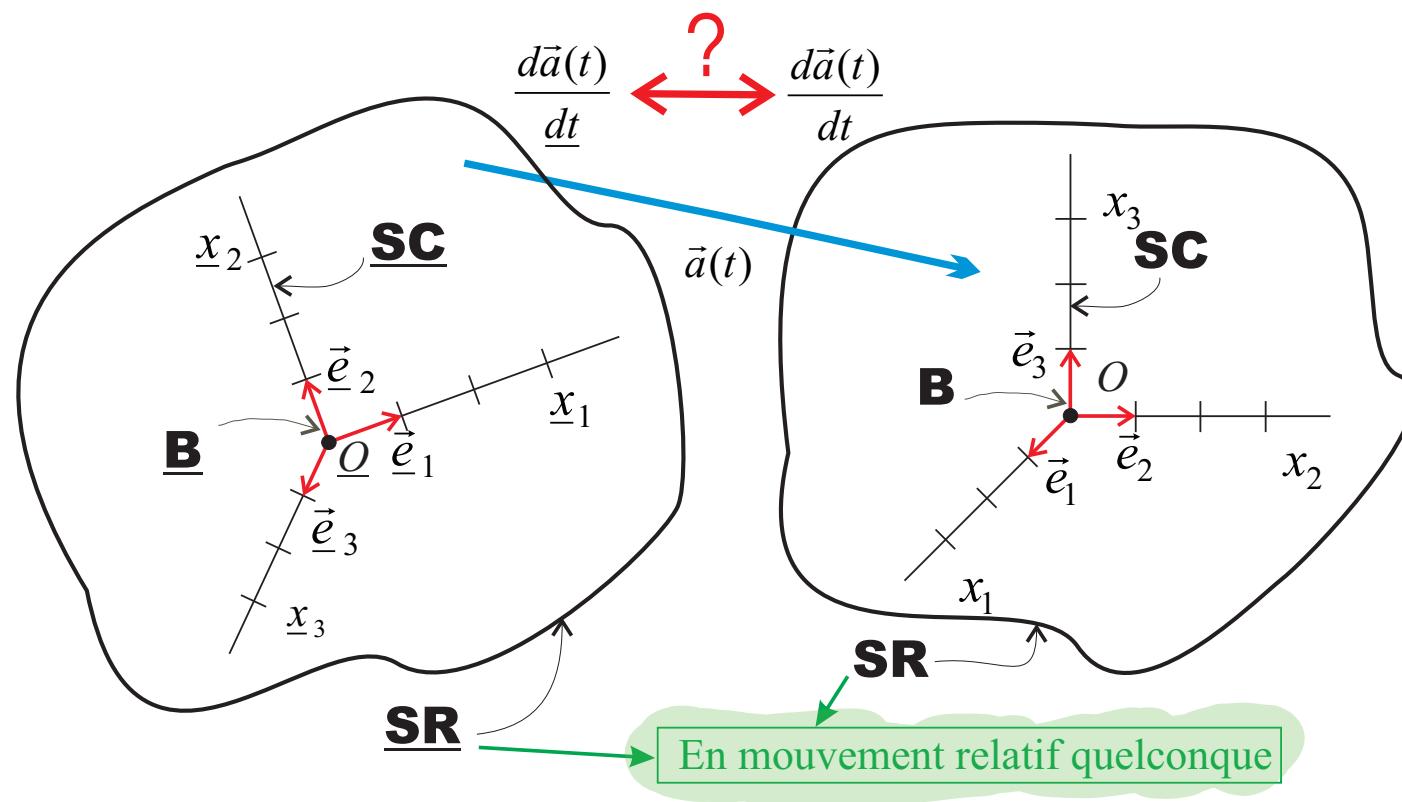
- On déduit de la 2^{ème} propriété ci-dessus (règle de Leibniz pour les produits scalaires) que la dérivée d'un vecteur \vec{a} de longueur constante est soit nulle, soit perpendiculaire à ce vecteur.

Table des matières

1 Cinématique

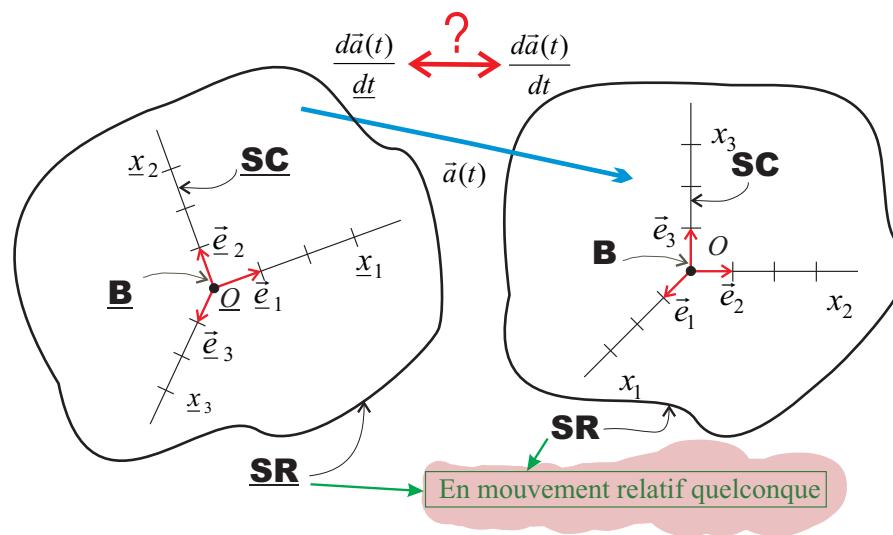
- Systèmes de référence et systèmes de coordonnées
- Vecteur fonction du temps
- **Formule de Poisson**
- Cinématique du point
- Cinématique du solide
- Les opérateurs différentiels de la physique

Formule de Poisson : pourquoi ?



- Un vecteur constant pour SR peut être variable pour \underline{SR} !
 - De manière générale, la *notion de vecteur variable* est essentiellement *relative à un système de référence* !
 - La notion de *scalaire* qui varie dans le temps NE dépend PAS du SR !
↳ ex: température idem dans la pièce
$$\Rightarrow \frac{da(t)}{dt} = \frac{\underline{da}(t)}{\underline{dt}}$$

Quelques relations utiles



- On a tout d'abord : $\frac{d}{dt} = 0 = \frac{d}{dt}$,
 - En dérivant la relation $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$ par rapport au temps (dans SR), on déduit aussi :

$$\frac{d\vec{e}_1}{dt} \cdot \vec{e}_1 = 0,$$

$$\frac{d\vec{e}_1}{dt} \cdot \vec{e}_2 = - \frac{d\vec{e}_2}{dt} \cdot \vec{e}_1,$$

etc.

Dérivée des \vec{e}_i dans SR

- Comme $d\vec{e}_i/dt \perp \vec{e}_i$, on peut essayer d'écrire

$$\begin{aligned}\tilde{a}_i &= a_i \cdot \vec{e}_i \\ \hookrightarrow a_i &= \tilde{a}_i \cdot \vec{e}_i\end{aligned}$$

$$\frac{d\vec{e}_i}{dt} = ? \wedge \vec{e}_i.$$

- Décomposons $d\vec{e}_1/dt$ dans la base des \vec{e}_i (NB. $\forall \vec{v}$, on a $\vec{v} = (\vec{v} \cdot \vec{e}_i)\vec{e}_i$) :

$$\frac{d\vec{e}_1}{dt} = \left(\frac{d\vec{e}_1}{dt} \cdot \vec{e}_1 \right) \vec{e}_1 + \left(\frac{d\vec{e}_1}{dt} \cdot \vec{e}_2 \right) \vec{e}_2 + \left(\frac{d\vec{e}_1}{dt} \cdot \vec{e}_3 \right) \vec{e}_3.$$

- En utilisant les relations établies dans le transparent précédent et les relations $\vec{e}_2 = \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1$ et $\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2$, on a aussi :

$$\frac{d\vec{e}_1}{dt} = \left[\left(\frac{d\vec{e}_1}{dt} \cdot \vec{e}_2 \right) \vec{e}_3 + \left(\frac{d\vec{e}_3}{dt} \cdot \vec{e}_1 \right) \vec{e}_2 \right] \wedge \vec{e}_1.$$

- En ajoutant un terme nul, on a enfin :

$$\frac{d\vec{e}_1}{dt} = \left[\left(\frac{d\vec{e}_1}{dt} \cdot \vec{e}_2 \right) \vec{e}_3 + \left(\frac{d\vec{e}_2}{dt} \cdot \vec{e}_3 \right) \vec{e}_1 + \left(\frac{d\vec{e}_3}{dt} \cdot \vec{e}_1 \right) \vec{e}_2 \right] \wedge \vec{e}_1.$$

Dérivée des \vec{e}_i dans **SR** (2)

- Si l'on pose

$$\vec{\omega} = \left(\frac{d\vec{e}_1}{dt} \cdot \vec{e}_2 \right) \vec{e}_3 + \left(\frac{d\vec{e}_2}{dt} \cdot \vec{e}_3 \right) \vec{e}_1 + \left(\frac{d\vec{e}_3}{dt} \cdot \vec{e}_1 \right) \vec{e}_2,$$

on a donc :

$$\frac{d\vec{e}_1}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{e}_1.$$

- Par symétrie, on a aussi :

$\vec{\omega}$ Il est le même pour $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$

$$\frac{d\vec{e}_i}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{e}_i.$$

Dérivée de \vec{a} constant pour SR

$$\hookrightarrow \frac{d\vec{a}}{dt} = 0 \text{ car const \% c\`e S.R}$$

- Considérons un vecteur \vec{a} "attaché" à SR, c'est-à-dire constant par rapport à SR.
On a :

$$\checkmark \quad \frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{d}{dt} (a_i \vec{e}_i) = a_i \frac{d\vec{e}_i}{dt} = a_i \vec{\omega} \wedge \vec{e}_i,$$

car $\frac{d a_i \vec{e}_i}{dt} = 0$

Nu que a_i est
un scalaire $\Rightarrow \frac{da_i}{dt} = 0$

et donc $\frac{d a_i \vec{e}_i}{dt} + a_i \frac{d \vec{e}_i}{dt}$
 ne depas $\frac{d \vec{e}_i}{dt}$
 p_{de} au $\frac{d \vec{a}}{dt} = \frac{d a}{dt}$
 $\vec{a}_i \vec{\omega} \wedge \vec{e}_i$

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{a} \left(+ \frac{d\vec{a}}{dt} \right)$$

li' \vec{a} n'est pas
constant dans S.R

- Cette équation constitue la *formule de Poisson* pour un vecteur constant par rapport à SR.

Unicité du vecteur $\vec{\omega}$

- Montrons que malgré les apparences, le vecteur $\vec{\omega}$ est indépendant de la base des \vec{e}_i .
- Considérons un deuxième système de coordonnées (O', \vec{e}'_i) attaché à SR et construisons le vecteur

$$\vec{\omega}' = \left(\frac{d\vec{e}'_1}{dt} \cdot \vec{e}'_2 \right) \vec{e}'_3 + \left(\frac{d\vec{e}'_2}{dt} \cdot \vec{e}'_3 \right) \vec{e}'_1 + \left(\frac{d\vec{e}'_3}{dt} \cdot \vec{e}'_1 \right) \vec{e}'_2.$$

- Quel que soit \vec{a} , on a :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{a}}{dt} &= \vec{\omega} \wedge \vec{a} \\ \frac{d\vec{a}}{dt} &= \vec{a} \cdot \frac{d\vec{e}'_i}{dt} \cdot \vec{e}'_i = a_i \vec{\omega}' \wedge \vec{e}'_i \\ \frac{d\vec{a}}{dt} &= \vec{\omega}' \wedge \vec{a} \end{aligned}$$

et donc

$$(\vec{\omega} - \vec{\omega}') \wedge \vec{a} = 0. \Rightarrow \vec{\omega} = \vec{\omega}'$$

- Cette relation étant vraie quel que soit \vec{a} , on en déduit que $\vec{\omega} = \vec{\omega}'$.

$\vec{\omega}$ ne dépend que de SR

Le vecteur de Poisson

- Le vecteur $\vec{\omega}$ est une caractéristique intrinsèque du mouvement de SR par rapport à \underline{SR} que l'on appelle le **vecteur de Poisson** ou la **vitesse angulaire** de SR par rapport à \underline{SR} .
- Pour éviter les confusions, il y a parfois lieu de recourir à des notations telles que

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_{SR} \div \underline{SR} = \vec{\omega}_{\vec{e}_i} \div \underline{\vec{e}_j}.$$

La formule de Poisson

- Considérons un vecteur variable $\vec{a}(t)$ quelconque. On a

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{a}}{dt} &= \frac{d}{dt} (a_i \vec{e}_i) \\ &= \frac{da_i}{dt} \vec{e}_i + a_i \frac{d\vec{e}_i}{dt} \quad \text{cas a constant} \\ &= \frac{da_i}{dt} \vec{e}_i + a_i \vec{\omega} \wedge \vec{e}_i,\end{aligned}$$

\downarrow a_i est un scalaire

et donc

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{d\vec{a}}{dt} + \vec{\omega} \wedge \vec{a}.$$

- C'est la **formule de Poisson**.

Propriétés du vecteur de Poisson

- Si on applique la formule de Poisson à $\vec{\omega}$ lui-même, il vient :

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \xrightarrow{\text{---}} \cancel{\frac{d\vec{\omega}}{dt}} = \cancel{\frac{d\vec{\omega}}{dt}} + \underbrace{\vec{\omega} \wedge \vec{\omega}}_{= \vec{0}}$$

- En intervertissant les rôles de SR et \underline{SR} , on a :

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{d\vec{a}}{dt} + \vec{\omega}_{SR} \div SR \wedge \vec{a}. \quad \cancel{\frac{d\vec{a}}{dt}} = \cancel{\frac{d\vec{a}}{dt}} + \vec{\omega}_{SR} \wedge \vec{a}$$
$$\cancel{\frac{d\vec{a}}{dt}} = \cancel{\frac{d\vec{a}}{dt}} + \vec{\omega}_{S \times S} \wedge \vec{a} + \vec{\omega}_{S \times S} \wedge \vec{a}$$

Comme on a aussi :

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{d\vec{a}}{dt} - \vec{\omega}_{SR} \div \underline{SR} \wedge \vec{a},$$

et puisque le vecteur de Poisson est unique, on éduit :

$$\vec{\omega}_{SR} \div SR = - \vec{\omega}_{SR} \div \underline{SR}.$$

Propriétés du vecteur de Poisson (2)

- Considérons à présent 3 systèmes de référence SR_1 , SR_2 et SR_3 . On a tout d'abord :

$$\left(\frac{d}{dt} \right)_3 \vec{a} = \left(\frac{d}{dt} \right)_1 \vec{a} + \vec{\omega}_{1 \div 3} \wedge \vec{a},$$

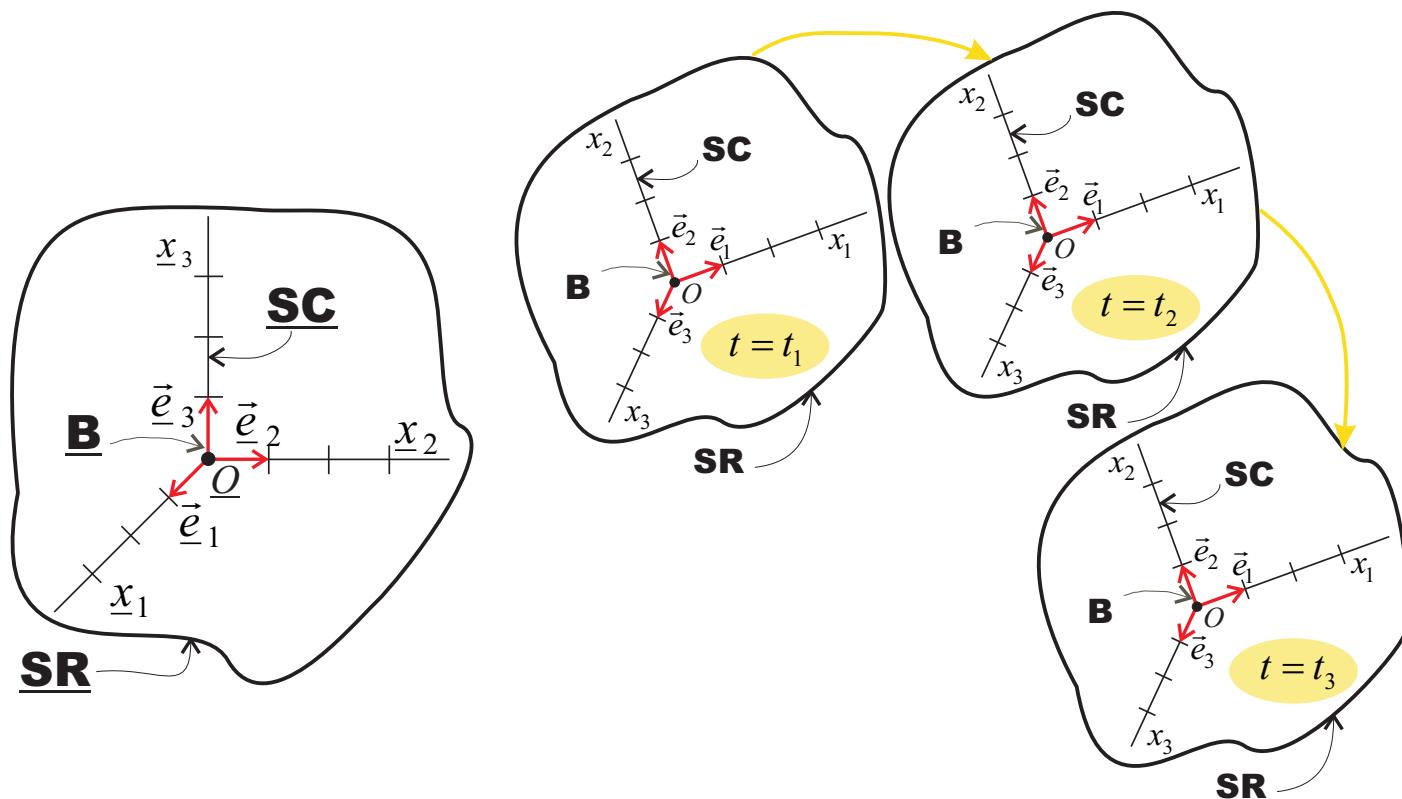
- On a aussi :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} \right)_3 \vec{a} &= \left(\frac{d}{dt} \right)_2 \vec{a} + \vec{\omega}_{2 \div 3} \wedge \vec{a} \\ &= \left(\frac{d}{dt} \right)_1 \vec{a} + \vec{\omega}_{1 \div 2} \wedge \vec{a} + \vec{\omega}_{2 \div 3} \wedge \vec{a} \\ &= \left(\frac{d}{dt} \right)_1 \vec{a} + (\vec{\omega}_{1 \div 2} + \vec{\omega}_{2 \div 3}) \wedge \vec{a}. \end{aligned}$$

- On déduit finalement la propriété d'**additivité des vecteurs de Poisson** :

$$\vec{\omega}_{1 \div 3} = \vec{\omega}_{1 \div 2} + \vec{\omega}_{2 \div 3}. \quad \text{Vraie } \vec{\omega} \text{ est unique.}$$

$\vec{\omega}$ pour les translations

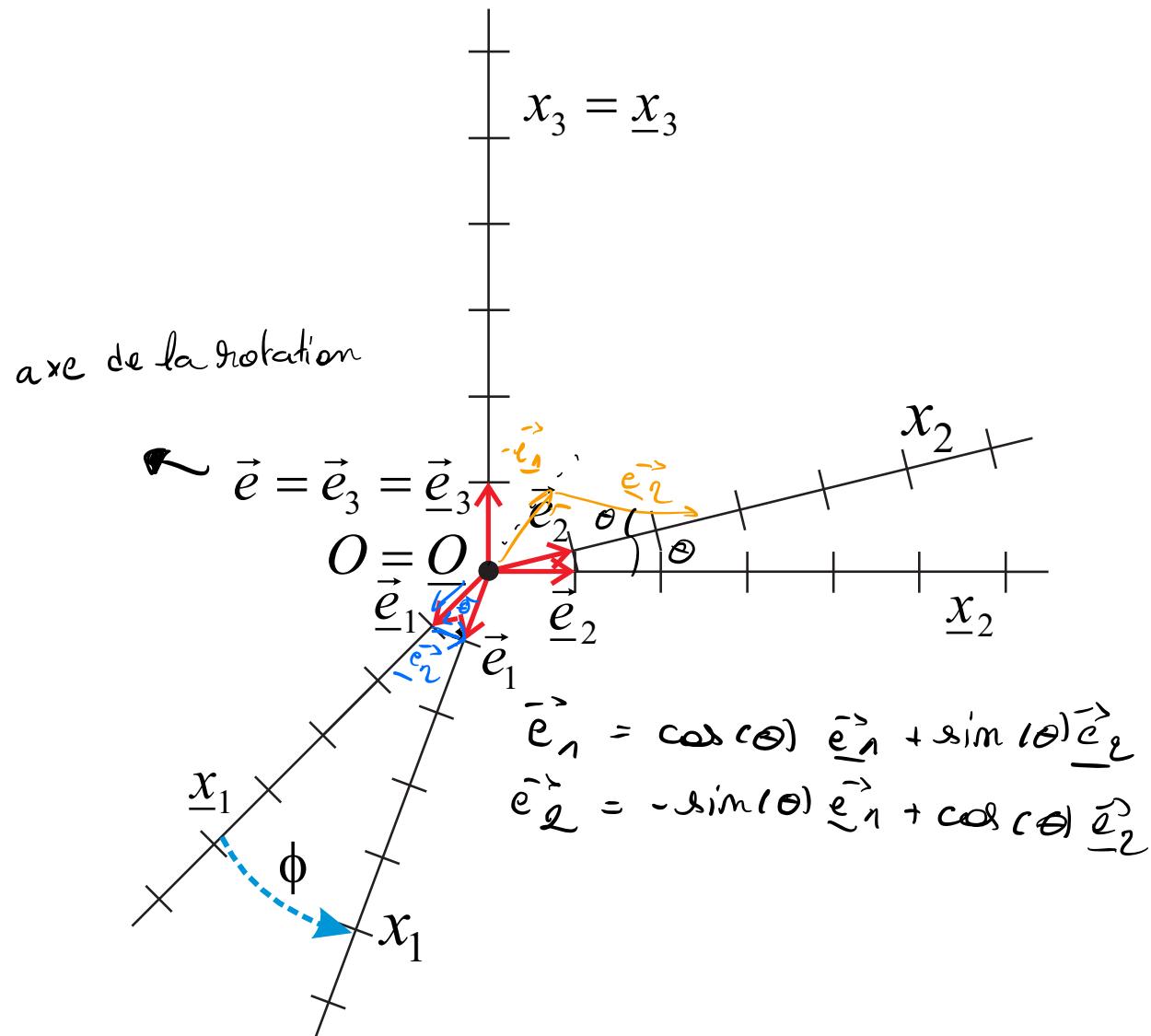


- On a $d\vec{e}_i(t)/dt = 0$ et donc :

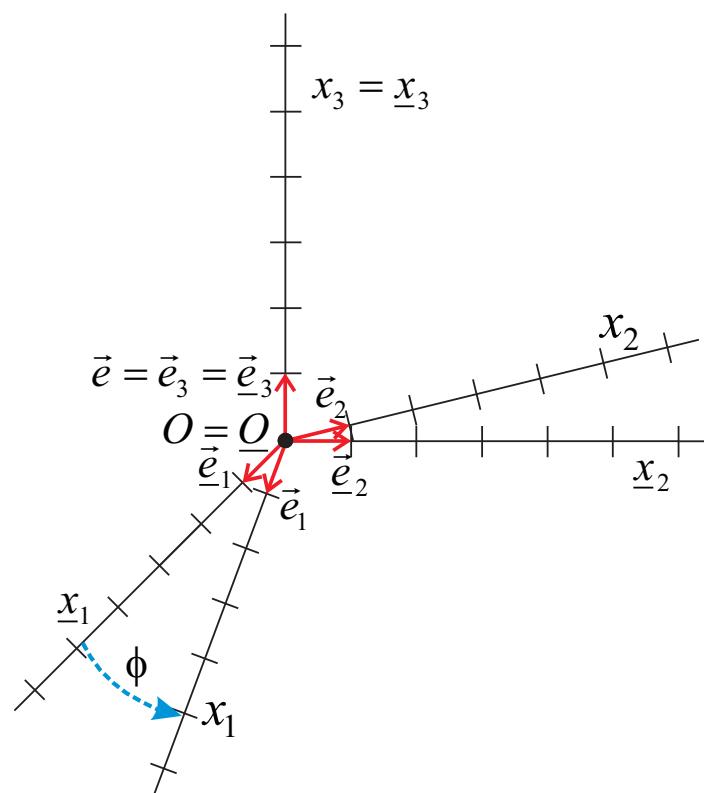
$$\vec{\omega}_{\text{translation}} = \left(\frac{d\vec{e}_1}{dt} \cdot \vec{e}_2 \right) \vec{e}_3 + \left(\frac{d\vec{e}_2}{dt} \cdot \vec{e}_3 \right) \vec{e}_1 + \left(\frac{d\vec{e}_3}{dt} \cdot \vec{e}_1 \right) \vec{e}_2 = 0.$$

$\vec{\omega}$ pour les rotations

- Deux SR en rotation autour d'un axe commun fixe $O + \vec{e}$, avec \vec{e} orienté comme ϕ par la règle du tire-bouchon :



$\vec{\omega}$ pour les rotations (2)



- On a :

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 &= \cos \phi \underline{\vec{e}}_1 + \sin \phi \underline{\vec{e}}_2, \\ \vec{e}_2 &= -\sin \phi \underline{\vec{e}}_1 + \cos \phi \underline{\vec{e}}_2, \\ \vec{e}_3 &= \underline{\vec{e}}_3.\end{aligned}$$

$\vec{\omega}$ pour les rotations (3)

- En dérivant, il vient :

$$\vec{e}_1 = \cos \phi \underline{\vec{e}}_1 + \sin \phi \underline{\vec{e}}_2 \Rightarrow \frac{d\underline{\vec{e}}_1}{dt} = \dot{\phi} (-\sin \phi \underline{\vec{e}}_1 + \cos \phi \underline{\vec{e}}_2) = \dot{\phi} \vec{e}_2,$$

$$\vec{e}_2 = -\sin \phi \underline{\vec{e}}_1 + \cos \phi \underline{\vec{e}}_2 \Rightarrow \frac{d\underline{\vec{e}}_2}{dt} = \dot{\phi} (-\cos \phi \underline{\vec{e}}_1 - \sin \phi \underline{\vec{e}}_2) = -\dot{\phi} \vec{e}_1,$$

$$\vec{e}_3 = \underline{\vec{e}}_3 \Rightarrow \frac{d\underline{\vec{e}}_3}{dt} = 0.$$

- En remplaçant dans

$$\vec{\omega} = \left(\underbrace{\frac{d\underline{\vec{e}}_1}{dt} \cdot \vec{e}_2}_{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 1} \right) \vec{e}_3 + \left(\underbrace{\frac{d\underline{\vec{e}}_2}{dt} \cdot \vec{e}_3}_{\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = 0 \text{ car } \perp} \right) \vec{e}_1 + \left(\underbrace{\frac{d\underline{\vec{e}}_3}{dt} \cdot \vec{e}_1}_{\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1 = 0} \right) \vec{e}_2,$$

on trouve :

$$\vec{\omega}_{\text{rotation}} = \dot{\phi} \vec{e}.$$

Table des matières

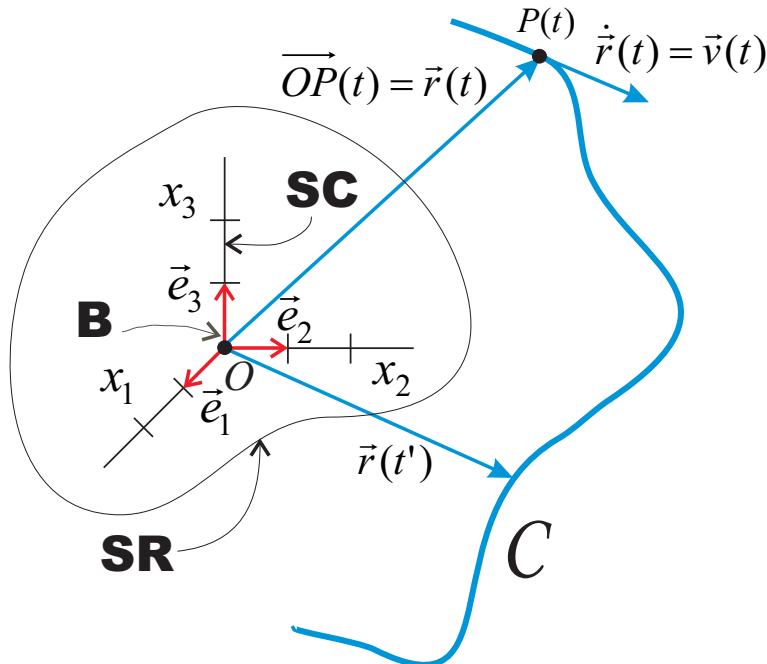
1 Cinématique

- Systèmes de référence et systèmes de coordonnées
- Vecteur fonction du temps
- Formule de Poisson
- **Cinématique du point**
- Cinématique du solide
- Les opérateurs différentiels de la physique

Notion de point matériel

- Si une portion de matière dont on veut étudier les mouvements est suffisamment “petite”, il est intéressant de négliger, dans un premier temps, son extension spatiale et de l’assimiler à un point.
- Un **point matériel**, que l’on appellera parfois aussi **particule**, est donc, d’une certaine manière, une quantité de matière que l’on comprime par la pensée jusqu’à la réduire à un point. Les mouvements de cette matière sont alors identifiés aux mouvements du point en question.

Position et trajectoire

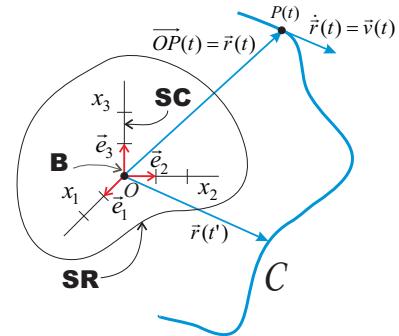


- **Vecteur position** ou rayon-vecteur d'un point matériel : $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$.
Ce vecteur dépend non seulement du système de référence utilisé, mais aussi du point O .
- La **trajectoire** ou l'orbite de P est la courbe C décrite par rapport à SR par l'extrémité du vecteur position. L'équation de la trajectoire, paramétrée par le temps, s'écrit :

$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{OP}(t) = x_i(t) \vec{e}_i. \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \rightarrow 3 \text{ degrés de liberté} \\ \rightarrow 3 \text{ paramètres} \end{array}$$

- TROIS degrés de liberté

Vitesse



- La vitesse d'un point matériel est le vecteur tangent à la trajectoire défini par :

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OP}(t)}{dt}.$$

- Malgré les apparences, la vitesse ne dépend pas de O (**vitesse par rapport à SR**) :

$$\frac{d\overrightarrow{O'P}(t)}{dt} = \frac{d(\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP}(t))}{dt} = \frac{d\overrightarrow{O'O}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{OP}(t)}{dt} \stackrel{\text{les origines ne bougent pas}}{=} \frac{d\overrightarrow{OP}(t)}{dt}.$$

- En coordonnées cartésiennes, quel que soit le SC, on a : $\vec{v}(t) = \dot{x}_i(t) \vec{e}_i$.

- L'accélération \vec{a} du point matériel P est définie comme le taux de variation temporelle de sa vitesse :

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}.$$

- En termes du vecteur position, on a :

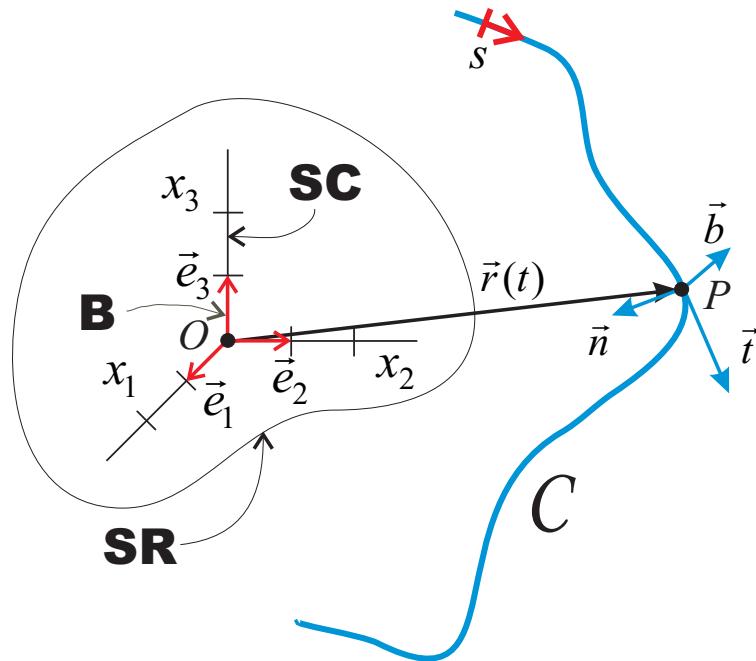
$$\vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \frac{d^2\overrightarrow{OP}(t)}{dt^2}.$$

- Comme la vitesse, l'accélération est indépendante du point O et on parle de **l'accélération de P par rapport à SR**.
- En coordonnées cartésiennes, on a :

$$\vec{a}(t) = \ddot{x}_i(t) \vec{e}_i,$$

quel que soit le système de coordonnées cartésiennes choisi pour calculer le second membre

Rappel : trièdre de Frenet



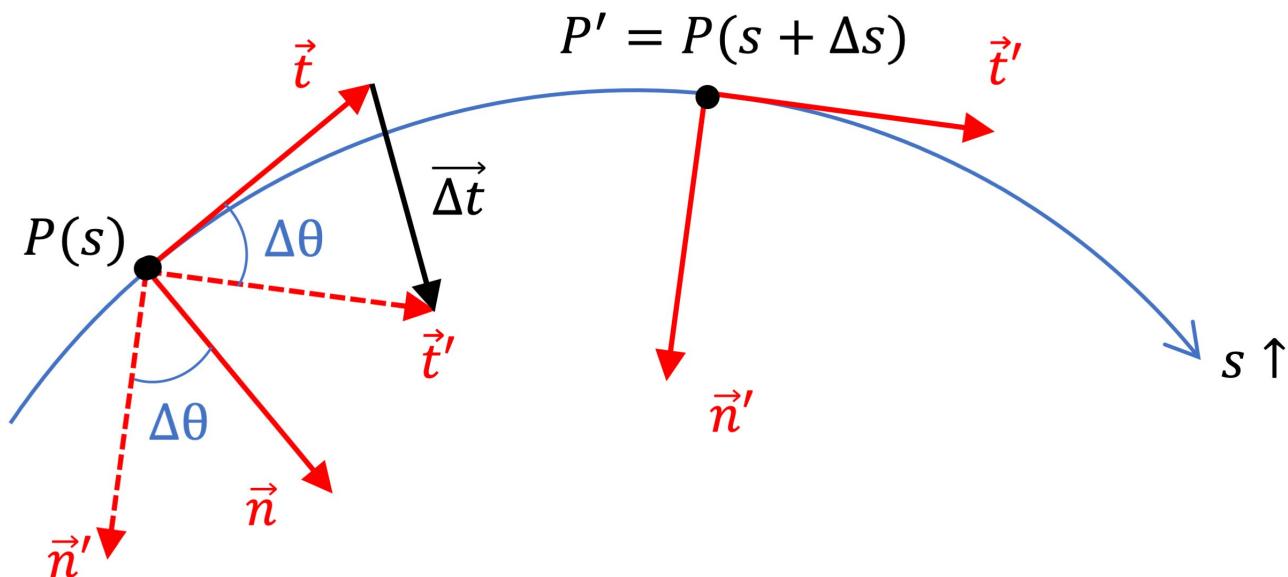
- Courbe C paramétrée par l'abscisse curviligne.
- Vecteur tangent, unitaire et pointant vers s croissants : $\vec{t} = \frac{d\vec{r}(s)}{ds}$
↪ $\frac{dt}{ds}$ sera alors $\perp \vec{\epsilon}$

Rappel : trièdre de Frenet

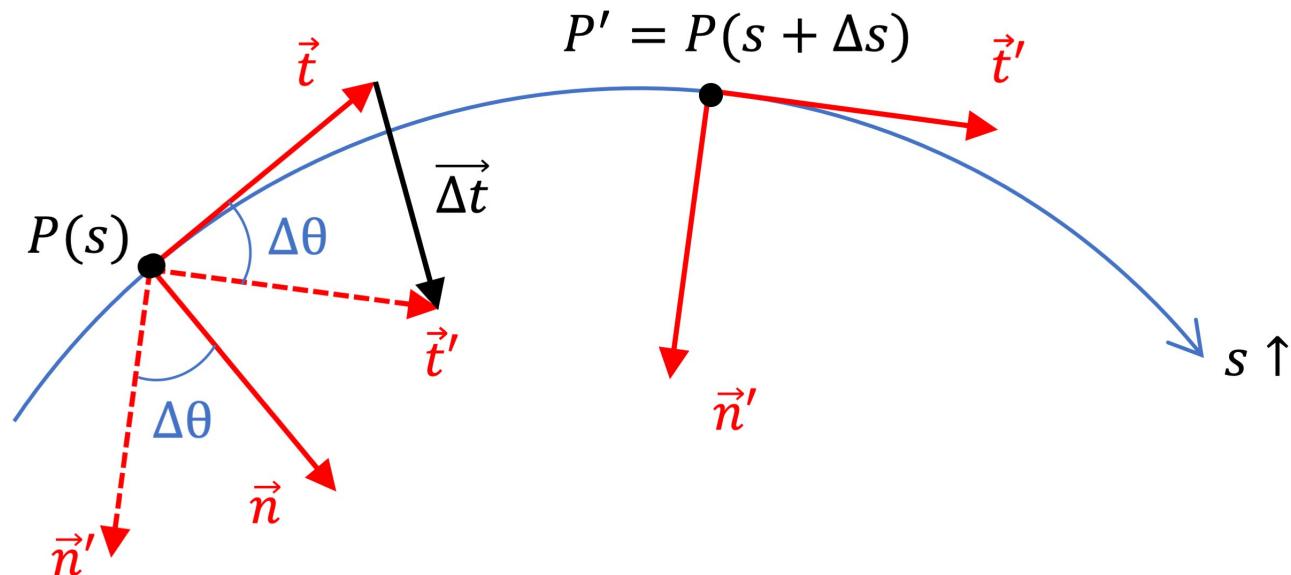
- \vec{t} de longueur constante : sa dérivée (si non nulle) lui est perpendiculaire.
- Normale unitaire :

$$\vec{n} = \frac{d\vec{t}/ds}{\| d\vec{t}/ds \|}$$

- Toujours dirigée vers la concavité de la courbe !
- Une droite n'a pas de vecteur normal !
- Plan osculateur : plan P , \vec{t} , \vec{n}



Rappel : trièdre de Frenet



- Courbure ($1/\mathcal{R}$) et rayon de courbure (\mathcal{R}) en P :

$$\frac{1}{\mathcal{R}} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\Delta\theta|}{|\Delta s|}. \quad (1)$$

NB. Si C est un cercle, le rayon de courbure n'est rien d'autre que la rayon du cercle.

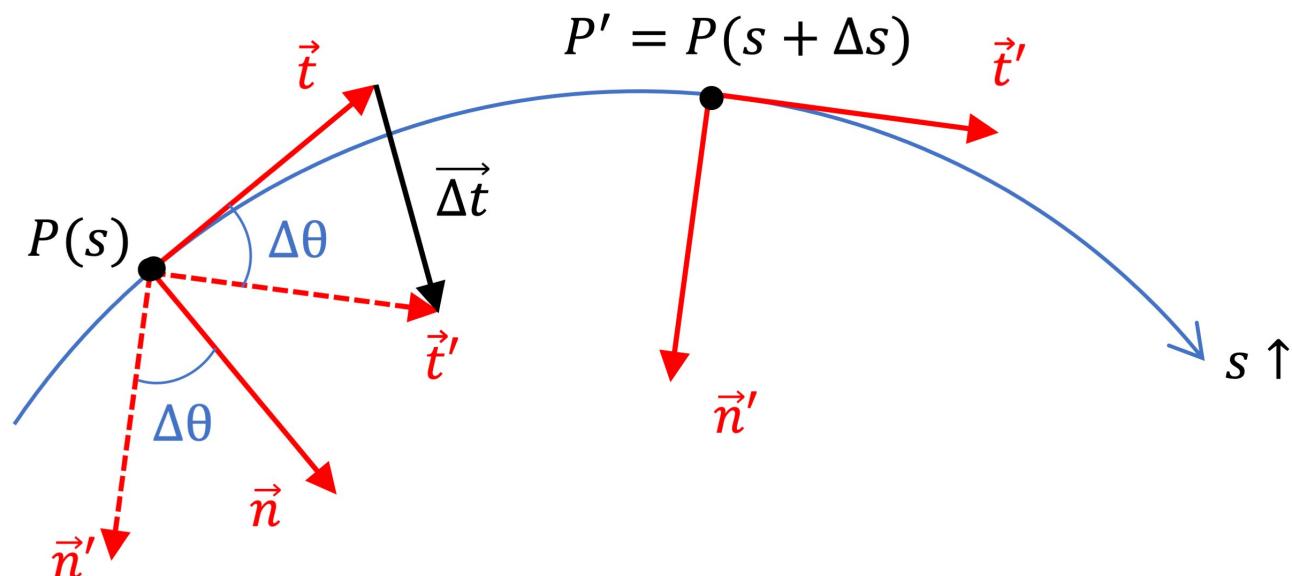
Rappel : trièdre de Frenet

- Première formule de Frenet :

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{\vec{n}}{\mathcal{R}},$$

- car

$$\left\| \frac{d\vec{t}}{ds} \right\| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\|\overrightarrow{\Delta t}\|}{|\Delta s|} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{|\Delta \theta|}{2}}{|\Delta s|} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\Delta \theta|}{|\Delta s|} = \frac{1}{\mathcal{R}}.$$



Rappel : trièdre de Frenet

- Binormale : $\vec{b} = \vec{n} \wedge \vec{t}$
- Trièdre de Frenet : trois vecteurs orthonormés \vec{t} , \vec{n} et \vec{b}
- Dérivée de \vec{b} :

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = \frac{d\vec{n}}{ds} \wedge \vec{t}$$

parallèle à \vec{n} car perpendiculaire à \vec{t} (voir ci-dessus) et à \vec{b} (car \vec{b} de longueur constante)

- Deuxième formule de Frenet :

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = \frac{\vec{n}}{\tau}$$

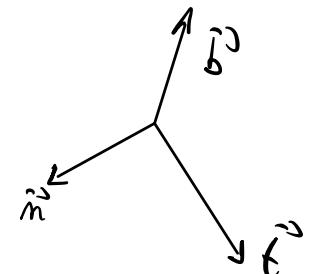
avec $1/\tau$ la torsion (qui mesure les variations de l'orientation du plan osculateur et qui est nulle pour une courbe plane)

Rappel : trièdre de Frenet

- En dérivant la relation $\vec{n} = \vec{t} \wedge \vec{b}$ et en tenant compte des deux premières formules de Frenet, on déduit la
- Troisième formule de Frenet :

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = -\frac{\vec{b}}{\mathcal{T}} - \frac{\vec{t}}{\mathcal{R}}. \quad (2)$$

Rappel : trièdre de Frenet



- Les trois formules de Frenet peuvent s'écrire en bref sous la forme :

$$\frac{d(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})}{ds} = \vec{\Omega} \wedge (\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}),$$

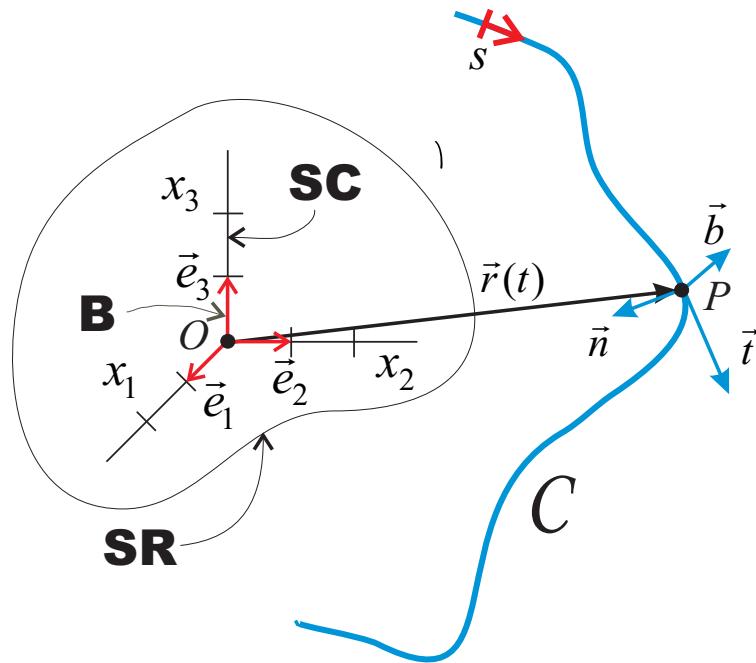
où

$$\vec{\Omega} = \frac{\vec{t}}{\tau} - \frac{\vec{b}}{\rho}$$

est le vecteur de Darboux.

$$\begin{aligned}\vec{\Omega} \wedge \vec{t} &= \left(\frac{\vec{t}}{\tau} - \frac{\vec{b}}{\rho} \right) \wedge \vec{t} = \frac{\vec{n}}{\rho} \\ \vec{\Omega} \wedge \vec{n} &= \left(\frac{\vec{t}}{\tau} - \frac{\vec{b}}{\rho} \right) \wedge \vec{n} = -\frac{\vec{b}}{\rho} - \frac{\vec{t}}{\tau}\end{aligned}$$

Mouvement et trièdre de Frenet



- Si on envisage le mouvement d'un point matériel au cours du temps, on a $s = s(t)$ ou $t = t(s)$ et donc :

$$(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}) (s(t))$$

$$(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}) = (\vec{t}(s(t)), \vec{n}(s(t)), \vec{b}(s(t))).$$

$s \rightarrow t$

$t \rightarrow s$

Mouvement et trièdre de Frenet

- On en déduit :

$$\begin{aligned}\frac{d(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})}{dt} &= \frac{d(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})}{ds} \dot{s} \\ &= \dot{s} \vec{\Omega} \wedge (\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}) \\ &= \vec{\omega}_{Fr} \wedge (\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}),\end{aligned}$$

où $\vec{\omega}_{Fr} = \dot{s} \vec{\Omega}$ est le vecteur de Poisson du système de référence défini par la position du point P à l'instant t et par le trièdre de Frenet de la trajectoire en ce point.

Vitesse dans le trièdre de Frenet

- Si $\vec{r} = \vec{r}(s(t))$, on a :

Trièdre de Frenet. Outil mathématique → défiche de la trajectoire

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{s} \frac{d\vec{r}}{ds} = \dot{s} \vec{t}$$

- Vitesse par rapport à un SR fixe, mais exprimée dans le SR de Frenet qui est "mobile".
- La vitesse est **tangente** à la trajectoire (on le savait déjà !)
- La vitesse pointe vers les s croissants si l'abscisse curviligne est comptée dans le même sens que le mouvement ou vers les s décroissants dans l'autre cas : la vitesse indique donc toujours la direction du mouvement.
- La norme de la vitesse est donnée par la valeur absolue du taux de variation temporelle de l'abscisse curviligne :

$$\| \vec{v} \| = | \dot{s} | .$$

Trièdre de Frenet en termes du temps

- Choisissons une abscisse curviligne qui augmente dans le sens du mouvement ($\dot{s} = |\dot{s}| \geq 0$).
- En combinant $\vec{v} = \dot{s}\vec{t}$ et $\|\vec{v}\| = |\dot{s}|$, il vient :

$$\vec{t} = \frac{\vec{v}}{|\dot{s}|}$$

$$\vec{t} = \frac{\dot{\vec{r}}}{\|\dot{\vec{r}}\|} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}, \quad \frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{d\vec{t}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{1}{|\dot{s}|} \quad (3)$$

- On a aussi :

$$\vec{n} = \frac{d\vec{t}/ds}{\|d\vec{t}/ds\|} = \frac{d\vec{t}/dt \times 1/\dot{s}}{\|d\vec{t}/dt\| \times 1/|\dot{s}|} = \frac{\dot{\vec{t}}}{\|\dot{\vec{t}}\|}. \quad (4)$$

- Trièdre de Frenet directement à partir du paramètre temporel !

$$c \leftarrow b = \vec{n} \wedge \vec{t}$$

Accélération dans le trièdre de Frenet



$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{n}}{dt} = \underbrace{\frac{d(\dot{s}\vec{t})}{dt}}_{\ddot{s}\vec{t}} + \dot{s} \frac{d(\vec{t})}{dt} = \ddot{s}\vec{t} + \dot{s}^2 \underbrace{\vec{n} \wedge \vec{t}}_{\left(\frac{\vec{t}}{\delta} - \frac{\vec{b}}{R} \right) \wedge \vec{t}} = \frac{\vec{n}}{R}$$

- Si on dérive $\vec{v} = \dot{s}\vec{t}$ en tenant compte de $d\vec{t}/dt = \vec{\omega}_{Fr} \wedge \vec{t}$, on trouve :

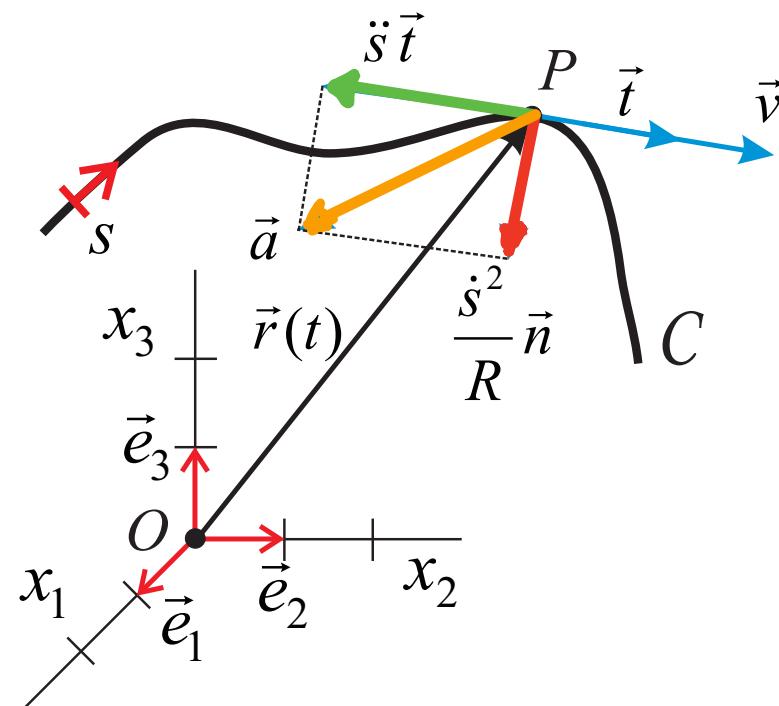
$$\vec{a} = \ddot{s}\vec{t} + \frac{\dot{s}^2}{R}\vec{n}.$$

- L'accélération d'un point est faite de deux contributions et est toujours contenue dans le plan osculateur à la trajectoire.

Accélération dans le trièdre de Frenet

$$\vec{a} = \ddot{s} \vec{t} + \frac{\dot{s}^2}{R} \vec{n}.$$

- Le premier terme constitue ce que l'on appelle l'*accélération tangentielle*. Il est orienté dans le sens du mouvement si le module de la vitesse augmente ou dans le sens opposé au mouvement si ce module diminue.
- Accélération tangentielle : due aux variations du *module* de la vitesse.

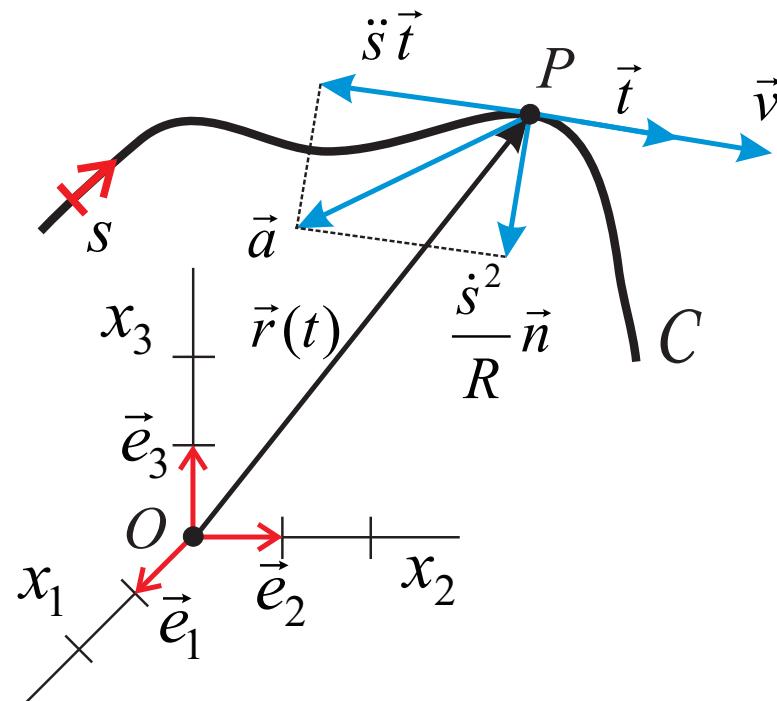


Accélération dans le trièdre de Frenet

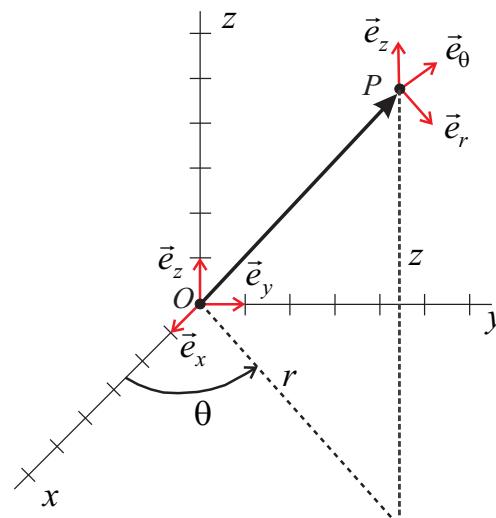
$$\vec{a} = \ddot{s} \vec{t} + \frac{\dot{s}^2}{R} \vec{n}$$

\curvearrowright toujours vers l'intérieur de la courbe.

- La seconde contribution constitue l'*accélération normale*. Elle est toujours directement parallèle au vecteur \vec{n} et pointe donc toujours vers la concavité de la courbe, c'est-à-dire vers le centre de courbure. Pour cette raison, ce terme est souvent appelé accélération "centripète".
- Accélération centripète : due aux variations de la *direction* de la vitesse.
- Notons enfin que dans le cas d'un mouvement rectiligne (le vecteur \vec{n} n'est pas défini dans ce cas), l'accélération peut s'écrire $\vec{a} = \ddot{s} \vec{t}$.



\vec{V} et \vec{a} en coord. cylindriques



- Décomposons le vecteur position, la vitesse et l'accélération d'un point dans la base mobile :

! r et z varie
 e_r

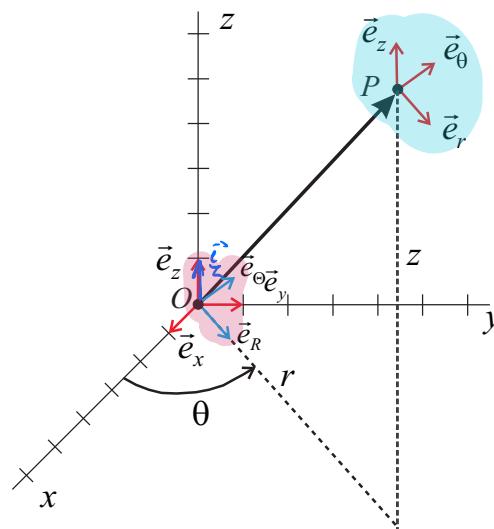
$$\vec{r} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z,$$

$$\vec{v} = v_r\vec{e}_r + v_\theta\vec{e}_\theta + v_z\vec{e}_z,$$

$$\vec{a} = a_r\vec{e}_r + a_\theta\vec{e}_\theta + a_z\vec{e}_z.$$

- \vec{v} et \vec{a} représentent la vitesse et l'accélération par rapport à une base “fixe” mais sont décomposés dans une base mobile !
- On va déterminer les composantes de \vec{v} et \vec{a} .
- Il faut dériver $\vec{r} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$ et donc \vec{e}_r !

\vec{V} et \vec{a} en coord. cylindriques (2)



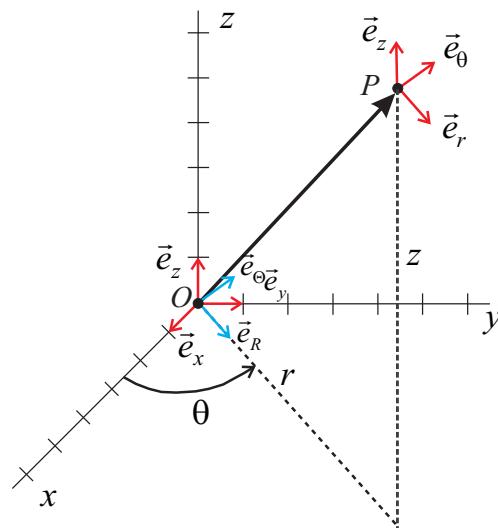
- Vitesse angulaire de $SR_{cyl} = SR_{cyl}(P; (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z))$ par rapport au système $SR = SR(O; (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z))$ des coordonnées cartésiennes ?
- $SR_{int} = SR(O; (\vec{e}_R, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z))$ effectue par rapport à SR une rotation autour de l'axe commun \vec{e}_z , d'où :

$$\vec{\omega}_{SR_{int} \div SR} = \dot{\theta} \vec{e}_z.$$

- SR_{cyl} est en translation par rapport à SR_{int} et donc

$$\vec{\omega}_{SR_{cyl} \div SR_{int}} = 0.$$

\vec{V} et \vec{a} en coord. cylindriques (3)



- Vu l'additivité des vitesses angulaires, on a donc

$$\vec{\omega}_{cyl} = \dot{\theta} \vec{e}_z.$$

\vec{V} et \vec{a} en coord. cylindriques (4)

- On calcule la vitesse comme suit :

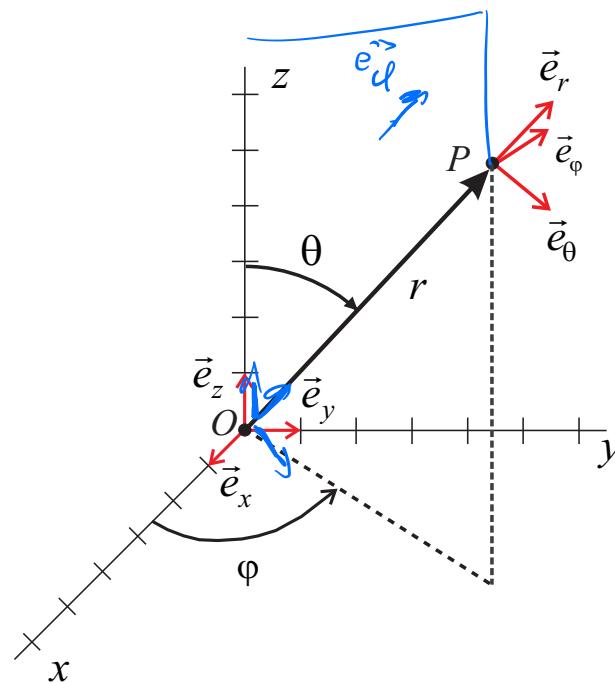
$$\begin{aligned}\vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OP}}{dt} \\ &= \frac{d(r\vec{e}_r + z\vec{e}_z)}{dt} \\ &= \cancel{r}\vec{e}_r + r\vec{\omega}_{cyl} \wedge \vec{e}_r + \cancel{z}\vec{e}_z + z\vec{\omega}_{cyl} \wedge \vec{e}_z \\ &= \underbrace{\cancel{r}\vec{e}_r}_{\text{v}_r} + \underbrace{r\dot{\theta}\vec{e}_\theta}_{\text{v}_\theta} + \underbrace{\cancel{z}\vec{e}_z}_{\text{v}_z}.\end{aligned}$$

- En dérivant la vitesse, on trouve l'expression de l'accélération :

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + \frac{1}{r}(r^2\dot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z.$$

- Bien différent des coordonnées cartésiennes !

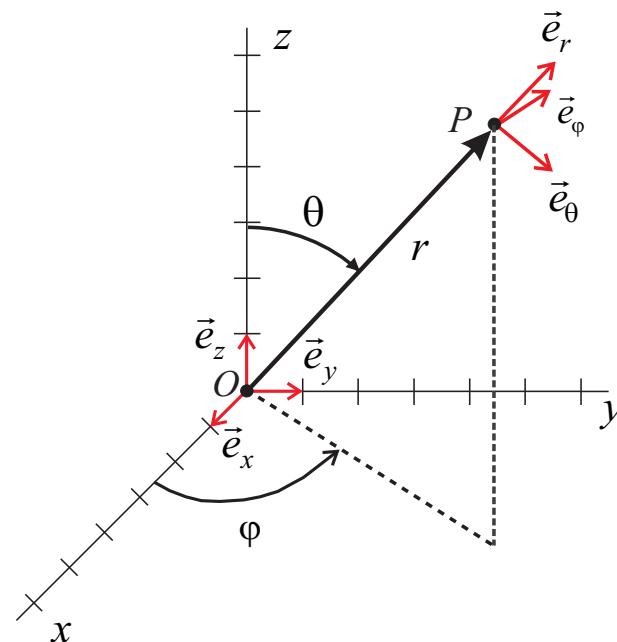
\vec{V} et \vec{a} en coord. sphériques



- Si $SR_{sph} = SR(P; (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi))$,
- Si SR_{int} est le même système intermédiaire que pour coordonnées cylindriques
- On alors alors :

$$\begin{aligned}\vec{\omega}_{SR_{sph} \div SR_{int}} &= \dot{\theta} \vec{e}_\varphi. \quad \text{→ plan + } \vec{e}_\varphi \text{ ⊥ } \text{plan} \\ \vec{\omega}_{SR_{int} \div SR} &= \dot{\varphi} \vec{e}_z. \\ \vec{\omega}_{sph} &= \dot{\theta} \vec{e}_\varphi + \dot{\varphi} \vec{e}_z.\end{aligned}$$

\vec{V} et \vec{a} en coord. sphériques (2)



- On en déduit :

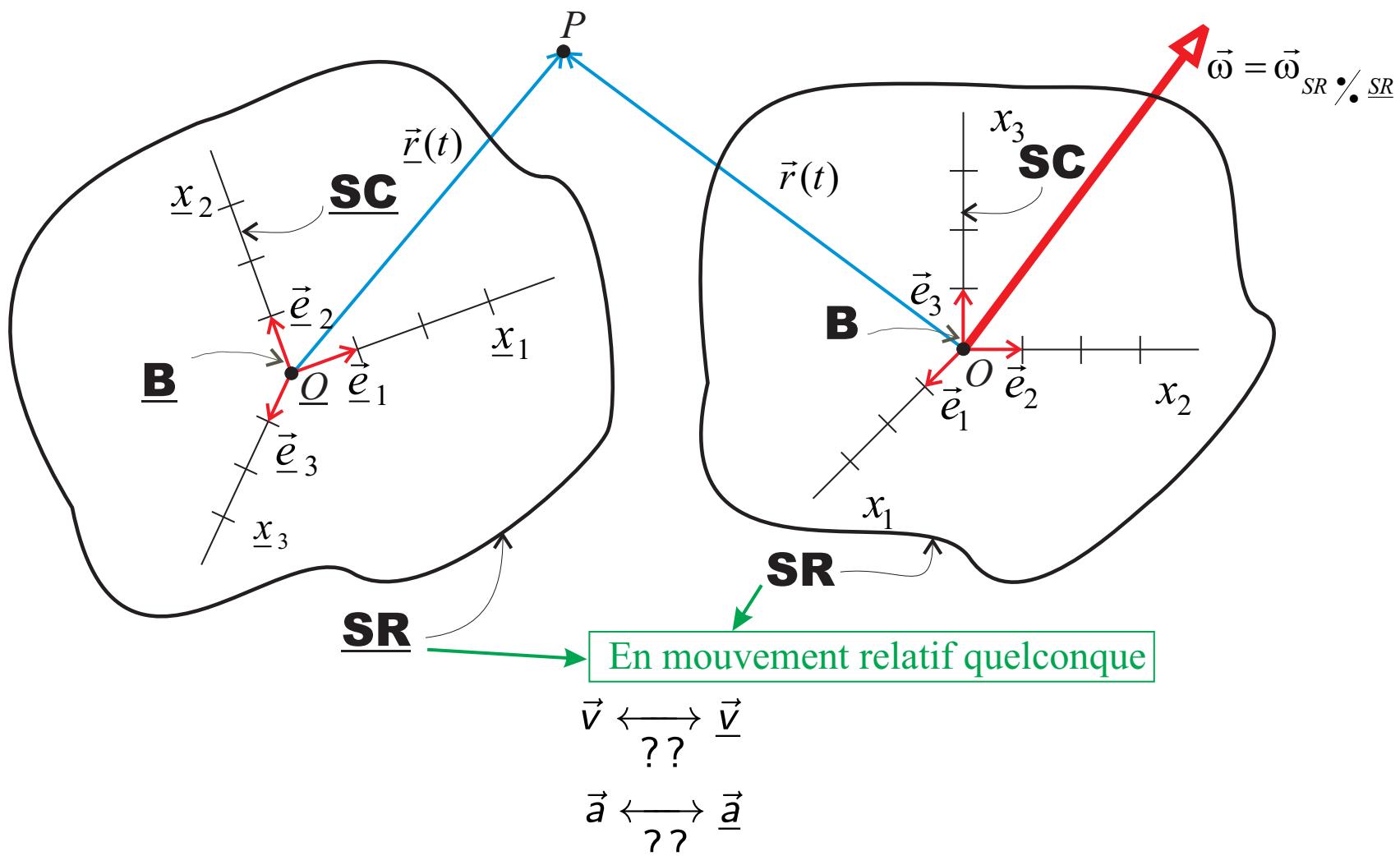
$$\begin{aligned}\vec{v} &= \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\vec{e}_\varphi. \\ \vec{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)\vec{e}_r + \\ &\quad (r\ddot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\cos\theta\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta + \\ &\quad (r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta)\vec{e}_\varphi.\end{aligned}$$

Translation, Rotation et Mvt. Hélicoïdal

Exercice :

- Si $\vec{v} = \vec{v}_0$
alors **MRU** (Mouvement Rectiligne Uniforme)
- Si $\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$
alors **MCU** (Mouvement Circulaire Uniforme)
- Si $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \wedge \vec{r}$, avec \vec{v}_0 parallèle à $\vec{\omega}$
alors **MHU** (Mouvement Hélicoïdal Uniforme)

Loi de composition des \vec{V} et \vec{a}



- Pour les distinguer, on dira que SR est le système “absolu” et SR est le système “relatif”

Loi de composition des vitesses

- La loi de composition des vitesses s'écrit

$$\begin{aligned}\underline{\vec{v}} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OP}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{O'P}}{dt} && \text{Si j'ouvre } \\ &= \underline{\vec{v}_o} + \frac{d\overrightarrow{O'P}}{dt} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P}, && \text{j'arrête sur mon doigt} \\ &= \vec{v} + \underline{\vec{v}_o} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P} \\ &= \vec{v} + \vec{v}_e\end{aligned}$$

$\rightarrow \vec{v} = \vec{o}$
donc $\vec{\omega} = \vec{v}_e$

où la vitesse d'entraînement est donnée par

$$\vec{v}_e = \underline{\vec{v}_o} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P}$$

- “Vitesse absolue = Vitesse relative + Vitesse d'entraînement”
- La **vitesse d'entraînement** peut s'interpréter comme étant la vitesse par rapport à SR du point fixe de SR en lequel se trouve le point P à l'instant considéré.
- Malgré les apparences, la vitesse d'entraînement est indépendante de O .

Loi de composition des accélérations

- La loi de composition des accélérations s'écrit

$$\vec{a} = \vec{a}_o + \vec{a}_e + \vec{a}_c$$

où l'accélération d'entraînement est donnée par

$$\vec{a}_e = \vec{a}_o + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP}) + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OP}$$

et l'accélération complémentaire ou de Coriolis est donnée par

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}$$

\hookrightarrow dépend de \vec{v}

- “Accélération absolue =
Accélération relative + Accélération d'entraînement + Accélération de Coriolis”

Loi de comp. des accélérations (2)

$\vec{\omega} \approx 0$

$$\underbrace{(\vec{a})}_{\approx 0} = \vec{a} + \underbrace{\vec{a}_e}_{\approx 0} + \vec{a}_c, \quad \vec{a}_e = \vec{a}_O + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP}) + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OP}, \quad \vec{a}_c = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}$$

- ① L'accélération d'entraînement peut s'interpréter comme l'accélération absolue du point fixe de SR qui coïncide avec P à l'instant considéré.
- ② L'accélération d'entraînement est évidemment indépendante du point O .
↳ Vu ① = "acc. de mon doigt".
- ③ [L'accélération d'entraînement n'est pas égale en général à la dérivée absolue (c'est-à-dire par rapport à SR) de la vitesse d'entraînement.]
- ④ L'accélération de Coriolis est proportionnelle à \vec{v} : elle s'annule donc lorsque le point P est fixe dans le système relatif.
- ⑤ Si SR effectue un mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport à SR , alors on a identiquement $\vec{a} = \vec{a}_e$. Inversément, si l'égalité des accélérations absolue et relative est vraie à tout instant et pour tout mouvement de n'importe quelle particule, alors les deux systèmes ont un mouvement relatif de translation rectiligne uniforme.

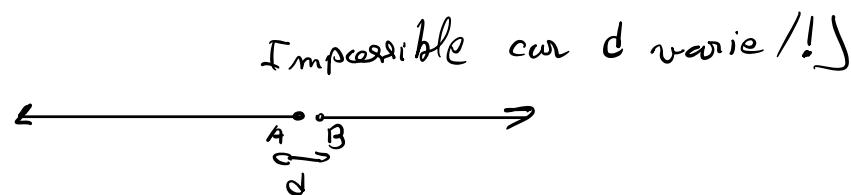
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Translation} \Rightarrow \vec{\omega} = \vec{0} \\ \text{Rectiligne et uniforme} \Rightarrow \vec{a}_e = \vec{0} \quad (\text{car } \vec{\omega} = \text{const}) \end{array} \right.$$

1 Cinématique

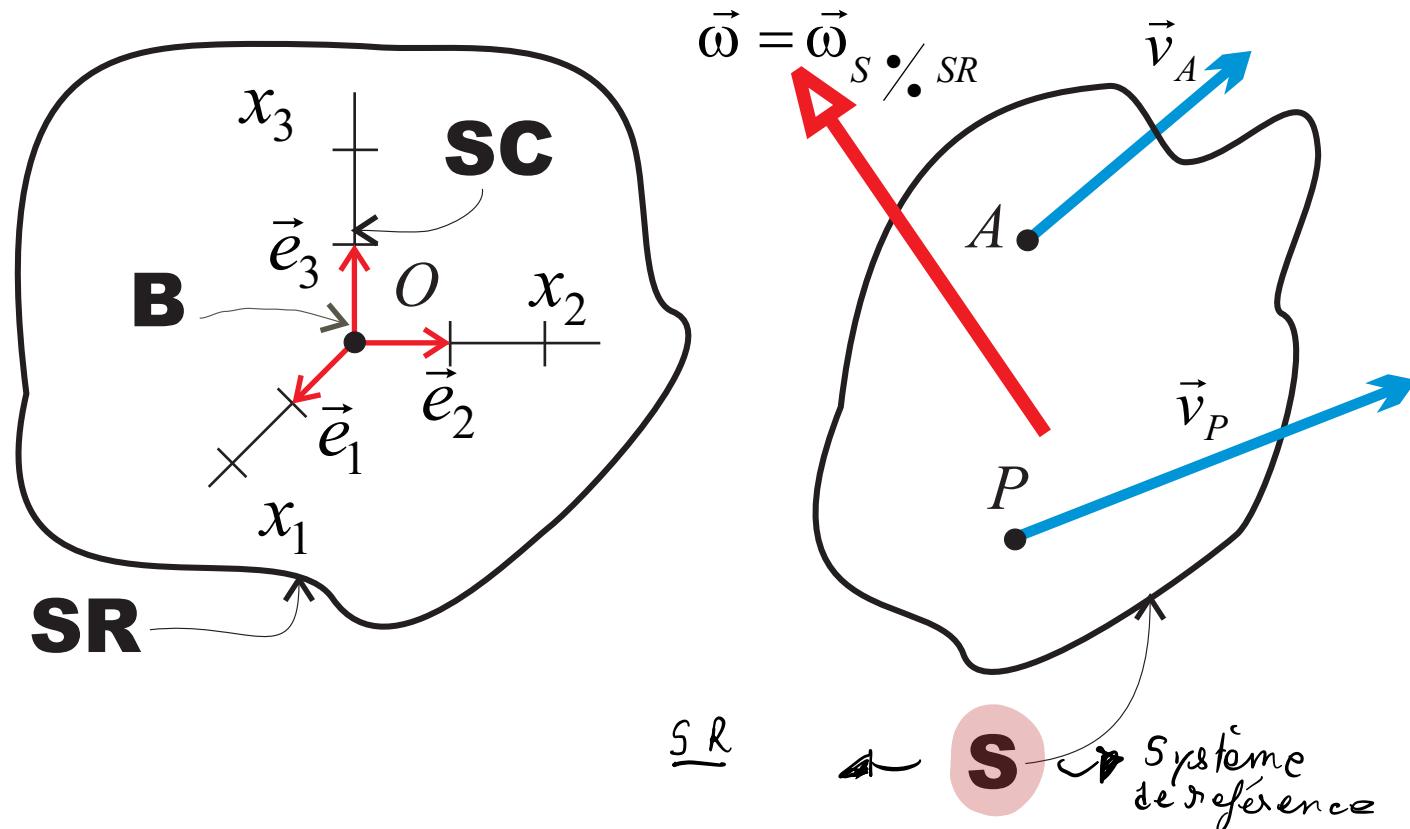
- Systèmes de référence et systèmes de coordonnées
- Vecteur fonction du temps
- Formule de Poisson
- Cinématique du point
- **Cinématique du solide**
- Les opérateurs différentiels de la physique

Cinématique du solide

- Un solide peut-être vu comme un ensemble de points dont les distances relatives restent constantes au cours du temps.
- Les vitesses des points d'un solide ne sont pas indépendantes les unes des autres !



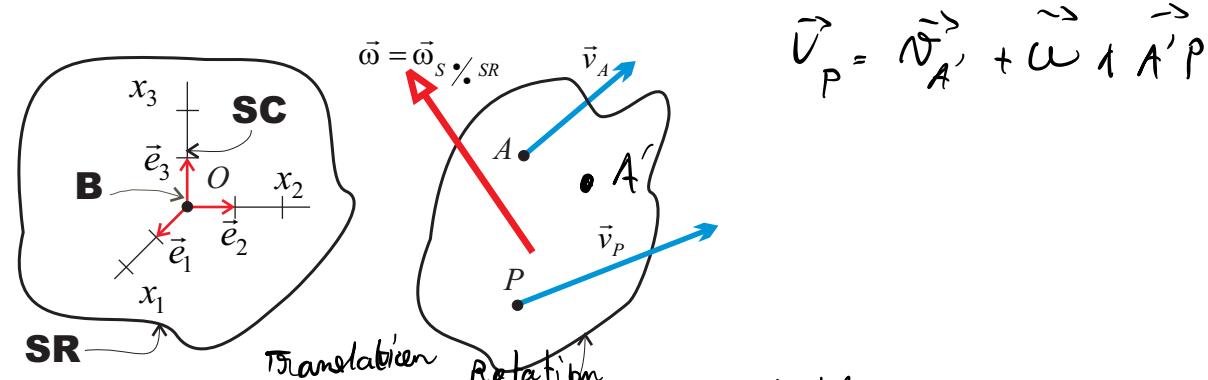
Champ des vitesses d'un solide



- Loi de composition des vitesses : $\vec{v}_P = \underline{\vec{v}}_P + \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}$.
- Si P est un point du solide, sa vitesse par rapport au solide est nulle. On déduit la formule du **champ des vitesses d'un solide** : $\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}$

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}.$$

Champ des vitesses d'un solide (2)



- Champ des vitesses d'un solide : $\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \vec{AP}$. S rotation Valable à un instant donné
 - Deux points distincts ont en général des vitesses différentes (Exception : si $\vec{\omega} = 0$). La notion de **vitesse d'un solide n'a donc pas de sens** en général.
 - Ch. des v. d'un solide = vision **instantanée** : "état de mvt", "mvt instantané"
 - Interprétation : les mouvements (instantanés) d'un solide sont faits de la **superposition** d'une **translation** à vitesse \vec{v}_A et d'une **rotation** à vitesse angulaire $\vec{\omega}$ autour de l'axe $A + \vec{\omega}$.
 - Interprétation valable quel que soit le point A que l'on a décidé de privilégier dans le raisonnement : si on change ce point A , ce sont *à la fois* la vitesse de translation et l'axe de rotation qui s'en trouvent modifiés.
 - En choisissant judicieusement le point A , il est possible d'affiner substantiellement l'interprétation géométrique du champ des vitesses.

Invariants du ch. des v. d'un solide

- Champ des vitesses d'un solide : $\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}$.
($\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}$) $\vec{\omega} = 0$ car produit mixte
- En multipliant scalairement par $\vec{\omega}$ l'équation ci-dessus, on trouve :

$$\vec{v}_P \cdot \vec{\omega} = \vec{v}_A \cdot \vec{\omega}.$$

→ Les projections de \vec{v}_A et \vec{v}_P sur $\vec{\omega}$ sont égales

- La quantité $\vec{v}_P \cdot \vec{\omega}$ est ce que l'on appelle un **invariant** du champ des vitesses.
- Comme $\vec{\omega}$ est unique, on peut considérer que la vitesse angulaire constitue elle-aussi un "invariant" du champ des vitesses.
- Dans le cas particulier où $\vec{\omega}$ est nul, la vitesse \vec{v}_P peut aussi être considérée comme un invariant du champ des vitesses.
- **Classification** des mouvements en fonction de la valeur des **invariants**.

Classification des états de mvt.

1. $\vec{\omega} = 0$

(a) $\vec{v} = 0$

Repos par rapport à SR à l'instant considéré.

(b) $\vec{v} \neq 0$

Translation à vitesse \vec{v} par rapport à SR à l'instant considéré.

→ Tous les pts à m̄ vitesse
ex: voiture sur l'autoroute

Remarque : division vectorielle

L'équation

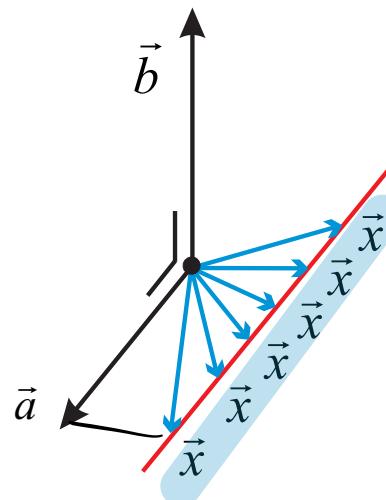
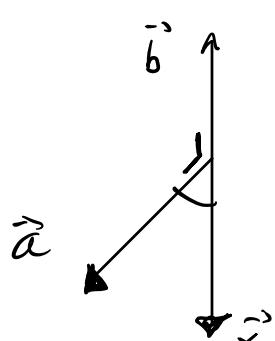
$$\vec{a} \wedge \vec{x} = \vec{b}$$

admet la droite de solutions suivantes, pour autant que $\vec{a} \perp \vec{b}$ ($\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$) :

↳ C. E (condition existence)

$$\vec{x} = -\frac{\vec{a} \wedge \vec{b}}{a^2} + \alpha \vec{a}$$

avec α un réel quelconque.



Classification des états de mvt. (2)

2.

$$\vec{\omega} \neq 0$$

(a) $\vec{v}_P \cdot \vec{\omega} = 0$

Les vitesses de tous les points du solide sont contenues dans un plan perpendiculaire à $\vec{\omega}$ et il existe une droite de points I du solide tels que :

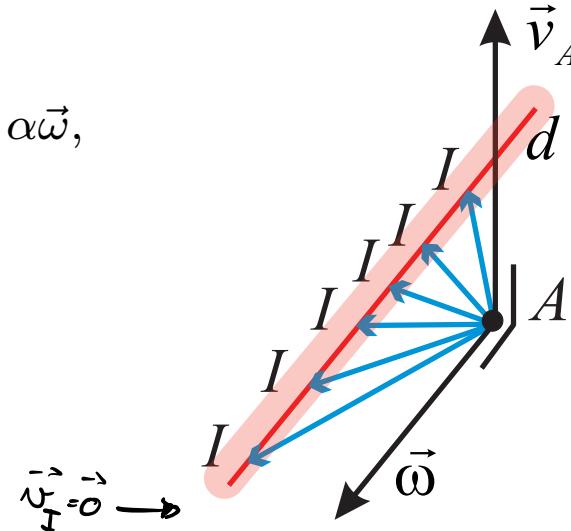
$$\vec{\omega} \wedge \vec{A}I = -\vec{v}_A$$
$$\rightarrow \vec{A}I = \vec{\omega} \wedge \vec{A}I + \alpha \vec{\omega}$$

$$\vec{v}_I = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \vec{AI} = 0.$$

En effet, comme $\vec{v}_A \cdot \vec{\omega} = 0$, ce problème de division vectorielle admet une droite de points I comme solutions :

$$\vec{AI} = \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{v}_A}{\omega^2} + \alpha \vec{\omega},$$

où α est un nombre réel quelconque.



Classification des états de mvt. (3)

2. $\vec{\omega} \neq 0$ (suite)

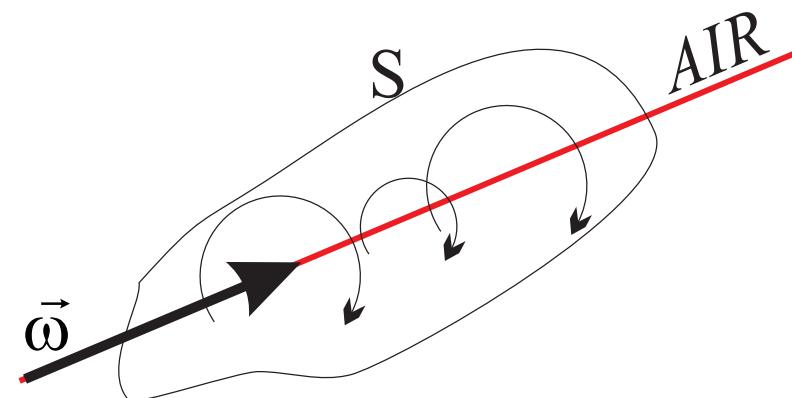
(a) $\vec{v}_P \cdot \vec{\omega} = 0$ (suite)

$$\begin{aligned}\vec{v}_P &= \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_P \\ \vec{v}_P &= \vec{v}_I + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_P\end{aligned}$$

En privilégiant un de ces points I , le champ des vitesses s'écrit

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge \vec{IP} :$$

mouvement de rotation autour de l'axe $I + \vec{\omega}$ (**Axe Instantané de Rotation ou AIR**).



Classification des états de mvt. (4)

$$2. \quad \vec{\omega} \neq 0$$

(b) $\vec{v}_P \cdot \vec{\omega} \neq 0$ \rightarrow Pas de solution de la division vectorielle
 $\rightarrow \vec{\omega}_A \neq 0 \wedge A$

Il existe une droite de points l du solide dont la vitesse est parallèle au vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$. Cherchons l tel que :

I que : $\omega \wedge x = \lambda \vec{\omega} - \vec{v}_A$

$$\vec{v}_I = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AI} = \lambda \vec{\omega}, \Rightarrow \vec{\omega} \cdot (\lambda \vec{\omega} - \vec{v}_A) = 0$$

\uparrow
inconverse

miner. $\Rightarrow \lambda = \vec{\omega} \cdot \vec{v}_A$

où λ est un nombre à déterminer.

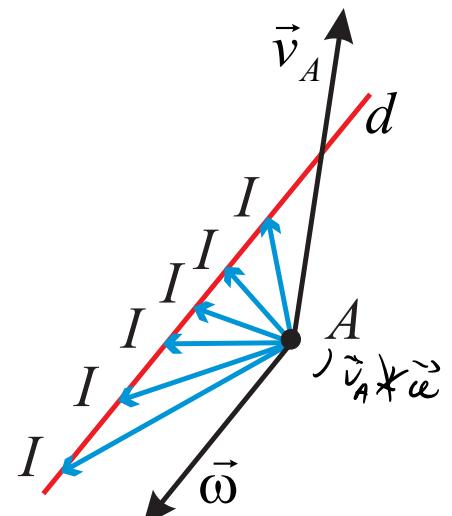
On vérifie facilement que cette équation pour I n'admet de solution que si

$$\vec{\omega} \wedge (\vec{v}_A - \lambda \vec{\omega}) + \alpha \vec{\omega} = \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{v}_A}{\omega^2} + \alpha \vec{\omega} \quad \lambda = \frac{\vec{\omega} \cdot \vec{v}_A}{\omega^2}.$$

La droite des solutions s'écrit alors :

$$\vec{AI} = \frac{\vec{\omega} \wedge (\vec{v}_A - \lambda \vec{\omega})}{\omega^2} + \alpha \vec{\omega} = \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{v}_A}{\omega^2} + \alpha \vec{\omega},$$

où α est un nombre réel quelconque.



Classification des états de mvt. (5)

2. $\vec{\omega} \neq 0$ (suite)

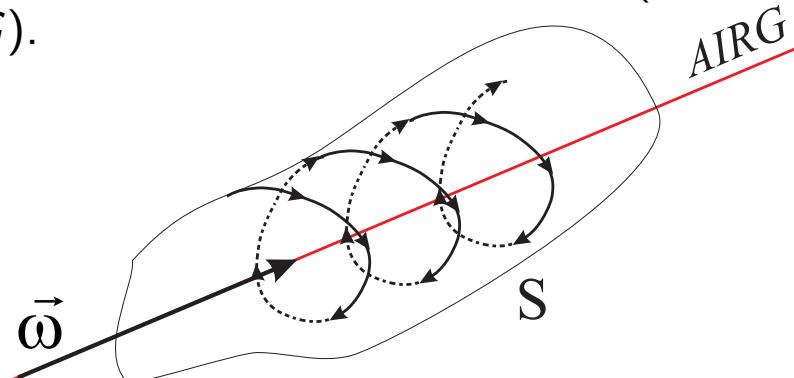
(b) $\vec{v}_P \cdot \vec{\omega} \neq 0$ (suite) $\rightarrow v_I \neq \vec{\omega}$

En privilégiant un de ces points I , le champ des vitesses s'écrit :

$$\vec{v}_P = \left(\vec{v}_I + \frac{\vec{\omega}}{\omega} \right) \frac{\vec{\omega}}{\omega} + \vec{\omega} \wedge \vec{IP} :$$

mouvement hélicoïdal autour de la droite des points I (**Axe Instantané de Rotation et de Glissement ou AIRG**).

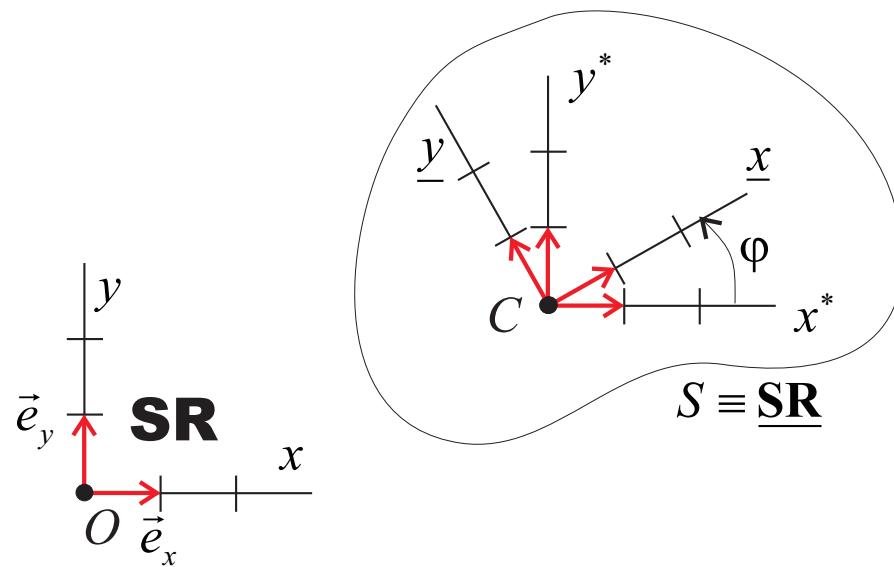
↳ Valable
à un instant donné



- ▶ C'est le **cas le plus général** ! À tout instant, le mouvement d'un solide peut donc être vu comme un mouvement hélicoïdal.
- ▶ D'un instant à l'autre, l'*AIRG* peut varier, se transformer en *AIR*, en "axe de glissement" (translation) ou même disparaître (repos instantané).

Solide en mouvement plan

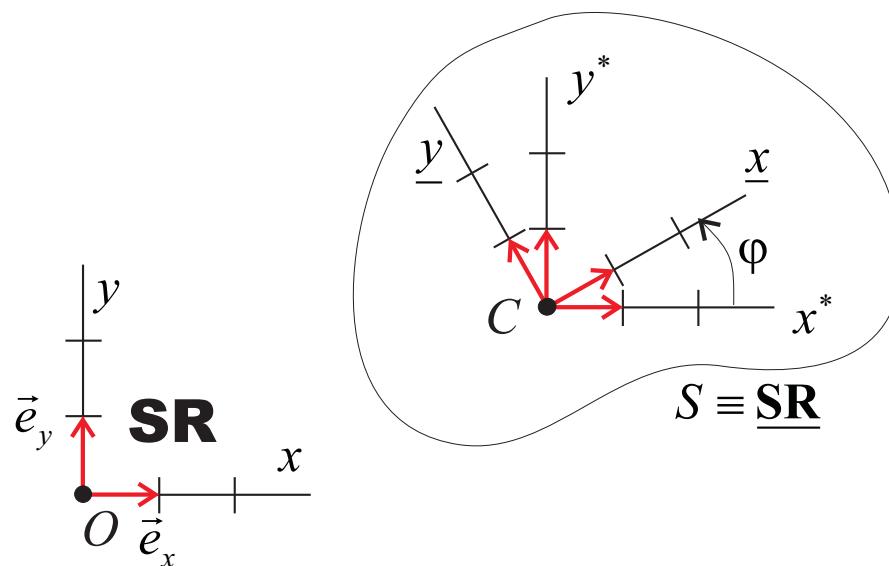
- Les mouvements d'un solide peuvent être tels que tous les points matériels du solide décrivent des trajectoires planes, dans des plans parallèles. Les mouvements de ce type sont appelés *mouvements plans*.
- Ces *mouvements plans* peuvent aussi être définis par le fait qu'un plan $\underline{\pi}$ fixe par rapport au solide glisse sur un plan π fixe par rapport au système de référence. Les vitesses \vec{v}_P de tous les points P du solide sont alors parallèles au plan π .



Solide en mouvement plan (2)

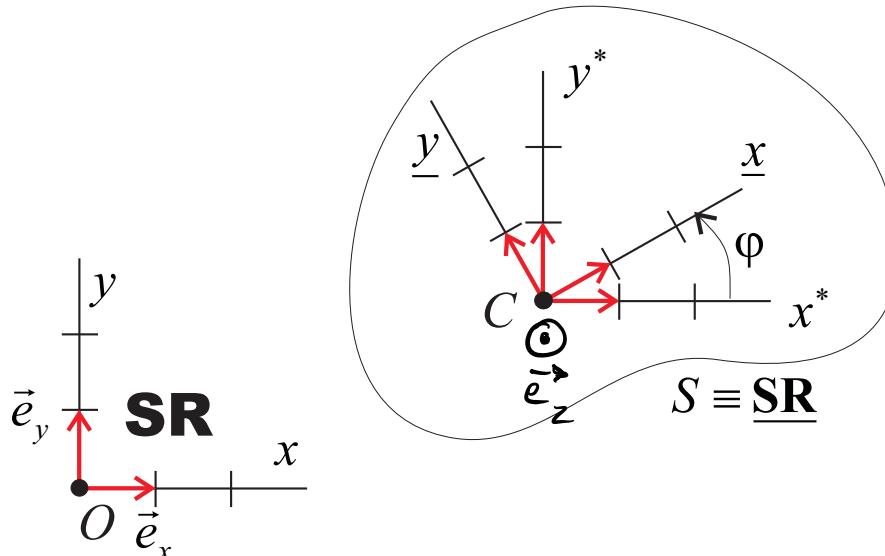
- Pour rendre compte de ces mouvements on peut, d'une part, décrire les mouvements dans π d'un point C particulier choisi dans le plan π du solide et, d'autre part, décrire les variations d'une variable angulaire caractérisant l'“orientation” du solide autour de C .

NB. C quelconque ici mais plus tard $C = \text{centre de masse} !$



- Les *trois* fonctions du temps que sont $x_c(t)$, $y_c(t)$ et $\varphi(t)$ permettent de définir univoquement la position du solide à tout instant. On dit que le solide en mouvement plan est un système à *trois degrés de liberté*.

Solide en mouvement plan (3)



- En envisageant SR , SR^* et \underline{SR} , on calcule la vitesse angulaire du solide par rapport à SR :

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi} \vec{e},$$

avec ici $\vec{e} = \vec{e}_z$.

- Le champ des vitesses du solide s'écrit :

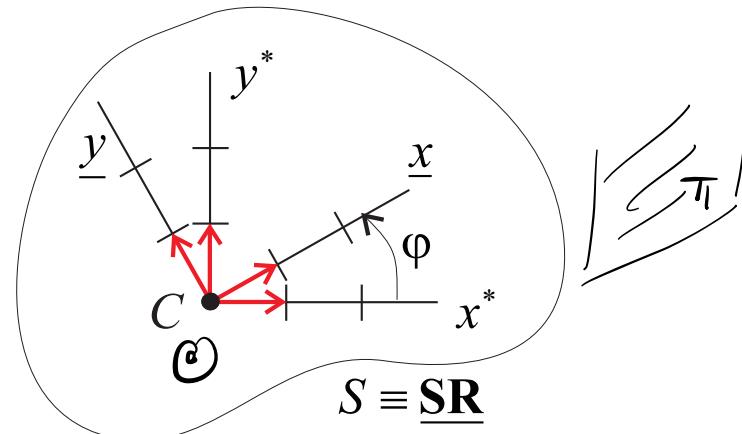
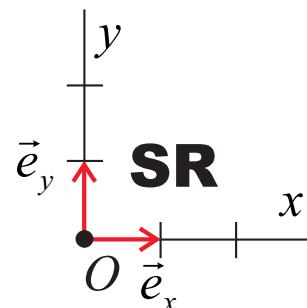
$$\begin{aligned}\vec{v}_P &= \vec{v}_C + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CP} \\ &= \vec{v}_C + \dot{\varphi} \vec{e} \wedge \overrightarrow{CP}.\end{aligned}$$

Solide en mouvement plan (4)

→ Voir les invariants

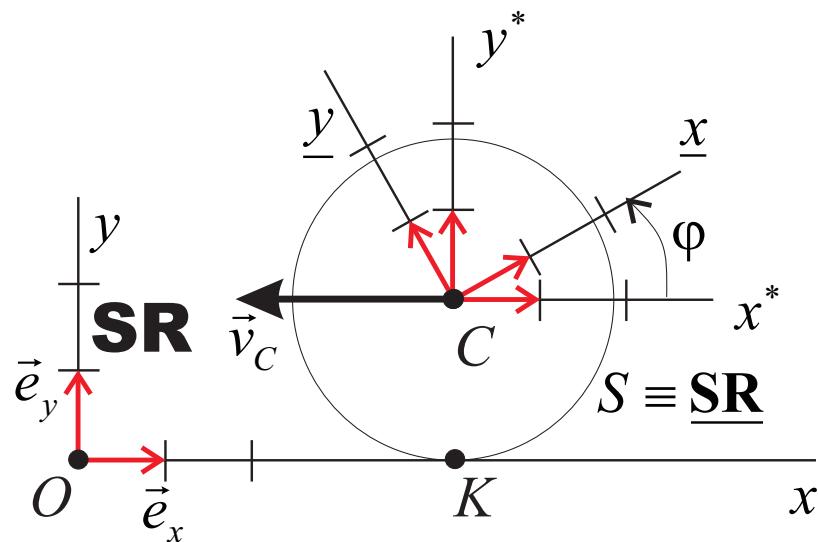
$$\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}_c = 0$$

car $\vec{\omega} \perp \vec{\pi}$



- Comme les vitesses des différents points du solide sont toutes parallèles à π , on a $\vec{v}_P \cdot \vec{\omega} = 0$: il existe un *AIR* à chaque instant.
- **Centre Instantané de Rotation ou *CIR*** : intersection de *AIR* avec le plan π (pas le point C en général!).
 ↳ pt de vitesse nulle
 ↳ le *CIR* bouge au cours du temps.
- Lorsque le temps s'écoule, ce sont différents points du solide qui, à leur tour, jouent le rôle du *CIR*. La courbe décrite par le *CIR* par rapport au solide constitue alors ce que l'on appelle la ***roulante***. De manière similaire, la position du *CIR* par rapport au **système de référence *SR*** est, elle aussi, variable. La courbe décrite par le *CIR* par rapport au système de référence porte le nom de ***base***.

Application : RSG

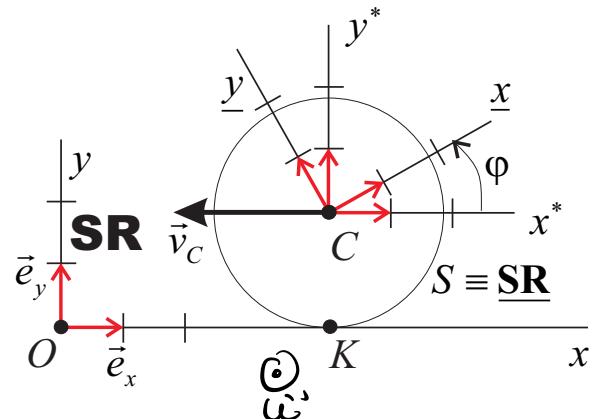


- Roulement sans glissement (“RSG”) d’un disque plan sur une droite servant de guide :
- On a $\vec{\omega} = \dot{\varphi}\vec{e}_z$ et le champ des vitesses s’écrit :

$$\vec{v}_P = \vec{v}_C + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CP},$$

- si C est le centre du solide et si on impose que le contact soit maintenu, la vitesse \vec{v}_C doit être supposée parallèle au “rail” Ox .

Roulement sans glissement (2)



- La vitesse du point de contact K est donnée par

$$\underline{\vec{v}_K} = \underline{\vec{v}_C} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CK},$$

vitesse horizontale

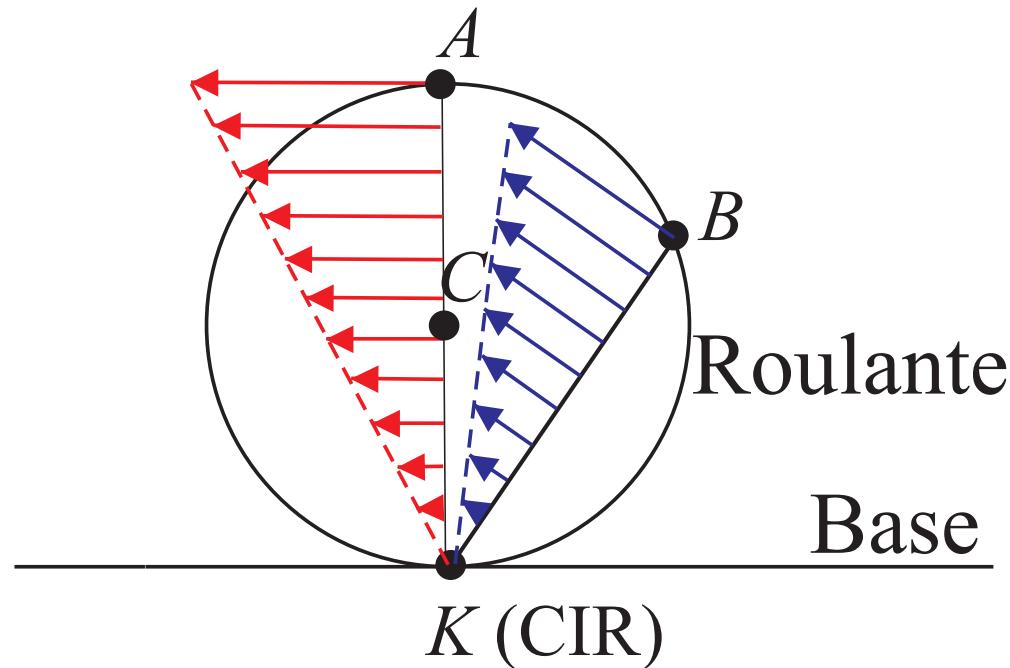
où \vec{v}_C et $\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CK}$ sont parallèles au rail : la composante de \vec{v}_K perpendiculaire au rail est égale à zéro !

- Si on suppose que le mouvement est un *roulement sans glissement*, la composante de \vec{v}_K parallèle au rail doit aussi s'annuler et on a donc $\vec{v}_K = 0$!
- K est le *CIR*. Le pourtour du disque est la *roulante* et l'axe Ox est la *base*.

Roulement sans glissement (3)

- Si on tient compte de l'annulation de la vitesse de K , le champ des vitesses du solide peut se récrire :

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{KP}.$$

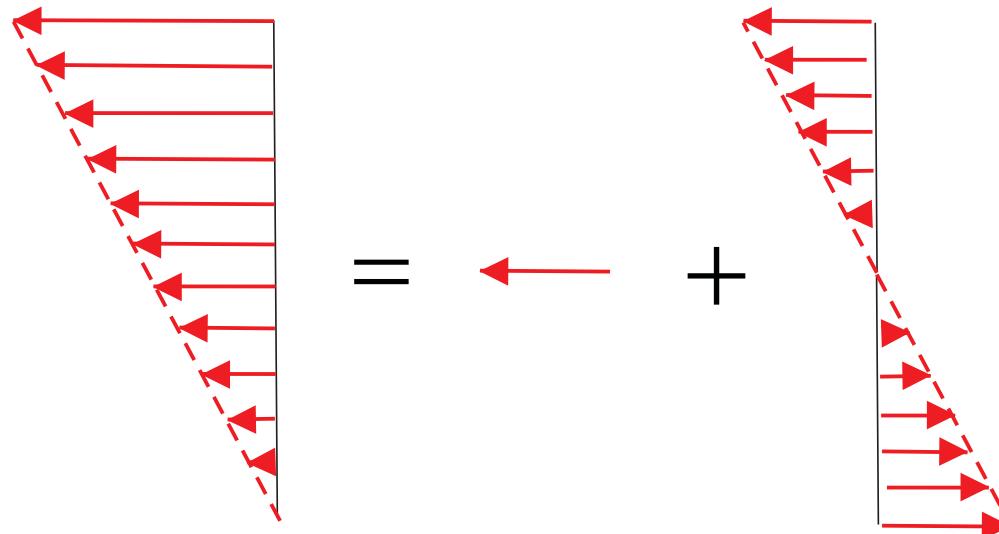


Roulement sans glissement (4)

- NB La décomposition du champ des vitesses sous la forme

$$\vec{v}_P = \vec{v}_C + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CP},$$

peut s'interpréter au moyen du graphique suivant :



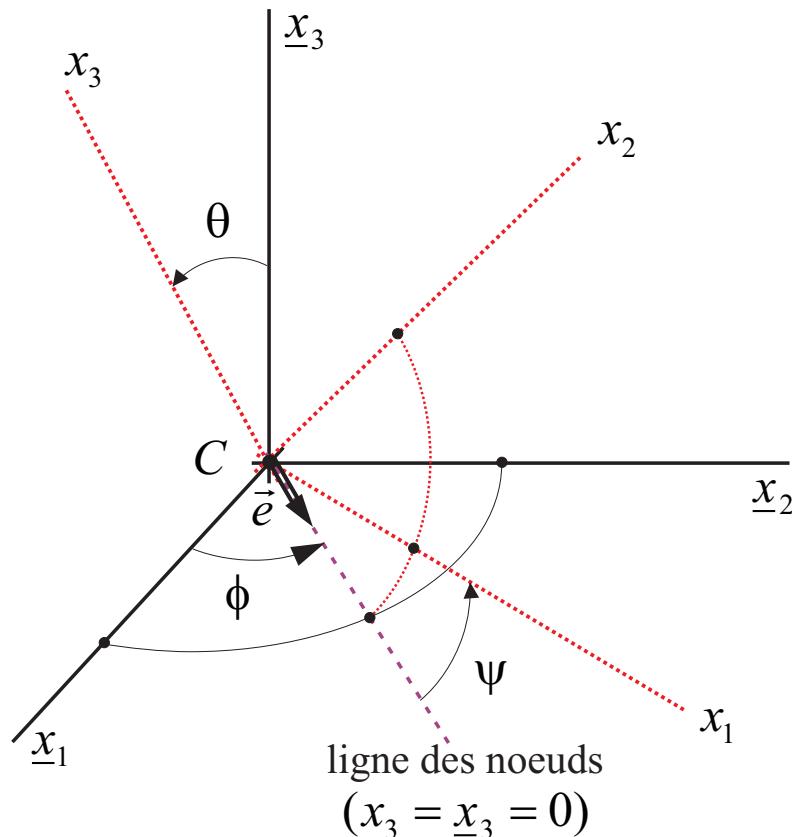
- NB Le RSG a pour effet de “coupler” les mouvements de translation et de rotation.

Cinématique du solide dans l'espace

- Pour définir de manière univoque la position d'un solide par rapport à un système de référence, il n'est évidemment pas nécessaire de connaître la position de tous les points du solide.
- Les positions de 3 points non alignés du solide, c-à-d **9 nombres**, suffisent !
- Ces 9 nombres ne sont cependant **pas indépendants** puisque les 3 distances séparant les 3 paires de points que l'on peut former avec les 3 points doivent rester constantes au cours du temps. On dispose donc de 3 relations entre les 9 nombres.
- En fin de compte, **6 paramètres** indépendants permettent et suffisent à définir univoquement la position d'un solide. On dit qu'un solide qui se déplace dans l'espace possède **6 degrés de liberté**. Ces 6 paramètres peuvent être choisis de diverses manières. Une façon commode de procéder est la suivante.
- Tout d'abord on choisit 1 point particulier C du solide et on utilise comme paramètres les 3 coordonnées de ce point (C est quelconque pour le moment mais par la suite C sera souvent le centre de masse du solide).
- Ensuite, on peut choisir 3 autres paramètres permettant de spécifier de manière univoque l'**orientation** du solide autour du point C choisi. Une possibilité est d'utiliser les **angles d'Euler**.

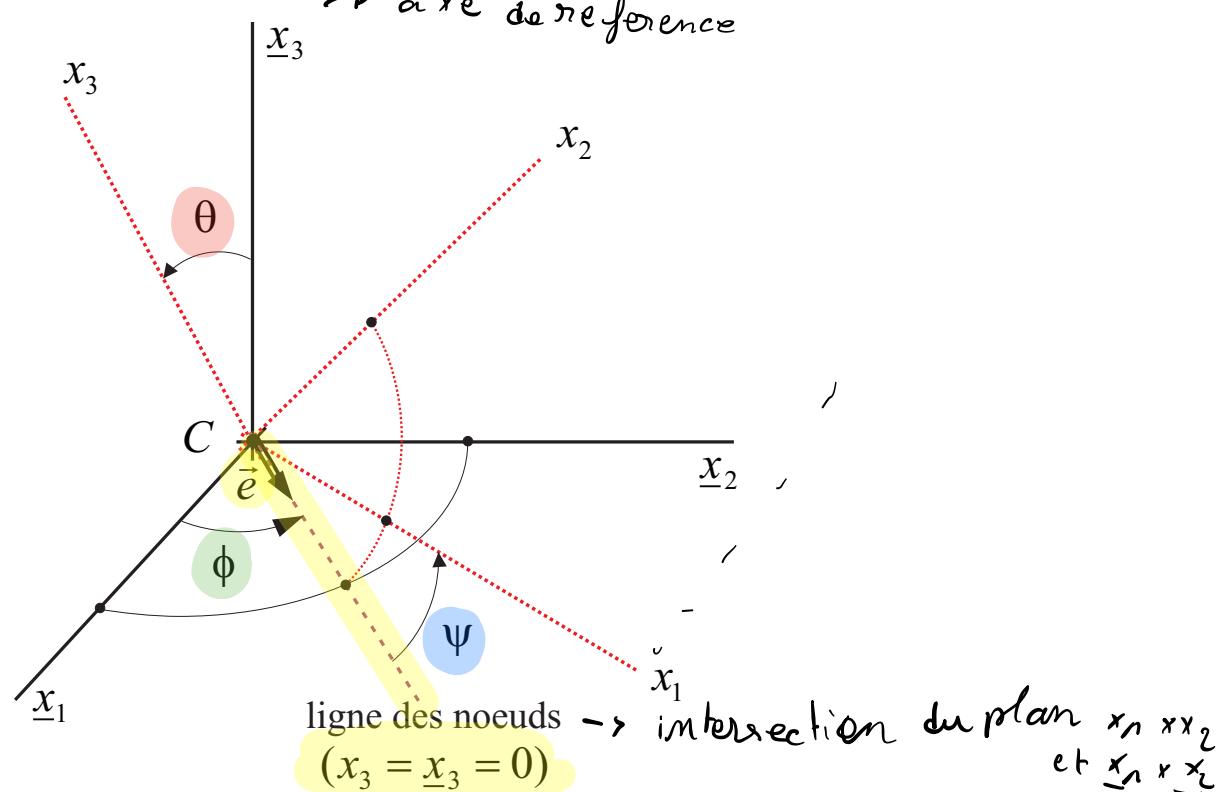
Les angles d'Euler

- Considérons tout d'abord un système d'axes cartésiens x_i attachés au solide en mouvement et centrés en le point C . Ces axes définissent le système de référence S qu'est le solide.
- On introduit aussi des axes \underline{x}_i , centrés en le même point C , mais qui restent à tout instant parallèles aux axes du système de référence principal SR par rapport auquel on étudie le mouvement du solide. Ces axes définissent \underline{S} .

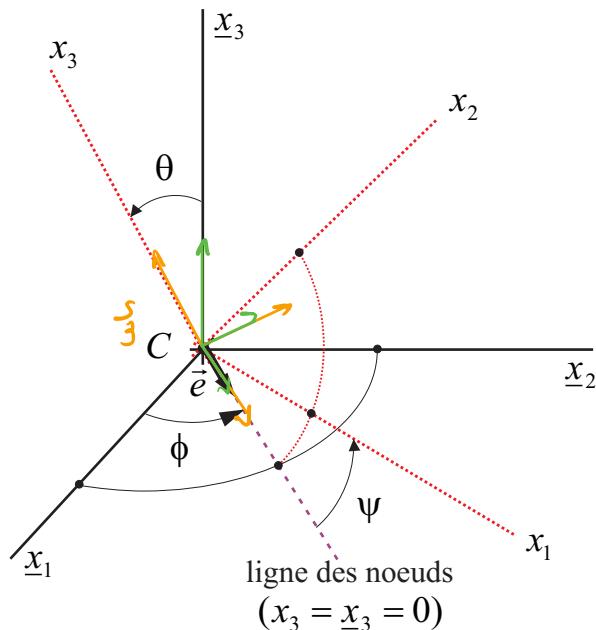


Les angles d'Euler (2)

- L'angle de *nutation* θ (qui varie dans l'intervalle $[0, \pi]$).
- Pour définir les deux autres angles d'Euler, il faut tout d'abord introduire la ligne des nœuds. Cette ligne est l'intersection des plans (x_1, x_2) et $(\underline{x}_1, \underline{x}_2)$. Sa direction est matérialisée par le vecteur \vec{e} , qui est orienté comme l'angle de nutation θ au moyen de la règle du tire-bouchon.
- L'angle de *spin* (ou de rotation propre) ψ (qui varie dans l'intervalle $[0, 2\pi]$).
- L'angle de *précession* ϕ (qui varie dans l'intervalle $[0, 2\pi]$).



Vitesse angulaire du solide



- Si $S_3 \equiv (C; (\vec{e}_3, \vec{e}, \vec{e}_3 \wedge \vec{e}))$, on a : $\dot{\vec{\omega}}_{S \div S_3} = \dot{\psi} \vec{e}_3$.
- Si $\underline{S}_3 \equiv (C; (\underline{\vec{e}}_3, \vec{e}, \underline{\vec{e}}_3 \wedge \vec{e}))$, on a : $\dot{\vec{\omega}}_{S_3 \div \underline{S}_3} = \dot{\theta} \vec{e}$.
- Enfin, on a : $\dot{\vec{\omega}}_{\underline{S}_3 \div \underline{S}} = \dot{\phi} \underline{\vec{e}}_3$.

Vitesse angulaire du solide (2)

- Par additivité des vecteurs vitesses angulaires, il vient :

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_S \div \underline{S} = \dot{\psi} \vec{e}_3 + \dot{\theta} \vec{e} + \dot{\phi} \underline{\vec{e}}_3.$$

- Comme $\vec{e} = \cos \psi \vec{e}_1 - \sin \psi \vec{e}_2$ et $\underline{\vec{e}}_3 = \cos \theta \vec{e}_3 + \sin \theta \vec{e}_3 \wedge \vec{e} = \cos \theta \vec{e}_3 + \sin \theta \cos \psi \vec{e}_2 + \sin \theta \sin \psi \vec{e}_1$ on a aussi, dans les axes attachés au solide :

$$\vec{\omega} = \omega_i \vec{e}_i \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \omega_1 &= \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \psi \sin \theta, \\ \omega_2 &= -\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\phi} \cos \psi \sin \theta, \\ \omega_3 &= \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta. \end{cases}$$

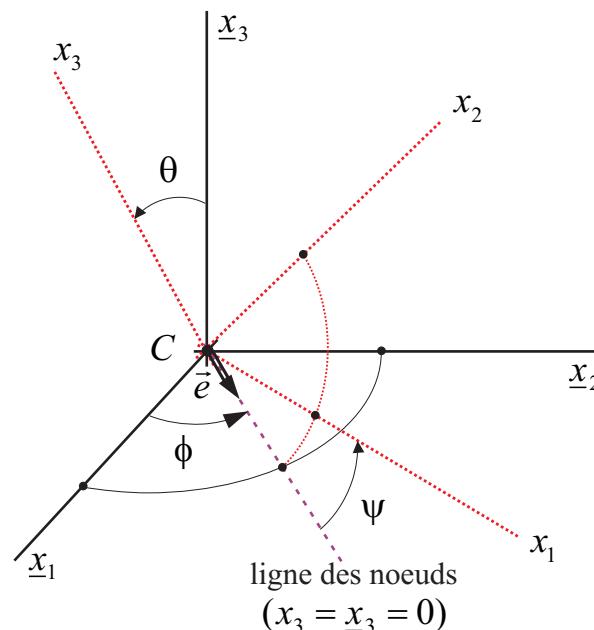


Table des matières

1 Cinématique

- Systèmes de référence et systèmes de coordonnées
- Vecteur fonction du temps
- Formule de Poisson
- Cinématique du point
- Cinématique du solide
- Les opérateurs différentiels de la physique

Opérateurs différentiels de la physique

- Quelques rappels et/ou compléments sur les opérateurs Gradient, Divergence et Rotationnel !

Champ scalaire

- **Champ scalaire** : fonction α^* qui associe un nombre réel à tous les points P de l'espace physique \mathcal{E} :

↳ Température

$$\alpha^* : P \in \mathcal{E} \longmapsto \alpha^*(P) \in \mathbb{R}.$$

- Exemples : la température mesurée en tout point P ou la distance séparant tout point P d'un autre point choisi comme référence.
- Si on dispose d'un **système d'axes cartésiens** Ox_i , un champ scalaire $\alpha^*(P)$ peut être représenté par **une fonction** $\underline{\alpha}$ des coordonnées de P dans les axes en question :

$$\alpha^*(P) = \alpha(x_1, x_2, x_3) = \alpha(x_i) = \alpha(\underline{x}).$$

A tout triplet de coord. (x_1, x_2, x_3) on peut associer une T°

- Dans d'autres axes cartésiens \underline{Ox}_i , on peut aussi introduire une fonction $\underline{\alpha}$ telle que

$$\alpha^*(P) = \underline{\alpha}(x_1, x_2, x_3) = \underline{\alpha}(x_i) = \underline{\alpha}(\underline{x}).$$

Champ scalaire (2)

- Puisque x et \underline{x} représentent les coordonnées de P dans deux systèmes cartésiens, on a donc :

$$\alpha^*(P) = \alpha(x) = \underline{\alpha}(\underline{x}).$$

- Si on représente par $x(\underline{x})$ la loi ponctuelle et par $\underline{x}(x)$ la loi ponctuelle inverse, on a donc les identités fonctionnelles

$$\underline{\alpha}(\underline{x}) = \alpha(\widehat{x(x)}), \quad \begin{array}{l} \rightarrow x \text{ exprimer en } \underline{x} \\ \rightarrow \text{changement de coord.} \\ \Rightarrow \text{Donne la m} \hat{T}^o. \end{array}$$
$$\alpha(x) = \underline{\alpha}(\underline{x}(x)).$$

- Afin de simplifier les expressions, il est commode de recourir à l'**abus d'écriture** qui consiste à n'utiliser qu'*un seul symbole générique* α pour représenter les *différentes* fonctions α^* , α et $\underline{\alpha}$:

$$\alpha(P) = \alpha(x) = \alpha(\underline{x})$$

- C'est le **contexte** qui permettra de déterminer à laquelle des fonctions α^* , α ou $\underline{\alpha}$ il est fait référence.
- Abus d'écriture tout à fait commun en physique, mais pas toujours clairement déclaré et parfois surprenant pour les novices !

Champ vectoriel

- La notion de *champ vectoriel* s'introduit de manière tout à fait similaire : un champ vectoriel \vec{a} est une fonction associant un vecteur à tout point de l'espace physique.
- Bien sûr, on utilise pour les champs vectoriels les mêmes types d'abus d'écriture que ceux dont il vient d'être question pour les champs scalaires.

Gradient d'un champ scalaire

- Soit un champ scalaire α et deux systèmes de coordonnées cartésiennes Ox_i et $O\underline{x}_i$. Considérons et comparons :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x_i} \text{ et } \frac{\partial \alpha}{\partial \underline{x}_i}.$$

- On a : $\frac{\partial \alpha}{\partial x_i} = \frac{\partial \alpha(x)}{\partial x_i}$ $\alpha(x) \Rightarrow \underline{\alpha}(\underline{x}(x))$

$$= \frac{\partial \underline{\alpha}(\underline{x}(x))}{\partial x_i}$$

de fait, comparée

$$= \left. \frac{\partial \underline{\alpha}}{\partial \underline{x}_k} \right|_{\underline{x}(x)} \frac{\partial \underline{x}_k}{\partial x_i}$$

Somme sur l'indice $k <$

$$= A_{ik} \frac{\partial \underline{\alpha}}{\partial \underline{x}_k},$$

matrice de changement de base
→ Transposée de l'autre

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (A_{lk} \underline{x}_l) = A_{lk} \delta_{il} = A_{ik}$$

ok quand $l=i$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \underline{x}_1 = 1 \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \underline{x}_2 = 0 \end{bmatrix}$$

c'est-à-dire, la **loi vectorielle** :

$$\alpha_i = A_{ik} \underline{\alpha}_k$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x_i} = A_{ik} \frac{\partial \underline{\alpha}}{\partial \underline{x}_k}.$$

↳ exprimer en \underline{x}

→ Le gradient est ind. du système de coord. → Théorie physique ind de la personne.

$$\frac{\partial \underline{\alpha}}{\partial x_i} = \underbrace{\frac{\partial \underline{\alpha}}{\partial x_i}(x(x))}_{\underline{x}(x)}$$

$$= \frac{\partial \underline{\alpha}}{\partial \underline{x}_d} \Big|_{\underline{x}(x)} \frac{\partial \underline{x}_d}{\partial x_i}$$

$$= A_{i,d} \frac{\partial \underline{\alpha}}{\partial \underline{x}_d}$$

$$\text{avec } \underline{x}_d = A_{d,d} \underline{x}_d + \underline{b}_d$$

$$= A_{d,d} \underline{x}_d + \underline{b}_d$$

$$\text{Donc } \frac{\partial (A_{d,d} \underline{x}_d)}{\partial x_i} = A_{d,d} s_{i,d} = A_{i,d}$$

Gradient d'un champ scalaire (2)

- La loi vectorielle signifie que les quantités $\partial\alpha/\partial x_i$ et $\partial\alpha/\partial \underline{x}_i$ sont en fait les composantes dans les bases \vec{e}_i et $\underline{\vec{e}}_i$, d'*un seul et même* vecteur défini en le point P de l'espace physique. Ce vecteur est le vecteur gradient du champ α en P et on écrit :

$$\text{grad } \alpha = \nabla \alpha = \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} \vec{e}_i = \frac{\partial \alpha}{\partial \underline{x}_k} \underline{\vec{e}}_k.$$

- Malgré le fait que sa définition au moyen de dérivées partielles fasse explicitement intervenir un système de coordonnées, le vecteur gradient est indépendant de tout système de coordonnées et constitue un **champ vectoriel**.

Propriétés du gradient

- Un champ scalaire α est homogène (c-à-d constant) sur un domaine (supposé connexe) si et seulement si son gradient s'annule sur ce domaine, i.e. ssi $\nabla\alpha = 0$.
- Si α n'est pas homogène sur un domaine, l'équation $\alpha(P) = C$, C étant une constante arbitraire, représente une famille de surfaces appelées "surfaces de niveau" du champ α (cf. les isobares d'une carte météo, par exemple).
- En tout point, le vecteur $\nabla\alpha$ est normal à la surface de niveau passant par ce point. En outre, il pointe dans le sens des α croissants et sa direction est celle des variations les plus abruptes du champ (direction de plus grande pente).
- Le symbole ∇ (prononcer "nabla") a été introduit comme une simple notation du gradient, mais il est souvent commode d'identifier ce symbole à un opérateur différentiel vectoriel défini par

$$\nabla = \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Les "composantes" de l'opérateur dans la base des \vec{e}_i sont alors les dérivées partielles $\partial/\partial x_i$ et pour obtenir le gradient d'un champ scalaire, il suffit d'appliquer l'opérateur au champ en question.

Divergence d'un champ vectoriel

- Si \vec{a} est un champ vectoriel, sa divergence est le champ scalaire défini par

$$\operatorname{div} \vec{a} = \nabla \cdot \vec{a} = \frac{\partial a_i}{\partial x_i}.$$

*Somme
sur i*

- La divergence de \vec{a} peut aussi être vue comme une espèce de produit scalaire de l'opérateur ∇ par le vecteur \vec{a} .
→ loi vectorielle
- Comme $a_j = A_{js} \underline{a}_s$, on a la *loi tensorielle d'ordre deux* : $\frac{\partial a_j}{\partial x_i}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial a_j}{\partial x_i} &= \frac{\partial(A_{js} \underline{a}_s)}{\partial x_i} && \xrightarrow{x \text{ exprimé en fonction de } x} \\ &= \underset{\text{const.}}{\widehat{A}_{js}} \frac{\partial \underline{a}_s}{\partial x_i} \xrightarrow{\underline{a}_s(x)} \\ &= A_{js} \frac{\partial \underline{a}_s}{\partial \underline{x}_r} \frac{\partial \underline{x}_r}{\partial x_i} && \text{avec } \underline{x}_r = A_{rl} x_l + \underline{b}_k = A_{lr} x_l + \underline{b}_k \\ &= A_{js} A_{ir} \frac{\partial \underline{a}_s}{\partial \underline{x}_r} && a_i = A_{ij} \underline{a}_j\end{aligned}$$

Divergence d'un champ vectoriel (2)

$A^{-1} = A^\sim$ car orthogonal.

$$\left. \begin{array}{l} A \cdot A^{-1} = I \\ A \cdot A^\sim = I \end{array} \right\} \quad \begin{aligned} (A A^\sim)_{ij} &= (I)_{ij} \\ (A_{ih} A_{hj}^\sim) &= \delta_{ij} \\ \text{aussi } A_{ih} A_{jh} &= \delta_{ij} \end{aligned}$$

- Pour $i = j$, il vient :

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_i} = A_{is} A_{ir} \frac{\partial a_s}{\partial x_r} = \delta_{sr} \frac{\partial a_s}{\partial x_r} = \frac{\partial a_r}{\partial x_r}.$$

- La divergence d'un champ vectoriel est donc indépendante des coordonnées qu'on utilise pour la calculer et elle constitue un **champ scalaire**.

$$(A \cdot B)_{ij} = A_{ih} B_{hj}$$

Rotationnel d'un champ vectoriel

- Si \vec{a} est un champ vectoriel, son rotationnel est défini comme le produit vectoriel de l'opérateur ∇ avec le vecteur \vec{a} :

$$\text{rot } \vec{a} = \nabla \wedge \vec{a} = \epsilon_{ijk} \partial_i a_j \vec{e}_k.$$

- Explicitement, les composantes du rotationnel peuvent être obtenues en calculant les 3 “mineurs” du “déterminant”

$$\begin{pmatrix} \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix}.$$

et on trouve

$$(\partial_2 a_3 - \partial_3 a_2, \partial_3 a_1 - \partial_1 a_3, \partial_1 a_2 - \partial_2 a_1),$$

Rotationnel d'un champ vectoriel (2)

- On peut montrer que, mis à part son signe, la champ vectoriel $\text{rot } \vec{a}$ est indépendant du système de coordonnées cartésiennes utilisé pour le construire et constitue donc un **champ pseudo-vectoriel**. De manière plus précise, on a

$$\nabla \wedge \vec{a} = \epsilon_{ijk} \partial_i a_j \vec{e}_k = \pm \epsilon_{ijk} \underline{\partial}_i \underline{a}_j \vec{e}_k = \pm \underline{\nabla} \wedge \vec{a},$$

où les signes + et - correspondent respectivement aux cas où les deux bases sont de même orientation ou ont des orientations opposées.

Propriétés des opérateurs différentiels

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_x \phi = a_x \\ \partial_y \phi = a_y \\ \partial_z \phi = a_z \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} 3 \text{ équations} \\ \text{pour } n \text{ inconnue.} \end{array}$$

↗ $\text{rot}(\vec{a}) = \vec{0} \Leftrightarrow \exists \phi(x, y, z) : \vec{a} = \nabla \phi$

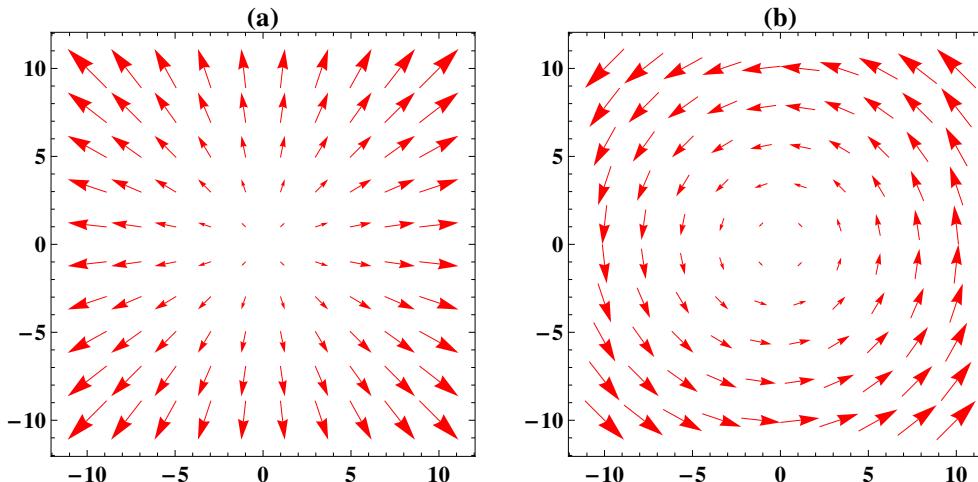
- Le champ \vec{a} est irrotationnel si et seulement si on peut l'écrire sous la forme d'un gradient, c'est-à-dire si et seulement s'il existe un champ scalaire ϕ tel que $\vec{a} = \nabla \phi$. On dit alors que \vec{a} dérive du potentiel ϕ .
- Le champ \vec{a} est indépendant de l'angle si et seulement si on peut l'écrire sous la forme du rotationnel d'un champ vectoriel \vec{v} , c'est-à-dire si et seulement s'il existe un champ vectoriel \vec{v} tel que $\vec{a} = \nabla \wedge \vec{v}$. On dit alors que \vec{a} dérive du potentiel vectoriel \vec{v} .

Exercice 1

- Exercice : Calculer la divergence et le rotationnel du champ

$$\vec{v}(P) = \vec{r}.$$

- On trouve $\nabla \cdot \vec{v} = 3$ et $\nabla \wedge \vec{v} = 0$.
- Si 2-D (image (a) ci-dessous), $\nabla \cdot \vec{v} = 2$ et $\nabla \wedge \vec{v} = 0$.



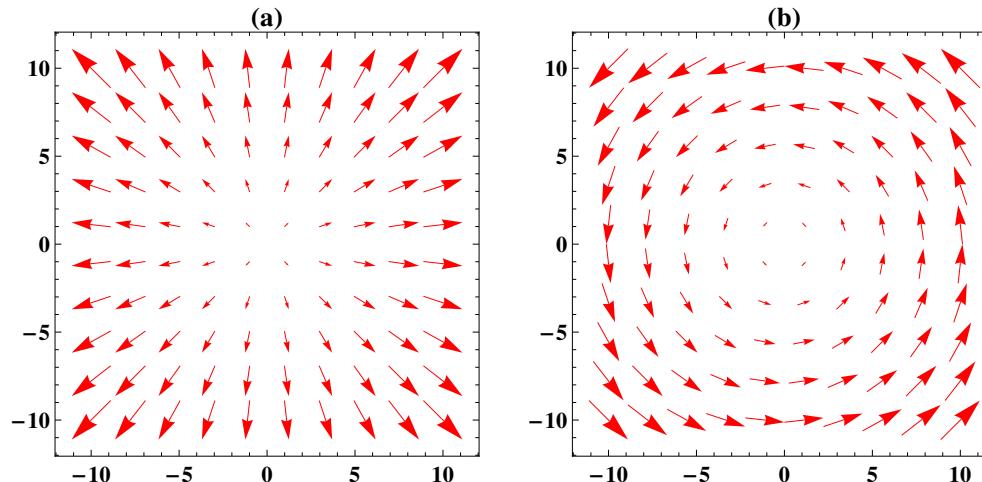
- On "voit" la divergence à partir de l'origine !
- Pour comprendre qu'on a bien $\nabla \cdot \vec{v} = 2$ partout, noter que
 $\vec{v}(P) = \vec{r} = \vec{r}_{x_0} + (\vec{r} - \vec{r}_{x_0})$!

Exercice 2

- Exercice : calculer la divergence et le rotationnel du champ des vitesses d'un solide, récrit sous la forme

$$\vec{v}(P) = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

- On trouve $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ et $\nabla \wedge \vec{v} = 2\vec{\omega}$.
- Représentation du champ si $\vec{v}_0 = 0$ et $\vec{\omega} = \vec{e}_z$: (b) ci-dessous



- On "voit" la rotation autour de l'origine !
- Pour comprendre qu'on a bien $\nabla \wedge \vec{v} = 2\vec{\omega}$ partout, noter que $\vec{\omega} \wedge \vec{r} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OX_0} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{X_0P}$!

- Expressions des opérateurs dans d'autres systèmes de coordonnées ?
 1. Effectuer un changement de variables dans les opérateurs différentiels que sont les dérivées partielles par rapport aux coordonnées cartésiennes apparaissant dans les définitions.
 2. Lorsque les vecteurs de base \vec{e}_i associés aux coordonnées cartésiennes apparaissent dans les définitions (gradient et rotationnel), il faut les décomposer en termes des vecteurs de la base associée aux nouvelles coordonnées.
 3. Enfin, lorsque l'opérateur s'applique à un vecteur (divergence et rotationnel), il faut exprimer ce vecteur dans la base associée aux coordonnées utilisées et ne pas oublier de dériver non seulement les composantes du vecteur, mais aussi les vecteurs de base (qui dépendent en général des coordonnées).

Op. différentiels en coord. non cart. (2)

- À titre d'exemple et pour bien montrer que les expressions se rapportant aux coordonnées cartésiennes ne peuvent être généralisées, voici les expressions du gradient, de la divergence et du rotationnel en coordonnées cylindriques :

$$\nabla \alpha = \frac{\partial \alpha}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial \alpha}{\partial z} \vec{e}_z,$$

$$\nabla \cdot \vec{a} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ra_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial a_z}{\partial z},$$

$$\nabla \wedge \vec{a} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial a_z}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ra_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z.$$

Table des matières

1 Cinématique

2 Mécanique du point

3 Mécanique des systèmes de points

4 Mécanique des solides

Table des matières

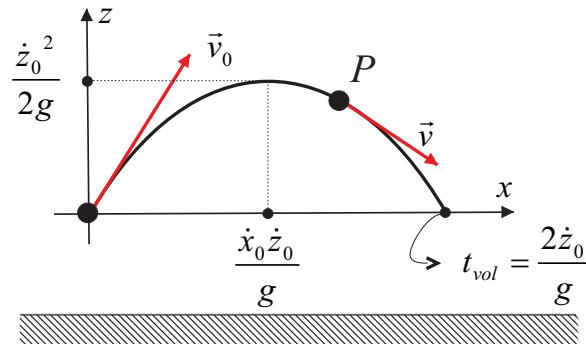
2 Mécanique du point

- Application : chute libre
- Application : oscillateur harmonique
- Lois fondamentales de la Mécanique du point
- L'espace des phases
- Application : le pendule circulaire
- Application : le problème de Kepler
- Application : oscillateur forcé et résonance
- Application : oscillateur non linéaire
- La Mécanique en axes relatifs
- La Mécanique en axes attachés à la Terre
- Application : la chute libre (bis)
- Application : le pendule de Foucault

Chute libre



Chute libre



- Particule ponctuelle \$P\$, de masse inerte \$m\$ dans voisinage de la surface de la Terre.
- Frottement de l'air négligé. Seule force : pesanteur

$$\vec{F} = M \vec{g}$$

où $\vec{g} = -g \vec{e}_z$ est l'accélération constante de la pesanteur ($g = \| \vec{g} \| \cong 9.8 \text{ m s}^{-2}$).

- Équation de mouvement de Newton : $m \vec{a} = m \vec{g}$, ou encore

$$\vec{a} = \vec{g}.$$

- Conditions de validité des équations de la Mécanique ? Plus tard !

Chute libre (2)

- Équation de mouvement de Newton :

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{a} = \vec{g}. \quad \text{Équation diff}$$

- Première intégration :

$$\int_0^t \frac{\dot{\vec{r}}(t)}{dt} dt = \int_0^t \vec{g} \cdot dt \Leftrightarrow \vec{v}(t) - \vec{v}_0 = \vec{g} \cdot t$$
$$\vec{v}(t) = \vec{g} \cdot t + \vec{v}_0.$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \vec{v}_0 + \vec{g} t.$$

- Deuxième intégration :

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{g} t^2.$$

- Choix des axes pour interprétation : O en le point de départ, \vec{e}_z vertical, \vec{v}_0 dans le plan vertical (O, x, z) . $\rightarrow \lambda_o = 0$
- Projection de la solution dans ces axes :

$$x = \dot{x}_0 t,$$

$$y = 0,$$

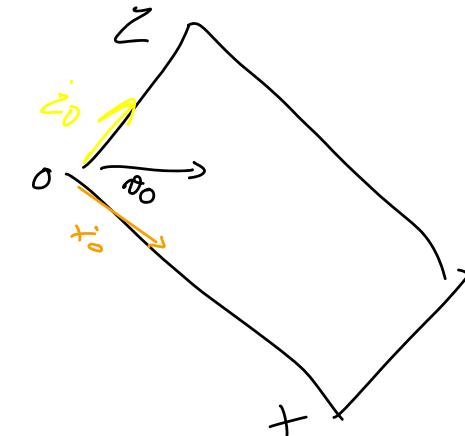
$$z = \dot{z}_0 t - \frac{1}{2} g t^2.$$

Chute libre (3)

$$x = \dot{x}_0 t, \quad \begin{array}{l} \text{projection de} \\ \text{la } \vec{v}_0 \text{ sur } x. \end{array}$$

$$y = 0,$$

$$z = \dot{z}_0 t - \frac{1}{2} g t^2.$$



- Mouvement dans le plan vertical $y = 0$. \rightarrow Mvt dans un plan vertical déterminée par v_0 \rightarrow Pas d'autres forces n'agissant pas sur le mouvement.
- Le mouvement horizontal suivant x est un mouvement uniforme à vitesse \dot{x}_0 .
- Le mouvement vertical est uniformément accéléré.
- Si vitesse initiale verticale, mouvement uniformément accéléré le long de la droite (verticale) déterminée par la position initiale et la vitesse initiale. $\rightarrow \dot{z}_0 t = 0$

Chute libre (4)

$$x = \dot{x}_0 t, \Rightarrow t = \frac{x}{\dot{x}_0} \hookrightarrow \text{valable si } \dot{x}_0 \neq 0$$
$$y = 0,$$

$$z = \dot{z}_0 t - \frac{1}{2} g t^2. \quad \text{Ainsi } \ddot{z}_0 = \frac{-\dot{z}_0 + \dot{z}_0}{g} \rightarrow \text{or } \frac{2\dot{z}_0}{g}$$

- Équation cartésienne de la trajectoire (dans le plan $y = 0$) si $\dot{x}_0 \neq 0$: éliminer t entre les équations paramétriques. Mouvement sur une parabole :

$$z = \frac{\dot{z}_0}{\dot{x}_0} x - \frac{1}{2} \frac{g}{\dot{x}_0^2} x^2.$$

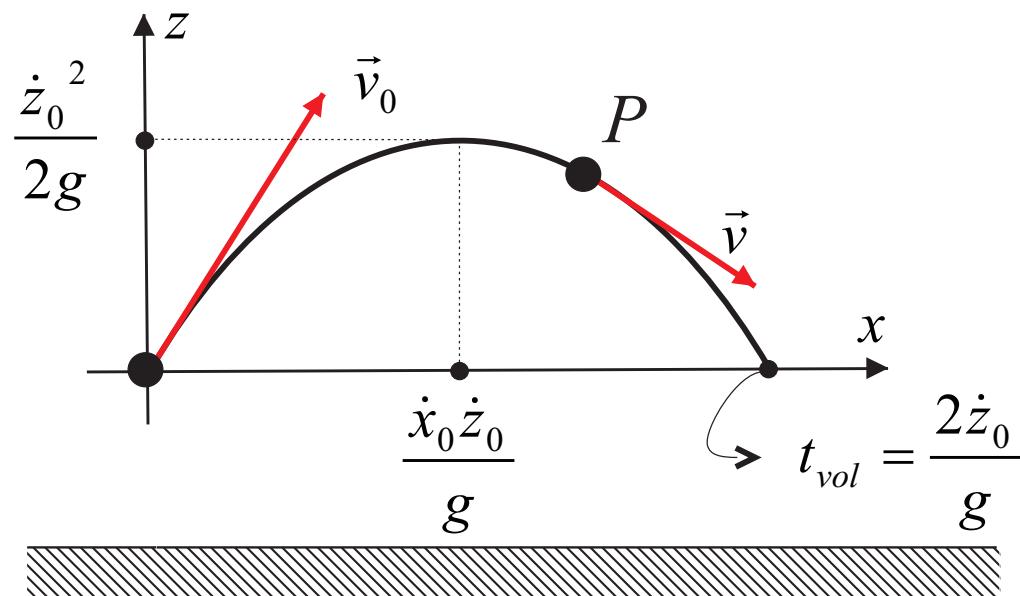
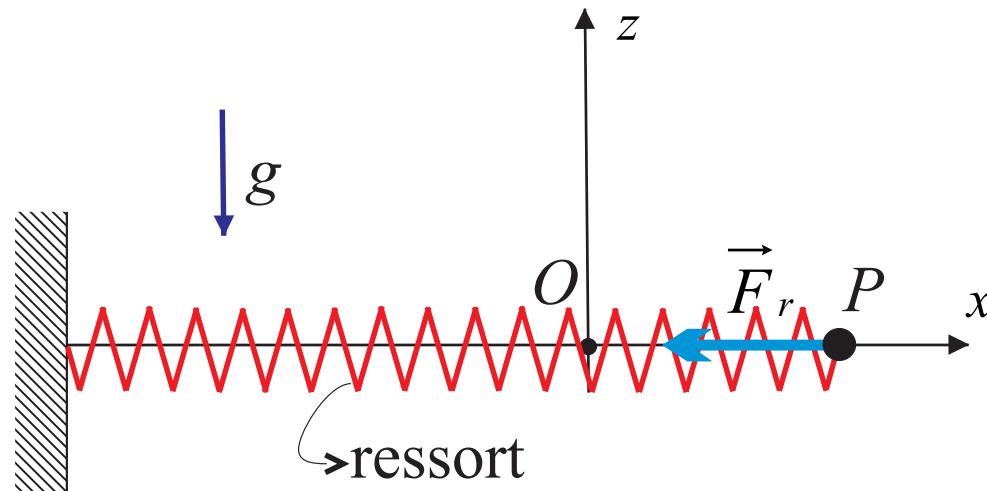


Table des matières

2 Mécanique du point

- Application : chute libre
- **Application : oscillateur harmonique**
- Lois fondamentales de la Mécanique du point
- L'espace des phases
- Application : le pendule circulaire
- Application : le problème de Kepler
- Application : oscillateur forcé et résonance
- Application : oscillateur non linéaire
- La Mécanique en axes relatifs
- La Mécanique en axes attachés à la Terre
- Application : la chute libre (bis)
- Application : le pendule de Foucault

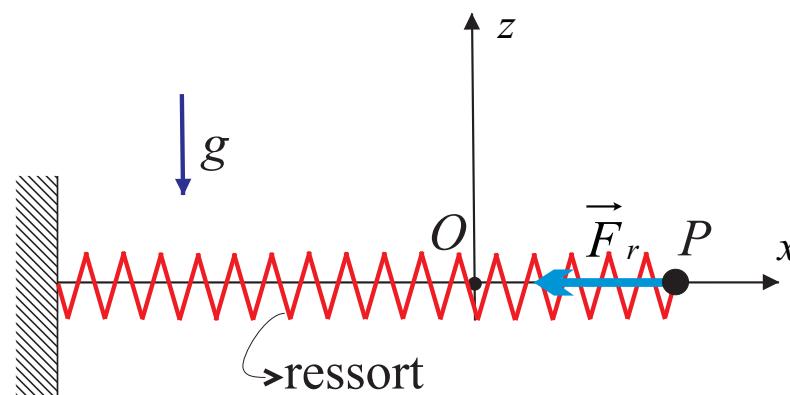
Oscillateur harmonique



- Axes : voir schéma (origine à la *longueur naturelle*)
- Tige suffisamment rigide pour empêcher tout déplacement en y ou en z .
- Mouvements suivant x seulement : **mouvements guidés**

Mouvements guidés

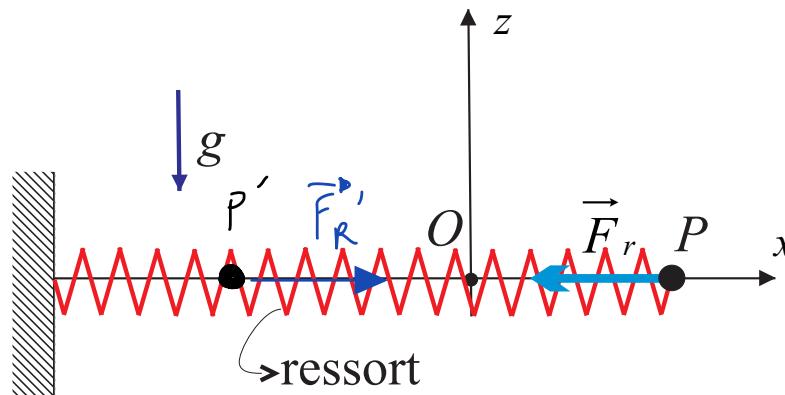
- Équation de Newton = Relation force \iff mouvement
- Mouvement guidé = Restriction du mouvement
(ici, mouvement connu et donné en y et en z , avec $y(t) = z(t) = 0.$)
- Il faut des forces pour restreindre les mouvements !
 \Rightarrow Forces de liaison
- Les forces de liaison sont des inconnues !
- Newton + Expression des forces \Rightarrow Calcul du mouvement
Newton + Mouvement (en partie) \Rightarrow Calcul des forces de liaison
- Pour que la perle ne quitte pas le fil, il faut une force de liaison **perpendiculaire au fil**
- On la décompose en $\vec{N} = N \vec{e}_z$ et $\vec{R} = R \vec{e}_y$



Autres forces ?

- Force de pesanteur $m\vec{g}$
- Il existe des **frottements** entre la perle et la tige !
Force de frottement : $\vec{T} = -c\vec{v}$
(expression phénoménologique) \rightarrow coefficient de viscosité du liquide
- NB.
 \vec{N} , \vec{R} , \vec{T} sont les **forces de contact**
 \vec{N} , \vec{R} sont des *inconnues*
 \vec{T} est donnée

Oscillateur harmonique (3)



- Force de rappel du ressort :

$$\vec{F}_r = F(x) \vec{e}_x$$

- Si x reste “petit”, on peut développer F en série et s’arrêter au terme linéaire (le terme indépendant est nul) :

$$F(x) = -kx \quad (k > 0).$$

- k : constante de **raideur**, de *rappel* du ressort

$$F(x) \approx F(x=0) + x F'(x=0) + \frac{x^2}{2} F''(x=0) + \dots$$



Oscillateur harmonique (4)

- Équation de mouvement de l'oscillateur harmonique :

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{R} + \vec{T} + \vec{F}_r,$$

- Projection sur les trois axes

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -c\dot{x} - kx, \\ g^{(t)+0} \rightarrow 0 &= R, \\ z^{(t)=0} 0 &= -mg + N. \end{aligned}$$

- Réactions normales (calculées grâce aux éqs. de Newton !) :

$$\begin{aligned} \vec{R} &= O, \\ \vec{N} &= -m\vec{g}. \end{aligned}$$

- Position d'équilibre ? $x(t) = \text{const} \rightarrow \dot{x}(t) = 0 \Rightarrow -kx = 0 \Rightarrow x = 0$ position d'équilibre
⇒ Annulation de \dot{x} et \ddot{x} dans l'équation
⇒ $x = \text{constante} = 0$ satisfait bien à ce qui reste de l'équation !

Oscillateur harmonique sans frottement

- Équation : $m\ddot{x} = -c\dot{x} - kx$, ou encore, avec $c = 0$ et en définissant $\omega_0 = \sqrt{k/m}$:

$$\begin{aligned} D^2 x(t) &= -\omega_0^2 x \\ \rightarrow x^2 + \omega_0^2 &\approx 0 \Rightarrow x = \pm i \omega_0 \\ \Rightarrow x(t) &\approx C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) \end{aligned}$$

- Solution générale :

$$\begin{aligned} t=0 &\rightarrow x_0 \\ \dot{x}(t=0) &\rightarrow \dot{x}_0 \\ x_0 = C_1 \cdot 1 &\Rightarrow C_1 = x_0 \\ x(t) &= C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) \\ &= x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{\dot{x}_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \\ &= A \sin(\omega_0 t + \varphi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_1, C_2 &\in \mathbb{C} \\ \dot{x}(t_0) &= -\omega_0 C_1 \overset{=0}{\underset{\text{---}}{\sin(\omega_0 t)}} \\ \Rightarrow \dot{x}(t_0) &+ C_2 \omega_0 \cos(\omega_0 t_0) \\ \Rightarrow C_2 &= \frac{\dot{x}(t_0)}{\omega_0} \end{aligned}$$

où l'amplitude A du mouvement est donnée par $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{x_0^2 + \dot{x}_0^2/\omega_0^2}$, et la phase φ est définie par $\sin(\varphi) = C_1/A$ et $\cos(\varphi) = C_2/A$. On voit donc que ces deux quantités dépendent de ω_0 et des conditions initiales.

$$\sin(\omega_0 t) \cdot \underbrace{\cos(\varphi)}_{C_2/A} + \underbrace{\sin(\varphi)}_{C_1/A} \cos(\omega_0 t)$$

Osc. harmonique sans frottement (2)

- Solution ($\omega_0 = \sqrt{k/m}$) :
 \uparrow si de ressort de $k \Rightarrow$ fréquence
 \downarrow si $m \rightarrow$ la période augmente

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\begin{aligned}f &= \frac{1}{T} \\f \cdot 2\pi &= \omega\end{aligned}$$

avec $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{x_0^2 + \dot{x}_0^2/\omega_0^2}$, et φ défini par $\sin(\varphi) = C_1/A$ et $\cos(\varphi) = C_2/A$.

- Oscillations *harmoniques* (c'est-à-dire sinusoïdales) entre $x = -A$ et $x = A$, de pulsation égale à ω_0 .
- La pulsation, et par conséquent la fréquence et la période du mouvement, dépendent des caractéristiques physiques du système (la masse de la perle et la constante de raideur du ressort) mais sont en revanche totalement *indépendantes de l'amplitude ou de la phase*, et donc des conditions initiales. \rightarrow si mult grand \Rightarrow + grande force
- Cette indépendance de la période du mouvement par rapport à l'amplitude des oscillations doit être considéré comme un résultat **étonnant** et provient en fin de compte du caractère **linéaire** de la force de rappel du ressort. A cause de ce résultat, on dit souvent que ω_0 est la *pulsation propre* de l'oscillateur et $f_0 = \omega_0/2\pi$ est la *fréquence propre* du système.
L'aller-retour ne dépend que de k et m
 \rightarrow dépend juste du système.

Osc. harmonique amorti, i.e. avec frottement

- Équation : $m\ddot{x} = -c\dot{x} - kx$, ou encore, en définissant $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ et $2f = c/m$:

$$\ddot{x} = -\frac{c}{m}\dot{x} - \frac{k}{m}x$$

$$\ddot{x} + 2f\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \Rightarrow \ddot{x} + 2f\dot{x} + \omega_0^2 x$$

- Conditions initiales pour résolution : $x = x_0$ et $\dot{x} = 0$. *On ne lui donne pas de vitesse initiale // on lâche*
 - Zéros du polynôme caractéristique : $-f \pm \sqrt{f^2 - \omega_0^2}$.
- Trois cas, en fonction des valeurs relatives de f^2 et ω_0^2 .

$$z^2 + 2fz + \omega_0^2 = 0$$
$$if^2 - \omega_0^2 = \sqrt{f^2 - \omega_0^2}$$
$$\text{D'où } \Delta = -\frac{2f \pm 2\sqrt{f^2 - \omega_0^2}}{2} \Rightarrow -f \pm \sqrt{f^2 - \omega_0^2}$$

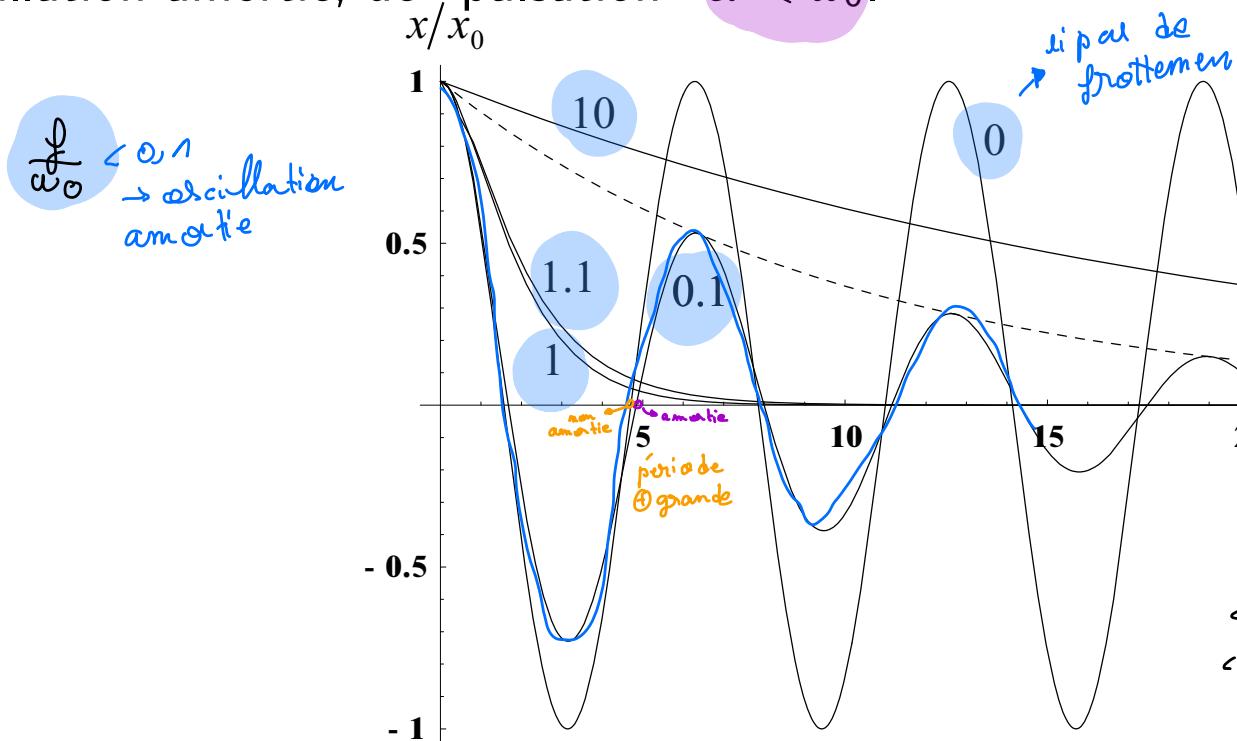
$\Delta = -f$

Osc. harmonique amorti (2)

1. Amortissement faible : $f^2 < \omega_0^2$ donc $\sqrt{\omega_0^2 - f^2} < 0 \rightarrow$ racine imaginaire
 → petit frottement

$$\text{où } \alpha = \sqrt{\omega_0^2 - f^2}.$$

Oscillation amortie, de "pulsation" $\alpha < \omega_0$.



$$x(t) = x_0 e^{-ft} \left(\cos \alpha t + \frac{f}{\alpha} \sin \alpha t \right),$$

décaissant

oscillation harmonique

$$\begin{aligned} \text{On aura } & -f \pm i\sqrt{\omega_0^2 - f^2} \\ & -f \pm i\alpha \\ \text{On a } x(t) &= C_1 e^{(-f+i\alpha)t} \\ &+ C_2 e^{(-f-i\alpha)t} \\ &= C_1 e^{-ft} \cdot e^{i\alpha t} \\ &+ C_2 e^{-ft} \cdot e^{-i\alpha t} \\ &= e^{-ft} \cdot (C_1 e^{i\alpha t} + C_2 e^{-i\alpha t}) \\ &= C_1 \cdot e^{-ft} \cdot (\underbrace{e^{i\alpha t}}_{\cos(\alpha t)} + \underbrace{C_2 e^{-i\alpha t}}_{\sin(\alpha t)}) \end{aligned}$$

On a $C_1 = x_0$

Vérif en dérivant

$$\begin{aligned} 0 &= \dot{x}(t) = C_1 \cdot (-f e^{-ft} \cos(\alpha t)) - e^{-ft} \cdot \alpha \sin(\alpha t) \\ &+ C_2 \cdot (-f e^{-ft} \sin(\alpha t) + e^{-ft} \cdot \alpha \cos(\alpha t)) \\ 0 &= C_1 \cdot -f e^{-ft} + C_2 e^{-ft} \alpha \\ \Leftrightarrow C_2 e^{-ft} \alpha &= C_1 \cdot f e^{-ft} \\ \Leftrightarrow C_2 &= C_1 \cdot \frac{f}{\alpha} = x_0 \cdot \frac{f}{\alpha} \end{aligned}$$

Osc. harmonique amorti (3)

2. Amortissement fort : $f^2 > \omega_0^2$

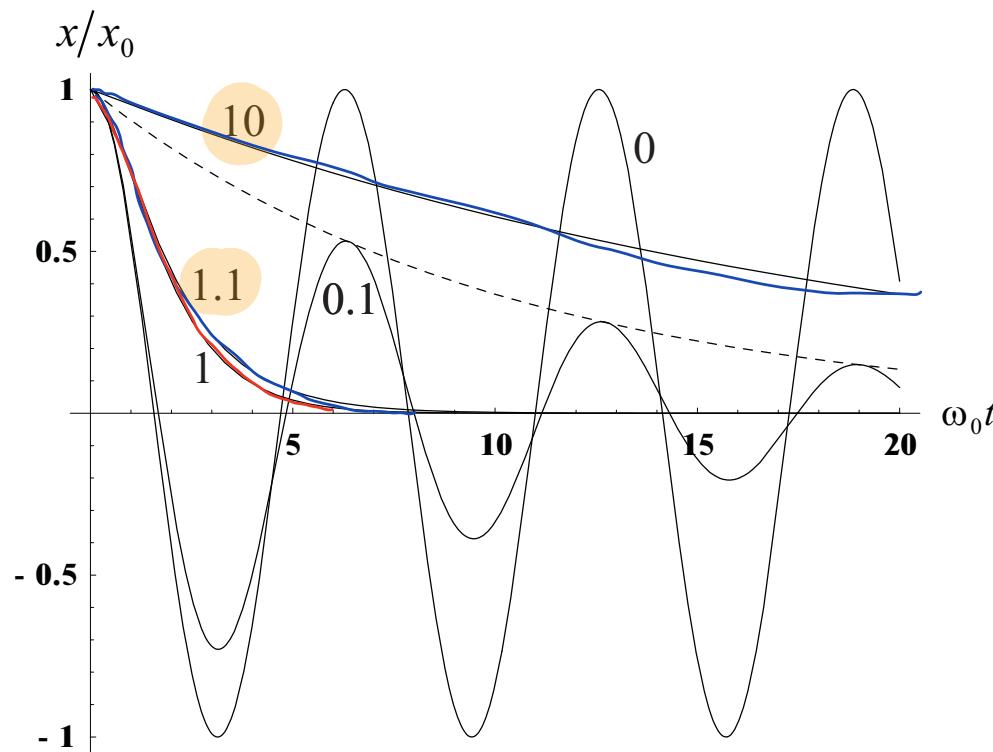
$$e^{\alpha t} + e^{-\alpha t} = \cosh(\alpha t) + \sinh(\alpha t)$$

$$x(t) = x_0 e^{-ft} \left(\cosh \alpha t + \underbrace{\frac{f}{\alpha} \sinh \alpha t}_{\rightarrow +\infty} \right),$$

$$\text{avec } \alpha = \sqrt{f^2 - \omega_0^2}.$$

Vu que $f > \alpha$, $x(t)$ tend vers 0 sans osciller : retour exponentiel vers la position d'équilibre.

- $\frac{f}{\omega} > 1$
→ grand frottement
→ si $f = \omega$
→ racine double
Amortissement critique



Osc. harmonique amorti (4)

$$\bullet \text{ si } b^2 - 4\omega_0^2 < 0$$

$$\text{Solution } (C_1 + C_2 t) e^{-\frac{b}{2\alpha}t} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{C}$$

3. Amortissement critique : $f^2 = \omega_0^2$

A vérif avec Δco

$$x(t) = x_0 e^{-ft} (1 + ft) = x_0 e^{-\omega_0 t} (1 + \omega_0 t).$$

Retour sans oscillation vers la position d'équilibre.

Retour le plus rapide vers la position d'équilibre pour presque toutes les conditions initiales (application : amortisseurs). → retourne plus vite à l'équilibre.

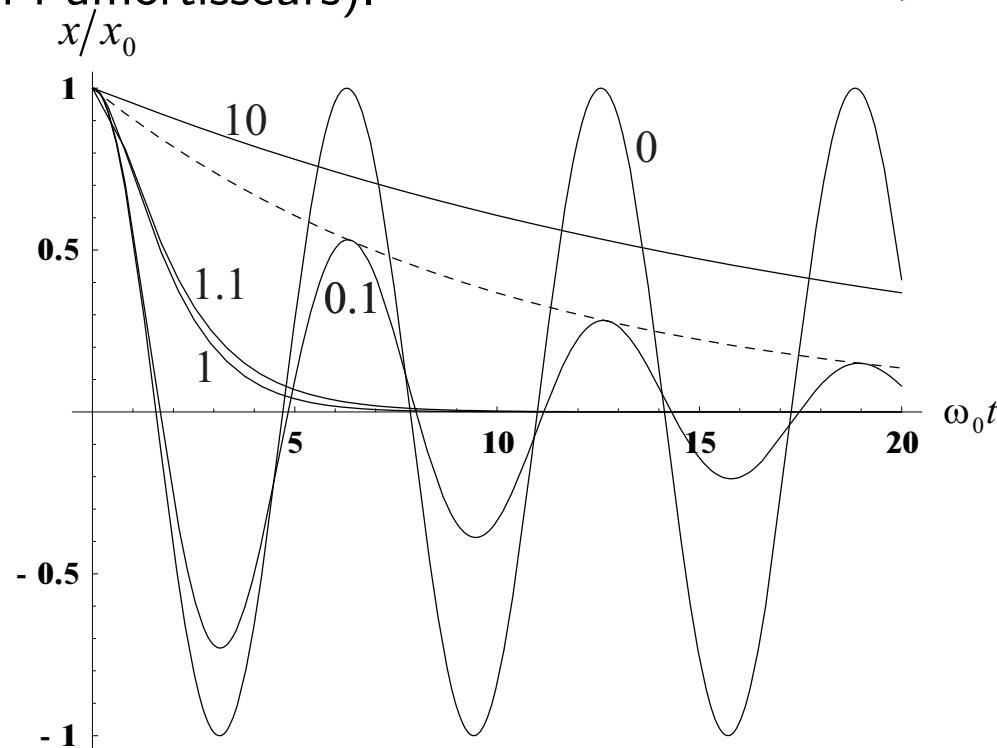
$$x(t) = (C_1 + C_2 \cdot t) e^{-ft}$$

$$x(t=0) = x_0 = C_1$$

$$\dot{x}(t=0) = -f e^{-ft} \cdot (C_1 + C_2 \cdot t) + e^{-ft} \cdot (C_2)$$

$$\Rightarrow C_2 = f \cdot C_1 < f \cdot x_0$$

$$\Rightarrow x(t) = e^{-ft} \cdot x_0 \cdot (1 + ft)$$



Oscillateur harmonique (5)

NB. La position d'équilibre $x = 0$ est une position d'équilibre **stable** ! En effet :

- ⇒ si oscillateur non amorti, on ne s'en éloigne pas.
- ⇒ si oscillateur amorti, on y retourne (*équilibre asymptotiquement stable*)

Table des matières

2 Mécanique du point

- Application : chute libre
- Application : oscillateur harmonique
- **Lois fondamentales de la Mécanique du point**
- L'espace des phases
- Application : le pendule circulaire
- Application : le problème de Kepler
- Application : oscillateur forcé et résonance
- Application : oscillateur non linéaire
- La Mécanique en axes relatifs
- La Mécanique en axes attachés à la Terre
- Application : la chute libre (bis)
- Application : le pendule de Foucault

Les trois lois de Newton

Newton (1642-1727), *Principia Mathematica Philosophiae Naturalis*, 1687.

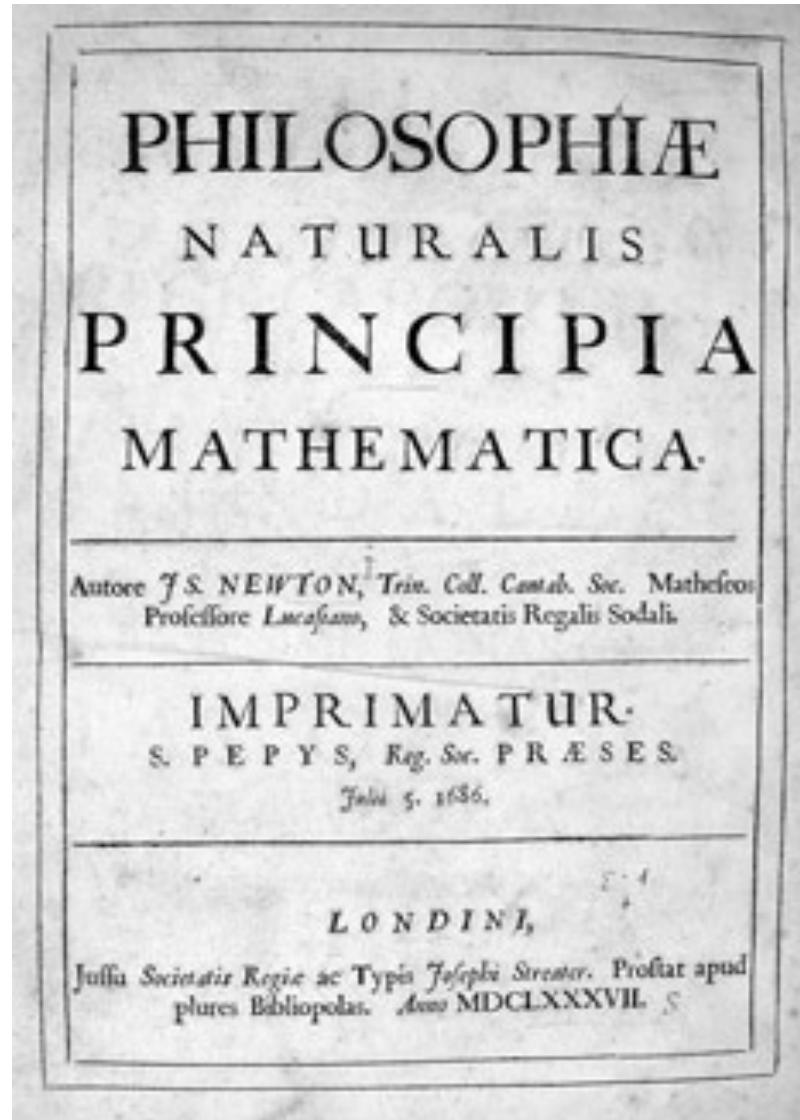


FIGURE:

Newton (1642-1727), *Principia Mathematica Philosophiae Naturalis*, 1687.

1 Première loi, ou Principe d'inertie

Lorsqu'un point matériel n'est soumis à l'action d'aucune force, il reste au repos ou est animé d'un mouvement rectiligne uniforme.

2 Deuxième loi, ou Loi du mouvement

Lorsqu'un point matériel se déplace, son mouvement est tel qu'à tout instant le produit de la masse inerte m de ce point par son accélération \vec{a} est égal à la force (totale) \vec{F} à laquelle il est soumis :

$$m\vec{a} = \vec{F}.$$

3 Troisième loi, ou Principe de l'action et de la réaction

Si un point matériel exerce une force sur un autre point matériel, ce dernier exerce aussi sur le premier une force égale en module et directement opposée.

Postulats de base de la théorie qui ne peuvent être démontrés.

La deuxième loi de Newton

- **Vocabulaire** : Deuxième loi de Newton ou Équation de Newton, ou Équation du mouvement, ou Loi fondamentale de la Mécanique.
- *Masse inerte d'un corps* (ou simplement "masse")
 - ▶ Concept de base de la théorie de la Mécanique et, à ce titre, difficile à définir précisément !
 - ▶ Propriété intrinsèque de tout corps, c'est-à-dire une caractéristique absolue et invariable de ce corps, indépendante de toute influence extérieure.
 - ▶ Une justification à son introduction réside dans le fait expérimental que des corps distincts peuvent avoir des mouvements identiques lorsqu'ils sont soumis à des forces identiques. Vu ce résultat, il paraît alors assez naturel d'attribuer aux deux corps une propriété commune que l'on appelle leur masse (inerte). $F = m \ddot{a} \Leftrightarrow m = \frac{F}{\ddot{a}}$
 - ▶ Mesure de sa résistance à l'accélération, encore appelée *inertie*
 - ▶ Cette définition revient à dire que la masse d'un corps est la propriété de ce corps par laquelle il faut multiplier l'accélération dans l'équation de mouvement, pour que cette équation soit correcte...
 - ▶ En fin de compte, on voit qu'il est assez difficile de définir la masse inerte sans énoncer simultanément la loi fondamentale de la Mécanique dans laquelle elle intervient.
 - ▶ La notion de masse inerte n'a pas de sens en dehors de la mécanique.

La deuxième loi de Newton (2)

● La notion de force

- ▶ Assez difficile de définir la force sans énoncer simultanément la loi fondamentale de la Mécanique dans laquelle elle intervient !
- ▶ La notion de **force** est introduite afin de rendre compte du fait expérimental qu'un corps peut influer sur le mouvement d'un autre corps.
- ▶ La force qu'un corps *A* exerce sur un autre corps *B* est l'action de ce corps *A* qui tend à déterminer le mouvement de *B* suivant la loi de Newton.
- ▶ La notion de force est indépendante de tout système de référence puisque, par définition, elle est censée rendre compte des interactions existant entre diverses portions de matière.
- ▶ Nécessité de disposer d'une théorie physique des forces : cf. plus loin !
- ▶ En 1687, Newton propose, en plus des trois lois qui portent son nom, une théorie des forces de gravitation qui lui permet de rendre compte des mouvements des planètes.

La deuxième loi de Newton (3)

$$\vec{F} = m \vec{a}$$

depend de la masse
depend de l'accélération
depend du g R

• Les systèmes d'inertie ou systèmes galiléens

- ▶ Accélération dépend du SR ; Force et masse n'en dépendent pas : l'équation de mouvement ne peut être valable dans tous les SR !
- ▶ La Mécanique newtonienne affirme qu'il existe au moins un système dans lequel cette loi est valable. Il s'agit du **système "de Copernic"** qui peut être matérialisé par 3 axes cartésiens passant par le centre de masse du système solaire et dont les directions sont fixes par rapport aux étoiles lointaines. → *et fixes*
- ▶ Si la loi fondamentale de la Mécanique est valable dans le système de Copernic, elle l'est aussi dans tous les systèmes qui sont en translation rectiligne et uniforme par rapport à celui-ci et elle ne l'est dans aucun autre. → *translation et pas de rotation*.
- ▶ Les systèmes de référence dans lesquels l'équation fondamentale est valable sont appelés **systèmes d'inertie, systèmes galiléens** ou encore **systèmes absolus**
- ▶ On peut aussi rendre compte de l'existence de cette classe de systèmes privilégiés en affirmant que la loi fondamentale de la Mécanique garde la même forme, ou est **invariante**, lorsqu'on change de système d'inertie.
- ▶ Cette propriété d'invariance de la loi fondamentale définit ce que l'on appelle *l'invariance galiléenne* de la Mécanique newtonienne. On dit aussi que la théorie physique qu'est la Mécanique classique satisfait au *principe de relativité classique ou relativité galiléenne*, qui affirme que les lois de la Mécanique ont la même forme dans tous les référentiels d'inertie.

La première loi de Newton

- **Vocabulaire** : Première loi de Newton, ou Principe d'inertie
- Pourrait être considérée comme un simple cas particulier de la loi du mouvement
- En l'absence de force, l'accélération doit s'annuler et on a un MRU par rapport à tout système d'inertie.
- Le Principe d'inertie avait déjà été découvert par Galilée, une centaine d'années avant les travaux de Newton et peut être considéré comme l'origine de la loi du mouvement.

La troisième loi de Newton

- **Vocabulaire** : Troisième loi de Newton, ou Principe de l'action et de la réaction.
- Si un point matériel exerce une force sur un autre point matériel, ce dernier exerce aussi sur le premier une force égale en module et directement opposée.
- Postulat sur les forces (satisfait par la plupart des forces : cf plus loin)
- **Conservation de l'impulsion** : loi fondamentale de la physique
 - ▶ Deux particules P_1 et P_2 de masses inertes m_1 et m_2 et notons \vec{F}_1 et \vec{F}_2 les forces qui s'exercent sur ces deux particules.
 - ▶ Lois de mouvement :
$$m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} = \vec{F}_1 \quad \text{et} \quad m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} = \vec{F}_2,$$
 - ▶ Si les seules forces en présence sont les interactions mutuelles des particules, le Principe de l'action et de la réaction nous apprend que $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$, d'où
$$m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} = -m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt}$$
 - ▶ En désignant par $\vec{p}_1 = m_1 \vec{v}_1$ et $\vec{p}_2 = m_2 \vec{v}_2$ les *impulsions* des deux particules, on déduit la *loi de conservation de l'impulsion totale* :
$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{constante.}$$

Les forces en physique

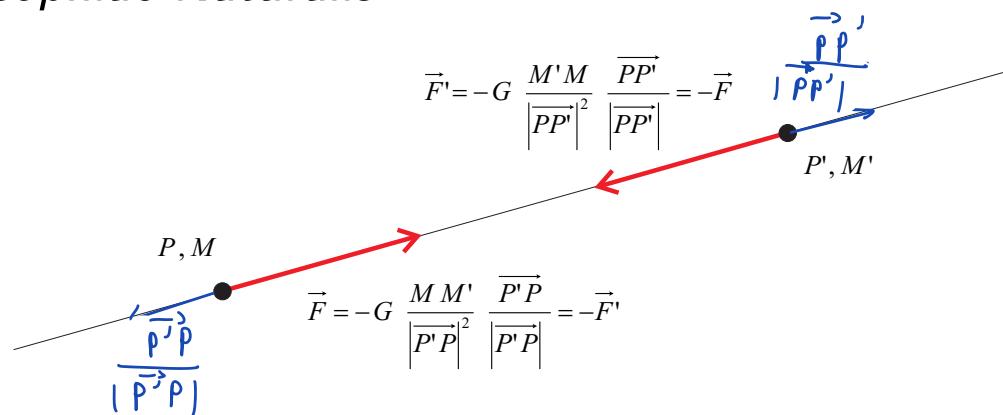
- On admet aujourd'hui en physique que deux portions de matière peuvent influer l'une sur l'autre, peuvent interagir l'une avec l'autre, de quatre manières essentiellement différentes.
 - ▶ Interaction gravifique
 - ▶ Interaction électromagnétique
 - ▶ Interaction nucléaire faible
 - ▶ Interaction nucléaire forte

L'interaction gravifique



L'interaction gravifique (2)

- L'interaction gravifique a été décrite en 1687 par Newton, dans les *Principia Mathematica Philosophiae Naturalis*



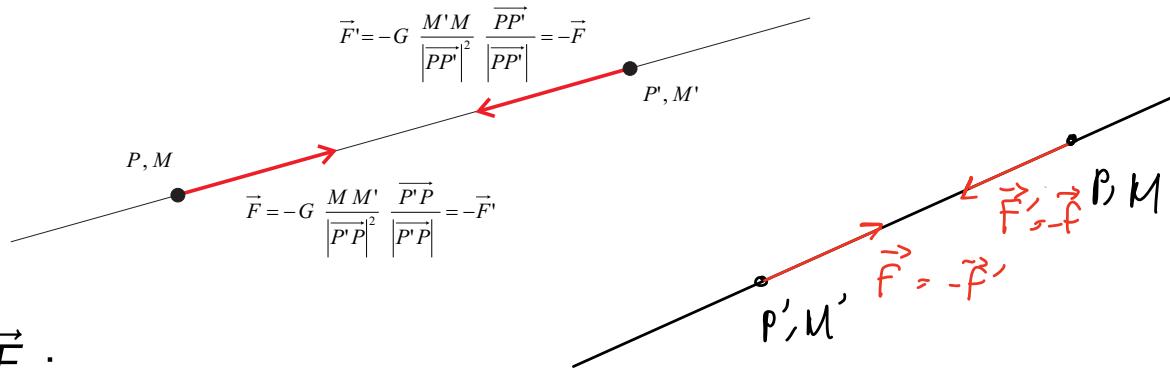
- La force \vec{F} ressentie par un point P de masse (gravifique) M et exercée par un point P' de masse (gravifique) M' s'écrit donc

$$\vec{F} = -G \frac{M M'}{|P'P|^2} \frac{\overrightarrow{P'P}}{|P'P|}$$

où $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$ est la constante de gravitation universelle.

- Principe de l'action et de la réaction satisfait !

L'interaction gravifique (3)



- Réécriture de la force \vec{F} :

$$\vec{F} = M \left(-G M' \frac{\overrightarrow{P'P}}{|\overrightarrow{P'P}|^3} \right) = M \vec{g}_{P'}(P) \quad \text{avec} \quad \vec{g}_{P'}(P) = -G M' \frac{\overrightarrow{P'P}}{|\overrightarrow{P'P}|^3},$$

- $\vec{g}_{P'}(P)$:

ressenti par P, généré par p'

- ▶ force par unité de masse que le point pesant de masse gravifique M' situé en P'
 - exerce sur la particule de masse M se trouvant en le point géométrique P
 - exercerait** sur n'importe quelle particule pesante qui se trouverait en n'importe quel point géométrique P qui serait fourni comme argument de $\vec{g}_{P'}(\cdot)$ $M'' \vec{g}_{P'}(P)$
- ▶ $\vec{g}_{P'}(\cdot)$: *champ de gravitation* créé dans l'espace par la particule pesante P' (ce champ est déterminé par la masse M' et par l'endroit P' où elle se trouve).

- Deux facteurs dans l'expression de \vec{F} :

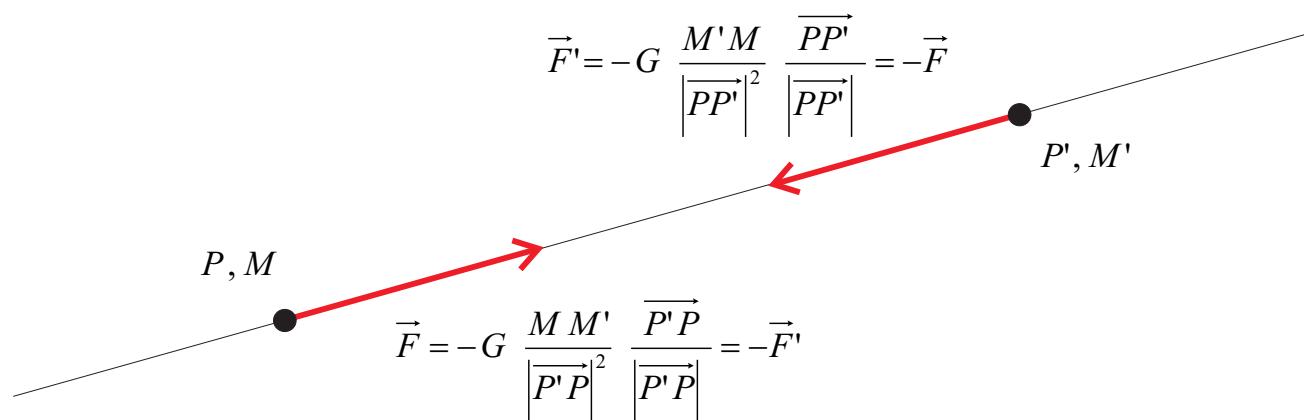
- ▶ M : ne dépend que du point matériel P qui ressent la force
- ▶ $\vec{g}_{P'}(\cdot)$: champ de gravitation exercé par la particule de masse M' , qu'il faut évaluer en le point P où se trouve M

L'interaction gravifique (4)

→ quantité qui sert à mesurer l'intensité
de la force gravifique

- Masse **gravifique** : propriété intrinsèque de tout corps (au même titre que la charge électrique ou la masse inerte)
 ↳ résistance aux acc.
- *A priori*, rien à voir avec la masse inerte : l'une permet de déterminer la force gravifique qui s'exerce sur un corps, alors que l'autre est une mesure de son inertie.
- **MAIS**, Principe d'équivalence !

Le Principe d'équivalence



- Équation de mouvement de la particule P (m : masse inerte ; M : masse gravifique) :

$$m\vec{a} = M\vec{g}_{P'}(P)$$

Le Principe d'équivalence (2)

- Équation de mouvement : $\vec{a} = \frac{M}{m} \vec{g}_{P'}(P)$

Mouvement de P déterminé par le *champ de gravitation* qui existe là où cette particule se trouve ainsi que par le **rapport des masses gravifique et inerte** de P .

- L'**expérience** montre cependant que **tous les corps tombent de la même manière**
→ au sein on connaît des résultats pour des corps différents
⇒ le rapport M/m doit en fait avoir une valeur indépendante du corps

- Si choix approprié des unités de masse, on peut rendre ce rapport égal à 1 :
égalité des masses inerte et gravifique : $M = m$.

Il s'agit du **Principe d'équivalence** : bien étonnant !

- Dans le cadre de la Mécanique classique, le Principe d'équivalence n'est, d'une certaine manière, rien d'autre qu'une curiosité commode qui permet de simplifier le facteur M/m dans l'équation de mouvement.

Il n'en est pas de même en **Relativité Générale** !

- Équation de mouvement finale :

$$\vec{a} = \vec{g}_{P'}(P)$$

L'interaction électromagnétique

- Force de Lorentz \vec{F}_L :

$$\vec{F}_L = q (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

- Les champs \vec{E} et \vec{B} sont solutions des équations de J.C. Maxwell (1831-1879).
- Dans les problèmes simples, on admettra souvent que les champs \vec{E} et \vec{B} sont donnés *a priori* et imposés par des dispositifs techniques extérieurs (bobines électriques, aimants,...) et on fera l'hypothèse qu'ils sont indépendants de la particule dont on étudie les mouvements.
- Loi de l'action et de la réaction pas satisfaite mais conservation de l'impulsion OK en tenant compte de l'*impulsion du champ électromagnétique*.
- **NB.** Avant Relativité restreinte (1905),
équation de Newton
+ expression force de gravitation universelle
+ expression force de Lorentz
+ équations de Maxwell
= ensemble des lois fondamentales de la **physique dite “classique”** (la physique pré-relativiste).

Les interactions nucléaires

- Forces d'interactions faible et forte : n'interviennent qu'à très petite échelle spatiale, lorsque les distances interparticulaires sont de l'ordre de la dimension du noyau atomique ($\approx 10^{-15}$ m).
- À de telles échelles spatiales, **la Mécanique newtonienne ne peut plus s'appliquer.**
- La description des interactions faible et forte ne peut se faire que dans le cadre d'une théorie physique plus générale que la Mécanique de Newton : il s'agit de la **Mécanique quantique**.
- Pas de forces d'interactions nucléaires faible et forte dans un cours de Mécanique classique !

Expressions simplifiées pour les forces

- Dans de nombreuses situations concrètes, il est possible de simplifier les expressions des forces courantes à prendre en compte pour étudier les mouvements d'une ou de plusieurs particules.
- Dans tous les cas, les expressions que nous allons obtenir satisfont au Principe de l'action et de la réaction

Pesanteur à la surface de la Terre

- Mouvements de faible amplitude d'un point P dans le voisinage de la surface de la Terre
- Force de pesanteur sur P : résulte des interactions gravifiques entre P et toutes les particules formant la Terre.
- Hypothèse : Terre **sphérique** (plus exactement, répartition des masses au sein de la Terre à une symétrie sphérique).

D'où : on peut montrer (nous admettons) que la force exercée sur la particule P par l'ensemble des particules de la Terre est la même que celle qui serait exercée par une particule *unique* située au centre C de la Terre et de masse égale à la masse M_{\oplus} de la Terre.

- Force totale \vec{F} d'origine gravifique subie par P :



$$\vec{F} = -G \frac{M M_{\oplus}}{|\vec{CP}|^2} \frac{\vec{CP}}{|\vec{CP}|} = M \vec{g}_{\oplus}(P) \quad \text{avec} \quad \vec{g}_{\oplus}(P) = -G M_{\oplus} \frac{\vec{CP}}{|\vec{CP}|^3}.$$

Deux facteurs dans l'expression de la force :

- ▶ M : indépendant de la matière qui engendre la force (la Terre) et fonction de P seulement.
- ▶ le *champ de gravitation* $\vec{g}_{\oplus}(P)$: dépend de masse de la Terre et peut être considéré comme une fonction de la position géométrique P du point matériel (la force par unité de masse que la Terre exerce sur de la matière pesante qui se trouverait en P).

Pesanteur à la surface de la Terre (2)

- Équation de mouvement : $m\vec{a} = M\vec{g}_\oplus(P)$.
- Si mouvements de faible amplitude **verticale** (H petit par rapport à 6370 km) : $\|\vec{g}_\oplus(P)\| \approx$ constante, avec

$$\|\vec{g}_\oplus(P)\| = \left\| -G M_\oplus \frac{\overrightarrow{CP}}{|\overrightarrow{CP}|^3} \right\| \approx \frac{GM_\oplus}{R_\oplus^2} = 9.8 \text{ m s}^{-2}$$

- Si mouvements de faible amplitude **horizontale** : la *direction* de $\vec{g}_\oplus(P)$ reste à peu près verticale, c'est-à-dire parallèle à la verticale du lieu définie par la direction d'un fil à plomb
- Si axe z vertical orienté vers le haut :

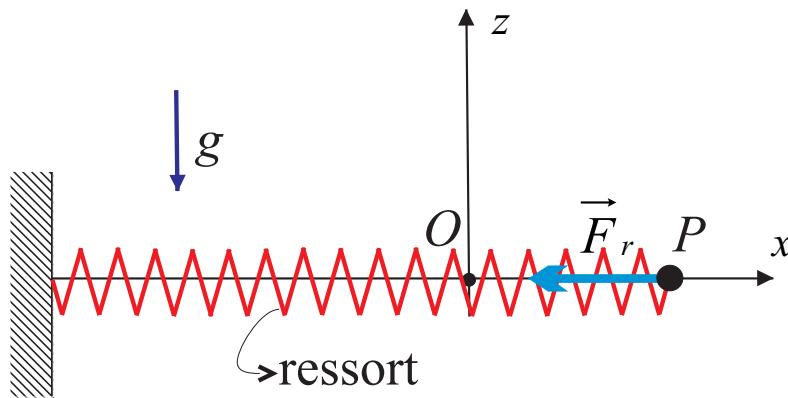
$$\vec{g}_\oplus(P) \approx \vec{g} = -g \vec{e}_z,$$

où $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$ est supposé constant.

- Force de pesanteur indépendante du temps et de la position de P :

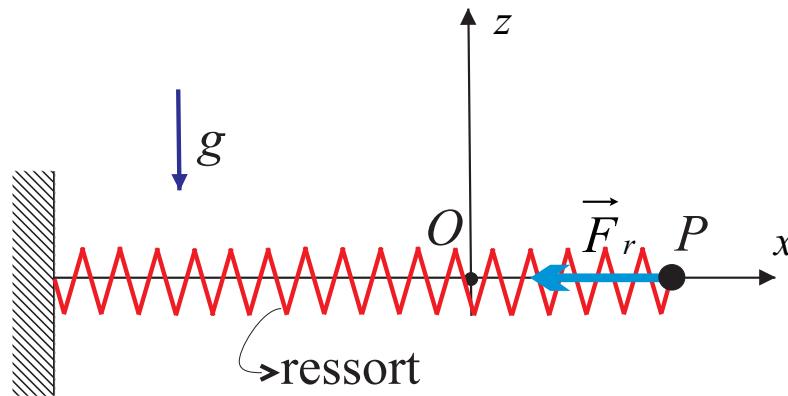
$$\vec{F} = M\vec{g}.$$

Force de rappel d'un ressort



- Ressort : objet macroscopique constitué d'un nombre immense de molécules (microscopiques).
- Force de rappel : résulte des innombrables **interactions moléculaires** entre les particules microscopiques constitutives du ressort lorsque celles-ci sont déplacées de leur position d'équilibre à la suite des déformations (compressions ou extensions) du ressort.
- Les forces intermoléculaires (microscopiques) étant de nature électromagnétique, il s'ensuit que la force de rappel (macroscopique) est, elle aussi, d'**origine électromagnétique**.

Force de rappel d'un ressort (2)



- Expression de la force de rappel à partir des principes fondamentaux de la physique (à partir de l'expression des forces de Lorentz) : pas facile.
- Pour cette raison, c'est plutôt par **voie expérimentale** que l'on obtient l'expression de la force de rappel.
- L'expérience montre que la force de rappel est *fonction de l'allongement* :
 $\vec{F}_r = F(x)\vec{e}_x$.
- Lorsque l'amplitude des mouvements reste assez faible, l'expérience montre que la force de rappel est **proportionnelle à l'allongement** (ce résultat peut aussi s'obtenir par un développement de Taylor limité au premier ordre de $F(x)$).

$$\vec{F}_r = -kx\vec{e}_x.$$

Force de frottement fluide (ou visqueux)

- Particule qui se déplace dans un fluide (de l'air, de l'eau, de l'huile,...) subit une force de frottement qui résulte des **interactions électromagnétiques** entre les molécules du fluide et les molécules constituant la particule.
- Comme pour ressort : expression phénoménologique
- Si \vec{v} pas trop importante, l'expérience suggère que la force de frottement visqueux \vec{F}_v est proportionnelle et directement opposée à cette vitesse :

$$\vec{F}_v = -c\vec{v}.$$

Force de contact dans mvts guidés

- Oscillateur harmonique : perle pas tout à fait libre. Mouvements guidés par la tige. Tige supposée assez rigide pour ne pas se déformer.
- Pendule circulaire : perle en mouvement sur un cercle indéformable situé dans un plan vertical
- Particule en mouvement sur une table.
- En général : **courbe ou surface de guidage**
- Restrictions aux mouvements doivent être compatibles avec Loi de Newton ! Existence de **forces de liaison**.
- Forces de liaison perpendiculaires à courbe ou surface de guidage : “**réactions normales**”.
- Forces de liaison : inconnues du problème, déterminées grâce aux équations de Newton

- Mouvement non guidé : forces données, mouvement calculé
- Mouvement guidé : une “partie” du mouvement est imposée *a priori* (c'est donc une donnée) et ce sont les forces de liaison correspondantes que l'on peut déterminer au moyen des équations de Newton.

Force de contact dans mvts guidés (2)

- Autres forces dues au contact : force de frottement qui tend à ralentir le mobile dans son mouvement sur le support.
- La force de frottement doit supposée être connue *a priori* : c'est une donnée du problème.
- Si contact “**huilé**”, force de frottement du même type visqueux que lorsqu'une particule se déplace dans un fluide :

$$\vec{T}_v = -c \vec{v}_r.$$

Force de contact dans mvts guidés (3)

- Si le contact est “sec”, l’expérience donne (\vec{N} est la réaction normale totale) :

$$\vec{T}_s = -\mu \|\vec{N}\| \frac{\vec{v}_r}{\|\vec{v}_r\|}.$$

v_n = vitesse relative du mobile à la surface

- ▶ Si $\vec{v}_r = 0$ (pas de glissement), la composante \vec{T}_s de la force de contact tangente à la courbe ou à la surface de guidage est appelée *force de frottement statique sec*.
- ▶ Son intensité dépend des autres forces appliquées au corps et elle doit être considérée comme une inconnue du problème : force de liaison rendant possible l’annulation de la vitesse relative !
- ▶ L’expérience montre que le corps commence à glisser sur le support dès que \vec{T}_s devient suffisamment grand. La condition pour que la vitesse relative reste égale à zéro dépend de la force \vec{N} avec laquelle les corps sont pressés l’un sur l’autre :

$$\|\vec{T}_s\| \leq \mu_0 \|\vec{N}\|,$$

→ Système statique à une valeur limite

où μ_0 est un coefficient de frottement *statique* dont la valeur, déterminée par voie expérimentale, est en général un peu supérieure à celle du coefficient de frottement *dynamique* μ .

Force de contact dans mvts guidés (4)

- Résumé :

- ▶ *Forces de contact* : origine électromagnétique
- ▶ *Forces de contact* : composées de *forces de liaison* et de *forces de frottement*
- ▶ *Forces de liaison* : permettent de réaliser les restrictions du mouvement, *inconnues a priori*, déterminées à partir des équations de Newton
- ▶ *Forces de frottement* : données *a priori* par l'expérience, ou éventuellement par des modèles théoriques du frottement.

Les lois de conservation

Conséquences de l'équation fondamentale de la Mécanique qui sont parfois plus faciles à exploiter.

- Conservation de l'*impulsion* (ou *quantité de mouvement*).
- Conservation du *moment cinétique*.
- Conservation de l'*énergie cinétique*.

Conservation de l'impulsion

$$\vec{F} = m \vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

on pose $\vec{p} = m \vec{v}$

- Impulsion ou quantité de mouvement (*linear momentum* en anglais) d'un point matériel P (par rapport à référentiel donné) :

$$\vec{p} = m \vec{v}$$

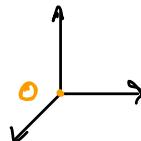
- Si définie par rapport à un **système de référence d'inertie**, l'équation de Newton peut se récrire

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

Équation de conservation de l'impulsion ou **équation- \vec{p}**

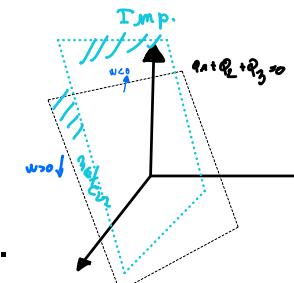
Conservation du moment cinétique

- Moment cinétique (*angular momentum* en anglais) d'une particule P par rapport à un point O , et par rapport à un système de référence :



$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OP} \wedge m \vec{v} = \overrightarrow{OP} \wedge \vec{p}$$

$\vec{O}P \wedge m\vec{v} = (\vec{O}O + \vec{OP}) \wedge m\vec{v} = L_O + \vec{O}O \wedge \vec{p}$



NB. Si on remplace O par O' , on a $\vec{L}_{O'} = \vec{L}_O + \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{p}$.

- Très souvent -mais pas toujours! -, le point O est un point fixe du système de référence, que l'on peut choisir comme origine du système de coordonnées. On a alors

$$\vec{L}_O = \vec{r} \wedge m \vec{v} = \vec{r} \wedge \vec{p}.$$

- Si **système de référence d'inertie** et que **O est un point fixe** dans ce système :

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{L}_O}{dt} &= \frac{d(\vec{O}P \wedge m\vec{v})}{dt} \\ &= \frac{d\vec{O}P}{dt} \wedge m\vec{v} + \vec{O}P \wedge m \frac{d\vec{v}}{dt} \\ &= \vec{O}P \wedge \vec{F}\end{aligned}$$

si O est un pt fixe : $\frac{d\vec{O}P}{dt} = \vec{0}$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O$$

valable dans un Système inertiel

où le moment \vec{M}_O des forces $\div O$ est défini par $\vec{M}_O = \overrightarrow{OP} \wedge \vec{F} = \vec{r} \wedge \vec{F}$.

Équation de conservation du moment cinétique ou **équation- \vec{L}**

NB. Si on remplace O par O' , on a $\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{F}$.

Conservation de l'énergie cinétique

- Énergie cinétique d'une particule P par rapport à un système de référence :

$$K = T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{p^2}{2m}$$
$$\frac{dT}{dt} = m \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

- Si **système de référence d'inertie** :

on a $\vec{F} = m \vec{a}$
utilisé

$$\frac{dT}{dt} = P,$$

avec P la *puissance* des forces :

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}.$$

Équation de conservation l'énergie cinétique ou équation- T

Lois de “**conservation**” : pourquoi ?

- Si la particule P est **isolée**, alors $\vec{F} = 0$ et \vec{p} , \vec{L}_O et T sont des constantes. Ces quantités sont donc “**conservés**”
- On verra plus tard que ces résultats se généralisent à des **ensembles** de particules **isolées** du reste du monde.
 - ▶ On a déjà vu que l’impulsion totale de *deux* particules qui ne sont soumises qu’à leurs interactions mutuelles est conservée.
 - ▶ \vec{p} , \vec{L}_O sont conservés dans un système de particules isolées du reste du monde.
 - ▶ Pour T , les choses sont plus délicates !

Travail d'une force

- Considérons un point matériel P qui se déplace sous l'effet de plusieurs forces \vec{F} , \vec{F}' , \vec{F}'' ,... et dont la trajectoire γ passe par les points A et B .
- **Travail élémentaire dW** de la force \vec{F} lorsque le point P qui la subit se déplace d'un vecteur infinitésimal $d\vec{r}$ le long de la trajectoire γ :

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_i dx_i,$$

somme sur i

- Le travail $W_{\gamma(A \rightarrow B)}(\vec{F})$ développé par la force \vec{F} le long de la trajectoire entre les points A et B :

$$\overset{\curvearrowleft}{W}_{\gamma(A \rightarrow B)}(\vec{F}) = \int_{\gamma(A \rightarrow B)} dW = \int_{\gamma(A \rightarrow B)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma(A \rightarrow B)} F_i dx_i. \quad (5)$$

- **Attention** : Notation dW : un peu “symbolique” car W n'est pas une variable d'intégration !

Travail d'une force (2)

$$\int f_i \, dx_i = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{du} du$$

tangent
 $\frac{d\vec{r}}{du}$
 vitesse
 tangent
 $\frac{d\vec{r}}{du}$
 dérivée

- Si force tout à fait générale dépendant de t , \vec{r} et \vec{v} et en utilisant le temps t pour paramétriser la trajectoire :

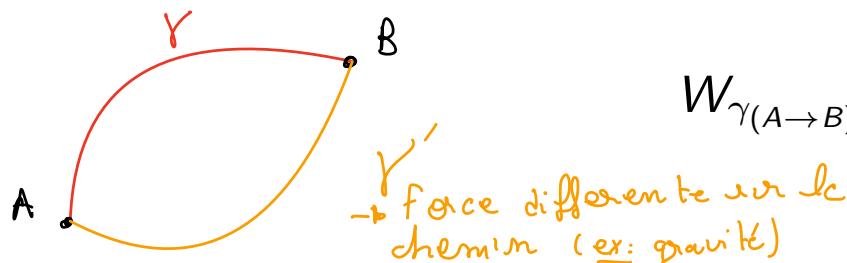
$$W_{\gamma(A \rightarrow B)}(\vec{F}) = \int_{t_A}^{t_B} \vec{F}(t, \vec{r}(t), \vec{v}(t)) \cdot \vec{v}(t) dt = \int_{t_A}^{t_B} \mathcal{P}(t) dt,$$

avec $\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}$ la puissance développée par la force \vec{F} .

- Si la force ne dépend que de la position ($\vec{F}(t, \vec{r}, \vec{v}) \equiv \vec{F}(\vec{r})$), on peut utiliser un paramétrage quelconque $x_k(s)$:

$$W_{\gamma(A \rightarrow B)}(\vec{F}) = \int_{\gamma(A \rightarrow B)} F_i(x_k) dx_i = \int_{s_A}^{s_B} F_i(x_k(s)) \frac{dx_i(s)}{ds} ds.$$

- **NB.** Travail dépend non seulement des points A et B , mais aussi de la courbe ! Si \vec{F}' , \vec{F}'' , ... modifiées, mais que P continue à passer par A et B , en suivant γ' :



$$W_{\gamma(A \rightarrow B)}(\vec{F}) \neq W_{\gamma'(A \rightarrow B)}(\vec{F}).$$

Force conservative

La force \vec{F} est conservative :

- ▶ Force définie en tous les points et qui ne dépend **que de la position** :

$$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$$

- ▶ La force ne peut donc pas dépendre du temps ou de la vitesse de P .
- ▶ Il existe une fonction $V(x, y, z)$ définie sur l'espace et qui est telle que \vec{F} puisse s'écrire sous la forme

$$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z) = -\nabla V(x, y, z), \quad \begin{aligned} \left(\frac{1}{2}mv^2\right)' &= mv \\ (mgh)' &= mg \end{aligned}$$

- ▶ La force \vec{F} dérive du potentiel V
- ▶ Une telle fonction V existe si et seulement si $\nabla \wedge \vec{F}(x, y, z) = 0$.

Force conservative (2)

- Le travail d'une f. conservative entre deux points A et B est indépendant de la courbe γ joignant les pts et ne dépend donc que des extrémités A et B :

$$\begin{aligned}
 W_{\gamma(A \rightarrow B)} &= \int_{\gamma(A \rightarrow B)} F_i(x_k) dx_i = \int_{s_A}^{s_B} F_i(x_k(s)) \frac{dx_i(s)}{ds} ds \\
 &\stackrel{\text{Si } f \text{ est conv.}}{=} - \int_{s_A}^{s_B} \frac{\partial V(x_k(s))}{\partial x_i} \frac{dx_i(s)}{ds} ds \quad \begin{array}{l} \text{f ne dépend que du temps.} \\ \text{fct temporelle} \\ \Leftrightarrow \frac{dV(s)}{ds} \end{array} \\
 &= - \int_{s_A}^{s_B} \frac{dV(x_k(s))}{ds} ds \\
 &= - (V(B) - V(A))
 \end{aligned}$$

NB. On envisage donc des courbes *quelconques* joignant A et B : en changeant \vec{F}' , \vec{F}'' , on peut imaginer que ces courbes deviennent des trajectoires.

- On déduit que le travail le long d'une courbe fermée est $\equiv 0$.

Force conservative (3)

- D'après les théorèmes régissant la primitivation dans \mathbb{R}^n , la réciproque des résultats que nous venons d'obtenir est vraie également : si le travail d'une force ne dépend que des points de départ et d'arrivée, ou si le travail le long de tout contour fermé est nul, alors cette force est conservative.
- Une force conservative peut donc être définie de manière équivalente

- ▶ par le fait qu'elle dérive d'un potentiel,
 - ▶ par le fait que son travail est indépendant du chemin, ou encore
 - ▶ par l'annulation du travail le long de toute courbe fermée

→ Si f_1, f_2, \dots, f_n sont conservatives, leur somme est conservative

$$\text{Si } \vec{F} = f_1 \frac{\vec{i}}{x_1} + f_2 \frac{\vec{j}}{x_2} + \dots + f_n \frac{\vec{k}}{x_n}, \text{ on a } \vec{\nabla} \wedge (\vec{f}) = \vec{0}$$

Force conservative (4)

- Lorsque la force est conservative, la notation dW acquiert un sens beaucoup plus "fort" car le travail W est indépendant du chemin et peut donc être considéré comme une quantité univoquement définie en tous les points de l'espace (et peut être considéré comme une variable d'intégration dans la définition du travail). On dit aussi dans ce cas que dW est une différentielle totale, ou une différentielle exacte, et on peut écrire $W_{\gamma(A \rightarrow B)} = \int_A^B dW = W(B) - W(A)$, où la fonction $W(P)$ est définie par $W(P) = -V(P)$.

Lorsque le travail dépend du chemin, il est impossible de définir une fonction $W(P)$ (qui ne dépendrait que de P) et l'expression $W(B) - W(A)$ que l'on vient d'écrire pour le travail n'aurait évidemment aucun sens.

ex: Force conservatrice: $\vec{F} = m\vec{g}$

$$\underset{x}{\textcircled{1}} \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \underset{y}{\textcircled{2}} \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \underset{z}{\textcircled{3}} \frac{\partial V}{\partial z} = -mg \quad \text{et } V(x, y, z)$$

par $\textcircled{1} \rightarrow f(y, z)$ où $f(y, z)$ est une fonction de y et de z (const en fait de x)

$$\textcircled{2} \rightarrow f(y, z) = h(z)$$

$$\textcircled{3} \rightarrow h = mgz + \text{const.} \rightarrow V(x, y, z) = -mg \cdot \vec{z}$$

- Souvent, on ne peut pas résoudre (analytiquement) l'équation de Newton.
- *Intégrale première* : moyen d'obtenir des informations physiques sur le mouvement sans résoudre les équations différentielles du mouvement !
- Envisageons les intégrales premières les plus courantes...

Force centrale (1)

La force \vec{F} est centrale :

la force \vec{F} qui s'applique à une particule P est centrale si elle passe constamment par un point fixe O du système de référence d'inertie

- Comme $\vec{F} \parallel \overrightarrow{OP}$, on a $\vec{M}_O = 0$. L'équation- \vec{L} en le point fixe O en question donne alors :

$$\vec{L}_O = \vec{L}_{O,0} = \text{constante.}$$

- On déduit que toutes les orbites sont planes, dans le plan perpendiculaire au moment cinétique et passant par O car

$$\overrightarrow{OP} \cdot \vec{L}_{O,0} = \overrightarrow{OP} \cdot \vec{L}_O = \overrightarrow{OP} \cdot (\overrightarrow{OP} \wedge m \vec{v}) \equiv 0$$

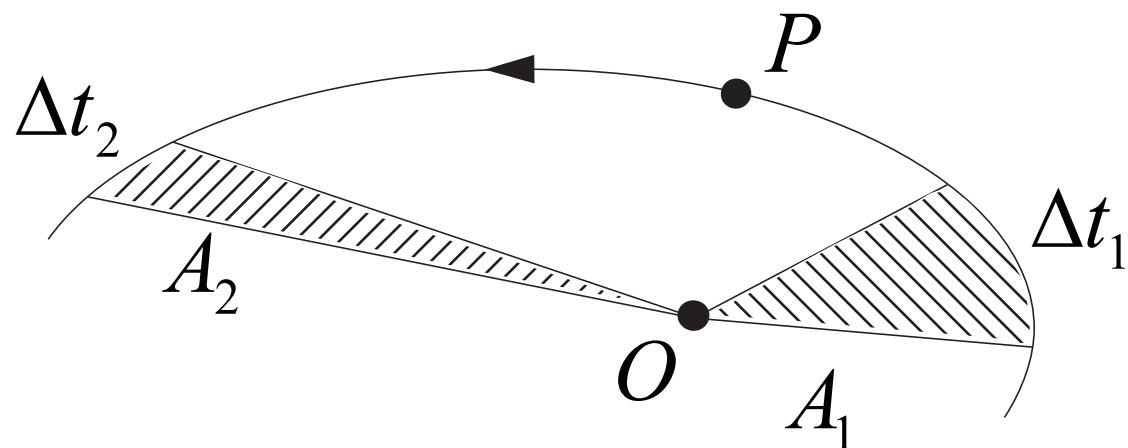
- Dans le cas particulier où le moment cinétique constant est nul, la particule est soit au repos, soit en mouvement rectiligne (non uniforme en général) sur une droite passant par le point fixe O .

Force centrale (2)

- Si le moment cinétique est non nul, on peut aussi déduire de manière tout à fait générale que ces mouvements plans se font en respectant la *loi des aires* (cf. plus loin) :

Des aires égales sont balayées en des temps égaux :

$$A_1 = A_2 \text{ si } \Delta t_1 = \Delta t_2.$$



La force \vec{F} est constamment nulle

- Les lois de conservation de l'impulsion, du moment cinétique et de l'énergie donnent directement

$$\begin{aligned}\vec{p} &= \vec{p}_0 = \text{constante}, \\ \vec{L} &= \vec{L}_0 = \text{constante}, \\ T &= T_0 = \text{constante}.\end{aligned}$$

- En fait, tout mouvement de la particule est un MRU (mouvement rectiligne uniforme). Le cas particulier d'un état d'équilibre est bien entendu possible.

La force ne travaille pas

La force \vec{F} ne travaille pas :

la puissance $\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}$ est égale à zéro à tout instant.

La force qui s'applique sur le point P est donc toujours perpendiculaire à la vitesse de ce point.

- La loi de conservation de l'énergie cinétique donne :

$$T = T_0 = \text{constante.}$$

- Tous les mouvements sont *uniformes* puisque le module de la vitesse est une constante.
(Ceci n'empêche évidemment pas la vitesse de changer de direction et, en général, le mouvement n'est pas rectiligne.)

La force est conservative

- Si la force \vec{F} est conservative, on a, par l'équation- T :

$$\frac{dT}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = -\text{grad } V \cdot \vec{v} = -\frac{dV(x(t), y(t), z(t))}{dt},$$

et donc

$$T + V = E = \text{constante}$$

- L'“énergie totale” $T + V = E$ est conservée pendant les mouvements du système. Une diminution (respectivement, une augmentation) de l'énergie cinétique ne peut se faire que si la particule se dirige vers des endroits de l'espace où la quantité V est plus grande (respectivement, plus petite).
- L'équation- T nous amène naturellement à attribuer à la particule P une “énergie potentielle” V qu'elle possède par le seul fait d'être quelque part dans l'espace (V est fonction de la position seulement) et à affirmer que son énergie totale, définie comme la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle, reste constante au cours du temps.

La force est conservative (2)

- Si une force ne travaille pas, la question de savoir si elle dérive ou non d'un potentiel est sans importance pour la démonstration !
⇒ **Généralisation** : l'énergie totale est conservée si la somme de toutes les forces qui travaillent dérive d'un potentiel.
- **NB.** Si les courbes ou surfaces de guidage sont fixes, les forces de liaison, qui ne sont pas des forces conservatives, ne travaillent pas !
- **Propriété** : une force centrale à *symétrie sphérique* dérive toujours d'un potentiel. Si $\vec{F} = f(r)\vec{r}$, où $f(r)$ est une fonction quelconque de la distance r à l'origine, alors $\nabla \wedge (f(r)\vec{r}) = 0$.

La force est conservative (3)

- S'il existe des forces non conservatives qui travaillent et dont la somme vaut \vec{F}^{NC} , on a :

$$\frac{d(T + V)}{dt} = \vec{F}^{NC} \cdot \vec{v}. \quad (6)$$

- ⇒ Ce sont les forces non conservatives qui font varier l'énergie mécanique totale !
- On remarquera le lien intime qui existe entre la notion d'énergie et les notions de travail ou de puissance d'une force.

- Souvent, on ne peut pas résoudre (analytiquement) l'équation de Newton.
- *Intégrale première* : fonction de (t, \vec{r}, \vec{v}) qui est une *constante du mouvement*, c-à-d une fonction $f(t, \vec{r}, \vec{v})$ qui garde une valeur constante lorsqu'on remplace les variables \vec{r} et \vec{v} par la solution du problème et sa dérivée.
- La valeur de cette constante dépend des conditions initiales
- Une *intégrale première* s'obtient en “intégrant une fois” la loi fondamentale de la Mécanique ou une des lois de conservation qui en découlent, de manière à en faire disparaître l'accélération et toute trace des dérivées secondes de la position.
- La connaissance d'intégrales premières permet d'obtenir des informations physiques extrêmement intéressantes
- La possibilité d'obtenir des intégrales premières dépend de la forme particulière que prend la fonction $\vec{F}(t, \vec{r}, \vec{v})$

- Intégrales premières pas nécessaires car on a pu tout résoudre !
- La force de pesanteur est toujours parallèle à l'axe \vec{e}_z
L'équation- \vec{p} implique que la quantité de mouvement horizontale, et donc la vitesse horizontale, est conservée :

$$v_x = \vec{v} \cdot \vec{e}_x = \dot{x}_0,$$
$$v_y = \vec{v} \cdot \vec{e}_y = \dot{y}_0.$$

- La force de pesanteur $\vec{F} = m \vec{g}$ dérive du potentiel

$$V = -m \vec{g} \cdot \vec{r} = m g z.$$

- Il y a donc conservation de l'énergie totale :

$$\frac{1}{2} m v^2 + mg z = \frac{1}{2} m (\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}^2) + mg z = \text{constante.}$$

En redéfinissant la constante, on a donc

$$\frac{1}{2} m \dot{z}^2 + mg z = \text{constante.}$$

- Exercice : cette relation permet de déterminer la hauteur maximale atteinte par la particule (sommet de la parabole) sans résoudre explicitement les équations de Newton.

Sans frottement (*Conservation de l'énergie*)

- Les forces de liaison \vec{R} et \vec{N} , ainsi que la force de pesanteur ne travaillent pas.
- La force de rappel du ressort dérive du potentiel $V = \frac{1}{2}kx^2$. On a donc :

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E$$

Cette relation permet, par exemple, de calculer l'élongation maximale sans résoudre l'équation différentielle.

Avec frottement (*Pas d'intégrale première*)

- On a

$$\frac{d}{dt}(T + V) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2\right) = -c\dot{x}^2 < 0.$$

L'énergie mécanique totale décroît et n'est donc pas conservée.

À cause des frottements, l'énergie mécanique se transforme en *chaleur* et engendre un **échauffement** du voisinage (Premier Principe de la Thermodynamique).

Table des matières

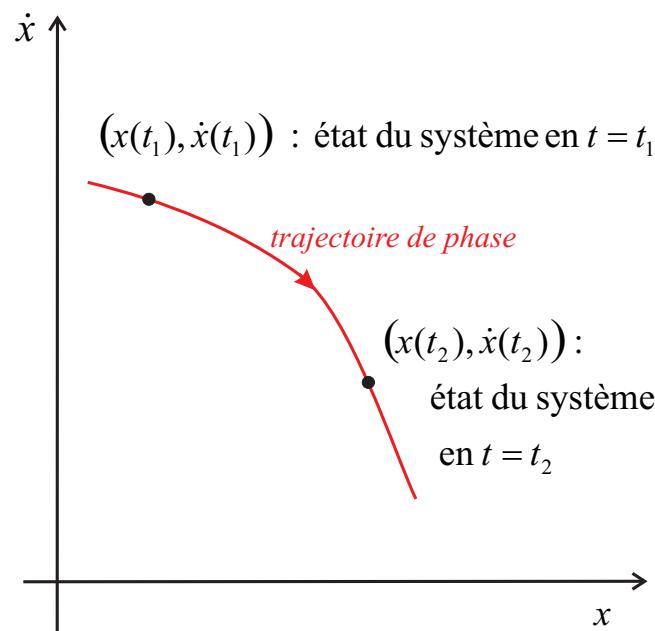
2

Mécanique du point

- Application : chute libre
- Application : oscillateur harmonique
- Lois fondamentales de la Mécanique du point
- L'espace des phases
- Application : le pendule circulaire
- Application : le problème de Kepler
- Application : oscillateur forcé et résonance
- Application : oscillateur non linéaire
- La Mécanique en axes relatifs
- La Mécanique en axes attachés à la Terre
- Application : la chute libre (bis)
- Application : le pendule de Foucault

Espace des phases de l'O.H.

- L'état d'un système mécanique est totalement déterminé par la connaissance de la position et de la vitesse. On dit que la position et la vitesse sont les *variables d'état* du système mécanique.
- Pour l'O.H., les seuls mvts possibles se font le long de l'axe x : 1 ddl.
Ses variables d'état, au nombre de deux, sont x et \dot{x} .
- On appelle *espace des phases* de l'O.H. l'espace abstrait des x et \dot{x} .
- Si $t \uparrow$, la position x et la vitesse \dot{x} varient et le pt. représentant l'état du syst. dans l'esp. des phases se déplace : *trajectoire de phase*.
- Sens de parcours : si \dot{x} est positif (respectivement négatif), la variable de position x augmente (respectivement diminue).
- Distinguer **trajectoire de phase** et **trajectoire “réelle”** dans l'esp. phys.



- Différentes conditions initiales \Rightarrow plusieurs trajectoires de phase.

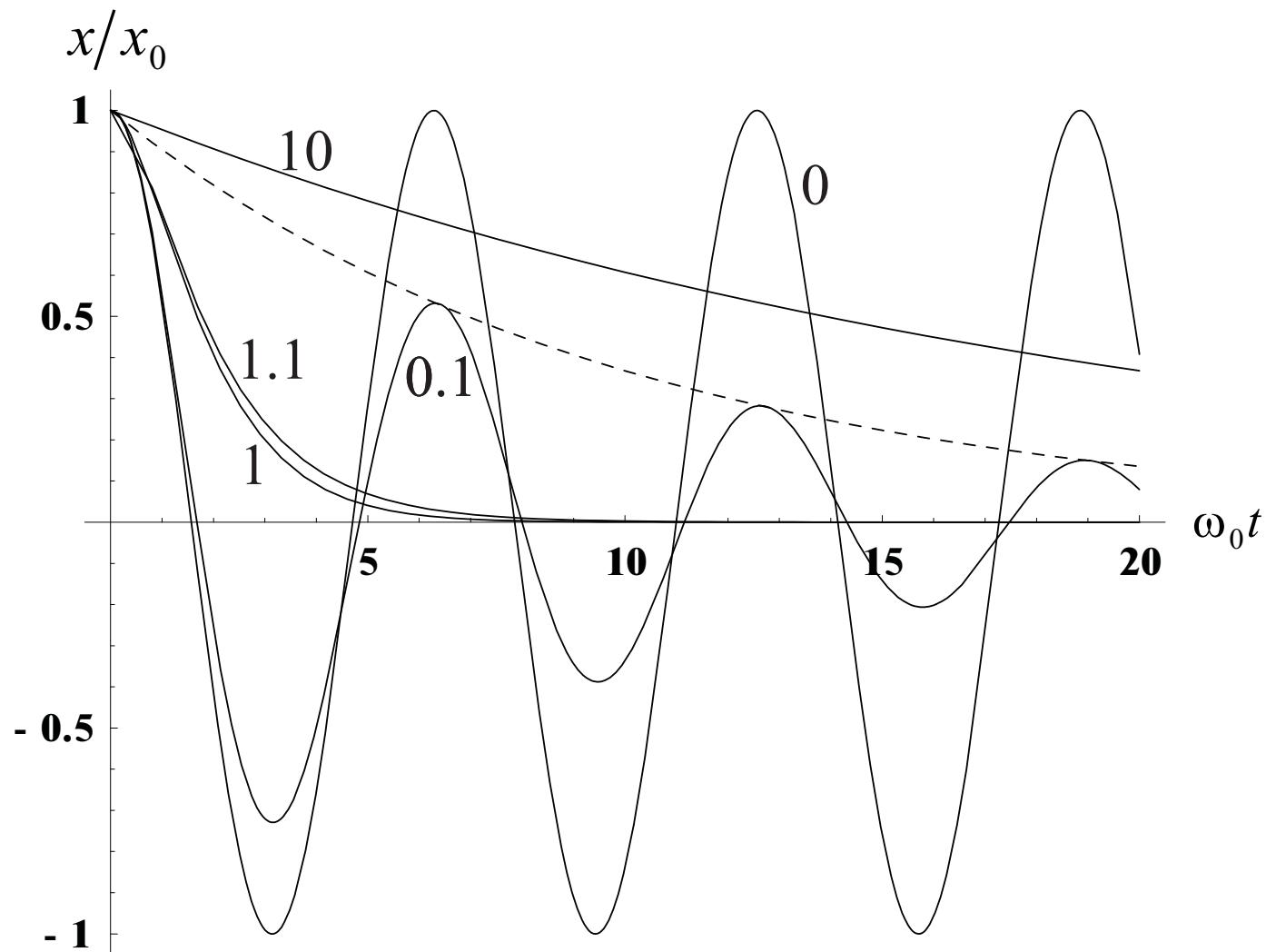
Théorème de non-intersection des trajectoires de phase

- Si les forces sont indépendantes du temps,
i.e. $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v})$, *i.e.* $\vec{F} = \vec{F}$ (état du système),
 - Deux trajectoires de phase distinctes ne peuvent jamais s'intersecter.
 - Une trajectoire de phase ne peut jamais se recouper (“SAUF” pour les solutions périodiques pour lesquelles le mouvement se répète indéfiniment avec des trajectoires de phase qui sont des courbes fermées)
- Conséquence d'un théorème d'Analyse mathématique qui affirme que, sous des conditions assez générales, la solution d'une équation différentielle est *unique* dès lors que des conditions initiales sont imposées (unicité de la solution d'un problème de Cauchy) : ceci traduit le déterminisme de la physique !
(**NB.** Si les forces sont indépendantes du temps, le temps n'apparaît pas explicitement dans l'équation : l'équation différentielle est dite **autonome**.)

Espace des phases de l'O.H. (3)

- *Portrait de phase* : toutes les trajectoires de phase correspondant à toutes les conditions initiales possibles.
- Notion très utile (quand elle est possible) car fournit **résumé** et visualisation géométrique de **tous les mouvements**.
- Espace des phases : surtout utile pour système à un seul ddl car espace des phases est alors de dimension 2 (plan).
- Pour un système à n de degrés de liberté, l'espace des phases possède $2n$ dimensions, (visualisations géométriques malaisées).

Rappel des solutions de l'O.H.



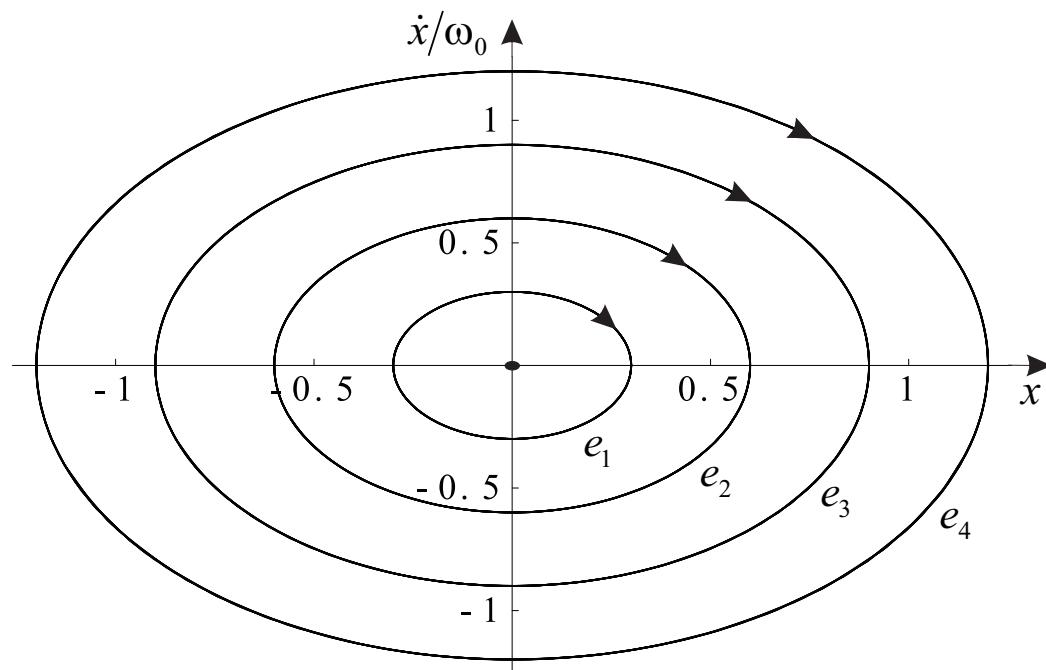
Portrait de phase de l'O.H.N.A.

- Intégrale première d'énergie ($e = 2E/k$) :

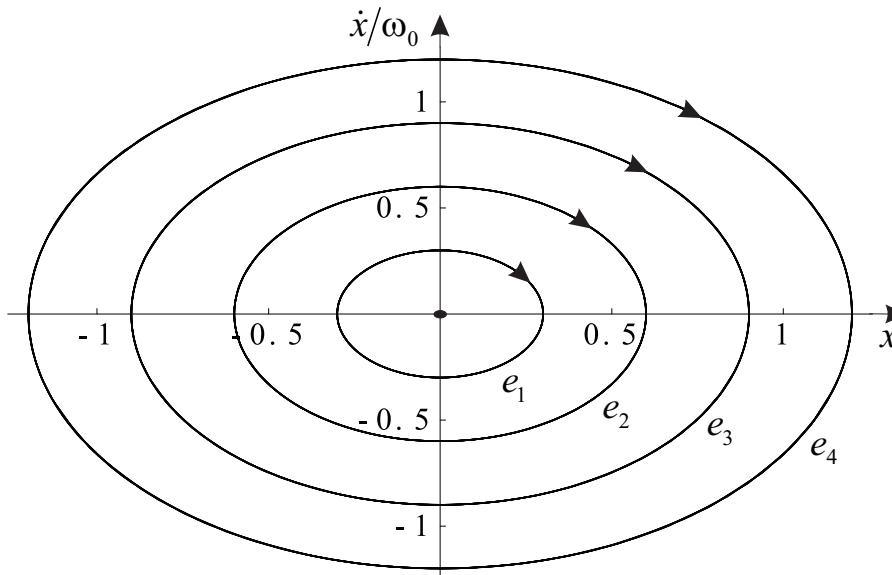
$$\frac{\dot{x}^2}{\omega_0^2} + x^2 = e.$$

Équation cartésienne des trajectoires de phase :

⇒ famille, paramétrée par l'“énergie” e , d'ellipses centrées en l'origine du plan des phases.



Portrait de phase de l'O.H.N.A. (2)



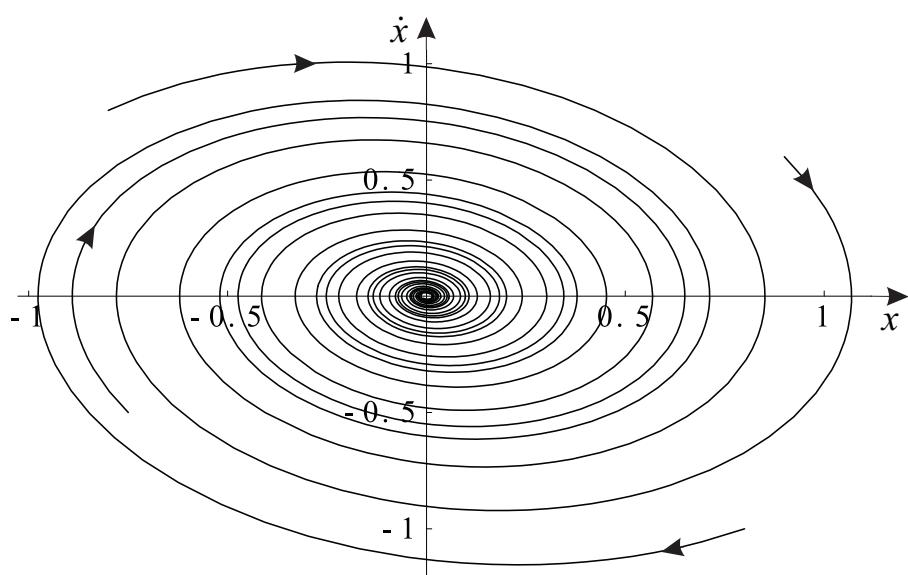
- Toutes les solutions sont périodiques.
- L'origine du plan des phases peut être considérée comme l'ellipse dégénérée correspondant à $e = 0$.
- Trajectoire particulière qui représente la position d'équilibre
- On "voit" que cette position d'équilibre est stable !

On peut généraliser à tout système mécanique possédant un seul degré de liberté :
⇒ une **position d'équilibre** apparaît dans un portrait de phase comme une trajectoire de phase dégénérée qui consiste en un **point isolé** sur l'axe des positions.
⇒ cet équilibre est **stable** si les trajectoires de phase qui prennent naissance dans son voisinage y restent.

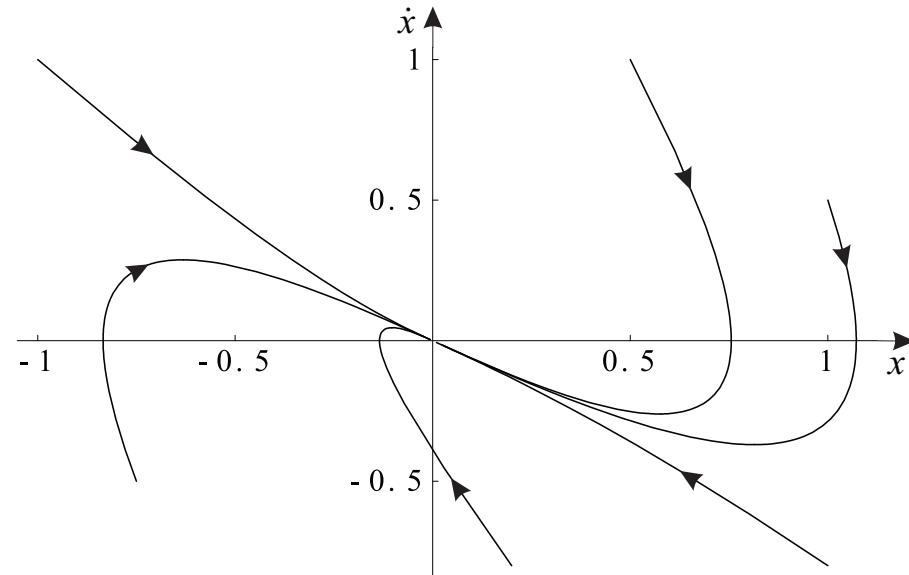
Portrait de phase de l'O.H.A.

- Pas facile par voie analytique mais intuitivement assez clair !
- Facile par voie numérique : Mathematica ou MatLab
Voir “OHA.nb” ou “OHA.m” dans “Fichiers Divers” sur eCampus.

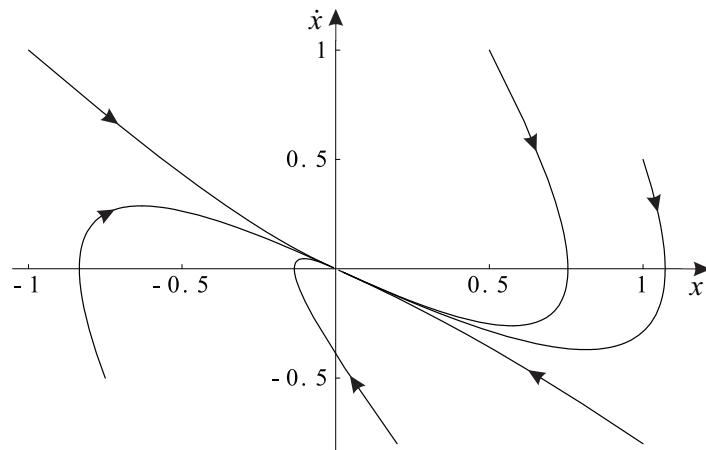
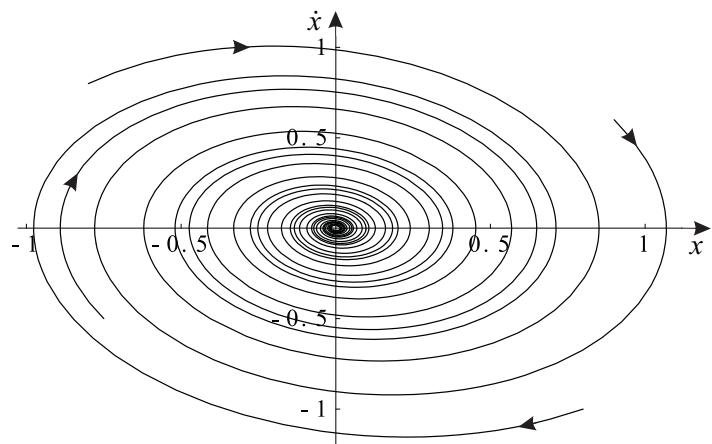
Sous-amortissement



Sur-amortissement



Portrait de phase de l'O.H.A. (2)



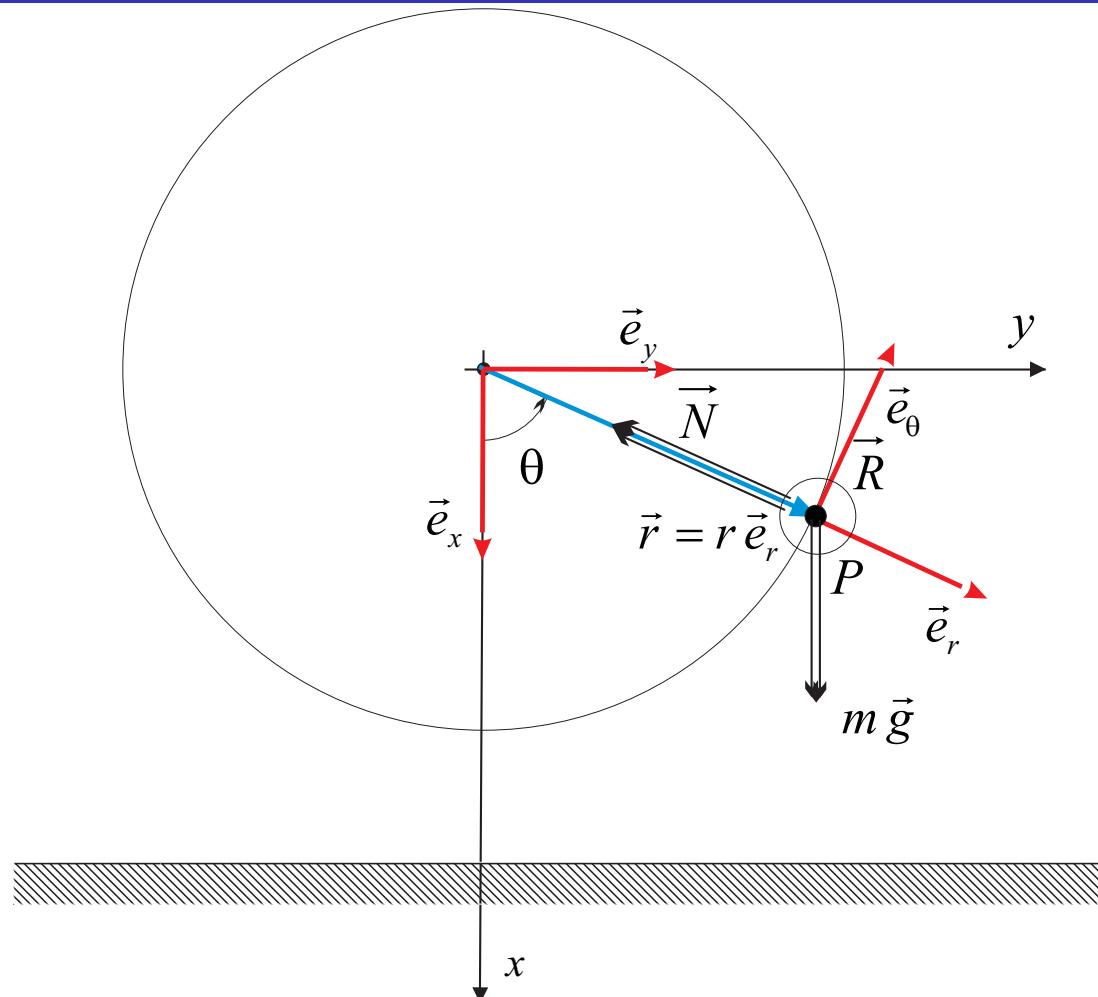
- Les deux portraits de phase confirment également que l'origine du plan des phases est un point d'équilibre stable.
- Toutes les trajectoires convergent vers l'origine lorsque $t \rightarrow \infty$
 \implies le point d'équilibre est asymptotiquement stable.
- On dit que le point d'équilibre est un **attracteur** du système.
- *Foyer stable* (spirales convergentes) pour sous-amortissement.
Nœud stable pour sur-amortissement.
- *Bassin d'attraction de l'attracteur* : l'espace des phases entier.

Table des matières

2 Mécanique du point

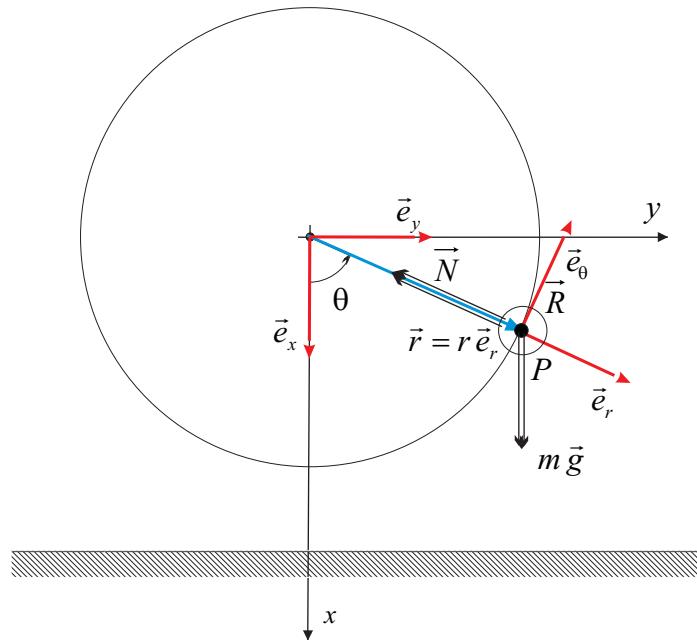
- Application : chute libre
- Application : oscillateur harmonique
- Lois fondamentales de la Mécanique du point
- L'espace des phases
- **Application : le pendule circulaire**
- Application : le problème de Kepler
- Application : oscillateur forcé et résonance
- Application : oscillateur non linéaire
- La Mécanique en axes relatifs
- La Mécanique en axes attachés à la Terre
- Application : la chute libre (bis)
- Application : le pendule de Foucault

Le pendule circulaire



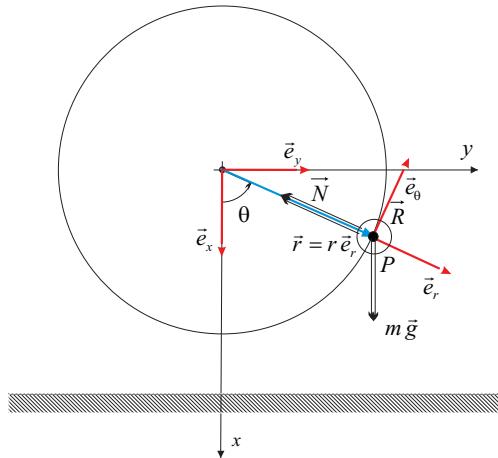
- Perle enfilée sur un fil, particule attachée à une tige rigide (de masse négligeable), particule attachée à un fil inextensible (si mouvements tels que le fil ne se détend jamais).
- Mouvements guidés, coordonnées cylindriques (voir Fig.).
- Frottements négligés.

Le pendule circulaire (2)



- Vecteur position en coord. cyl. : $\vec{r} = \overrightarrow{OP} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$.
- Mouvement sur le cercle : $z = 0$ et $r = \ell$.
- Vecteur position : $\vec{r} = \ell\vec{e}_r$.
- Vitesse et accélération : $\vec{v} = \ell\dot{\theta}\vec{e}_\theta$, $\vec{a} = -\ell\dot{\theta}^2\vec{e}_r + \ell\ddot{\theta}\vec{e}_\theta$.
- Force de pesanteur : $m\vec{g} = mg(\cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta)$.
- Forces de liaison : $\vec{N} = N\vec{e}_r$, $\vec{R} = R\vec{e}_z$.
- Équation de Newton : $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{R}$.

Le pendule circulaire (3)



- Équation de Newton ($m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{R}$) :

$$m(-\ell\ddot{\theta}^2\vec{e}_r + \ell\ddot{\theta}\vec{e}_\theta) = mg(\cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta) + N\vec{e}_r + R\vec{e}_z.$$

- Projections sur \vec{e}_r , \vec{e}_θ , \vec{e}_z : $-m\ell\ddot{\theta}^2 = mg \cos\theta + N$, (1)

$$\ell\ddot{\theta} = -g \sin\theta, \quad (2)$$

$$0 = R. \quad (3)$$

- ▶ Éq. (3) : détermination immédiate de \vec{R} .
- ▶ Éq. (2) : équation d'évolution de $\theta(t)$: $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0$ ($\omega_0^2 = g/\ell$).
- ▶ Éq. (1) : détermination de \vec{N} si $\theta(t)$ connu.

Le pendule circulaire (4)

- L'équation de mouvement $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0$ ne peut être résolue analytiquement !
⇒ Recherche d'informations physiques sans résolution !

1. Étude des “petites” oscillations

- Si $\theta(t) \ll 1$ pour tout t , on a $\sin \theta \approx \theta$. L'équation devient :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0.$$

- Équation de l'oscillateur harmonique non amorti :

$$\theta(t) = \Theta \sin(\omega_0 t + \varphi),$$

- Période :

$$\tau_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}.$$

⇒ **Isochronisme** des petites oscillations (observé expérimentalement à Pise par Galilée en 1581).

2. Étude des positions d'équilibre

- Annulons $\ddot{\theta}$ dans l'équation $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0$. On a donc :

$$\sin \theta = 0,$$

et il y a deux positions d'équilibre :

$$\theta_{\text{éq},1} = 0 \text{ et } \theta_{\text{éq},2} = \pi.$$

- Stabilité ?

On introduit $\theta(t) = \theta_{\text{éq},i} + \epsilon_i(t)$ dans l'équation $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0$:

$$\begin{aligned}\ddot{\epsilon}_1 + \omega_0^2 \sin \epsilon_1 &= 0, \\ \ddot{\epsilon}_2 + \omega_0^2 \sin(\pi + \epsilon_2) &= 0.\end{aligned}$$

2. Étude des positions d'équilibre (suite)

- En linéarisant :

$$\ddot{\epsilon}_1 + \omega_0^2 \epsilon_1 = 0,$$

$$\ddot{\epsilon}_2 - \omega_0^2 \epsilon_2 = 0.$$

- Première équation : O.H.
⇒ équilibre **inférieur stable**.
- Deuxième équation a pour solutions : $\epsilon_2(t) = A \cosh(\omega_0 t) + B \sinh(\omega_0 t)$
⇒ équilibre **supérieur instable**.

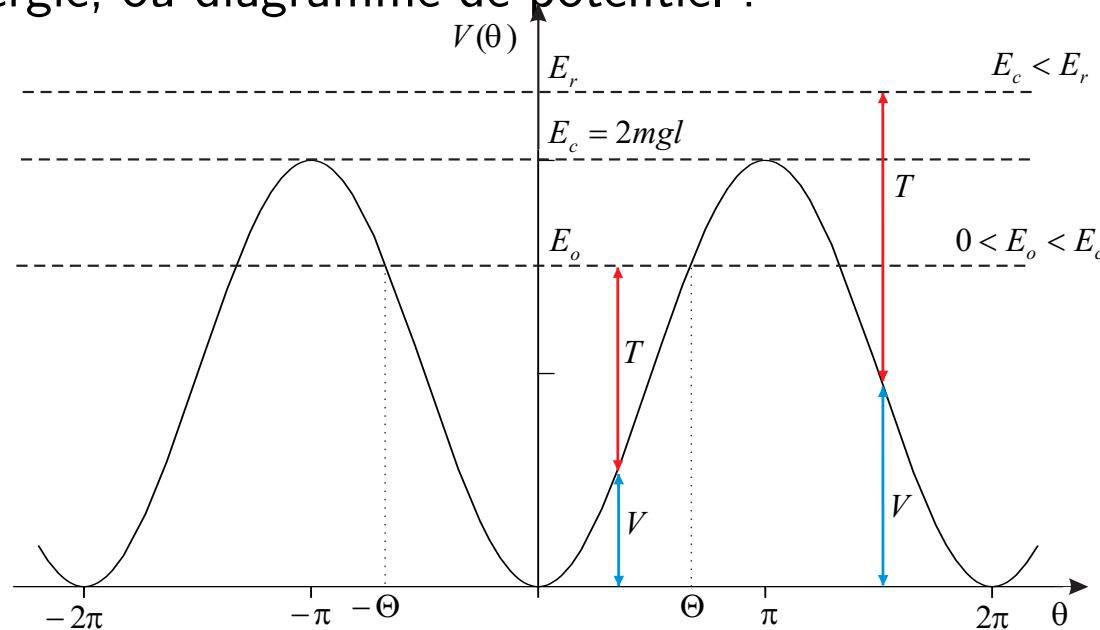
3. Étude des “grandes” oscillations

- Forces de liaison ne travaillent pas et force de pesanteur $m\vec{g}$ dérive du potentiel $V = mgH$ ($H = \ell(1 - \cos \theta)$), d'où *intégrale première de conservation de l'énergie mécanique totale* :

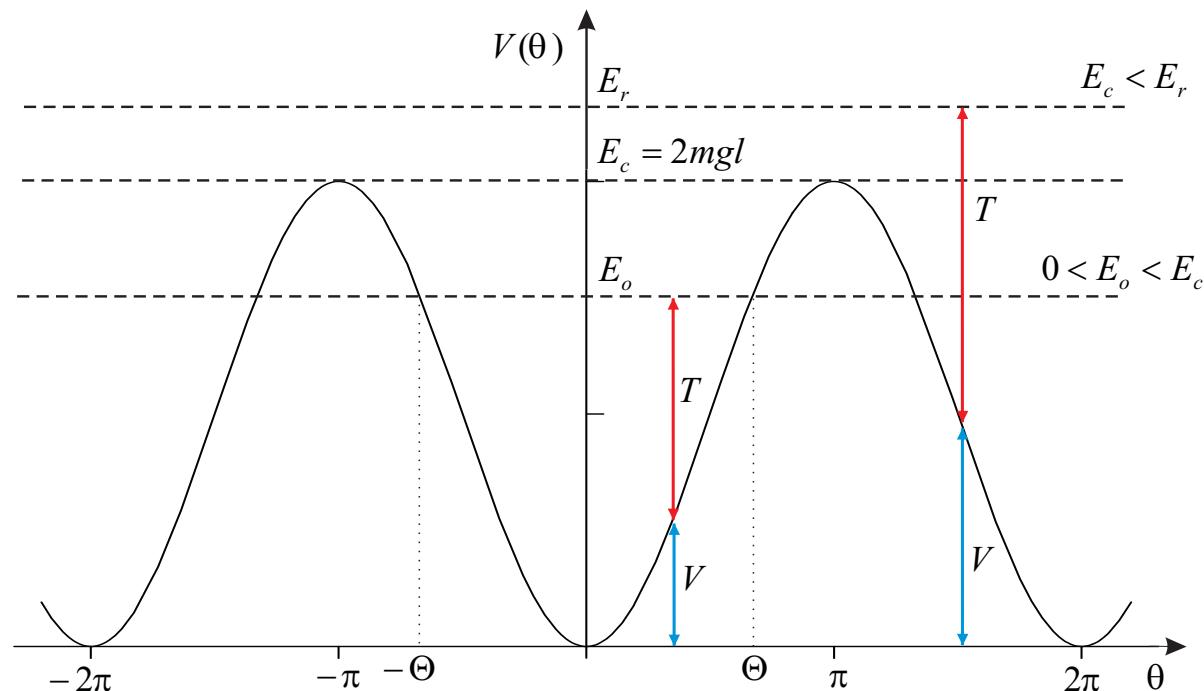
$$\underbrace{\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2}_{T > 0} + \underbrace{mg\ell(1 - \cos \theta)}_{V(\theta)} = E,$$

(Peut s'obtenir également en intégrant une fois l'équation de mouvement préalablement multipliée par $\dot{\theta}$. On a aussi $\ddot{\theta} = -\frac{1}{m\ell^2} V'(\theta)$.)

- Diagramme d'énergie, ou diagramme de potentiel :



Le pendule circulaire (8)

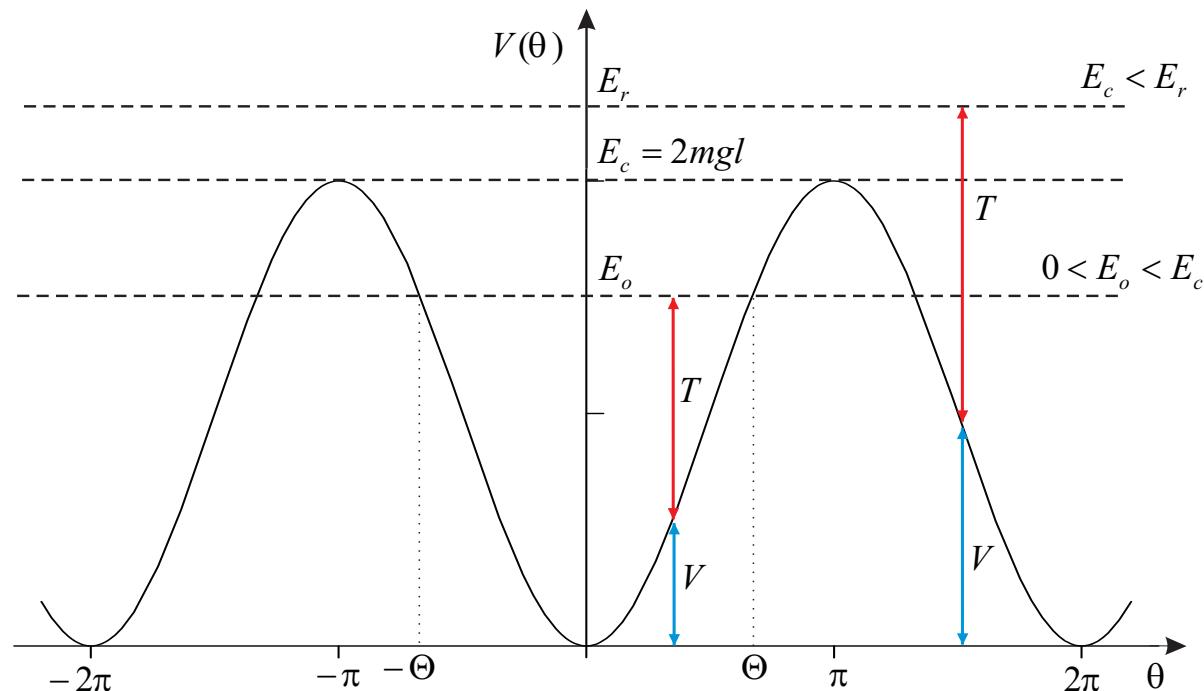


$$E = 0$$

V et T sont tous deux nuls

⇒ position d'**équilibre inférieure**.

Le pendule circulaire (9)



$$0 < E = E_o < E_c$$

- Comme $T > 0$, on a $\theta \in [-\Theta, \Theta]$
- "Points de rebroussement" car $\ddot{\theta} = -\frac{1}{m\ell^2} V'(\theta)$.

⇒ **oscillations** dont l'amplitude $\Theta \uparrow$ avec E_o .

Le pendule circulaire (10)

► $0 < E = E_o < E_c$ (suite)

Période des oscillations ?

- En le point de rebroussement on a $\theta = \Theta$ et $\dot{\theta} = 0$
- E_o en fonction de Θ : $E_o = mg\ell(1 - \cos \Theta) = 2mg\ell \sin^2 \frac{\Theta}{2}$.

Vu l'intégrale première d'énergie (τ_0 est la période des petites oscillations), on a :

$$\dot{\theta} = \pm \frac{4\pi}{\tau_0} \sqrt{\sin^2 \frac{\Theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}},$$

- Période τ :

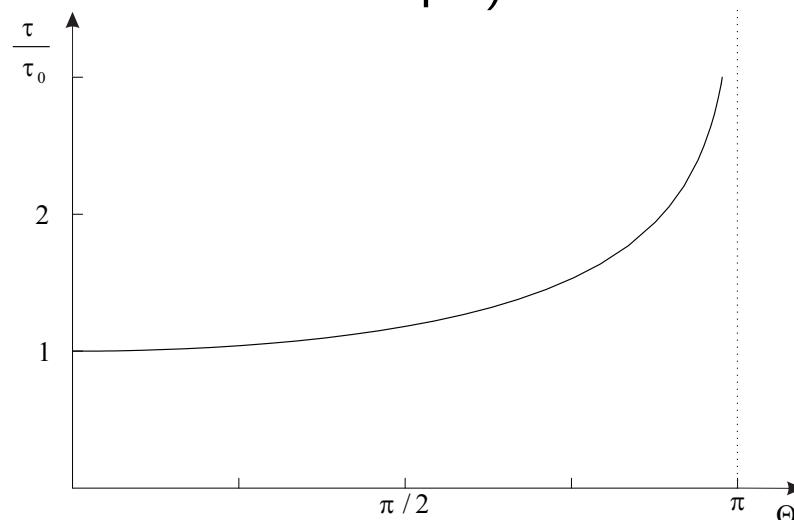
$$\begin{aligned}\tau &= 2 \int_{t_{-\Theta}}^{t_\Theta} dt \\ &= 2 \int_{-\Theta}^{\Theta} \frac{d\theta}{\dot{\theta}}.\end{aligned}$$

Le pendule circulaire (11)

- Comme $\dot{\theta} > 0$ pour les mouvements “de gauche à droite” :

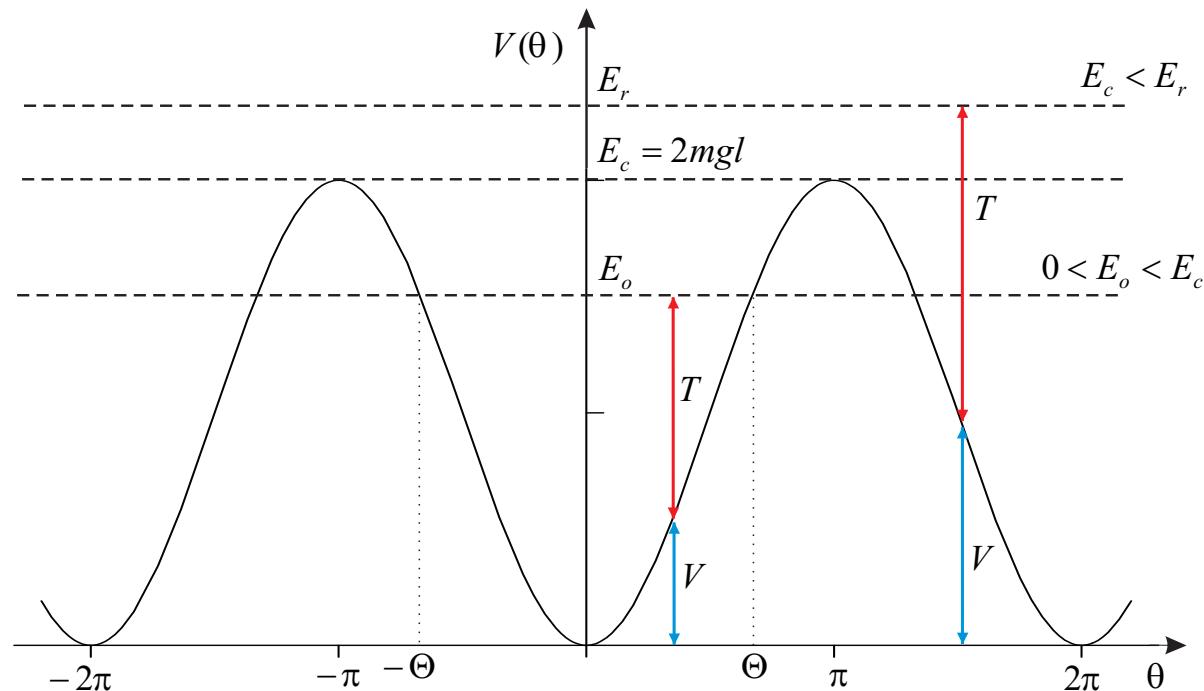
$$\frac{\tau}{\tau_0} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Theta}^{\Theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2 \frac{\Theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}}.$$

- Intégrale elliptique (table ou calcul numérique)



- Pour de petites amplitudes, la période τ tend vers la période τ_0 des petites oscillations
- La fonction s'éloigne très lentement de 1 lorsque l'amplitude augmente : pour $\Theta = 10^\circ$ et 45° , on a $\tau/\tau_0 = 1.002$ et 1.04 respectivement.
 - ⇒ Isochronisme des petites oscillations : excellente approximation.
- La période des oscillations tend vers l'infini pour des oscillations dont l'amplitude tend vers π (voir cas $E = E_c$ ci-dessous).

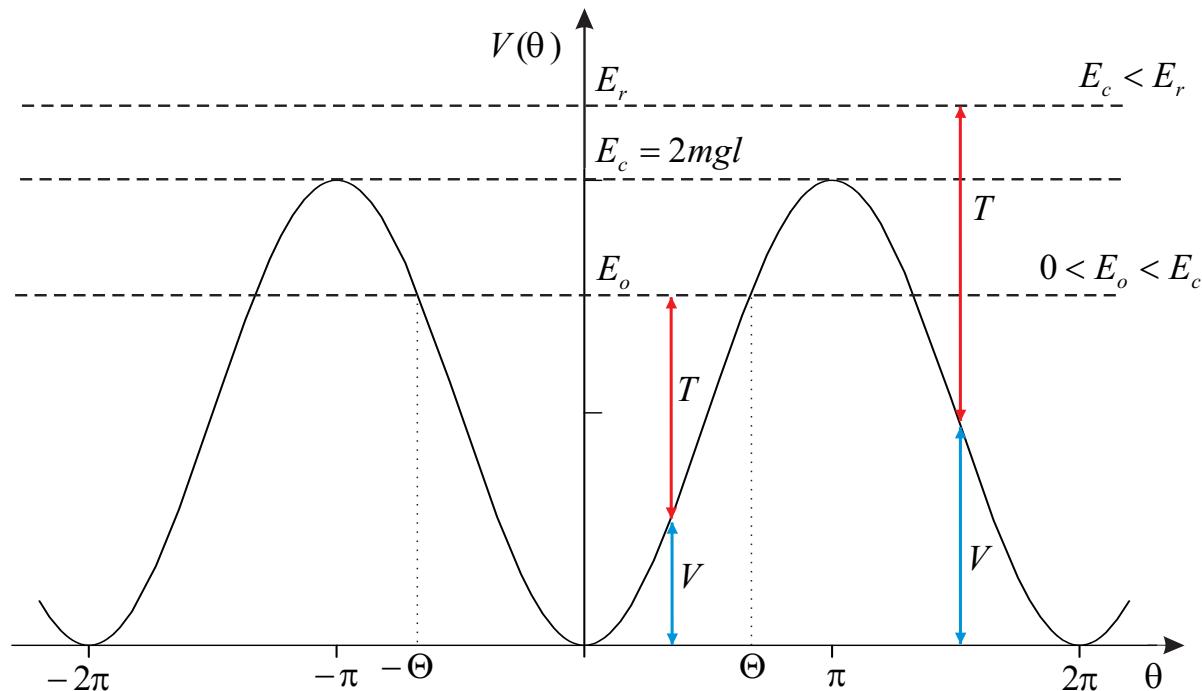
Le pendule circulaire (12)



$$E = E_c$$

- Si conditions initiales telles que $\dot{\theta}_0 = 0$:
 ⇒ position d'**équilibre instable** (accélération nulle) (→ peu réaliste !)
- Sinon, la particule se dirige vers le point d'équilibre instable, en tournant dans le sens fixé par le signe de la vitesse initiale.
 Temps de parcours infini
 ⇒ mouvement de **limitation**.

Le pendule circulaire (13)



$$E > E_c$$

L'énergie cinétique, et donc la vitesse, ne s'annulent jamais
⇒ mouvement de **rotation** (sens déterminé par les conditions initiales).

Espace des phases

- Équation des trajectoires de phase (cf. $\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + mg\ell(1 - \cos \theta) = E$: loi de conservation de l'énergie) :

$$\frac{\dot{\theta}}{\sqrt{2}\omega_0} = \pm \sqrt{\epsilon + \cos \theta} \quad (\text{avec } \epsilon = E/mgl - 1 = \text{ constante})$$

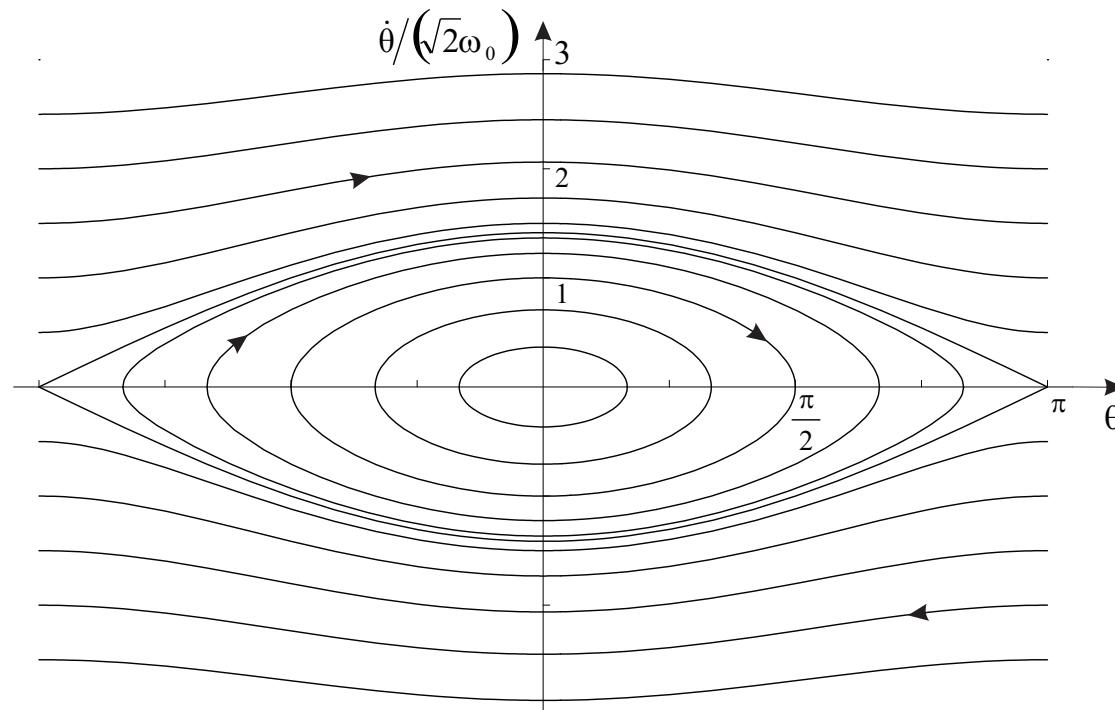


Table des matières

2

Mécanique du point

- Application : chute libre
- Application : oscillateur harmonique
- Lois fondamentales de la Mécanique du point
- L'espace des phases
- Application : le pendule circulaire
- Application : le problème de Kepler**
- Application : oscillateur forcé et résonance
- Application : oscillateur non linéaire
- La Mécanique en axes relatifs
- La Mécanique en axes attachés à la Terre
- Application : la chute libre (bis)
- Application : le pendule de Foucault

Le problème de Kepler

- Hypothèses générales :
 - ▶ Planète unique P (la “Terre”) de masse m gravitant autour du Soleil de masse $M = M_{\odot}$.
 - ▶ Soleil est fixe dans le système de référence de Copernic et en occupe l’origine O .
 - ▶ Planète et le Soleil assimilés à des points matériels.
- Force de gravitation que le Soleil exerce sur la planète :

$$\vec{F} = -G m M \frac{\vec{r}}{r^3}.$$

- Équation de mouvement de la planète :

$$\vec{a} = -G M \frac{\vec{r}}{r^3} = \vec{g}_{\odot}(P).$$

Équation différentielle non linéaire qui ne peut être résolue analytiquement.

- **Mais** deux intégrales premières vont permettre de caractériser les mouvements !

Le problème de Kepler (2)

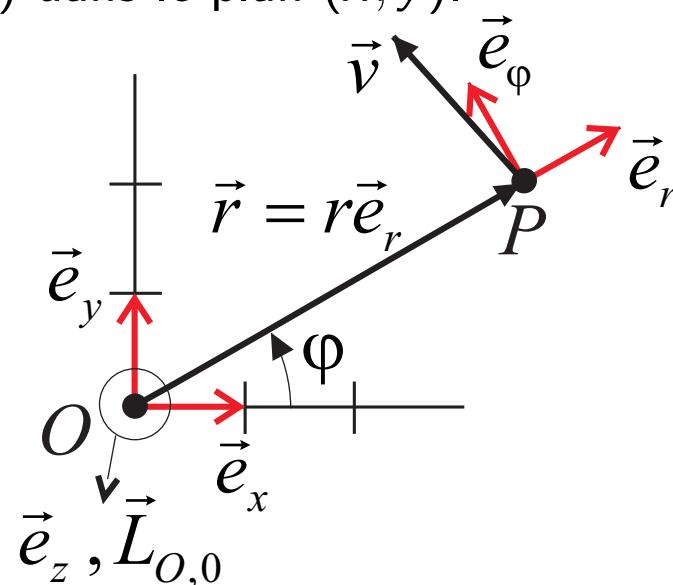
Conservation du moment cinétique

- Force centrale, d'où $\vec{L}_O = \vec{L}_{O,0}$

NB. On suppose que le moment cinétique constant est non nul sinon la planète s'écrase sur le Soleil !

Mouvement plan

- Axes tels que le plan (x, y) est le plan du mouvement.
- Axes (\vec{e}_z) tels que le moment cinétique $\vec{L}_{O,0}$ est directement parallèle à \vec{e}_z ($\vec{L}_{O,0} \cdot \vec{e}_z > 0$).
⇒ mouvement dans le plan (x, y) se fait dans le “sens trigonométrique”
- Coordonnées polaires (r, φ) dans le plan (x, y) .



Le problème de Kepler (3)

- On a $\vec{r} = r\vec{e}_r$ et $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$. Donc :

$$\vec{L}_O = \vec{r} \wedge m\vec{v} = mr^2\dot{\varphi}\vec{e}_z.$$

Comme \vec{L}_O est constant, on déduit que

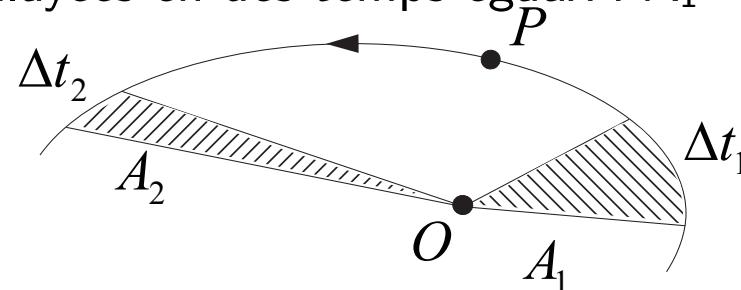
$$r^2\dot{\varphi} = h = \text{constante},$$

où $h = \vec{e}_z \cdot \vec{L}_{O,0}/m > 0$ est appelé la “constante des aires” (strictement positive vu choix des axes).

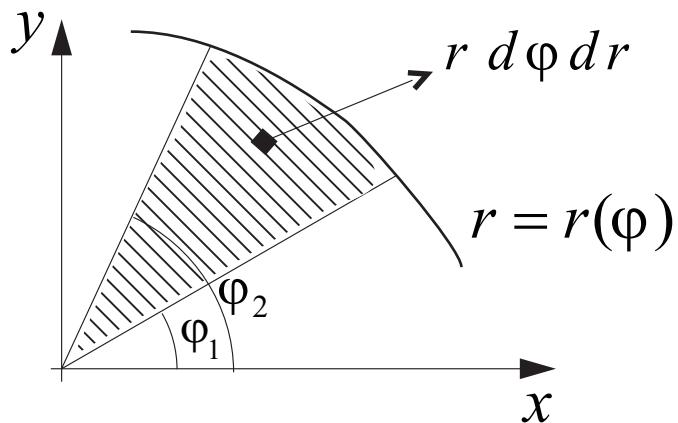
- **Loi des aires** ou **Deuxième loi de Kepler** (1609) :

- L'aire balayée par le rayon vecteur joignant le Soleil à la planète est proportionnelle au temps ou

- Des aires égales sont balayées en des temps égaux : $A_1 = A_2$ si $\Delta t_1 = \Delta t_2$.



Le problème de Kepler (4)



- Aire A d'un secteur angulaire défini par les angles φ_1 et φ_2 et limité par une courbe d'équation $r = r(\varphi)$:

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_0^{r(\varphi)} r d\varphi dr = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi) d\varphi.$$

Le problème de Kepler (5)

- Comme $\varphi = \varphi(t)$, on peut effectuer un changement de variables $\varphi \rightarrow t$ et déduire la Loi des aires :

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi) d\varphi \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} r^2 \dot{\varphi} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} h dt \\ &= \frac{1}{2} h \Delta t. \end{aligned}$$

NB. La loi des aires est valable chaque fois que la force totale est centrale (et pas seulement pour la force de gravitation universelle) !

Le problème de Kepler (6)

Conservation de l'énergie mécanique totale

- La force de gravitation universelle dérive du potentiel

$$V = \frac{-G M m}{r}.$$

- Énergie mécanique totale conservée et $T + V = E$:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{G M m}{r} = E,$$

ou encore, en divisant par la masse m de la planète ($\epsilon = E/m$)

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{G M}{r} = \epsilon,$$

- En coordonnées polaires :

$$\frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{G M}{r} = \epsilon.$$

Le problème de Kepler (7)

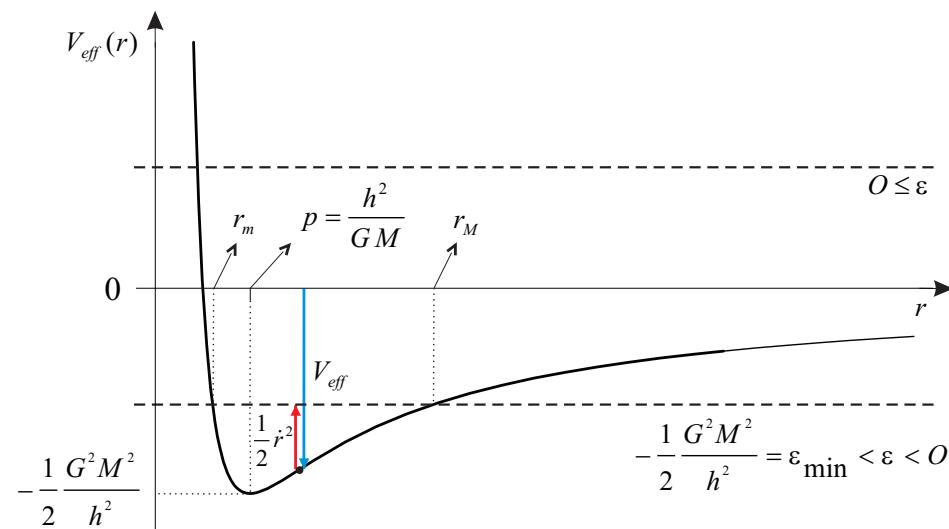
- $\frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) - \frac{GM}{r} = \epsilon$ et $r^2 \dot{\phi} = h$ donnent :

$$\frac{1}{2} \dot{r}^2 + \frac{h^2}{2r^2} - \frac{GM}{r} = \epsilon.$$

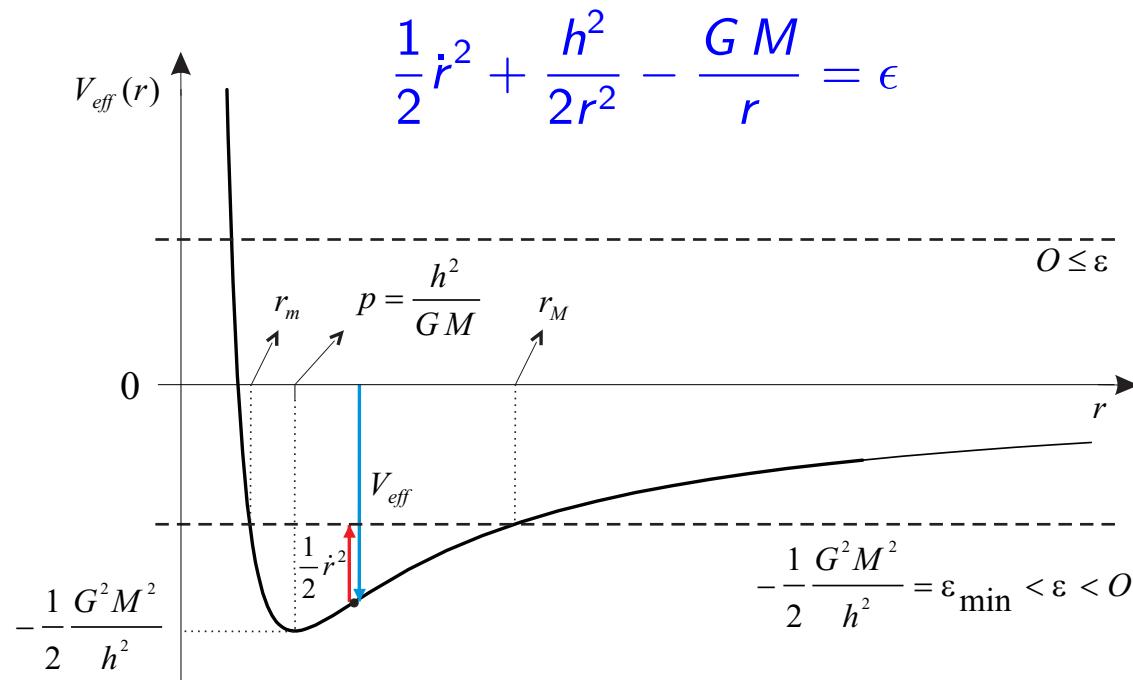
⇒ équation ne faisant plus intervenir que la variable radiale r et sa dérivée temporelle.

- Vu que le premier terme est positif, discussion possible dans diagramme de “potentiel effectif”

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{h^2}{2r^2} - \frac{GM}{r}$$



Le problème de Kepler (8)

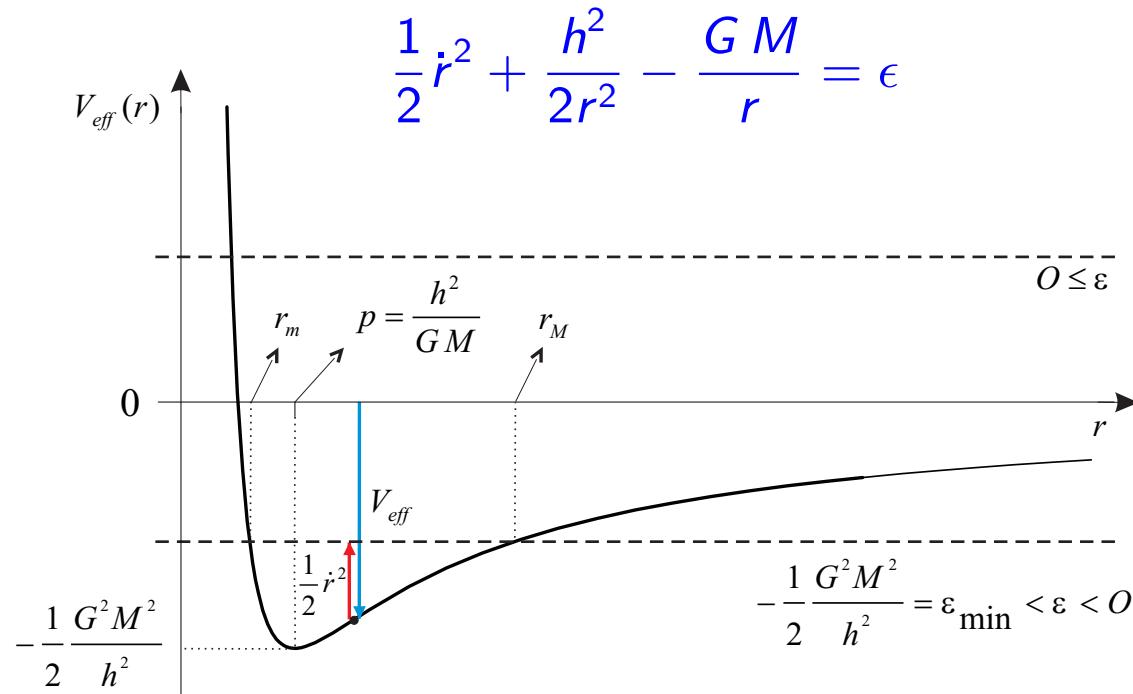


NB. Valeur minimale de ϵ : minimum de la fonction $V_{\text{eff}}(r)$
 $\Rightarrow \epsilon_{\min} = -(1/2)(G^2 M^2/h^2)$.

►
$$\epsilon = \epsilon_{\min} = -\frac{1}{2} \frac{G^2 M^2}{h^2}$$

- On a $\dot{r} = 0$ et $r = p = h^2/(G M)$ (distance constante par rapport au Soleil)
 - Vu la loi des aires, on déduit que la vitesse angulaire vaut $\dot{\varphi} = G^2 M^2/h^3$ (constante).
- \Rightarrow mouvement **circulaire uniforme** (cas assez particulier car les deux constantes h et ϵ sont liées !)

Le problème de Kepler (9)



► $\epsilon_{\min} < \epsilon < 0$

- Distance radiale entre r_m et r_M
- Le mouvement de la planète se fait donc **entre deux cercles** de rayons r_m et r_M .
- Pas possible de savoir si la trajectoire se referme sur elle-même (mouvement périodique) ou non.

► $0 \leq \epsilon$

- La planète **s'éloigne indéfiniment** du Soleil ($r \rightarrow \infty$), après s'en être éventuellement rapprochée pendant un certain temps.

Équation cartésienne des trajectoires

- Équation de mouvement de la planète :

$$\vec{a} = \vec{g}_\odot(P) = -G M \frac{\vec{r}}{r^3}.$$

- En projetant sur les axes polaires, avec $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\vec{e}_r + (1/r)(r^2\dot{\phi})\vec{e}_\varphi$:

$$\begin{aligned}\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 &= -G M / r^2, \\ r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi} &= 0.\end{aligned}$$

- Si on connaissait les fonctions $r(t)$ et $\phi(t)$ (équations paramétriques de la trajectoire), on obtiendrait l'équation cartésienne de la trajectoire en éliminant le temps entre les deux relations définissant r et ϕ . Ici, nous allons éliminer le temps directement à partir des équations de mouvement.
- En multipliant la deuxième équation par r , puis en intégrant, on retrouve l'intégrale première des aires : $r^2\dot{\phi} = h$.
- On peut éliminer le temps entre l'intégrale première des aires et la première équation différentielle pour obtenir l'équation cartésienne $r = r(\varphi)$ de la trajectoire en coordonnées polaires.

Le problème de Kepler (11)

- Changement de variable $t \rightarrow \varphi$
- On a alors :

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr(\varphi)}{d\varphi} \dot{\varphi} = \frac{dr(\varphi)}{d\varphi} \frac{h}{r^2} = -h \frac{d(1/r)}{d\varphi}.$$

De même :

$$\ddot{r} = -h \frac{d^2(1/r)}{d\varphi^2} \frac{h}{r^2} = -\frac{h^2}{r^2} \frac{d^2(1/r)}{d\varphi^2}.$$

- En insérant ce résultat dans $\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -G M/r^2$, en tenant compte de $r^2\dot{\varphi} = h$ et en définissant $p = h^2/GM$, il vient :

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \frac{1}{r} + \frac{1}{r} = \frac{1}{p}$$

Équation différentielle, linéaire à coefficients constants et non homogène pour la fonction inconnue $1/r(\varphi)$.

Le problème de Kepler (12)

- Solution (A et φ_0 sont des constantes) :

$$\frac{1}{r} = A \cos(\varphi - \varphi_0) + \frac{1}{p}$$

- En définissant $e = Ap = \text{constante}$, on a donc :

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)}$$

- La fonction $e \cos(\varphi - \varphi_0)$ possède un maximum pour une certaine direction dans le plan du mouvement. Comme $p > 0$, cette direction définit le périhélie. Si on choisit x qui pointe vers le périhélie (φ mesuré à partir du périhélie, celui-ci étant donc défini par $\varphi = 0$), la fonction ci-dessus devient :

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}$$

avec une nouvelle constante $e \geq 0$.

⇒ La trajectoire de la planète (dans le plan du mouvement) est une *conique d'excentricité* e dont le Soleil occupe un des foyers.

Le problème de Kepler (13)

- Relation excentricité $e \Leftrightarrow$ constantes ϵ et h

- ▶ Conservation de l'énergie :

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{h^2}{2r^2} - \frac{GM}{r} = \epsilon.$$

- ▶ En le périhélie, r est minimum et donc $\dot{r} = 0$.
 - ▶ En le périhélie $\varphi = 0$, d'où $r = p/(1+e)$.
 - ▶ Introduisons ces valeurs de r et \dot{r} dans la loi de conservation de l'énergie. Après quelques calculs, on trouve :

$$e = \sqrt{1 - \frac{\epsilon}{\epsilon_{min}}},$$

avec $\epsilon_{min} = -\frac{1}{2} \frac{G^2 M^2}{h^2}$.

Le problème de Kepler (14)

$$e = \sqrt{1 - \frac{\epsilon}{\epsilon_{min}}}$$

Classification des trajectoires en fonction de l'énergie :

- ▶ $\boxed{\epsilon = \epsilon_{min} = -\frac{1}{2} \frac{G^2 M^2}{h^2}}$
 $e = 0$: **trajectoire circulaire** avec $r = p$ (résultat déjà obtenu précédemment) .
- ▶ $\boxed{\epsilon_{min} < \epsilon < 0}$
 $0 < e < 1$: **ellipse** dont le Soleil occupe un des foyer.
Première loi de Kepler, ou **Loi des ellipses** (déduite d'observations astronomiques dès 1609).
- ▶ $\boxed{0 = \epsilon}$
 $e = 1$: **parabole**.
- ▶ $\boxed{0 < \epsilon}$
 $e > 1$: **branche d'hyperbole**.

Le problème de Kepler (15)

- **Troisième loi de Kepler** ou **Loi harmonique** (1619)

Pour les mouvements elliptiques, on a :

$$\frac{\tau^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}.$$

(τ^2/a^3 est **indépendant** de la planète étudiée).

- Calculons l'aire A de l'ellipse de deux manières :

- ▶ Loi des aires : $A = \frac{1}{2}h\tau$.
- ▶ En fonction des demis axes a et b : $A = \pi ab$.

- En comparant les deux expressions et en résolvant par rapport à τ :

$$\tau = \frac{2\pi}{h}ab$$

et donc

$$\frac{\tau^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{h^2} \frac{b^2}{a}.$$

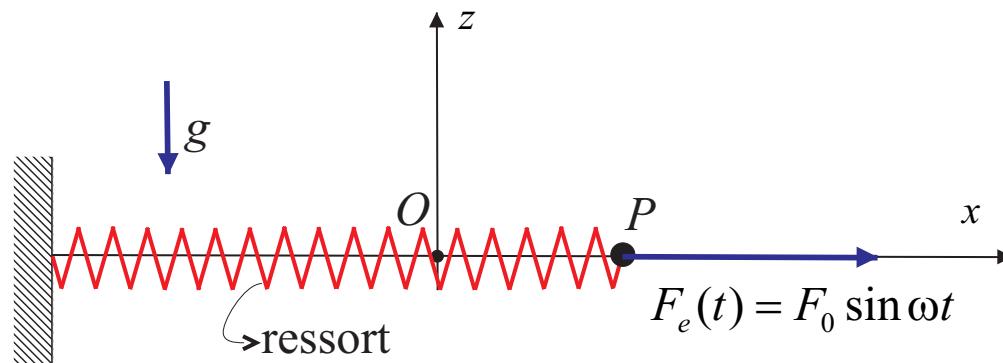
- En tenant compte de $a = p/(1 - e^2)$ et $b = p/\sqrt{1 - e^2}$, on déduit alors le résultat final.

Table des matières

2 Mécanique du point

- Application : chute libre
- Application : oscillateur harmonique
- Lois fondamentales de la Mécanique du point
- L'espace des phases
- Application : le pendule circulaire
- Application : le problème de Kepler
- **Application : oscillateur forcé et résonance**
- Application : oscillateur non linéaire
- La Mécanique en axes relatifs
- La Mécanique en axes attachés à la Terre
- Application : la chute libre (bis)
- Application : le pendule de Foucault

L'oscillateur harmonique forcé



- Force excitatrice $F_e(t)$ parallèle à l'axe Ox ($F_0 > 0$) :

$$F_e(t) = F_0 \sin \omega t$$

- Équation de mouvement suivant x :

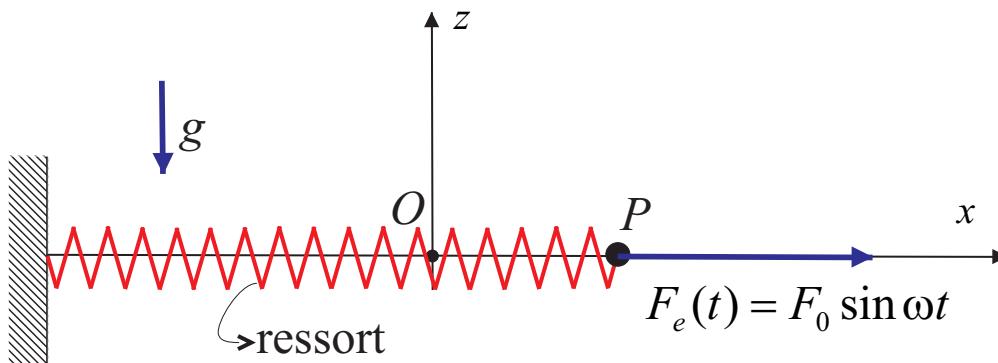
$$m\ddot{x} = -c\dot{x} - kx + F_0 \sin \omega t$$

ou encore

$$\ddot{x} + 2f\dot{x} + \omega_0^2 x = A \sin \omega t.$$

avec $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, $2f = c/m$ et $A = F_0/m$.

L'oscillateur harmonique forcé (2)



- Équation du mouvement suivant x :

$$\ddot{x} + 2f\dot{x} + \omega_0^2 x = A \sin \omega t.$$

avec $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, $2f = c/m$ et $A = F_0/m$.

- Équation différentielle linéaire à coefficients constants non homogène
- Solution : somme de la solution générale de l'équation homogène et d'une solution particulière de l'équation non homogène.
- On envisage séparément l'oscillateur non amorti ($f = 0$) et l'oscillateur amorti ($f \neq 0$).

O.H. non amorti forcé

- Équation du mouvement suivant x :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = A \sin \omega t.$$

1.

Si $\omega \neq \omega_0$

$$x_p(t) = -\frac{A}{\omega^2 - \omega_0^2} \sin \omega t.$$

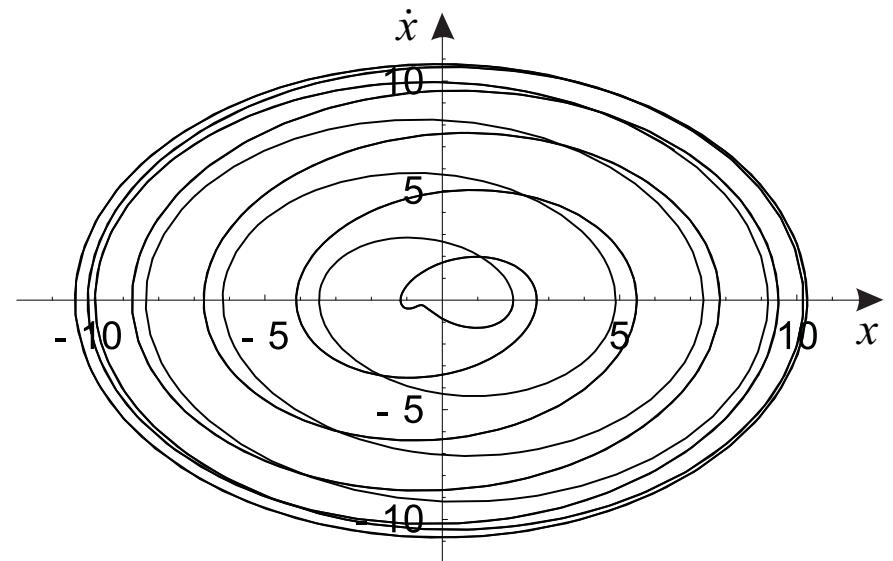
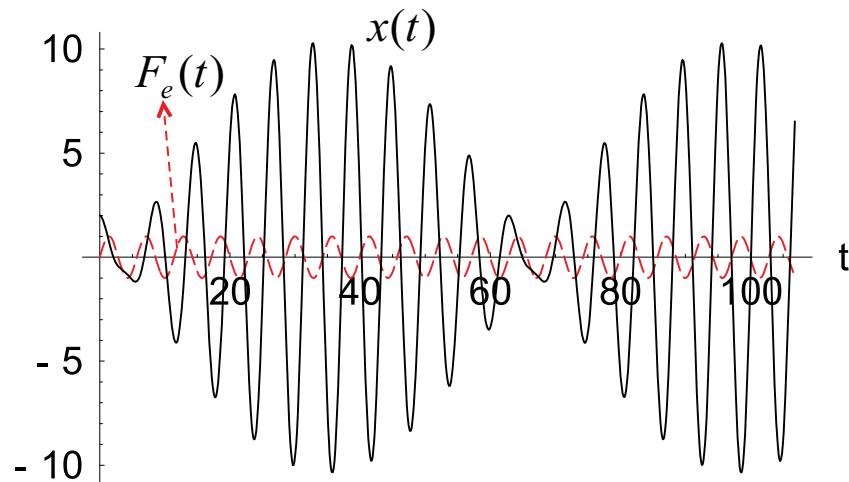
- Solution générale, en termes des C.I. :

$$x(t) = \frac{\dot{x}_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + x_0 \cos \omega_0 t + \frac{A}{\omega^2 - \omega_0^2} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \sin \omega_0 t - \sin \omega t \right).$$

- Superposition de deux oscillations harmoniques de pulsations ω et ω_0 .
- Mouvement non périodique (sauf si $\omega = q\omega_0$, avec q un nombre rationnel différent de 1).

O.H. non amorti forcé (2)

- Si les deux pulsations sont proches l'une de l'autre, le comportement du système fait apparaître un phénomène de battement.
- Le théorème de non-intersection ne s'applique pas.



O.H. non amorti forcé (3)

2. Si $\omega = \omega_0$ Solution particulière de $\ddot{x} + \omega_0^2 x = A \sin \omega t$:

$$x_p(t) = -\frac{A}{2\omega_0} t \cos \omega_0 t$$

- Solution générale, en termes des C.I. :

$$x(t) = \frac{\dot{x}_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + x_0 \cos \omega_0 t + \frac{A}{2\omega_0^2} (\sin \omega_0 t - \omega_0 t \cos \omega_0 t).$$

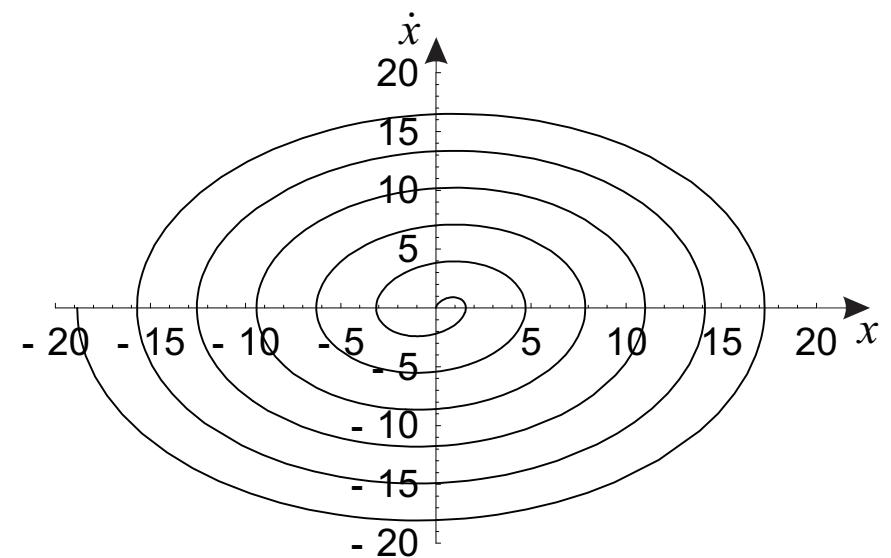
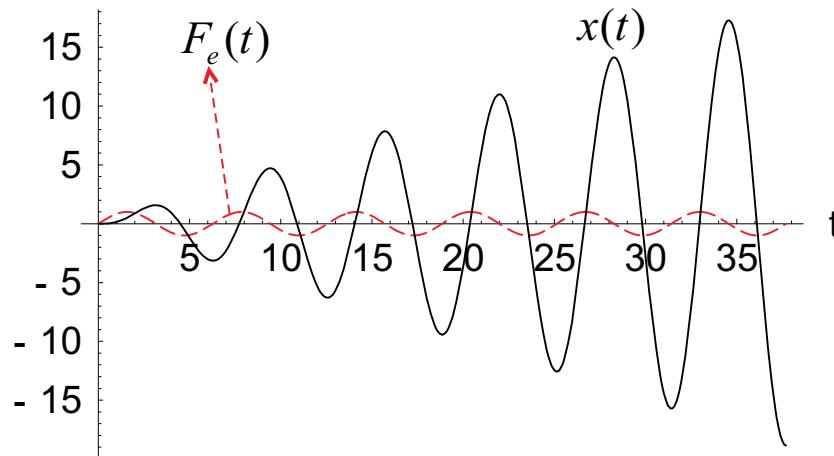
- Superposition d'une oscillation harmonique (3 premiers termes) et d'une oscillation dont l'amplitude croît linéairement avec le temps (4^{ème} terme).
- Lorsque le temps s'écoule, ce 4^{ème} terme finit par devenir (presque toujours) largement plus grand que les 3 premiers :

$$x(t) \approx -\frac{A}{2\omega_0} t \cos \omega_0 t$$

O.H. non amorti forcé (4)

$$x(t) \approx -\frac{A}{2\omega_0} t \cos \omega_0 t$$

- Oscillations qui ont la même “période” que l'excitation, mais dont l'amplitude croît linéairement avec le temps.
➡ **phénomène de résonance** (lorsque les frottements sont négligés).
- En pratique, le ressort casse !



- Équation :

$$\ddot{x} + 2f\dot{x} + \omega_0^2 x = A \sin \omega t.$$

- Cherchons x_p périodique de même pulsation que l'excitation F_e , mais éventuellement déphasée ($\alpha > 0$ et $-\pi < \varphi < \pi$) :

$$x_p(t) = \alpha \sin(\omega t + \varphi),$$

- En introduisant dans l'équation, on a, pour tout t :

$$\begin{aligned} & \alpha \left\{ (\omega_0^2 - \omega^2) \sin \varphi + 2f\omega \cos \varphi \right\} \cos \omega t \\ & + \left[\alpha \left\{ (\omega_0^2 - \omega^2) \cos \varphi - 2f\omega \sin \varphi \right\} - A \right] \sin \omega t = 0. \end{aligned}$$

- D'où :

$$(\omega_0^2 - \omega^2) \sin \varphi + 2f\omega \cos \varphi = 0,$$

$$(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \varphi - 2f\omega \sin \varphi = A/\alpha.$$

O.H. amorti forcé (2)

- On a alors :

$$\tan \varphi = \frac{2f\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}.$$

Puis

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{A}{(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \varphi - 2f\omega \sin \varphi} \\ &= \frac{-2Af\omega}{\sin \varphi [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4f^2\omega^2]}.\end{aligned}$$

- Puisque A et α sont positifs, on en déduit que $\sin \varphi < 0$ et donc $-\pi < \varphi < 0$, d'où

$$\sin \varphi = \frac{-|\tan \varphi|}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}} = \frac{-2f\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4f^2\omega^2}}$$

O.H. amorti forcé (3)

- Finalement, en ce qui concerne la solution particulière, on a :

$$\alpha = \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4f^2\omega^2}},$$
$$\tan \varphi = \frac{2f\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} \text{ et } -\pi < \varphi < 0.$$

et donc

$$x_P(t) = \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4f^2\omega^2}} \sin(\omega t + \varphi),$$

- La solution générale de l'équation **homogène** tend toujours vers zéro lorsque t augmente.
- La solution asymptotique (t assez grand) de l'équation est donc la solution particulière :

$$x(t) \approx \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4f^2\omega^2}} \sin(\omega t + \varphi).$$

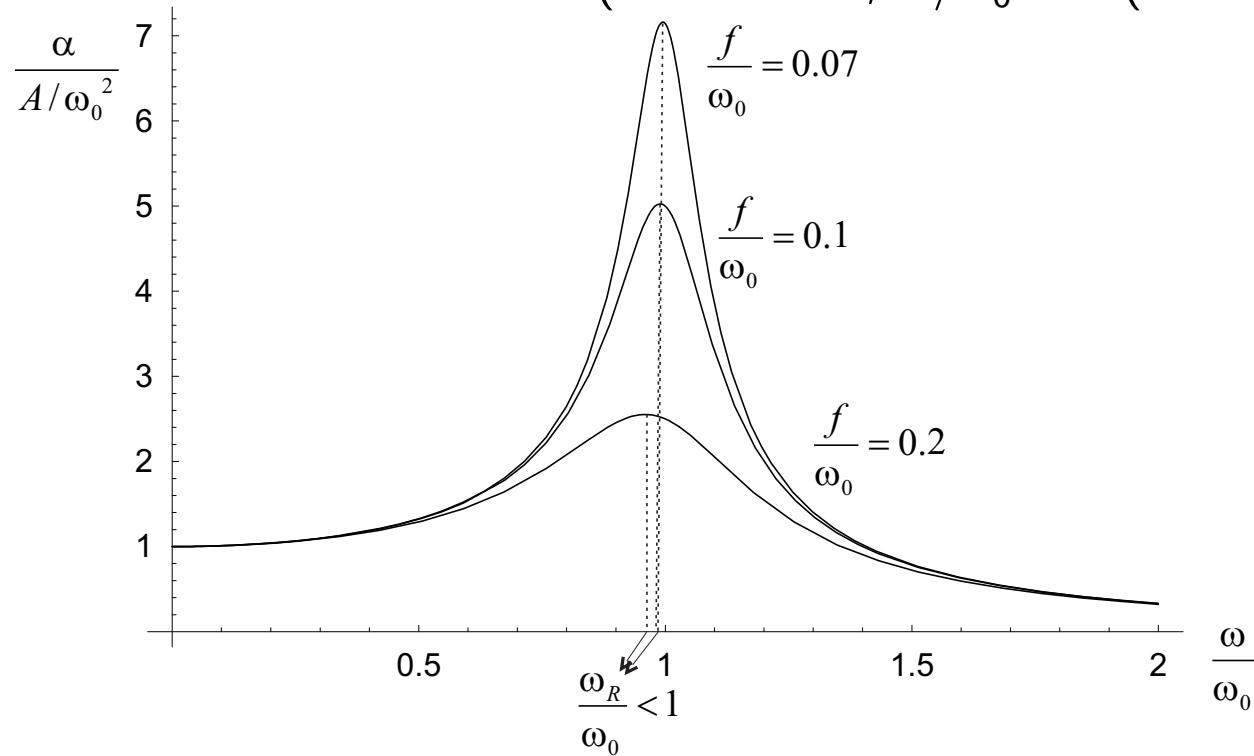
O.H. amorti forcé (4)

$$x(t) \approx \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4f^2\omega^2}} \sin(\omega t + \varphi) :$$

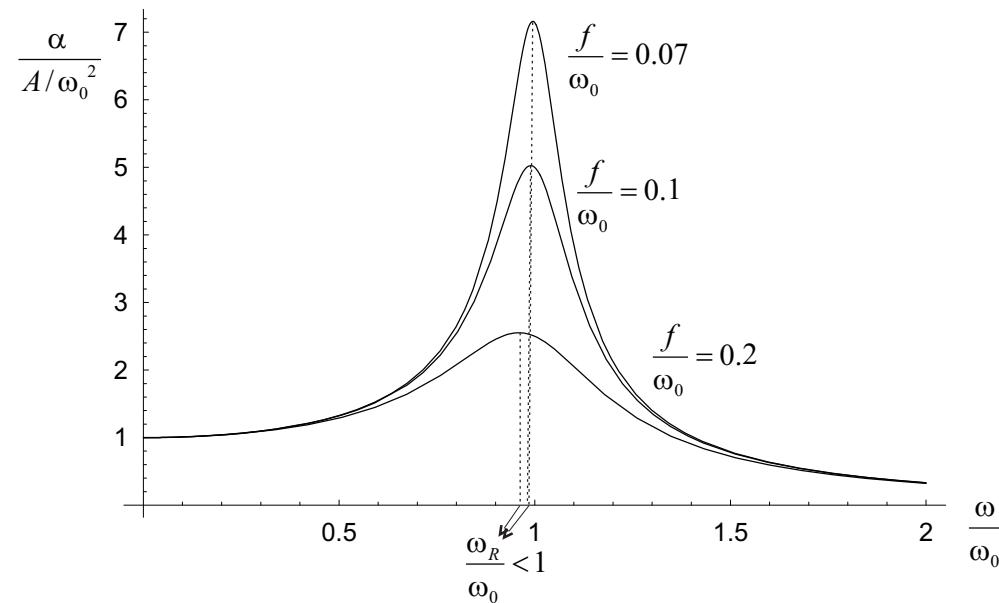
Oscillations harmoniques, de même pulsation (et donc de même fréquence et de même période) que l'excitation extérieure : **phénomène de résonance**.

Pendant ch. période, énergie fournie par la f. ext. est dissipée par les frottements.

1. Indépendance vis à vis des conditions initiales
2. Amplitude α comme fonction de f et ω (NB. $\alpha \propto A$, $A/\omega_0^2 = \alpha(\omega = 0)$) :



O.H. amorti forcé (5)

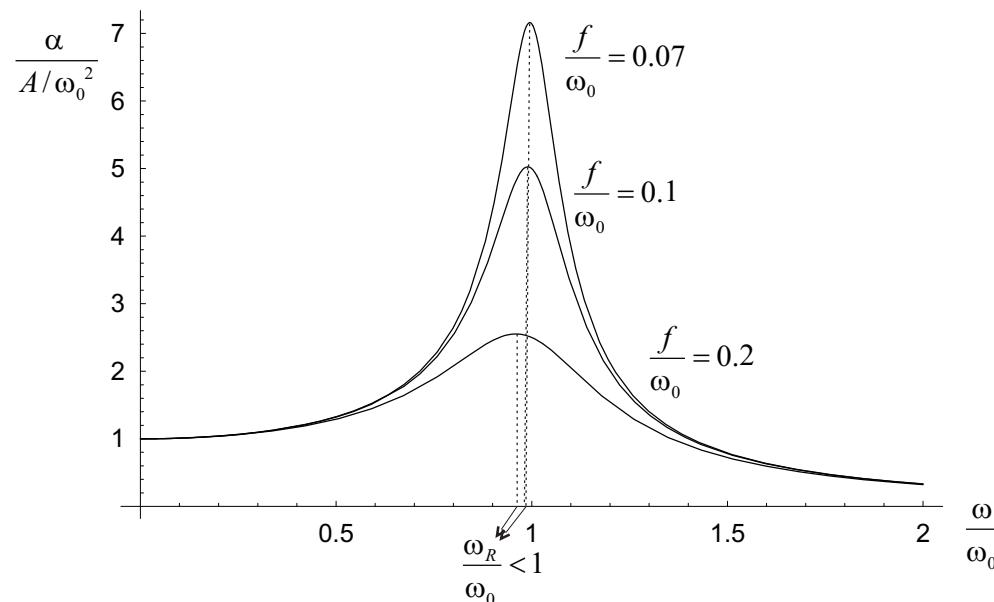


⇒ Fréquence (pulsation) de résonance : maximum de α :

$$\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2f^2} < \omega_0.$$

- ⇒ Amplitude de résonance $\alpha_R = \alpha(\omega = \omega_R)$: le système excité répond donc d'autant "mieux" que la fréquence d'excitation est proche de la fréquence de résonance : il s'agit là d'une **propriété essentielle du phénomène de résonance**.
- ⇒ Fréquence de résonance toujours inférieure à fréquence propre (assez proches si les frottements pas trop importants).

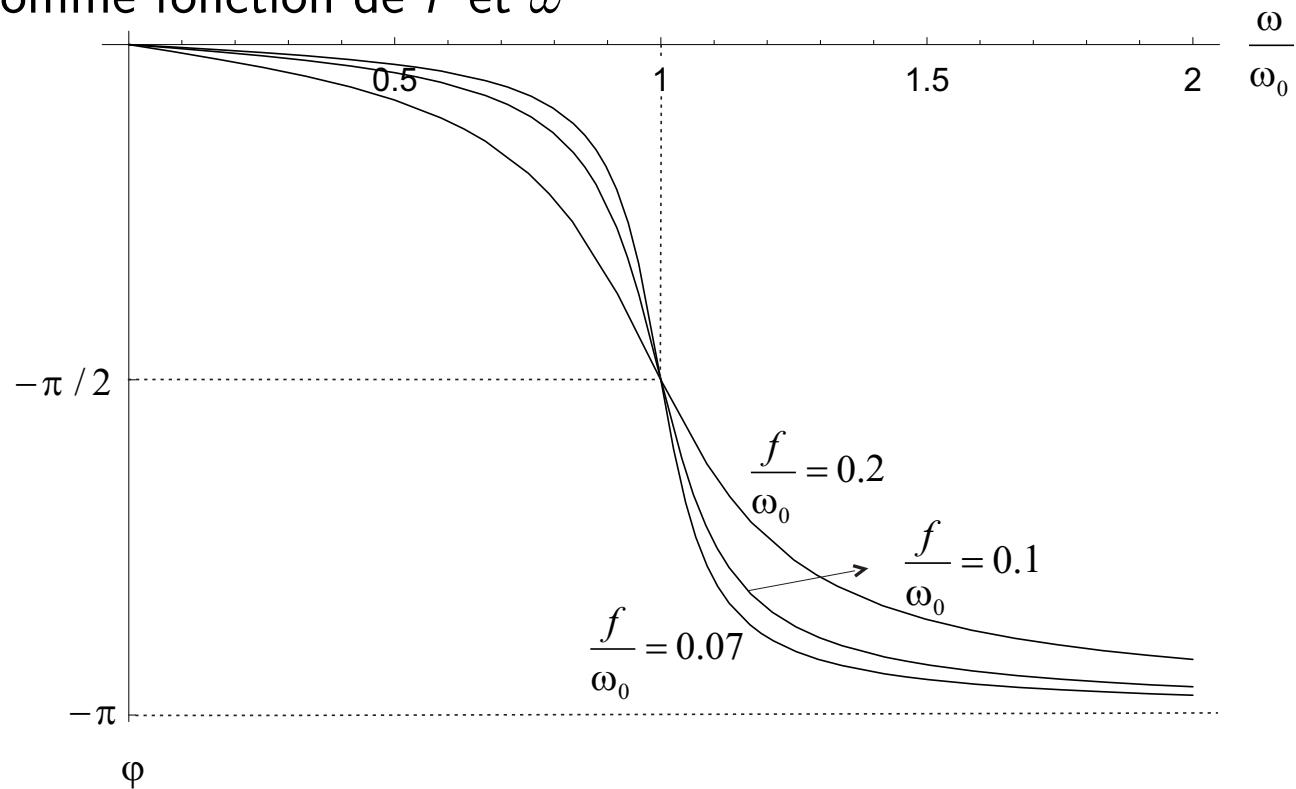
O.H. amorti forcé (6)



- ⇒ Pic de résonance d'autant plus “aigu” que frottement faible.
- ⇒ Amplitude de résonance diminue rapidement si frottement augmente
- ⇒ Si $f \rightarrow 0$, on a $\omega_R \rightarrow \omega_0$ et l'amplitude de résonance tend vers l'infini : cf. phénomène de résonance sans frottement.
- ⇒ Amplitude tend vers zéro lorsque ω devient de plus en plus grand (l'oscillateur ne parvient pas à suivre une excitation qui varie trop rapidement).
- ⇒ Amplitude tend vers constante non nulle lorsque $\omega \rightarrow 0$ (la force excitatrice n'oscille plus : déformation constante du ressort !).

O.H. amorti forcé (7)

3. La phase φ comme fonction de f et ω

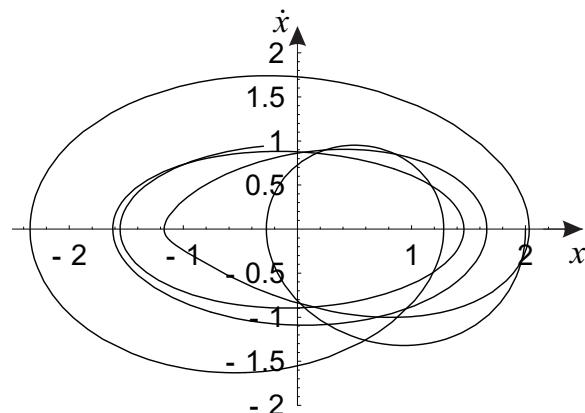
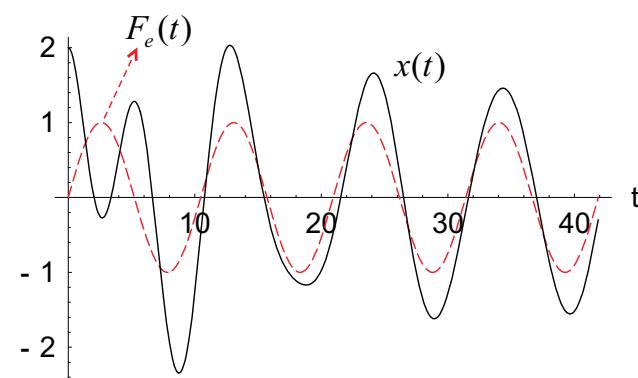


- ⇒ Comme φ est négatif, la réponse est en *retard* par rapport à l'excitation.
- ⇒ On remarque également que lorsque l'excitation se fait à la fréquence propre de l'oscillateur, la réponse est en retard de $\pi/2$, quelle que soit l'importance du frottement.

O.H. amorti forcé (8)

4. L'espace des phases

⇒ Avec le transitoire :

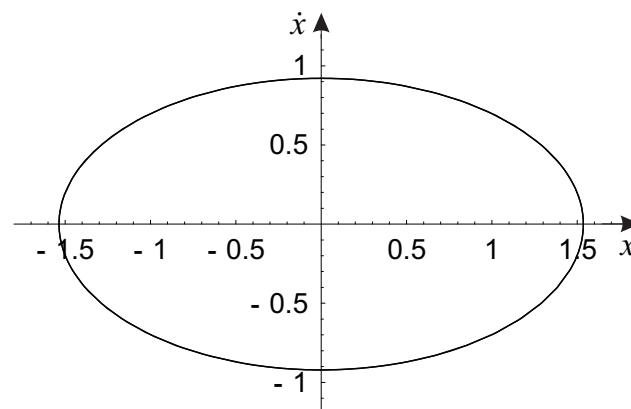
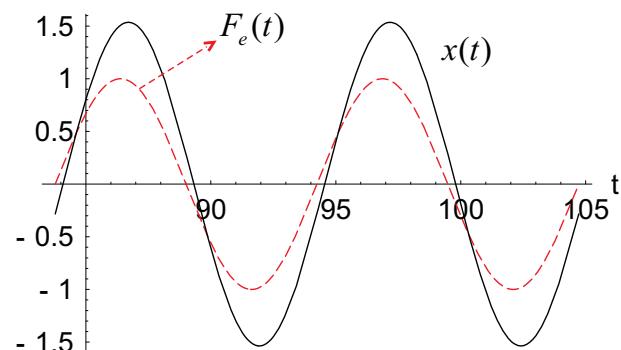


- Après une période transitoire correspondant à l'amortissement de la solution homogène, toutes les trajectoires de phase tendent vers la trajectoire unique qui correspond à $x_P(t)$.
- Remarquer que les trajectoires de phase se recoupent à cause de la présence de la force excitatrice dépendant du temps.

O.H. amorti forcé (9)

4. L'espace des phases

⇒ Comportement asymptotique :

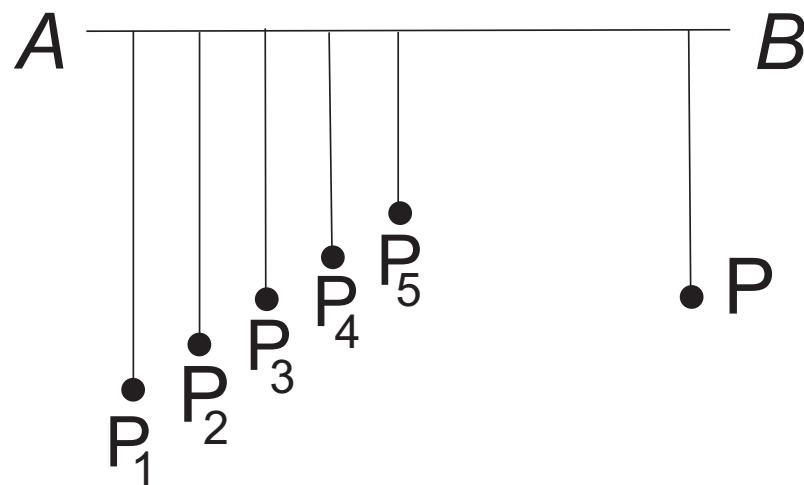


- Comme $x_P(t)$ est une oscillation *périodique*, la trajectoire de phase correspondante est une *courbe fermée*.
- Comme l'oscillation est *harmonique*, la courbe est une ellipse centrée sur l'origine.
- Cette ellipse constitue un *attracteur* du système car elle rend compte du comportement asymptotique du système quelles que soient les conditions initiales. Comme ce comportement est périodique, l'attracteur en question est appelé un *cycle limite*. Le *bassin d'attraction* de ce cycle limite est l'espace des phases entier.

NB. Les ellipses de l'oscillateur non amorti et non forcé **ne sont pas** des attracteurs.

La résonance dans la pratique

- Phénomène de résonance : présent dans de très nombreux domaines de la physique.
 - ▶ Chaque fois qu'un système est soumis à une action extérieure variant périodiquement dans le temps.
- Caractéristique la plus essentielle : apparition d'oscillations d'amplitude considérable lorsque le système physique est excité avec une fréquence proche de sa fréquence propre.
- Exemple simple :



La résonance dans la pratique (2)

- Pont suspendu de Tacoma (1940).



La résonance dans la pratique (3)

- Haubans du pont de Ben-Ahin (Huy).



- Pièces constitutives des moteurs (amortissement souhaitable !)

Table des matières

2 Mécanique du point

- Application : chute libre
- Application : oscillateur harmonique
- Lois fondamentales de la Mécanique du point
- L'espace des phases
- Application : le pendule circulaire
- Application : le problème de Kepler
- Application : oscillateur forcé et résonance
- **Application : oscillateur non linéaire**
- La Mécanique en axes relatifs
- La Mécanique en axes attachés à la Terre
- Application : la chute libre (bis)
- Application : le pendule de Foucault

L'oscillateur non linéaire forcé

- Rappel : oscillateur linéaire ou harmonique :

$$\ddot{x} + 2f\dot{x} + \omega_0^2 x = A \sin \omega t.$$

- Conséquences de la linéarité :

- attracteur unique qui consiste en un cycle limite décrivant une solution périodique harmonique.
- période de la solution est toujours la même que celle de l'excitation imposée.

- Linéaire : pourquoi ?

- ⇒ la force de frottement a été supposée linéaire en la vitesse (lorsque cette vitesse restait petite).
- ⇒ la force de rappel du ressort a été supposée proportionnelle à l'allongement (pour autant que celui-ci reste relativement petit).

- Donc, si on ne se limite pas aux petites vitesses et aux petites oscillations, équation *intrinsèquement non linéaire*.

L'oscillateur non linéaire forcé

- Si oscillateur *non linéaire*
 - ⇒ la réponse à une excitation harmonique n'est pas nécessairement unique
 - ⇒ elle ne possède pas obligatoirement la même période que l'excitation
 - ⇒ elle peut même ne pas être périodique.
- Nous allons illustrer ces comportements nouveaux par quelques exemples : introduction à l'étude des phénomènes non linéaires.

L'oscillateur non linéaire forcé

- Équation d'un oscillateur non linéaire :

$$\ddot{x} + 2f\dot{x} + \omega_0^2 x + \delta x^3 = A \sin \omega t.$$

⇒ Force de frottement linéaire.

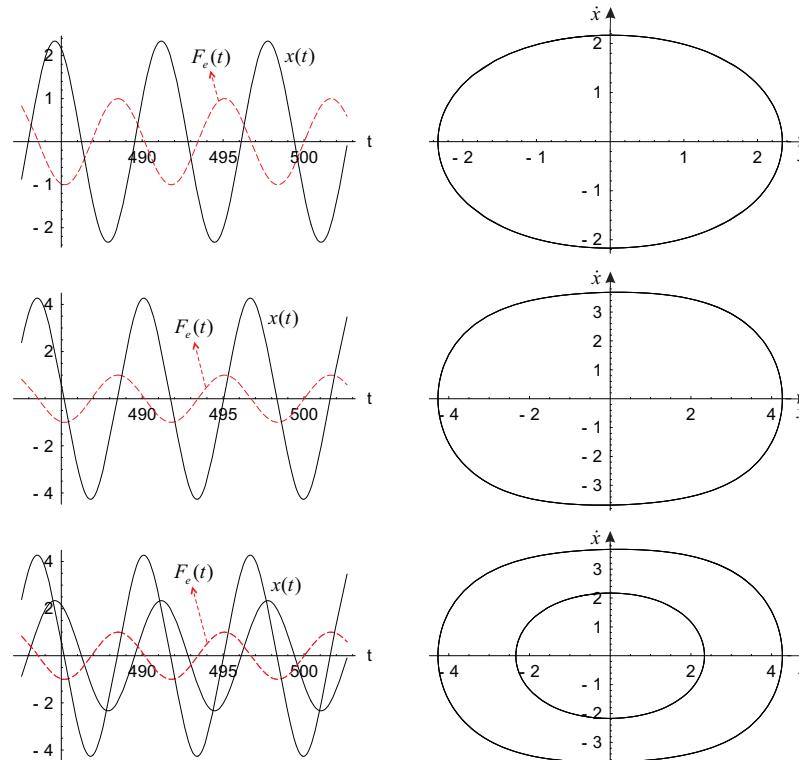
⇒ Force de rappel du ressort **cubique** en le déplacement.

- Pas de résolution analytique aisée !
- Uniquement des résultats numériques (Mathematica, MatLab,...)
- 3 cas distincts, correspondant à 3 ensembles de valeurs pour les paramètres

$$f, \omega_0, \delta, A \text{ et } \omega.$$

L'oscillateur non linéaire forcé

1. $(f, \omega_0, \delta, A, \omega) = (0.125, 0.625, 0.04, 1, 0.955)$ (suite)

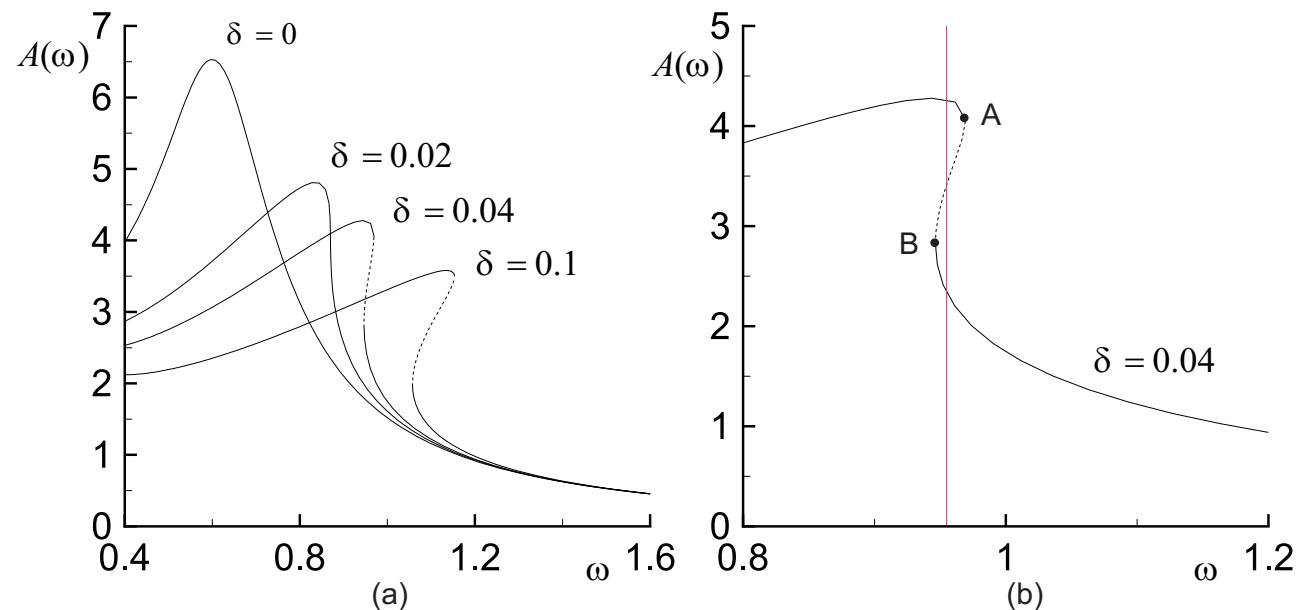


- ▶ Deux attracteurs distincts dont l'existence simultanée est conséquence de la non linéarité.
- ▶ Les solutions correspondant aux deux attracteurs sont périodiques, de même période que l'oscillation excitatrice.
- ▶ On remarque aussi que les deux réponses sont déphasées par rapport à la force extérieure, ainsi qu'entre elles.
- ▶ Chacun des attracteurs possède son propre bassin d'attraction.

L'oscillateur non linéaire forcé

1. $(f, \omega_0, \delta, A, \omega) = (0.125, 0.625, 0.04, 1, 0.955)$ (suite)

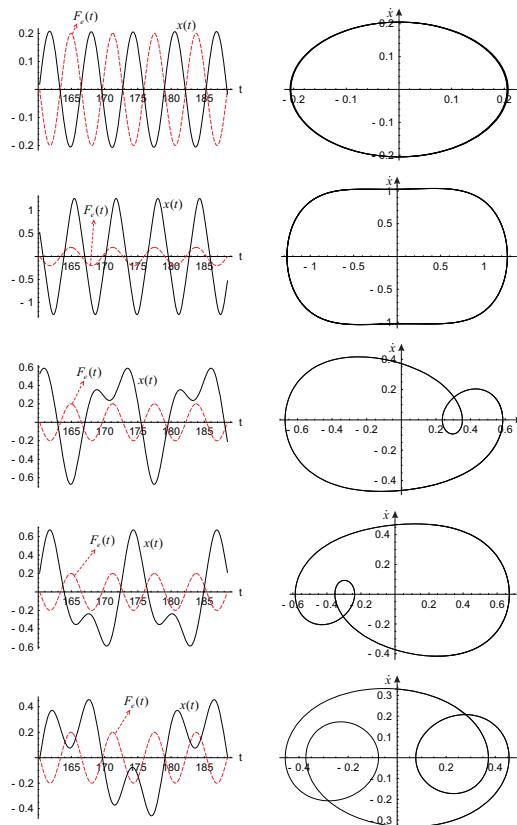
- ▶ Amplitude de la réponse de l'oscillateur non linéaire forcé en fonction de la pulsation de l'excitation pour plusieurs valeurs du paramètre δ ($(f, \omega_0, A) = (0.125, 0.625, 1)$).



- Déformation progressive du pic de résonance à cause des non linéarités.
- Si non linéarités suffisamment importantes, *trois* amplitudes de réponse possibles.
- Phénomène d'hystérésis

L'oscillateur non linéaire forcé

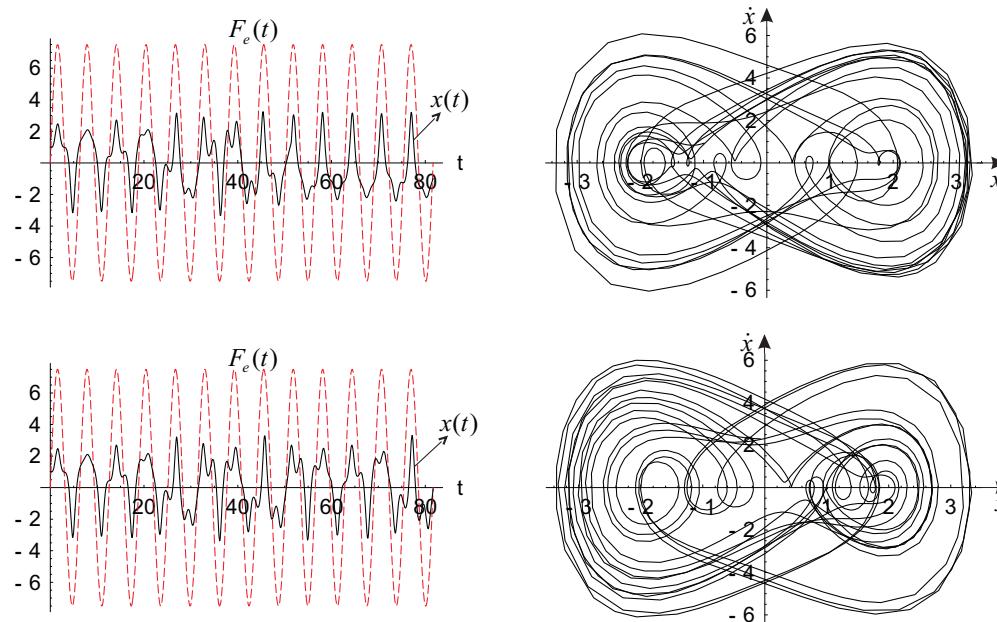
2. $(f, \omega_0, \delta, A, \omega) = (0.04, 0, 1, 0.2, 1)$ (suite)



- ▶ Coexistence de 5 attracteurs distincts.
- ▶ Cycles limites (solutions périodiques).
- ▶ Période des réponses : multiple entier n de la période de la force extérieure.
(fréquences des réponses sont égales à la fréquence excitatrice divisée par n).
- ▶ **Oscillations sous-harmoniques** d'ordres $n = 1, 1, 2, 2$ et 3 .
- ▶ Possible à cause des non-linéarités.

L'oscillateur non linéaire forcé

3. $(f, \omega_0, \delta, A, \omega) = (0.025, 0, 1, 7.5, 1)$ (suite)



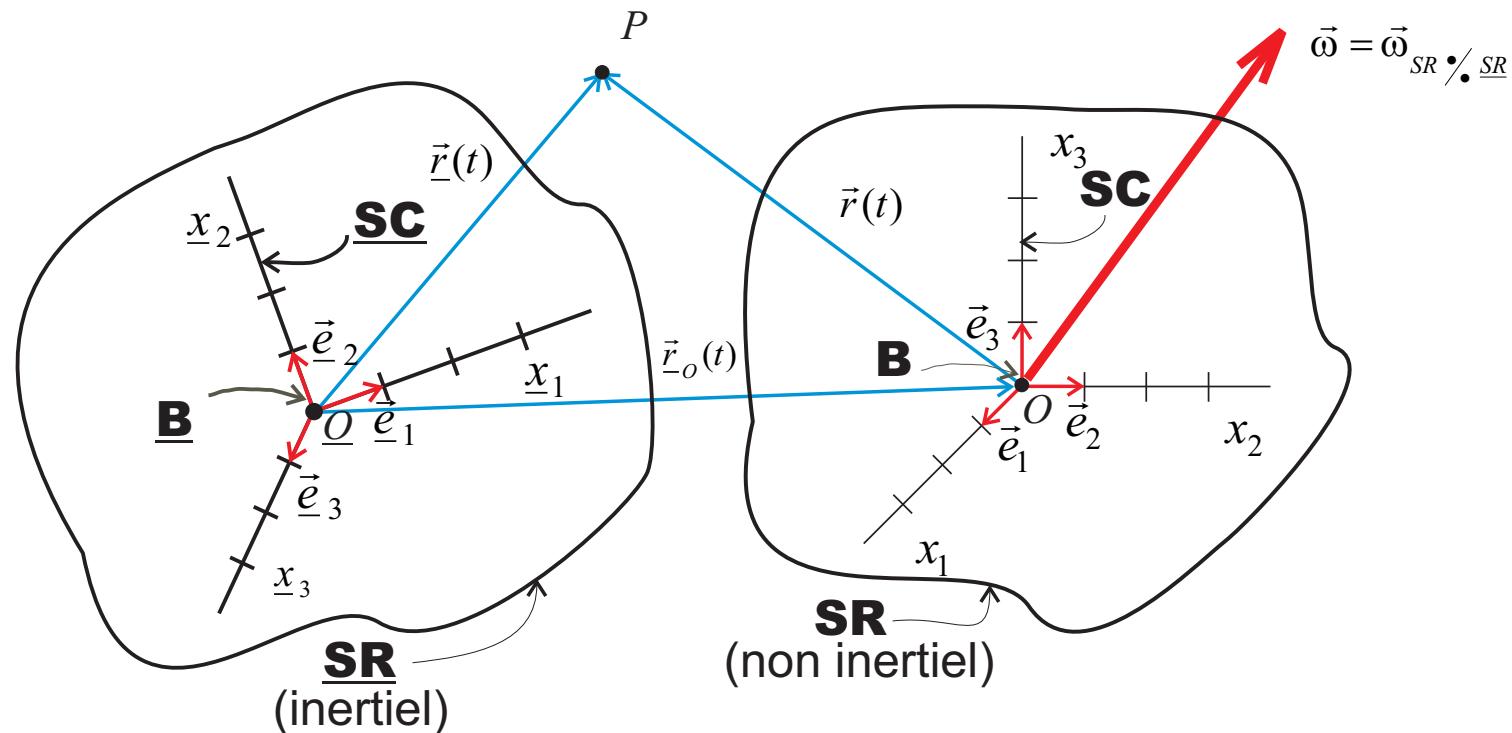
- ▶ Évolution temporelle “irrégulière” et *non périodique*.
L'attracteur caractérisé par un certain “désordre” des trajectoires de phases.
L'attracteur forme un objet géométrique particulier du plan des phases : *fractal*.
- ▶ Le comportement du système est dit “chaotique”
Possible car non linéaire.
- ▶ Divergence à long terme de trajectoires initialement proches
➡ impossibilité de prédiction à long terme (car CI pas connues avec précision infinie).

Table des matières

2 Mécanique du point

- Application : chute libre
- Application : oscillateur harmonique
- Lois fondamentales de la Mécanique du point
- L'espace des phases
- Application : le pendule circulaire
- Application : le problème de Kepler
- Application : oscillateur forcé et résonance
- Application : oscillateur non linéaire
- **La Mécanique en axes relatifs**
- La Mécanique en axes attachés à la Terre
- Application : la chute libre (bis)
- Application : le pendule de Foucault

La Mécanique en “axes relatifs”



- Équation de Newton non valable pour étudier le mouvement de P par rapport à SR !
- Deux manières de s'en sortir :
 - ▶ On étudie le mouvement par rapport à SR puis on “transporte” le résultat.
➡ peu utilisé !
 - ▶ On “transporte” l'équation de Newton
➡ C'est ce qu'on va faire

La Mécanique en axes relatifs (2)

- Dans SR, on a $m\vec{a} = \vec{F}$.
- Loi de composition des accélérations : $\underline{\vec{a}} = \vec{a} + \vec{a}_e + \vec{a}_c$
- Loi de la mécanique en axes relatifs,
i.e. loi de mouvement exprimée dans SR et transportée dans SR :

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_e + \vec{F}_c.$$

où la *force d'entraînement* \vec{F}_e et la *force de Coriolis* \vec{F}_c sont définies par

$$\vec{F}_e = -m\vec{a}_e = -m \left(\underline{\vec{a}}_0 + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP}) + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OP} \right),$$

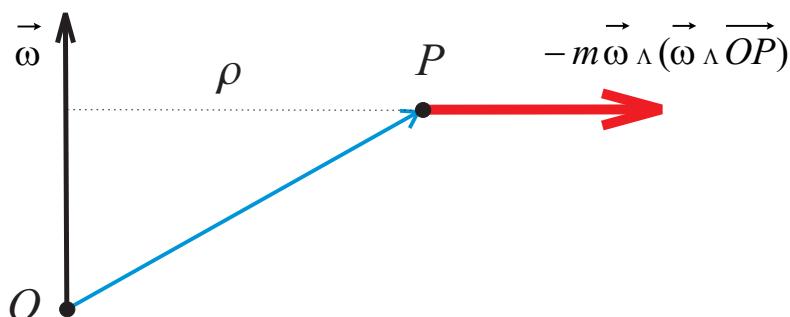
$$\vec{F}_c = -m\vec{a}_c = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}.$$

- Forces **fictives** d'**inertie** : pourquoi ?

La Mécanique en axes relatifs (3)

- Dans \vec{F}_e , le terme $-m\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP})$ est souvent appelé la *force centrifuge*. La norme de la force centrifuge est donnée par

$$\left\| -m\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP}) \right\| = m\omega^2 \rho.$$



NB. Si on change l'origine O du système de référence non inertiel, la force centrifuge change elle aussi, mais la force d'entraînement reste invariante.

- Force de Coriolis : toujours perpendiculaire à la vitesse : **elle ne travaille pas.**

Table des matières

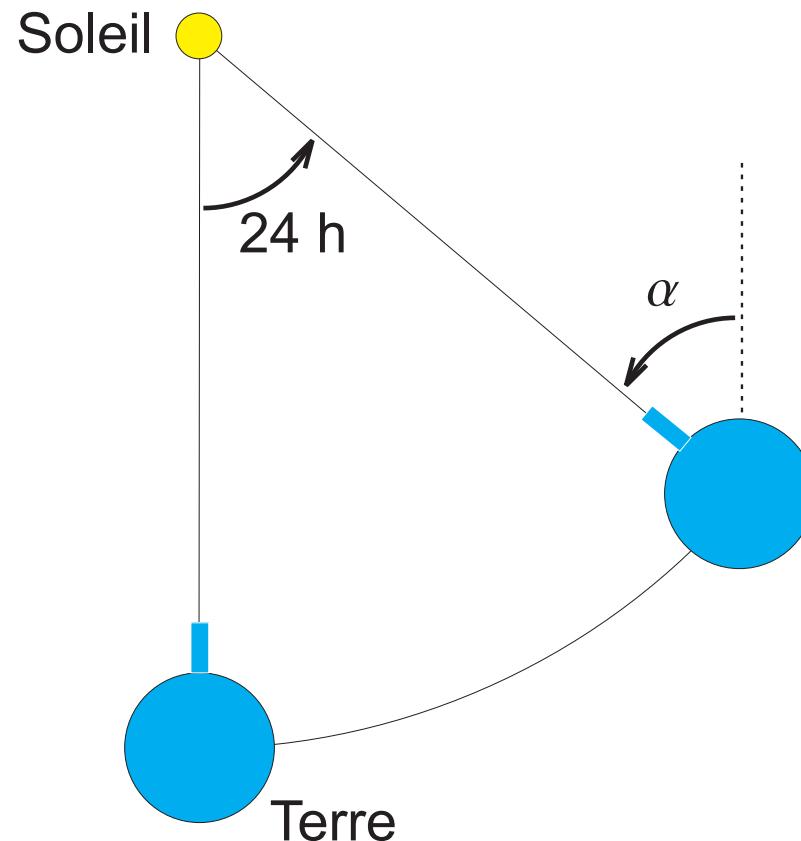
2

Mécanique du point

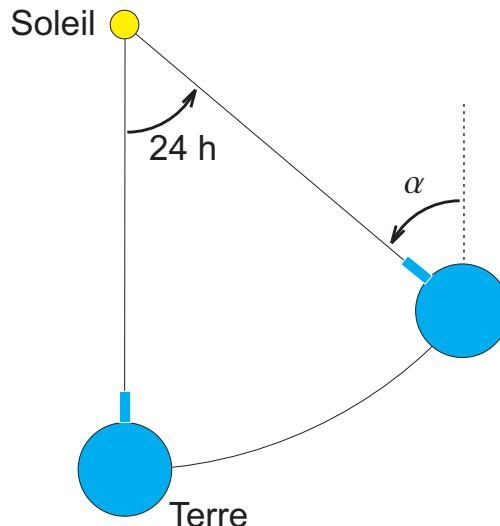
- Application : chute libre
- Application : oscillateur harmonique
- Lois fondamentales de la Mécanique du point
- L'espace des phases
- Application : le pendule circulaire
- Application : le problème de Kepler
- Application : oscillateur forcé et résonance
- Application : oscillateur non linéaire
- La Mécanique en axes relatifs
- **La Mécanique en axes attachés à la Terre**
- Application : la chute libre (bis)
- Application : le pendule de Foucault

La Mécanique par rapport à la

- La  n'est pas d'inertie car révolution autour du Soleil et rotation autour de l'axe joignant les pôles.
- Jour solaire et jour sidéral :



La Mécanique par rapport à la \oplus (2)



- En 1 an, le soleil passe 365 fois au dessus de nos têtes, mais les étoiles lointaines passent 366 fois !
- En 24 heures, la \oplus effectue un peu plus d'un tour par rapport au système de Copernic : un tour plus α
- En un an, c'est-à-dire 365 jours solaires, la \oplus effectue 366 tours par rapport au système de Copernic.
- Durée du jour sidéral : $24 \text{ h} \times 365/366$, c'est-à-dire $23h\ 56'\ 04''$
- Vitesse angulaire de rotation de la Terre par rapport au système de Copernic

$$\omega_{\oplus} = \frac{2\pi}{23h\ 56'\ 04''} = 7.29 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}.$$

La Mécanique par rapport à la (3)

- Forces “**réelles**” s’exerçant sur une particule P de masse m :

$$\vec{F} = \vec{F}_{ng} + \vec{F}_{g,\oplus} + \vec{F}_{g,\odot},$$

avec (O et C : centre de la Terre et centre du Soleil)

$$\vec{F}_{g,\oplus} = m \vec{g}_\oplus(P) = -G m M_\oplus \frac{\overrightarrow{OP}}{OP^3},$$
$$\vec{F}_{g,\odot} = m \vec{g}_\odot(P) = -G m M_\odot \frac{\overrightarrow{CP}}{CP^3}.$$

La Mécanique par rapport à la (4)

- Si O est l'origine des axes relatifs attachés à la Terre, la force d'entraînement s'écrit :

$$\vec{F}_e = -m\vec{a}_e = -m \left(\underline{\vec{a}}_0 + \vec{\omega}_{\oplus} \wedge (\vec{\omega}_{\oplus} \wedge \overrightarrow{OP}) + \frac{d\vec{\omega}_{\oplus}}{dt} \wedge \overrightarrow{OP} \right).$$

- $\underline{\vec{a}}_0$: accélération de la Terre par rapport au système de Copernic avec $\underline{\vec{a}}_0 = \vec{g}_{\odot}(O)$ (mouvement keplerien de révolution de la Terre autour du Soleil).
- Vitesse angulaire de la Terre : constante au cours du temps
- La **force d'entraînement** devient :

$$\vec{F}_e = -m \left(\vec{g}_{\odot}(O) + \vec{\omega}_{\oplus} \wedge (\vec{\omega}_{\oplus} \wedge \overrightarrow{OP}) \right).$$

- Force de **Coriolis** :

$$\vec{F}_c = -2m\vec{\omega}_{\oplus} \wedge \vec{v}.$$

La Mécanique par rapport à la (5)

- Équation de mouvement du point P :

$$\begin{aligned} m\vec{a} = \vec{F}_{ng} &+ \left(m\vec{g}_\oplus(P) - m\vec{\omega}_\oplus \wedge (\vec{\omega}_\oplus \wedge \overrightarrow{OP}) \right) \\ &+ (m\vec{g}_\odot(P) - m\vec{g}_\odot(O)) \\ &- 2m\vec{\omega}_\oplus \wedge \vec{v}. \end{aligned}$$

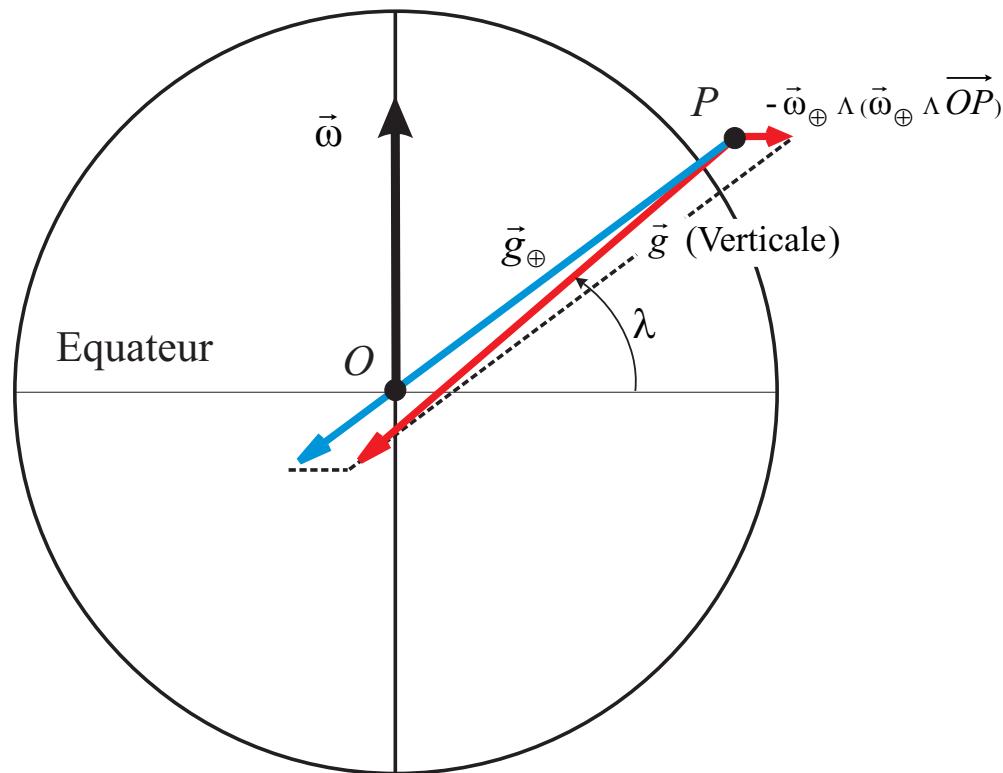
- $m\vec{g}_\odot(P) - m\vec{g}_\odot(O)$: *force de marée*
- Cette force de marée est bien plus petite que la force de pesanteur $m\vec{g}_\oplus(P)$ et, mis à part dans l'étude de phénomènes à grande échelle comme les marées, on peut la négliger la plupart du temps.

La Mécanique par rapport à la (6)

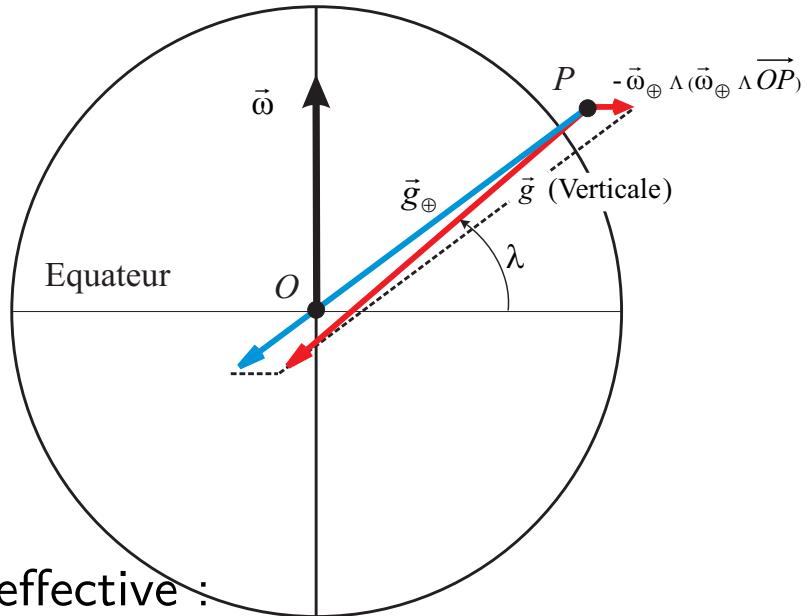
- La *force de pesanteur effective*, notée $m\vec{g}(P)$, est définie par :

$$m\vec{g}(P) = m\vec{g}_\oplus(P) - m\vec{\omega}_\oplus \wedge (\vec{\omega}_\oplus \wedge \overrightarrow{OP}).$$

- Le vecteur $\vec{g}(P) = \vec{g}_\oplus(P) - \vec{\omega}_\oplus \wedge (\vec{\omega}_\oplus \wedge \overrightarrow{OP})$ est *le champ de pesanteur effective*.



La Mécanique par rapport à la (7)



- Champ de pesanteur effective :

- ▶ direction : verticale du lieu où on se trouve, c'est-à-dire direction d'un fil à plomb.
- ▶ module g dépend de la latitude λ
- ▶ maximum aux pôles ($g = 9.83 \text{ m s}^{-2}$) et minimum à l'équateur ($g = 9.78 \text{ m s}^{-2}$)
- ▶ sous nos latitudes, on a $g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$.
- ▶ La différence entre les valeurs extrêmes est de l'ordre de 0.05 m s^{-2} et est due
 - à l'effet centrifuge (0.03 m s^{-2})
 - au défaut de sphéricité de la Terre (0.02 m s^{-2}) : comme la Terre est un peu "enflée" à l'équateur, les pôles sont plus proches du centre de la Terre que les points de l'équateur.
- ▶ Si mouvements étudiés de faibles amplitudes $h.$ et $v..$, $\vec{g}(P) \approx \text{constante.}$

La Mécanique par rapport à la (8)

- En fin de compte, si on néglige la force de marée, l'équation de mouvement du point P par rapport à la Terre peut s'écrire :

$$m\vec{a} = \vec{F}_{ng} + m\vec{g}(P) - 2m\vec{\omega}_\oplus \wedge \vec{v}.$$

En plus des forces réelles non gravifiques, on voit apparaître la force de pesanteur effective (faite de la pesanteur *réelle* et d'une contribution d'*inertie*) et la force (*fictive d'inertie*) de Coriolis.

Table des matières

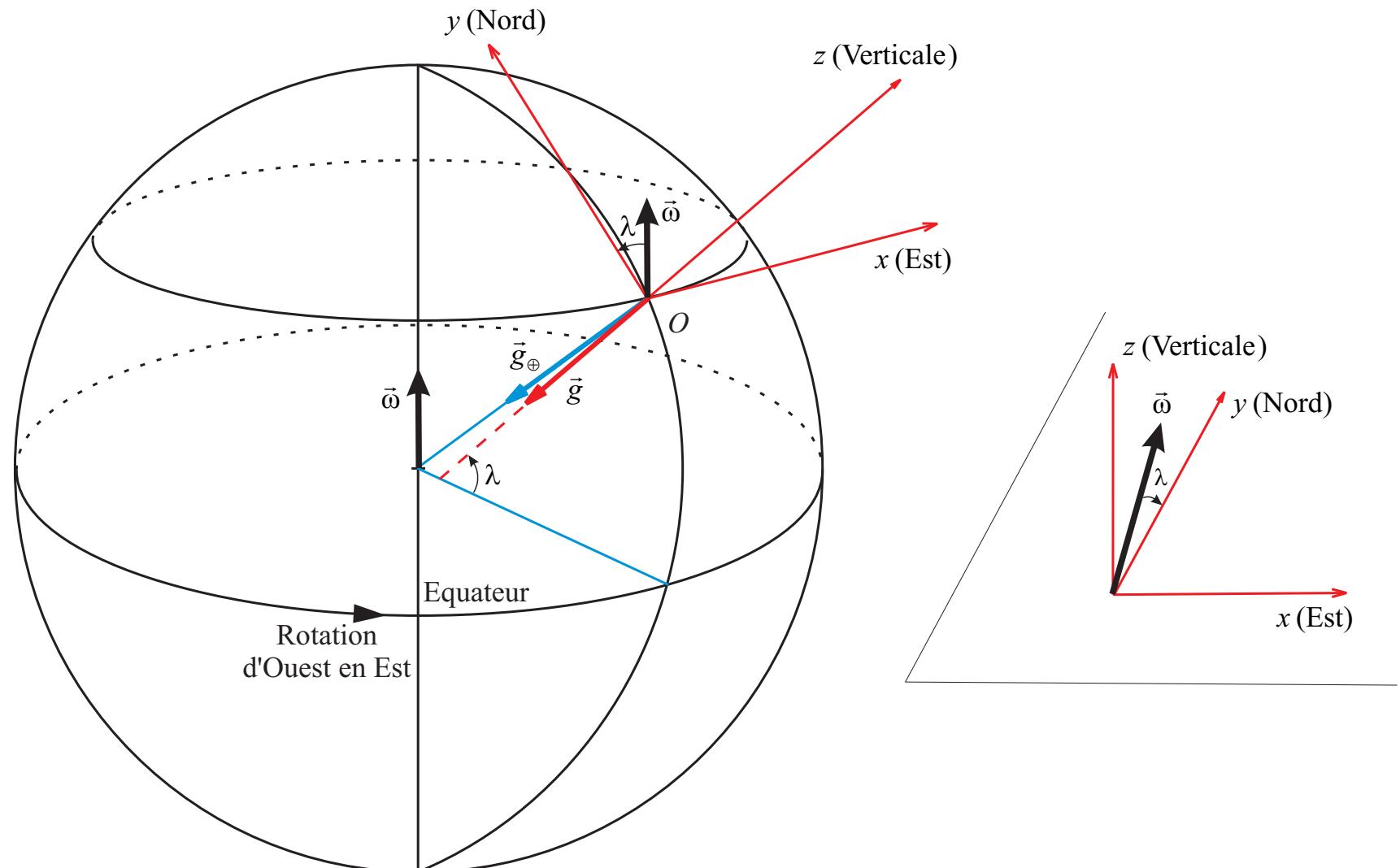
2 Mécanique du point

- Application : chute libre
- Application : oscillateur harmonique
- Lois fondamentales de la Mécanique du point
- L'espace des phases
- Application : le pendule circulaire
- Application : le problème de Kepler
- Application : oscillateur forcé et résonance
- Application : oscillateur non linéaire
- La Mécanique en axes relatifs
- La Mécanique en axes attachés à la Terre
- **Application : la chute libre (bis)**
- Application : le pendule de Foucault

La chute libre par rapport à la



- Axes utilisés (Terre supposée sphérique) :



- Composantes du vecteur $\vec{\omega}_{\oplus}$ (on laisse tomber l'indice \oplus) : $(0, \omega \cos \lambda, \omega \sin \lambda)$

La chute libre par rapport à la (2)

- Équation du mouvement :

$$\vec{a} = \vec{g} - 2\omega_{\oplus} \wedge \vec{v}.$$

avec $\vec{g}(P) = -g\vec{e}_z$ = constante si les déplacements de P sont de faible amplitude ($g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$ sous nos latitudes).

- Projection :

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -2\omega (\cos \lambda \dot{z} - \sin \lambda \dot{y}), \\ \ddot{y} &= -2\omega \sin \lambda \dot{x}, \\ \ddot{z} &= -g + 2\omega \cos \lambda \dot{x}.\end{aligned}$$

⇒ Système de trois équations *couplées* pour $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$.

- Conditions initiales choisies :

$$\begin{aligned}x &= y = 0, z = H \text{ en } t = 0, \\ \dot{x} &= \dot{y} = \dot{z} = 0 \text{ en } t = 0.\end{aligned}$$

La chute libre par rapport à la (3)

- Résolution de :

$$\ddot{x} = -2\omega (\cos \lambda \dot{z} - \sin \lambda \dot{y}),$$

$$\ddot{y} = -2\omega \sin \lambda \dot{x},$$

$$\ddot{z} = -g + 2\omega \cos \lambda \dot{x}.$$

- Les 2 dernières équations s'intègrent facilement une fois. Avec les C.I., il vient :

$$\dot{y} = -2\omega \sin \lambda x,$$

$$\dot{z} = -gt + 2\omega \cos \lambda x.$$

- En injectant ces deux relations dans la première équation, on déduit :

$$\ddot{x} + 4\omega^2 x = 2\omega \cos \lambda gt.$$

- Solution générale :

$$x(t) = a \cos 2\omega t + b \sin 2\omega t + \frac{2\omega \cos \lambda gt}{4\omega^2}.$$

La chute libre par rapport à la (4)

- En utilisant les conditions initiales :

$$x(t) = \frac{g}{4\omega^2} \cos \lambda (2\omega t - \sin 2\omega t).$$

- $2\omega t - \sin 2\omega t \geq 0$ pour $t \geq 0 \Rightarrow \text{déviation vers l'Est}$ (sauf aux deux pôles où $\cos \lambda$ s'annule).
- Comme rotation de la Terre se fait d'Ouest en Est, un raisonnement (trop) rapide en axes absolus pourrait faire penser (à tort) que la déviation se fait plutôt dans l'autre direction !

La chute libre par rapport à la (5)

- En injectant la solution $x(t) = \frac{g}{4\omega^2} \cos \lambda (2\omega t - \sin 2\omega t)$ dans les équations

$$\begin{aligned}\dot{y} &= -2\omega \sin \lambda x, \\ \dot{z} &= -gt + 2\omega \cos \lambda x.\end{aligned}$$

et en tenant compte des C.I., on détermine $y(t)$ et $z(t)$:

$$\begin{aligned}y(t) &= -\frac{g}{4\omega^2} \cos \lambda \sin \lambda (2\omega^2 t^2 - 1 + \cos 2\omega t), \\ z(t) &= H - \frac{1}{2}gt^2 + \frac{g}{4\omega^2} \cos^2 \lambda (2\omega^2 t^2 - 1 + \cos 2\omega t).\end{aligned}$$

- $2\omega^2 t^2 - 1 + \cos 2\omega t \geq 0 \Rightarrow$ **déviation vers le Sud/Nord dans l'hémisphère Nord/Sud** ($\sin \lambda$ positif/négatif) : toujours vers l'équateur !

La chute libre par rapport à la (6)

- Si on fait l'hypothèse que t reste "petit" c'est-à-dire, plus précisément, si on suppose que $2\omega t \ll 1$ ($t \ll 2$ heures environ), on peut remplacer les sinus et cosinus dans $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ par les premiers termes de leurs développements en séries :

$$\sin 2\omega t \approx 2\omega t - \frac{1}{6}(2\omega t)^3,$$

$$\cos 2\omega t \approx 1 - \frac{1}{2}(2\omega t)^2 + \frac{1}{24}(2\omega t)^4.$$

- Les fonctions $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ prennent alors les expressions simplifiées suivantes :

$$x(t) \approx \frac{1}{3} \cos \lambda g t^2 \omega t,$$

$$y(t) \approx -\frac{1}{6} \cos \lambda \sin \lambda g t^2 (\omega t)^2,$$

$$z(t) \approx H - \frac{1}{2} g t^2.$$

La chute libre par rapport à la (7)

- En annulant $z(t)$, on calcule facilement le temps de chute t_H d'une hauteur H

$$t_H = \sqrt{2H/g}.$$

Cette formule permet de s'assurer facilement que l'hypothèse d'un temps de chute court par rapport à la durée du jour est bien vérifiée.

- La déviation totale x_H vers l'Est et la déviation y_H vers le Sud ou le Nord peuvent alors être obtenues en injectant ce résultat dans les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ ci-dessus.
On trouve :

$$x_H = \frac{2}{3} \cos \lambda \omega t_H H,$$

$$y_H = -\frac{1}{3} \cos \lambda \sin \lambda (\omega t_H)^2 H.$$

La chute libre par rapport à la (8)

- Les déviations

$$x_H = \frac{2}{3} \cos \lambda \omega t_H H,$$

$$y_H = -\frac{1}{3} \cos \lambda \sin \lambda (\omega t_H)^2 H.$$

s'annulent évidemment avec ω !

- x_H est proportionnel au temps de chute adimensionnel ωt_H , alors que y_H est proportionnel au carré de ce temps de chute adimensionnel (pourquoi ?)
➡ la déviation vers le Nord ou le Sud est bien plus petite que la déviation vers l'Est.
- Application numérique : si $H = 100\text{m}$
 - ▶ $t_H = 4.5\text{ s}$ (et donc $\omega t_H = 3.3 \times 10^{-4} \ll 1$!).
 - ▶ $x_H = 1.4\text{ cm}$
 - ▶ $y_H = -10^{-4}\text{ cm}$
- Vérification expérimentale dans expériences de chute libre dans des puits de mines (y_H trop petit pour être mesuré).

Table des matières

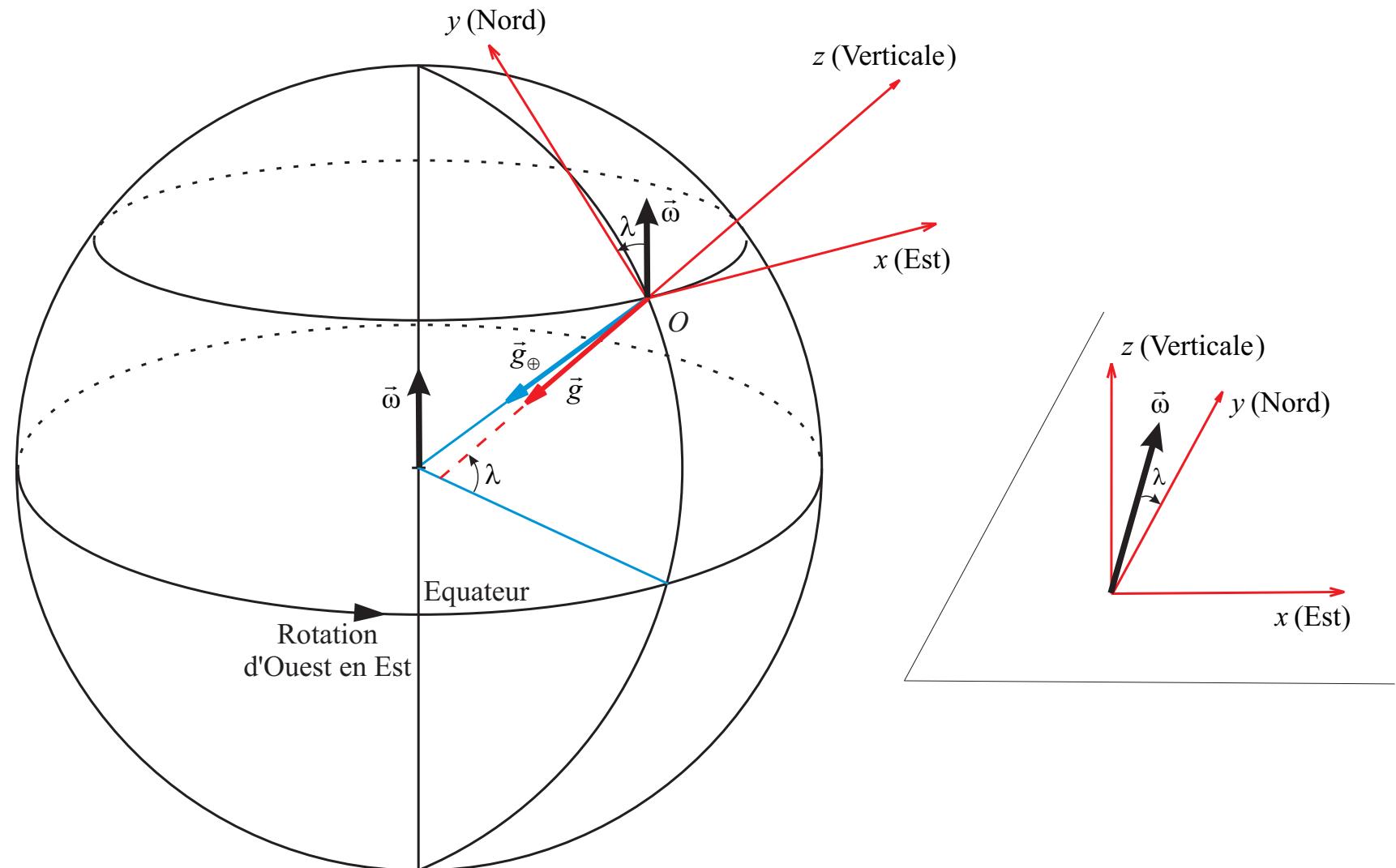
2

Mécanique du point

- Application : chute libre
- Application : oscillateur harmonique
- Lois fondamentales de la Mécanique du point
- L'espace des phases
- Application : le pendule circulaire
- Application : le problème de Kepler
- Application : oscillateur forcé et résonance
- Application : oscillateur non linéaire
- La Mécanique en axes relatifs
- La Mécanique en axes attachés à la Terre
- Application : la chute libre (bis)
- **Application : le pendule de Foucault**

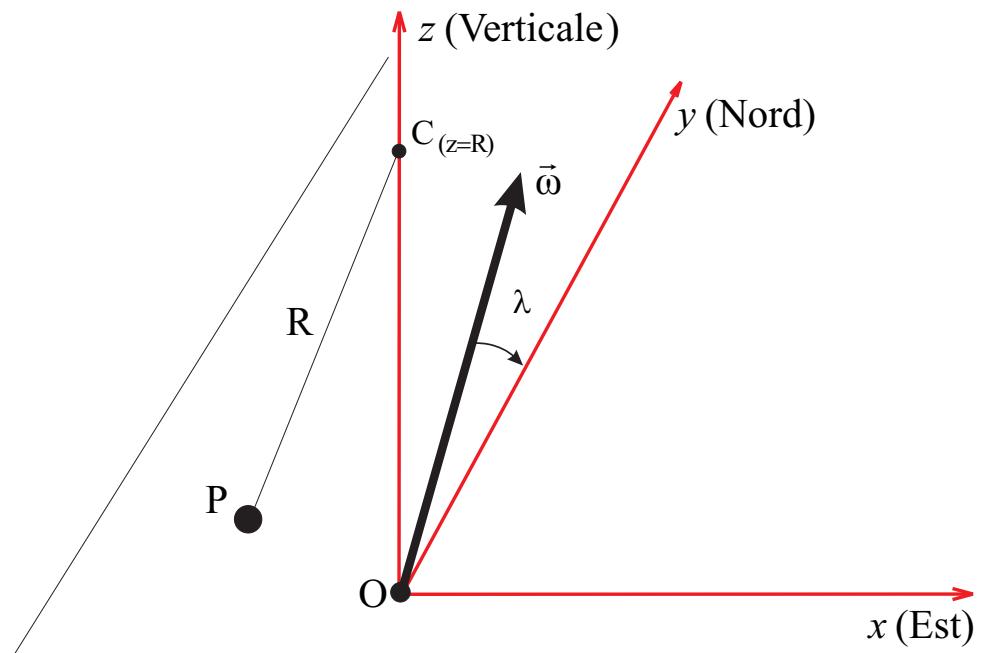
Le pendule de Foucault

- Axes utilisés (Terre supposée sphérique) :



Le pendule de Foucault (2)

- Axes utilisés :



- Étude des petites oscillations dans le voisinage de sa position d'équilibre stable.

Le pendule de Foucault (3)

- Forces : pesanteur (effective), Coriolis, réaction normale du fil (liaison) $\vec{N} = -N \frac{\vec{CP}}{R}$.
- Équation de mouvement du point P :

$$m\vec{a} = m\vec{g} - 2m\vec{\omega} \wedge \vec{v} + \vec{N}.$$

Projection sur les trois axes :

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -2m\omega (\cos \lambda \dot{z} - \sin \lambda \dot{y}) - N \frac{x}{R}, \\ m\ddot{y} &= -2m\omega \sin \lambda \dot{x} - N \frac{y}{R}, \\ m\ddot{z} &= -mg + 2m\omega \cos \lambda \dot{x} - N \frac{z - R}{R}. \end{aligned}$$

- Liaison (équation cartésienne de la sphère) :

$$x^2 + y^2 + (z - R)^2 = R^2.$$

- On dispose donc de 3 équations différentielles couplées et d'une équation algébrique pour les quatre inconnues $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ et $N(t)$.

Le pendule de Foucault (4)

- Positions d'équilibre :

$$\begin{aligned}x &= y = 0, \\-mg - \frac{N}{R}(z - R) &= 0,\end{aligned}$$

soumises à la contrainte $x^2 + y^2 + (z - R)^2 = R^2$.

Deux solutions :

- position d'équilibre "supérieure" : $x = y = 0, z = 2R, N = -mg$
- position d'équilibre "inférieure" : $x = y = z = 0, N = mg$ (située en le point O).

- Petites oscillations au voisinage de la position d'équilibre inférieure sont caractérisées par :

$$|x|, |y|, |z| \ll R.$$

Si $|x|, |y|$ et $|z|$ restent petits, la 3ème équation de mouvement nous apprend que N reste proche de la valeur mg correspondant à la position d'équilibre. On posera donc :

$$N(t) = (1 + \delta(t)) mg,$$

avec $|\delta(t)| \ll 1$.

Le pendule de Foucault (5)

- Linéarisation des équations :

- ▶ Équation de liaison ($x^2 + y^2 + z^2 - 2Rz = 0$) :

- Si $|z| \ll R$, le terme z^2 peut être négligé par rapport à $2Rz$
 - D'où la forme approchée (sphère approximée par un paraboloïde) :

$$z = \frac{x^2 + y^2}{2R}$$

- Si x et y sont considérés comme des quantités infinitésimales du premier ordre, on voit que z est alors du **second ordre** et va donc pouvoir être négligé (cela revient à négliger les déplacements verticaux du point P lorsque celui-ci effectue des mouvements horizontaux de faible amplitude dans le voisinage de O).
 - On déduit aussi que $\dot{z} = (x\dot{x} + y\dot{y})/R$.

Le pendule de Foucault (6)

- Linéarisation des équations (suite) :

- ▶ Équation de mouvement suivant x : $m\ddot{x} = -2m\omega(\cos \lambda \dot{z} - \sin \lambda \dot{y}) - \frac{N}{R}x$.
En remplaçant \dot{z} et N :

$$m\ddot{x} = -2m\omega \left(\cos \lambda \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{R} - \sin \lambda \dot{y} \right) - \frac{mg}{R}(1 + \delta)x.$$

Au premier ordre et en notant $\omega_0^2 = g/R$, on a :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 2\omega \sin \lambda \dot{y}.$$

- ▶ Équation de mouvement suivant y : $m\ddot{y} = -2m\omega \sin \lambda \dot{x} - \frac{N}{R}y$.
En procédant de manière similaire, on a, au premier ordre :

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = -2\omega \sin \lambda \dot{x}.$$

⇒ Système de **deux équations couplées** pour $x(t)$ et $y(t)$ (couplage entre les mouvements suivant x et y réalisé par la force de Coriolis ($\div \omega$)).

Le pendule de Foucault (7)

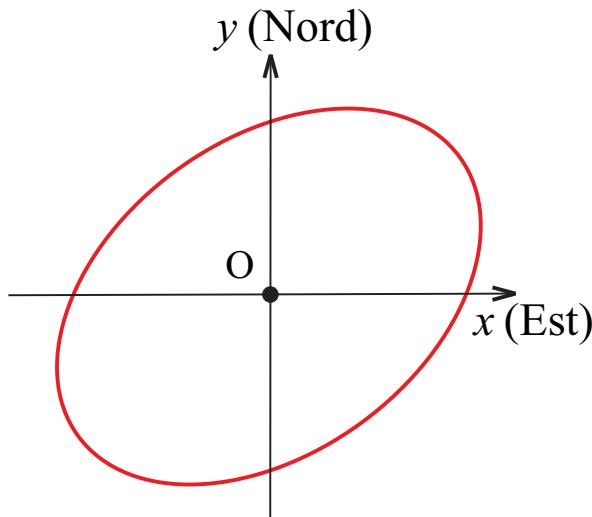
- Sans le couplage, les équations s'écrivent :

$$\begin{aligned}\ddot{x} + \omega_0^2 x &= 0, \\ \ddot{y} + \omega_0^2 y &= 0.\end{aligned}$$

- Solution : superposition

- d'une oscillation harmonique d'Est en Ouest et
- d'une autre oscillation harmonique entre le Nord et le Sud.

⇒ Comme il s'agit de deux oscillations de même pulsation ω_0 se faisant dans des directions perpendiculaires, la trajectoire projetée dans le plan horizontal est une **ellipse**.



- Pour certaines C.I., l'ellipse peut devenir un cercle ou dégénérer en un segment de droite (mouvement dans un plan vertical).

Le pendule de Foucault (8)

- Équations couplées :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 2\omega \sin \lambda \dot{y}, \quad (7)$$

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = -2\omega \sin \lambda \dot{x}. \quad (8)$$

- Variable auxiliaire complexe $z(t) = x(t) + iy(t)$.
- (7) + i (8) : équation unique (*pas toujours possible!*) pour la variable $z(t)$:

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = -2i\omega \sin \lambda \dot{z}.$$

Équation différentielle linéaire à coefficients constants. Solution :

$$z(t) = c_1 e^{i\omega_1 t} + c_2 e^{i\omega_2 t},$$

où les ω_i sont donnés par

$$\omega_1, \omega_2 = -\omega \sin \lambda \pm \sqrt{\omega_0^2 + \omega^2 \sin^2 \lambda}.$$

Le pendule de Foucault (9)

- Comme en général $\omega \sin \lambda \ll \omega_0$, on peut développer au premier ordre en $\omega \sin \lambda$ les $\omega_1, \omega_2 = -\omega \sin \lambda \pm \sqrt{\omega_0^2 + \omega^2 \sin^2 \lambda}$:

$$\omega_1, \omega_2 \approx -\omega \sin \lambda \pm \omega_0.$$

- La fonction $z(t)$ s'écrit alors :

$$\begin{aligned} z(t) &= e^{-i\omega \sin \lambda t} \left(c_1 e^{i\omega_0 t} + c_2 e^{-i\omega_0 t} \right) \\ &= e^{-i\omega \sin \lambda t} z_0(t) \end{aligned}$$

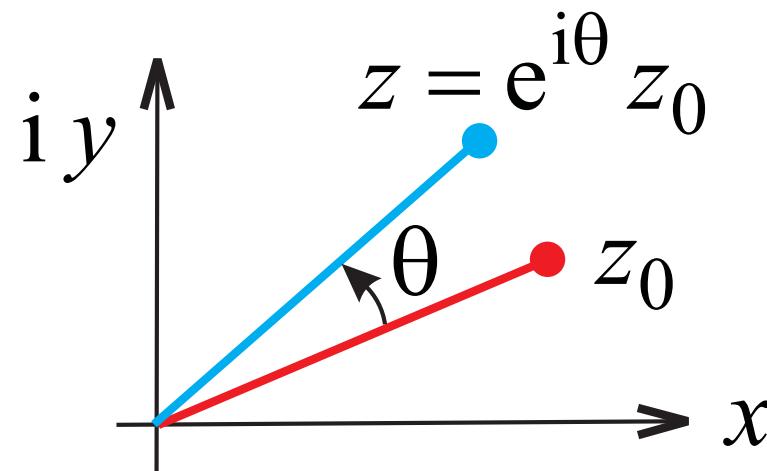
où $z_0(t) = c_1 e^{i\omega_0 t} + c_2 e^{-i\omega_0 t}$.

Remarque : $z_0(t)$ est la forme complexe de la solution des équations découplées !

Le pendule de Foucault (10)

Rappel :

Multiplier un nombre complexe par $e^{i\theta}$ revient à faire tourner le point représentatif de ce point dans le plan complexe d'un angle θ dans le sens trigonométrique



Le pendule de Foucault (11)

$$\begin{aligned} z(t) &= e^{-i\omega \sin \lambda t} \left(c_1 e^{i\omega_0 t} + c_2 e^{-i\omega_0 t} \right) \\ &= e^{-i\omega \sin \lambda t} z_0(t) \end{aligned}$$

- Interprétation :

- ▶ On identifie le plan horizontal Oxy avec le plan complexe de la variable $z = x + iy$.
⇒ trajectoire de la particule dans le plan horizontal ≡ déplacements du point représentatif de $z(t)$ dans le plan complexe.
- ▶ Courbe décrite dans ce plan complexe par la variable $z_0(t)$ est l'ellipse déjà rencontrée.
- ▶ $z(t)$ s'obtient à partir de $z_0(t)$ par multiplication par $e^{-i\omega \sin \lambda t}$
⇒ le point $z(t)$ se déplace sur une ellipse, qui est elle-même en train d'effectuer un mouvement de précession autour de l'origine avec une vitesse angulaire $-\omega \sin \lambda$.
- ▶ La précession de l'ellipse (ou du plan d'oscillation si l'ellipse est dégénérée en un segment) se fait dans le sens horlogique ou trigonométrique suivant que l'on se situe dans l'hémisphère Nord ou dans l'hémisphère Sud.
- ▶ La période de cette précession est égale à $2\pi/\omega \sin \lambda$.

Le pendule de Foucault (12)

- L'expérience originale de Foucault fut réalisée en 1851 au Panthéon à Paris.
- Le pendule suspendu au plafond avait une longueur de 70 m.
- Sa période d'oscillation valait $2\pi/\omega_0 \approx 17$ s.
- La période de la précession à la latitude de Paris était de 32 h environ, ce qui correspond à un déplacement du plan d'oscillation du pendule de 11° par heure.
- Aussi réalisée de temps en temps dans l'église Saint André de la place du Marché à Liège :
 - ▶ longueur = 36 m
 - ▶ période d'oscillation = 12 s
 - ▶ période de précession = 30h 57' 20".
- On peut voir tourner la Terre sans regarder le ciel !

Table des matières

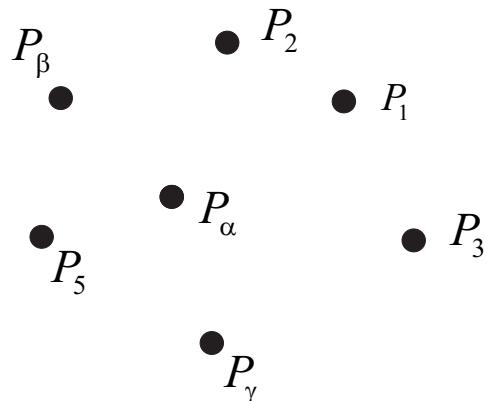
1 Cinématique

2 Mécanique du point

3 Mécanique des systèmes de points

4 Mécanique des solides

Système de points matériels (1)



- Masse totale

$$m = \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha.$$

- N équations de mouvement de Newton pour les N particules ponctuelles P_α :

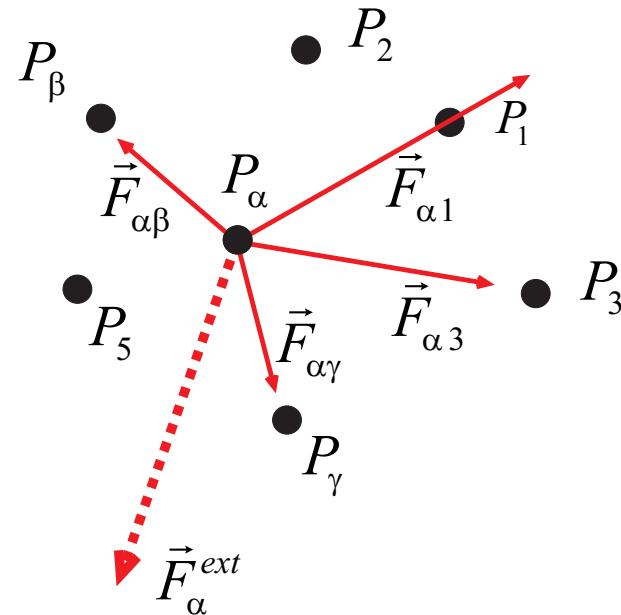
$$m_\alpha \frac{d^2 \overrightarrow{OP}_\alpha}{dt^2} = \vec{F}_\alpha$$

► **Pas commode ni utile !**

Système de points matériels (2)

- Étude des caractéristiques “générales” des mouvements.
- Par exemple, pour un solide
 - ▶ étude du mouvement du centre de masse
 - ▶ étude des rotations autour du centre de masse
- Nombre restreint d'équations
- Généralisation des lois de conservation de
 - ▶ impulsion
 - ▶ moment cinétique
 - ▶ énergie cinétique
- Conséquences des N équations de Newton et ne leur sont donc pas équivalentes !
- Pour les solides, nous verrons que ces équations sont non seulement
 - ▶ **suffisantes**, mais même partiellement
 - ▶ **redondantes**.

Forces s'exerçant sur la particule P_α



$$\vec{F}_\alpha = \vec{F}_\alpha^{\text{ext}} + \vec{F}_\alpha^{\text{int}}$$

$$\vec{F}_\alpha^{\text{int}} = \sum_{\beta \neq \alpha} \vec{F}_{\alpha\beta}$$

Impulsion d'un système

- Définition de l'impulsion d'un système :

$$\vec{p} = \sum_{\alpha} \vec{p}_{\alpha} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}.$$

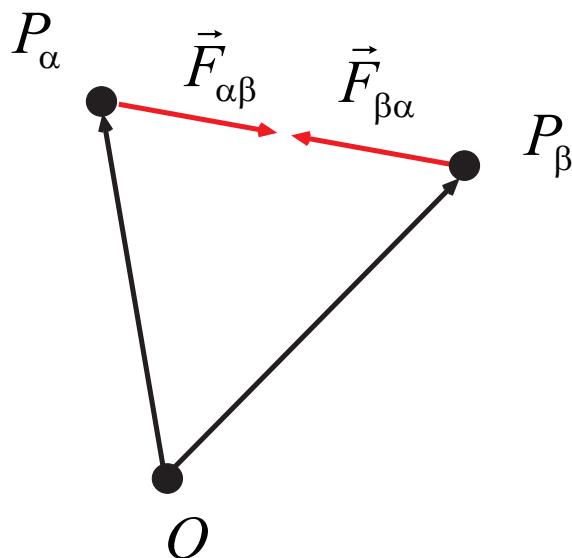
- En faisant la somme des N équations de Newton :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha}^{\text{int}} + \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}}.$$

Loi de conservation de l'impulsion

•

$$\sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha}^{\text{int}} = \sum_{\alpha} \sum_{\beta \neq \alpha} \vec{F}_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha < \beta} (\vec{F}_{\alpha\beta} + \vec{F}_{\beta\alpha}) = 0$$



⇒ **Loi de conservation de l'impulsion :**

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}^{\text{ext}} = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}}$$

\vec{F}^{ext} : résultante extérieure

Théorème du centre de masse

- Centre de masse :

$$\overrightarrow{OC} = \frac{\sum_{\alpha} m_{\alpha} \overrightarrow{OP}_{\alpha}}{\sum_{\alpha} m_{\alpha}}$$

NB. Le centre de masse d'un système de points matériels n'est *pas un point matériel*.

- Vitesse du centre de masse :

$$\vec{v}_C = \frac{1}{m} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}$$

d'où

$$\vec{p} = m \vec{v}_C. \tag{9}$$

- **Théorème du centre de masse :**

$$m \frac{d\vec{v}_C}{dt} = \vec{F}^{\text{ext}} = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}}.$$

Loi de cons. du moment cinétique (1)

- Moment cinétique d'un système (O quelconque) :

$$\vec{L}_O = \sum_{\alpha} \vec{L}_{O,\alpha} = \sum_{\alpha} \overrightarrow{OP}_{\alpha} \wedge m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}.$$

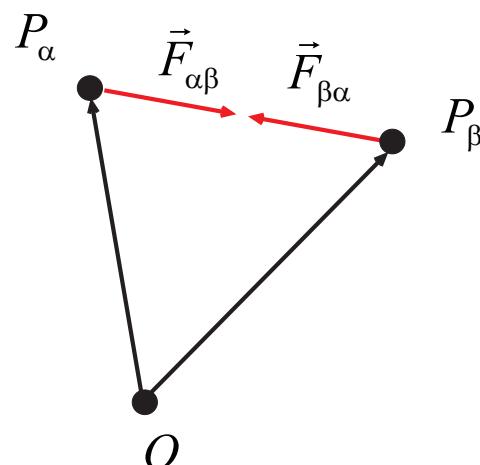
- En additionnant les équations d'évolution des $\vec{L}_{O,\alpha}$ (O fixe) :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_{\alpha} \overrightarrow{OP}_{\alpha} \wedge \vec{F}_{\alpha}^{\text{int}} + \sum_{\alpha} \overrightarrow{OP}_{\alpha} \wedge \vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}}.$$

Loi de cons. du moment cinétique (2)

- Moment des forces intérieures :

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha} \overrightarrow{OP}_{\alpha} \wedge \vec{F}_{\alpha}^{\text{int}} &= \sum_{\alpha} \sum_{\beta \neq \alpha} \overrightarrow{OP}_{\alpha} \wedge \vec{F}_{\alpha\beta} \\&= \sum_{\alpha < \beta} \left(\overrightarrow{OP}_{\alpha} \wedge \vec{F}_{\alpha\beta} + \overrightarrow{OP}_{\beta} \wedge \vec{F}_{\beta\alpha} \right) \\&= \sum_{\alpha < \beta} \left(\overrightarrow{OP}_{\alpha} - \overrightarrow{OP}_{\beta} \right) \wedge \vec{F}_{\alpha\beta} \\&= \sum_{\alpha < \beta} \overrightarrow{P_{\beta} P_{\alpha}} \wedge \vec{F}_{\alpha\beta} \\&= 0.\end{aligned}$$



Loi de cons. du moment cinétique (3)

⇒ **Loi de conservation du moment cinétique :**

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O^{\text{ext}} = \sum_{\alpha} \overrightarrow{OP}_{\alpha} \wedge \vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}} \quad (10)$$

\vec{M}_O^{ext} : moment résultant extérieur

Loi de cons. de \vec{L}_C

$$\vec{L}_C = \sum_{\alpha} \overrightarrow{CP}_{\alpha} \wedge m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \left(\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OP}_{\alpha} \right) \wedge m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} = \vec{L}_O - \overrightarrow{OC} \wedge \vec{p}.$$

- d'où

$$\begin{aligned}
 \frac{d\vec{L}_C}{dt} &= \frac{d\vec{L}_O}{dt} - \vec{v}_C \wedge \vec{p} - \overrightarrow{OC} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt} \\
 &= \sum_{\alpha} \overrightarrow{OP}_{\alpha} \wedge \vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}} - \vec{0} - \overrightarrow{OC} \wedge \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}} \\
 &= \sum_{\alpha} \left(\overrightarrow{OP}_{\alpha} - \overrightarrow{OC} \right) \wedge \vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}} \\
 &= \sum_{\alpha} \overrightarrow{CP}_{\alpha} \wedge \vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}}.
 \end{aligned}$$

\implies **Loi de conservation de \vec{L}_C (C : point en mouvement !) :**

$$\frac{d\vec{L}_C}{dt} = \vec{M}_C^{\text{ext}} = \sum_{\alpha} \overrightarrow{CP}_{\alpha} \wedge \vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}}.$$

- **Remarque** : la loi de conservation de \vec{p} étant connue, les lois de conservation de \vec{L}_O et de \vec{L}_C sont tout à fait **équivalentes**.

Loi de cons. de l'énergie cinétique

- Énergie cinétique d'un système :

$$T = \sum_{\alpha} T_{\alpha} = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} v_{\alpha}^2.$$

- En additionnant les équations d'évolution des T_{α} :

⇒ **Loi de conservation de l'énergie cinétique :**

$$\frac{dT}{dt} = \mathcal{P}^{\text{int}} + \mathcal{P}^{\text{ext}} = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha}^{\text{int}} \cdot \vec{v}_{\alpha} + \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}} \cdot \vec{v}_{\alpha}$$

\mathcal{P}^{int} : puissance résultante intérieure

\mathcal{P}^{ext} : puissance résultante extérieure

- NB. Exemple des patineurs.

Remarque : éq.- T et solide

- Pour un solide, on a :

$$\frac{dT}{dt} \Big|_{\text{SOLIDE}} = \mathcal{P}^{\text{ext}} = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}} \cdot \vec{v}_{\alpha}.$$

- En effet :

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha}^{\text{int}} \cdot \vec{v}_{\alpha} &= \sum_{\alpha} \sum_{\beta \neq \alpha} \vec{F}_{\alpha\beta} \cdot \vec{v}_{\alpha} \\ &= \sum_{\alpha < \beta} (\vec{F}_{\alpha\beta} \cdot \vec{v}_{\alpha} + \vec{F}_{\beta\alpha} \cdot \vec{v}_{\beta}) \\ &= \sum_{\alpha < \beta} \vec{F}_{\alpha\beta} \cdot (\vec{v}_{\alpha} - \vec{v}_{\beta}) \\ &= \sum_{\alpha < \beta} \vec{F}_{\alpha\beta} \cdot \frac{d}{dt} (\overrightarrow{P_{\beta} P_{\alpha}}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Rem. : éq.- T et forces conservatives (1)

- Si $\vec{F}_\alpha^{\text{ext}} = -\nabla_\alpha V_\alpha^{\text{ext}}(P_\alpha)$,

$$\begin{aligned}\sum_\alpha \vec{F}_\alpha^{\text{ext}} \cdot \vec{v}_\alpha &= - \sum_\alpha \nabla_\alpha V_\alpha^{\text{ext}} \cdot \vec{v}_\alpha \\ &= - \frac{d}{dt} \sum_\alpha V_\alpha^{\text{ext}}(x_\alpha(t), y_\alpha(t), z_\alpha(t)) \\ &= - \frac{dV^{\text{ext}}}{dt}\end{aligned}$$

avec V^{ext} fonction des $3N$ coordonnées des N particules P_α :

$$V^{\text{ext}} = \sum_\alpha V_\alpha^{\text{ext}} = V^{\text{ext}}(x_1(t), y_1(t), z_1(t), x_2(t), y_2(t), z_2(t), \dots, x_N(t), y_N(t), z_N(t))$$

- Par ex., pour forces de pesanteur, $\vec{F}_\alpha^{\text{ext}} = -\nabla_\alpha(m_\alpha g z_\alpha)$ et le potentiel (total) des forces de pesanteur prend la forme :

$$V^{\text{ext}} = \sum_\alpha m_\alpha g z_\alpha = mgzc$$

Rem. : éq.- T et forces conservatives (2)

- Conservation de l'énergie :

$$\frac{d(T + V^{\text{ext}})}{dt} = \mathcal{P}^{\text{int}} = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha}^{\text{int}} \cdot \vec{v}_{\alpha}.$$

- Si solide

$$\left. \frac{d(T + V^{\text{ext}})}{dt} \right|_{\text{SOLIDE}} = 0,$$

d'où intégrale première de **conservation de l'énergie mécanique totale** :

$$T + V^{\text{ext}} \Big|_{\text{SOLIDE}} = \text{constante.}$$

- NB. On pourrait aussi envisager des *forces internes conservatives* et introduire le potentiel correspondant.

Lois de “conservation”

- Pour les systèmes “isolés”,
 - ▶ \vec{p} est conservé
 - ▶ \vec{L}_0 est conservé
 - ▶ énergie mécanique totale = “énergie cinétique + énergie potentielle forces internes” est conservée
- Pour les systèmes non isolés, “lois d’évolution”

Lois de conserv. et f. de pesanteur

- Si particules P_α soumises à $m_\alpha \vec{g}$,
 - ▶ résultante extérieure = $\sum_\alpha m_\alpha \vec{g} = m \vec{g}$
 - ▶ moment résultant extérieur = $\sum_\alpha \overrightarrow{OP}_\alpha \wedge m_\alpha \vec{g} = \overrightarrow{OC} \wedge m \vec{g}$
 - ▶ puissance résultante extérieure = $\sum_\alpha m_\alpha \vec{g} \cdot \vec{v}_\alpha = m \vec{g} \cdot \vec{v}_C \quad \left(= - \frac{d(mgz_C)}{dt}\right)$
- ⇒ Tout se passe **comme si** “force” unique $m \vec{g}$ appliquée au centre de masse !

• Mais

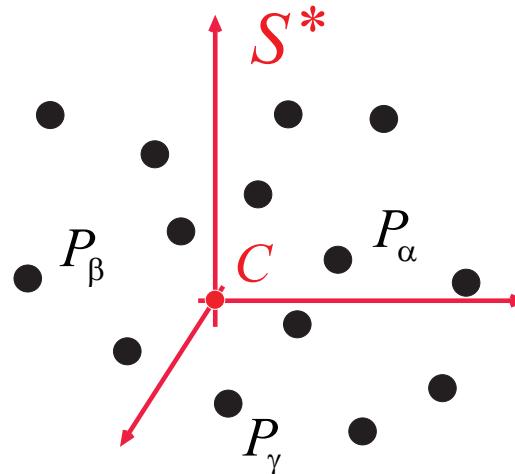
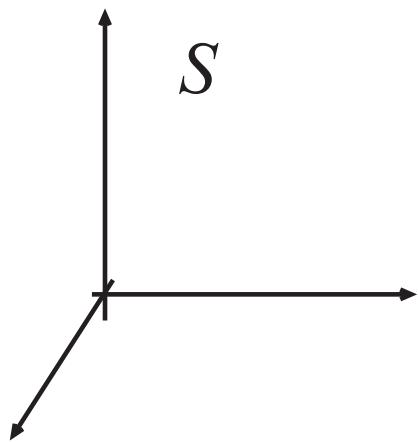
- ▶ $m \vec{g}$: pas une force
- ▶ centre de masse : pas un point matériel

• Remarque :

$$\sum_\alpha \overrightarrow{CP}_\alpha \wedge m_\alpha \vec{g} = \overrightarrow{CC} \wedge m \vec{g} = 0.$$

⇒ les forces de pesanteur ne peuvent influer sur \vec{L}_C !

Le système du centre de masse



$$\vec{\omega}_{S^*} \neq 0$$

mais la translation n'est en général ni rectiligne ni uniforme !

S^* non inertiel

L'impulsion dans S^*

- Vitesse de P_α dans S^* :

$$\vec{v}_\alpha^* = \vec{v}_\alpha - \vec{v}_C.$$

- Impulsion du système dans S^* :

$$\vec{p}^* = \sum_{\alpha} \vec{p}_{\alpha}^* = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\vec{v}_{\alpha} - \vec{v}_C) = 0.$$

- Conséquence :

$$\sum_{\alpha} (\vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}} + \vec{F}_{\alpha}^{\text{fi}*}) = 0.$$

Le moment cinétique dans S^*

- Moment cinétique \vec{L}_O^* dans S^* par rapport à un point O :

$$\vec{L}_O^* = \sum_{\alpha} \overrightarrow{OP}_{\alpha} \wedge m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}^*.$$

- Indépendant de O :

$$\vec{L}_O^* = \vec{L}^*$$

car

$$\vec{L}_{O'}^* = \sum_{\alpha} \left(\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP}_{\alpha} \right) \wedge m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}^* = \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{p}^* + \vec{L}_O^* = \vec{L}_O^*,$$

Premier théorème de Koenig

- Premier théorème de Koenig : $\vec{L}_O = \overrightarrow{OC} \wedge m\vec{v}_C + \vec{L}^*$

En effet :

$$\begin{aligned}\vec{L}_O &= \sum_{\alpha} \overrightarrow{OP}_{\alpha} \wedge m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} \\ &= \sum_{\alpha} \overrightarrow{OP}_{\alpha} \wedge m_{\alpha} (\vec{v}_C + \vec{v}_{\alpha}^*) \\ &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \overrightarrow{OP}_{\alpha} \wedge \vec{v}_C + \sum_{\alpha} \overrightarrow{OP}_{\alpha} \wedge m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}^* \\ &= m \overrightarrow{OC} \wedge \vec{v}_C + \sum_{\alpha} \overrightarrow{OP}_{\alpha} \wedge m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}^*\end{aligned}$$

moment cinétique d'un système de particules

= moment cinétique de son centre de masse

+ moment cinétique \vec{L}^* dû aux mouvements autour du centre de masse

Si solide

= moment cinétique dû à la translation du centre de masse

+ moment cinétique dû à la rotation du solide autour de son centre de masse

Évolution de \vec{L}^*

- 1er théorème de Koenig avec $O = C$:

$$\vec{L}_C = \vec{L}^*,$$

- Loi d'évolution de \vec{L}^* :

$$\frac{d\vec{L}^*}{dt} = \vec{M}_C^{\text{ext}} = \sum_{\alpha} \overrightarrow{CP}_{\alpha} \wedge \vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}}.$$

Étonnant car pas de ffi !

- **Remarque :**

la loi de conservation de l'impulsion étant supposée connue, les lois de conservation de \vec{L}_O , \vec{L}_C ou \vec{L}^* sont parfaitement équivalentes entre elles.

Le deuxième théorème de Koenig

- Énergie cinétique dans S^* :

$$T^* = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} v_{\alpha}^{*2}.$$

- Deuxième théorème de Koenig : $T = \frac{1}{2} m v_C^2 + T^*$

En effet :

$$T = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} v_{\alpha}^2 = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} (v_{\alpha}^{*2} + v_C^2 + 2\vec{v}_{\alpha}^* \cdot \vec{v}_C)$$

énergie cinétique d'un système de particules
= énergie cinétique de son centre de masse

+ énergie cinétique T^* due aux mouvements autour du centre de masse

Si solide

= énergie cinétique due à la translation du centre de masse
+ énergie cinétique due à la rotation du solide autour de son centre de masse

Évolution de T^*

- Loi de conservation de T et 2ème thm de Koenig :

$$\frac{dT^*}{dt} = \frac{dT}{dt} - \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v_C^2 \right) = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha} \cdot \vec{v}_{\alpha} - \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v_C^2 \right).$$

- Vu conservation de \vec{p} et vu $\sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha}^{\text{int}} = 0$:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v_C^2 \right) = m \vec{v}_C \cdot \frac{d \vec{v}_C}{dt} = \vec{v}_C \cdot \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}} = \vec{v}_C \cdot \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha}$$

- Loi d'évolution de T^* :

$$\frac{dT^*}{dt} = \mathcal{P}^{*\text{ int}} + \mathcal{P}^{*\text{ ext}} = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha}^{\text{int}} \cdot \vec{v}_{\alpha}^* + \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}} \cdot \vec{v}_{\alpha}^*.$$

Étonnant car pas de ffi !

- **Remarque** : la loi de conservation de \vec{p} étant connue, les lois de conservation de T et de T^* sont tout à fait **équivalentes**.

Évolution de T^* (2)

- Si solide :

$$\frac{dT^*}{dt} \Big|_{\text{SOLIDE}} = \mathcal{P}^{*\text{ ext}} = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}} \cdot \vec{v}_{\alpha}^*.$$

Table des matières

1 Cinématique

2 Mécanique du point

3 Mécanique des systèmes de points

4 Mécanique des solides

- En général, solide : 6 ddl \implies 6 paramètres
- Parfois restrictions des mouvements \implies forces de liaison inconnues
- **NB.** Le caractère “solide” du système constitue une restriction aux mouvements des particules. Les forces de liaison correspondantes sont des forces internes.
- Pour étudier les mouvements et déterminer les forces de liaison :
 - ▶ Toutes les lois de conservation établies précédemment !

Lois de conservation pour les solides

- la loi de conservation de l'**impulsion** (ou théorème du centre de masse) :

$$m \frac{d\vec{v}_C}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}^{\text{ext}} = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}}$$

- loi de conservation du **moment cinétique** (trois formes équivalentes) :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O^{\text{ext}} = \sum_{\alpha} \overrightarrow{OP}_{\alpha} \wedge \vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}}$$

$$\frac{d\vec{L}_C}{dt} = \vec{M}_C^{\text{ext}} = \sum_{\alpha} \overrightarrow{CP}_{\alpha} \wedge \vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}}$$

$$\frac{d\vec{L}^*}{dt} = \vec{M}_C^{\text{ext}} = \sum_{\alpha} \overrightarrow{CP}_{\alpha} \wedge \vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}}$$

- loi de conservation de l'**énergie cinétique** (deux formes équivalentes) :

$$\frac{dT}{dt} = \mathcal{P}^{\text{ext}} = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}} \cdot \vec{v}_{\alpha}$$

$$\frac{dT^*}{dt} = \mathcal{P}^{*\text{ext}} = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}} \cdot \vec{v}_{\alpha}^*$$

Lois de conserv. pour les solides

- Champ des vitesses d'un solide :

$$\vec{v}_\alpha = \vec{v}_C + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CP}_\alpha$$

d'où :

$$\vec{v}_\alpha^* = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CP}_\alpha$$

- Mb de droite de $\frac{dT^*}{dt} = \mathcal{P}^{*\text{ext}} = \sum_\alpha \vec{F}_\alpha^{\text{ext}} \cdot \vec{v}_\alpha^*$:

$$\sum_\alpha \vec{F}_\alpha^{\text{ext}} \cdot \vec{v}_\alpha^* = \sum_\alpha \vec{F}_\alpha^{\text{ext}} \cdot (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CP}_\alpha) = \vec{\omega} \cdot \sum_\alpha \overrightarrow{CP}_\alpha \wedge \vec{F}_\alpha^{\text{ext}} = \vec{\omega} \cdot \vec{M}_C^{\text{ext}}$$

- Mb de droite de $\frac{dT}{dt} = \mathcal{P}^{\text{ext}} = \sum_\alpha \vec{F}_\alpha^{\text{ext}} \cdot \vec{v}_\alpha$:

$$\sum_\alpha \vec{F}_\alpha^{\text{ext}} \cdot \vec{v}_\alpha = \sum_\alpha \vec{F}_\alpha^{\text{ext}} \cdot (\vec{v}_C + \vec{v}_\alpha^*) = \vec{v}_C \cdot \vec{F}^{\text{ext}} + \vec{\omega} \cdot \vec{M}_C^{\text{ext}}.$$

Lois de conserv. pour les solides

- la loi de conservation de l'**impulsion** (ou théorème du centre de masse) :

$$m \frac{d\vec{v}_C}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}^{\text{ext}} = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}}$$

- loi de conservation du **moment cinétique** (trois formes équivalentes) :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O^{\text{ext}} = \sum_{\alpha} \overrightarrow{OP}_{\alpha} \wedge \vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}}$$

$$\frac{d\vec{L}_C}{dt} = \vec{M}_C^{\text{ext}} = \sum_{\alpha} \overrightarrow{CP}_{\alpha} \wedge \vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}}$$

$$\frac{d\vec{L}^*}{dt} = \vec{M}_C^{\text{ext}} = \sum_{\alpha} \overrightarrow{CP}_{\alpha} \wedge \vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}}$$

- loi de conservation de l'**énergie cinétique** (deux formes équivalentes) :

$$\frac{dT}{dt} = \mathcal{P}^{\text{ext}} = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}} \cdot \vec{v}_{\alpha} = \vec{v}_C \cdot \vec{F}^{\text{ext}} + \vec{\omega} \cdot \vec{M}_C^{\text{ext}}$$

$$\frac{dT^*}{dt} = \mathcal{P}^{*\text{ext}} = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}} \cdot \vec{v}_{\alpha}^* = \vec{\omega} \cdot \vec{M}_C^{\text{ext}}$$

Lois de conserv. pour les solides

- Conséquence :

Pour les solides, les évolutions de

- ▶ impulsion
- ▶ moment cinétique
- ▶ énergie cinétique

sont entièrement déterminées par

- ▶ **résultante extérieure**
- ▶ **moment résultant extérieur**

- Nous verrons que les lois de conservation de \vec{p} , \vec{L} , T sont suffisantes pour étudier tous les mouvements des solides

⇒ Les mouvements des solides sont déterminés par \vec{F}^{ext} et \vec{M}^{ext}

- NB. Ces équations d'évolution de \vec{p} , \vec{L} , T sont même partiellement *redondantes* car (voir notes) l'équation de conservation de l'énergie cinétique est conséquence des équations d'évolution de \vec{p} et \vec{L}

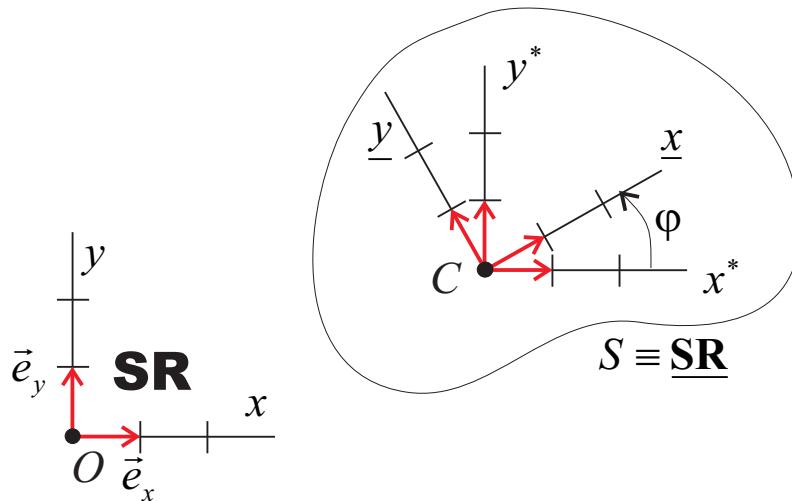
Table des matières

- 4 Mécanique des solides
 - Solides en mouvement plan
 - Solides dans l'espace

Dynamique des solides en mvt plan

- Dans certaines circonstances, les mouvements des solides peuvent être plans
 - ▶ tonneau qui roule sans pivoter
 - ▶ roue de voiture en ligne droite
 - ▶ palet coincé entre deux plans
 - ▶ hélice d'une éolienne (si le vent ne change pas de direction)
 - ▶ ...
- La plupart du temps, nous considérerons que le caractère plan des mouvements est une donnée *a priori* et on ne s'intéressera pas aux forces permettant aux mouvements d'être plans

Cinématique du solide plan



- 3 ddl en général : (x_C, y_C) et φ comme paramètres
- Vitesse angulaire $\vec{\omega}$ du solide par rapport à SR :

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi} \vec{e},$$

- Champ des vitesses du solide :

$$\vec{v}_P = \vec{v}_C + \dot{\varphi} \vec{e} \wedge \overrightarrow{CP}.$$

Dynamique du solide plan à point fixe

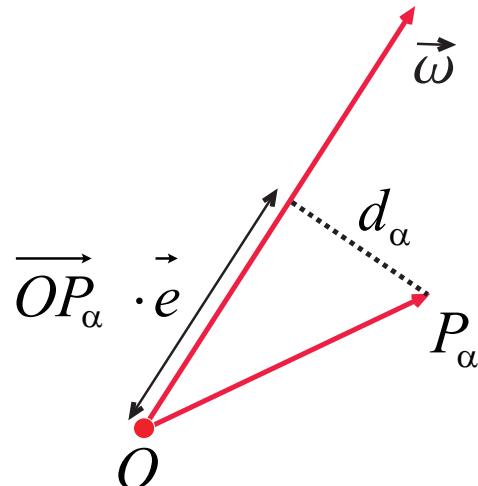
- 1 ddl
- Le point C est choisi en le point fixe et l'origine des axes est choisie en ce point : $C = O$.
- Une variable : φ .
- Équation d'évolution à partir de conservation de \vec{L}
- Champ des vitesses : $\vec{v}_\alpha = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP}_\alpha$
- Moment cinétique :

$$\begin{aligned}\vec{L}_O &= \sum_{\alpha} \overrightarrow{OP}_\alpha \wedge m_\alpha \vec{v}_\alpha = \sum_{\alpha} m_\alpha \overrightarrow{OP}_\alpha \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP}_\alpha) \\ &= \sum_{\alpha} m_\alpha \left\| \overrightarrow{OP}_\alpha \right\|^2 \vec{\omega} - \sum_{\alpha} m_\alpha (\overrightarrow{OP}_\alpha \cdot \vec{\omega}) \overrightarrow{OP}_\alpha.\end{aligned}$$

- Projection sur $\Delta = O + \vec{e}$ (axe \perp au plan du mouvement)

$$L_\Delta = \sum_{\alpha} m_\alpha \left(\left\| \overrightarrow{OP}_\alpha \right\|^2 - (\overrightarrow{OP}_\alpha \cdot \vec{e})^2 \right) \dot{\varphi}$$

Dynam. du solide plan à point fixe (2)



$$\begin{aligned}L_\Delta &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\left\| \overrightarrow{OP}_{\alpha} \right\|^2 - \left(\overrightarrow{OP}_{\alpha} \cdot \vec{e} \right)^2 \right) \dot{\varphi} \\&= \sum_{\alpha} m_{\alpha} d_{\alpha}^2 \dot{\varphi} \\&= I_{\Delta} \dot{\varphi}\end{aligned}$$

- Moment d'inertie du solide par rapport à Δ :

$$I_{\Delta} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} d_{\alpha}^2$$

Dynam. du solide plan à point fixe (3)

- Équation d'évolution de φ : projection sur \vec{e} de $d\vec{L}_O/dt = \vec{M}_O^{\text{ext}}$:

$$I_\Delta \ddot{\varphi} = M_\Delta^{\text{ext}},$$

avec

$$M_\Delta^{\text{ext}} = \vec{M}_O^{\text{ext}} \cdot \vec{e} = \sum_{\alpha} \left(\overrightarrow{OP}_\alpha \wedge \vec{F}_\alpha^{\text{ext}} \right) \cdot \vec{e}$$

moment résultant extérieur par rapport à l'axe Δ

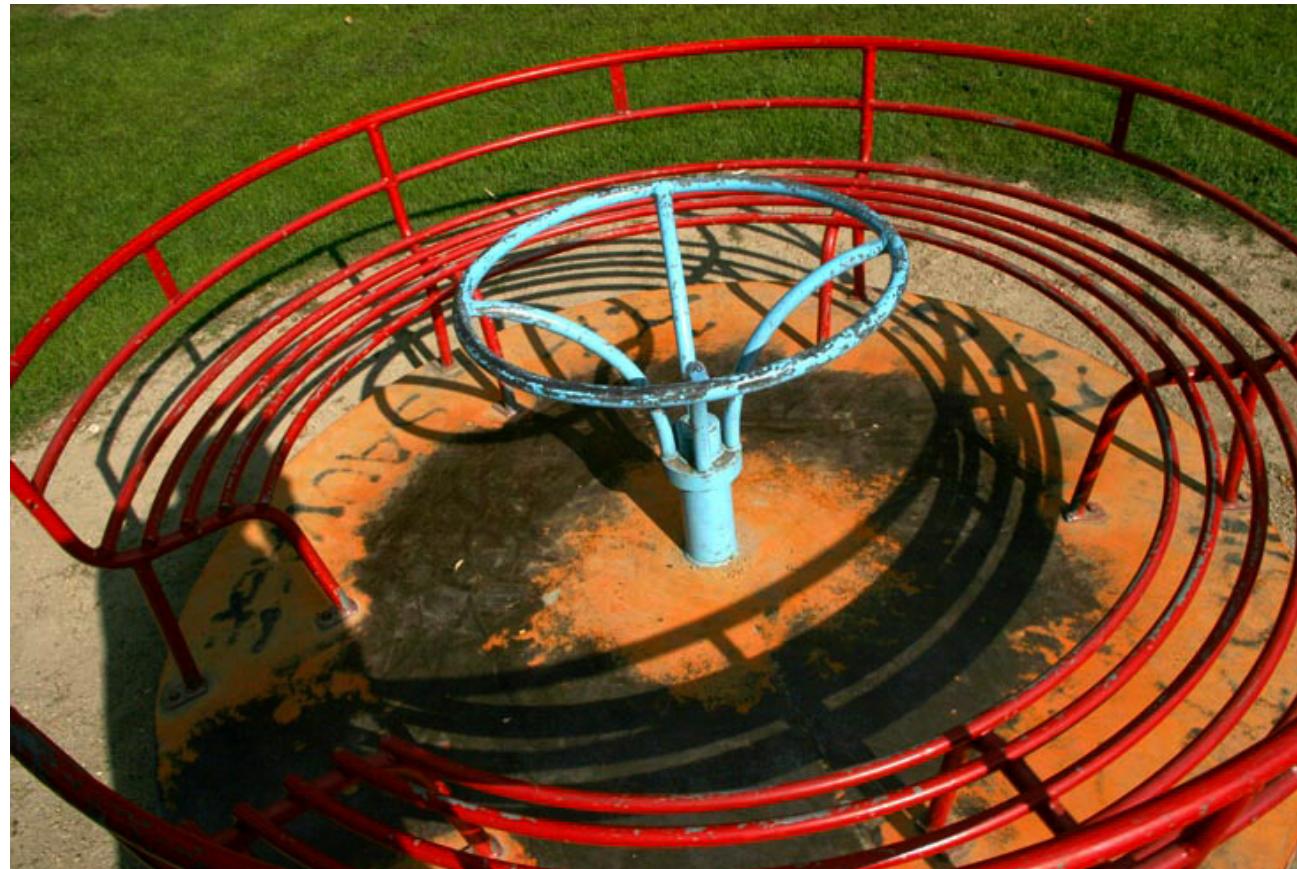
Dynam. du solide plan à point fixe (4)

$$I_{\Delta} \ddot{\varphi} = M_{\Delta}^{\text{ext}}$$

avec

$$M_{\Delta}^{\text{ext}} = \vec{M}_O^{\text{ext}} \cdot \vec{e} = \sum_{\alpha} \left(\overrightarrow{OP}_{\alpha} \wedge \vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}} \right) \cdot \vec{e}$$

$$I_{\Delta} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} d_{\alpha}^2$$



Dynam. du solide plan à point fixe (5)

- Équation d'évolution à partir de conservation de T
- Énergie cinétique :

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} v_{\alpha}^2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP}_{\alpha}) \cdot \vec{v}_{\alpha} = \frac{1}{2} \left(\sum_{\alpha} \overrightarrow{OP}_{\alpha} \wedge m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} \right) \cdot \vec{\omega} \\ &= \frac{1}{2} \vec{L}_0 \cdot \vec{\omega} = \frac{1}{2} \vec{L}_0 \cdot \dot{\varphi} \vec{e} = \frac{1}{2} L_{\Delta} \dot{\varphi} \\ &= \frac{1}{2} I_{\Delta} \dot{\varphi}^2. \end{aligned}$$

- Puissance résultante extérieure :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{\text{ext}} &= \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}} \cdot \vec{v}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}} \cdot (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP}_{\alpha}) = \vec{\omega} \cdot \sum_{\alpha} \overrightarrow{OP}_{\alpha} \wedge \vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}} = \vec{\omega} \cdot \vec{M}_O^{\text{ext}} \\ &= M_{\Delta}^{\text{ext}} \dot{\varphi}. \end{aligned}$$

Dynamique générale du solide plan

- Si le C de la cinématique du solide plan est le C. de M., son mouvement est déterminé par le théorème du C. de M.

$\implies (x_C, y_C)$ connus en résolvant

$$m \frac{d\vec{v}_C}{dt} = \vec{F}^{\text{ext}} = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}}.$$

équivalent à un problème de mécanique du point

- Variable d'orientation φ ?

\implies le C. de M. C est un point fixe du mouvement du solide dans S^* et les équations de conservation de \vec{L}^* et de T^* ont exactement la même forme que les équations de conservation de \vec{L}_O et de T !

\implies on peut directement appliquer ce qui précède !

Dynamique générale du solide plan (2)

- Équation d'évolution à partir de conservation de L^* :
- Moment cinétique

$$L^* = I_C \dot{\varphi}$$

- Moment d'inertie par rapport à l'axe $C + \vec{e}$

$$I_C = \sum_{\alpha} m_{\alpha} d_{\alpha}^2$$

- Projection sur \vec{e} de $d\vec{L}^*/dt = \vec{M}_C^{\text{ext}}$:

$$I_C \ddot{\varphi} = M_C^{\text{ext}}$$

avec $M_C^{\text{ext}} = \vec{M}_C^{\text{ext}} \cdot \vec{e} = \sum_{\alpha} \left(\overrightarrow{CP}_{\alpha} \wedge \vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}} \right) \cdot \vec{e}$: moment résultant extérieur par rapport à l'axe $C + \vec{e}$.

Dynamique générale du solide plan (3)

- Équation d'évolution à partir de conservation de T^* :
- Énergie cinétique :

$$T^* = \frac{1}{2} \vec{L}^* \cdot \vec{\omega} = \frac{1}{2} L^* \dot{\varphi} = \frac{1}{2} I_C \dot{\varphi}^2$$

- Puissance extérieure :

$$\mathcal{P}^{*\text{ext}} = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}} \cdot \vec{v}_{\alpha}^* = \vec{\omega} \cdot \vec{M}_C^{\text{ext}} = M_C^{\text{ext}} \dot{\varphi}$$

- Remarque : Le paramétrage par x_C, y_C, φ
 1. est un outil théorique qui nous a permis de montrer que les équations de conservation sont **suffisantes** pour étudier les mouvements des solides plans.
 2. peut aussi être utilisé dans certains problèmes pratiques, mais nous verrons des cas où il est plus simple de recourir à d'autres choix.

Chute libre du solide plan

- Cas d'un solide dans l'espace.
- Théorème du centre de masse :

$$m \frac{d\vec{v}_C}{dt} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{g} = m \vec{g},$$

\implies chute libre du point matériel

- Équation de conservation de \vec{L}^* pour évolution de l'orientation :

$$\frac{d\vec{L}^*}{dt} = \vec{M}_C^{\text{ext}} = \sum_{\alpha} \vec{CP}_{\alpha} \wedge m_{\alpha} \vec{g} = \left(\sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{CP}_{\alpha} \right) \wedge \vec{g} = 0.$$

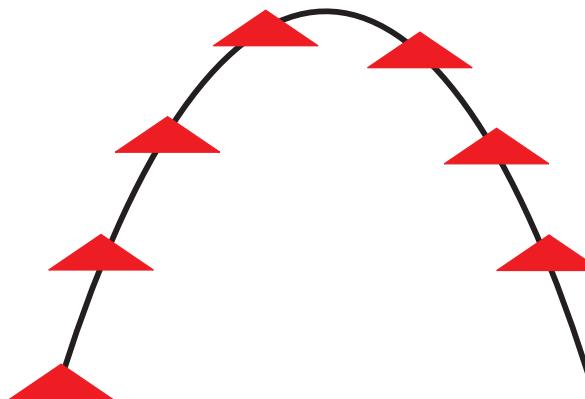
$\implies \vec{L}^*$ est une intégrale première

Chute libre du solide plan (2)

- **Restriction aux mouvements plans :**

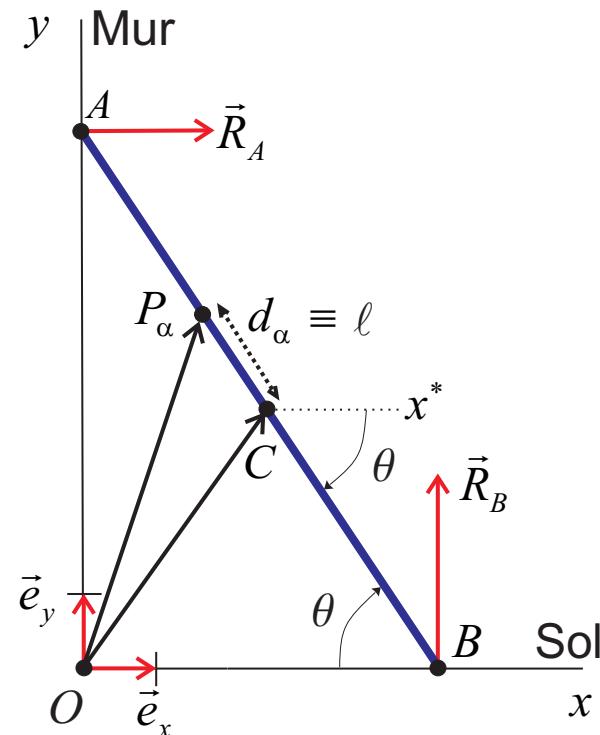
La projection $L^* = I_C \dot{\varphi}$ du moment cinétique sur le vecteur \vec{e} est constante, d'où :

$$\dot{\varphi} = \text{constante.}$$



- **NB.** Nous verrons que pour les rotations du solide *dans l'espace*, la *vitesse angulaire* n'est *pas constante* en général !

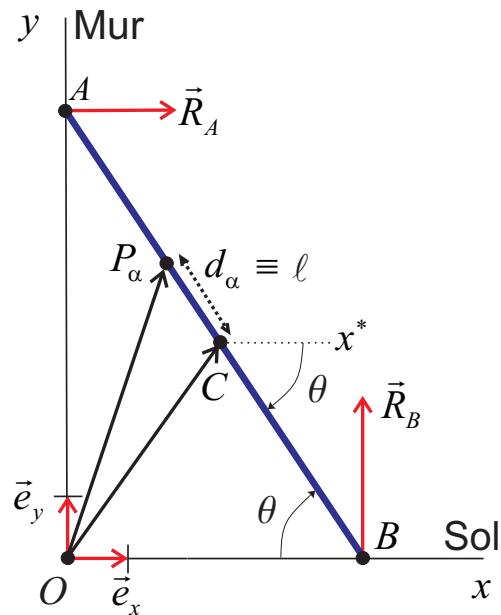
Le problème de l'échelle



- particules P_α : éléments de longueur infinitésimaux $d\ell$, dont la masse vaut $m_\alpha = m/L d\ell$
- liaisons (pas de frottement en A et B) :

$$\begin{aligned}x_A &= 0, \\y_B &= 0.\end{aligned}$$

Le problème de l'échelle (2)



- ddl : 1 \implies paramètre θ
- vitesse angulaire de la tige : $\vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{e} = -\dot{\theta}\vec{e}_z$
- forces :
 - ▶ internes $\vec{F}_{\alpha\beta}$
 - ▶ pesanteur $m_{\alpha}\vec{g}$
 - ▶ $\vec{R}_A = R_A\vec{e}_x$ et $\vec{R}_B = R_B\vec{e}_y$

Le problème de l'échelle (3)

- Équation d'évolution de θ à partir de loi de conservation de T .
- Koenig et $T^* = 1/2I_C\dot{\theta}^2$:

$$T = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}I_C\dot{\theta}^2.$$

- $\overrightarrow{OC} = \frac{L}{2}(\cos\theta, \sin\theta) \longrightarrow 1/2mv_C^2 = 1/8mL^2\dot{\theta}^2$
- moment d'inertie :

$$I_C = \sum_{\alpha} m_{\alpha} d_{\alpha}^2 = \sum \frac{m}{L} d\ell \ell^2 = \frac{m}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \ell^2 d\ell = \frac{1}{12}mL^2.$$

- énergie cinétique :

$$T = \frac{1}{6}mL^2\dot{\theta}^2.$$

Le problème de l'échelle (4)

- Les réactions \vec{R}_A et \vec{R}_B ne travaillent pas.
- La puissance résultante extérieure vaut :

$$\mathcal{P}^{\text{ext}} = m\vec{v}_C \cdot \vec{g} = -\frac{mgL}{2} \cos \theta \dot{\theta}.$$

- Équation de conservation de l'énergie $dT/dt = \mathcal{P}^{\text{ext}}$:

$$\ddot{\theta} = -\frac{3}{2} \frac{g}{L} \cos \theta.$$

- **NB.** C'est l'annulation de la puissance des forces de liaison qui permet d'obtenir de manière très efficace l'équation d'évolution de θ à partir de la loi de conservation de l'énergie cinétique écrite en termes des $\vec{F}_\alpha^{\text{ext}}$.

Le problème de l'échelle (5)

- Perte de contact avec le mur ? \implies Annulation de \vec{R}_A !
- Théorème du C. de M. :

$$m \frac{d\vec{v}_C}{dt} = m\vec{g} + \vec{R}_A + \vec{R}_B.$$

- Projection sur Ox : $m\ddot{x}_C = R_A$
- Comme $x_C = L/2 \cos \theta$ et $\ddot{x}_C = -L/2 (\cos \theta \dot{\theta}^2 + \sin \theta \ddot{\theta})$:

$$R_A = -\frac{mL}{2} (\cos \theta \dot{\theta}^2 + \sin \theta \ddot{\theta}).$$

- Exprimer dérivées de θ en fonction de θ .
- Dérivée seconde : équation d'évolution

$$\ddot{\theta} = -\frac{3}{2} \frac{g}{L} \cos \theta.$$

Le problème de l'échelle (6)

- Dérivée première : intégrale première.

Multiplier équation d'évolution $\ddot{\theta} = -\frac{3}{2} \frac{g}{L} \cos \theta$ par $\dot{\theta}$ et intégrer :

$$\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 = -\frac{3}{2} \frac{g}{L} \sin \theta + \text{constante}$$

- Constante déterminée pour que vitesse initiale nulle ($\dot{\theta}_0 = 0$) en θ_0 :

$$\dot{\theta}^2 = -3 \frac{g}{L} (\sin \theta - \sin \theta_0).$$

- Réaction normale $R_A = -\frac{mL}{2} (\cos \theta \dot{\theta}^2 + \sin \theta \ddot{\theta})$:

$$R_A = \frac{9}{4} mg \cos \theta \left(\sin \theta - \frac{2}{3} \sin \theta_0 \right).$$

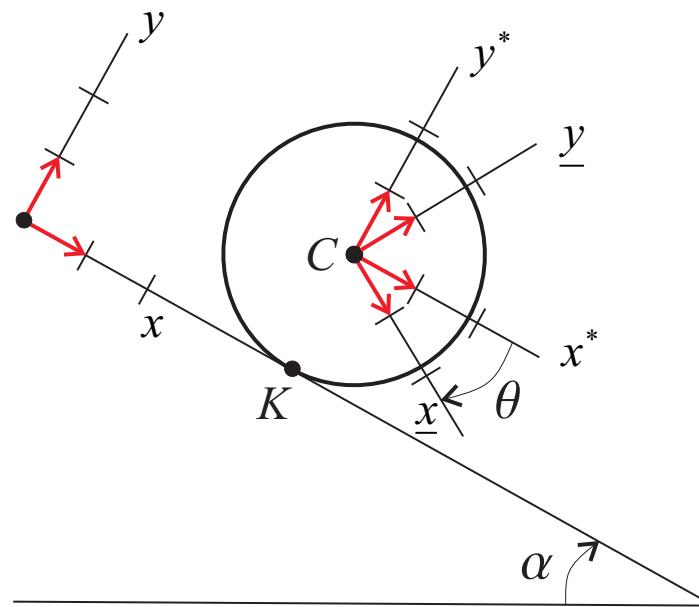
- Angle limite :

$$\sin \theta_\ell = \frac{2}{3} \sin \theta_0.$$

Pour $\theta_0 \rightarrow 90^\circ$, on a $\theta_\ell \approx 42^\circ$.

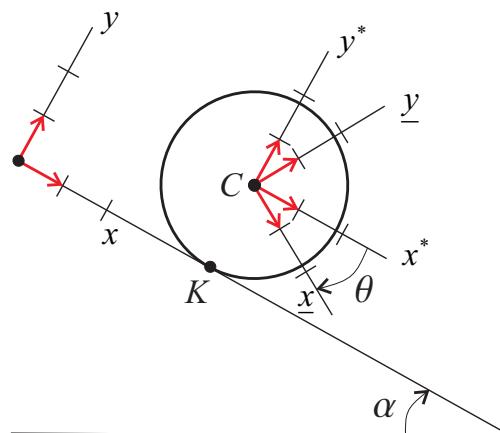
- **NB.** 2 ddl après perte de contact !

RSG sur un plan incliné



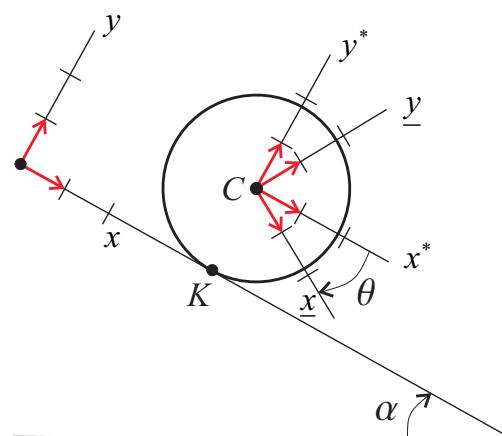
- Solide plan circulaire de masse m
- Répartition des masses à symétrie circulaire $\Rightarrow C$ est le C. de M.
- Vitesse angulaire : $\vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{e} = -\dot{\theta}\vec{e}_z$

RSG sur un plan incliné (2)



- RSG \Rightarrow contraintes au mouvement
- Plan incliné indéformable : $y_C = R$
- Pas de glissement :
$$\begin{aligned}\vec{v}_K &= \vec{v}_C + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CK} \\ &= \dot{x}_C \vec{e}_x - \dot{\theta} R \vec{e}_x \\ &= 0.\end{aligned}$$
$$\Rightarrow \dot{x}_C = R \dot{\theta} \text{ et } x_C = R\theta.$$
- 1 ddl \Rightarrow 1 variable : x_C .

RSG sur un plan incliné (3)



- Forces :

- ▶ $\vec{F}_{\alpha\beta}$
- ▶ $m\vec{g}$
- ▶ forces de liaison (inconnues) :

$$y_C = R \quad (y_K = 0) \implies \text{réaction normale en } K : \vec{N} = N\vec{e}_y$$

$$x_C = R\theta \quad (\vec{v}_K = 0) \implies \text{force de frottement statique en } K : \vec{T} = T\vec{e}_x$$

NB.

- Force de frottement statique a pour effet de **coupler** le mouvement de translation du centre de masse avec le mouvement de rotation du cercle autour de C
- Possible si les deux surfaces en contact ont une certaine “**rugosité**”, s'il existe une certaine “**adhérence**” des deux corps l'un sur l'autre.

RSG sur un plan incliné (4)

- Théorème du centre de masse :

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{T}.$$

- Projection sur y :

$$N = mg \cos \alpha.$$

- Projection sur x :

$$m\ddot{x}_C = mg \sin \alpha + T.$$

\implies **2** inconnues (x_C et T) !

RSG sur un plan incliné (5)

- Conservation du moment cinétique dans S^* :

$$I_C \ddot{\theta} = M_C^{\text{ext}}.$$

- Pour disque plein ou cerceau, on a :

$$I_C^{\text{disque}} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} d_{\alpha}^2 = \int_{\text{disque}} \frac{m}{S} dS r^2 = \int_0^R dr \int_0^{2\pi} r d\varphi \frac{m}{S} r^2 = \frac{1}{2} m R^2,$$

$$I_C^{\text{cerceau}} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} d_{\alpha}^2 = \int_{\text{cerceau}} \frac{m}{2\pi R} dl R^2 = m R^2.$$

- Moment résultant par rapport à C forces de pesanteur = 0
- Moment par rapport à C de réaction normale = 0
- Moment de \vec{T} différent de zéro !

$$I_C \ddot{\theta} = (\vec{CK} \wedge \vec{T}) \cdot \vec{e} = -R T.$$

$$T = -\frac{I_C}{R^2} \ddot{x}_c.$$

- Comme $x_C = R\theta$:

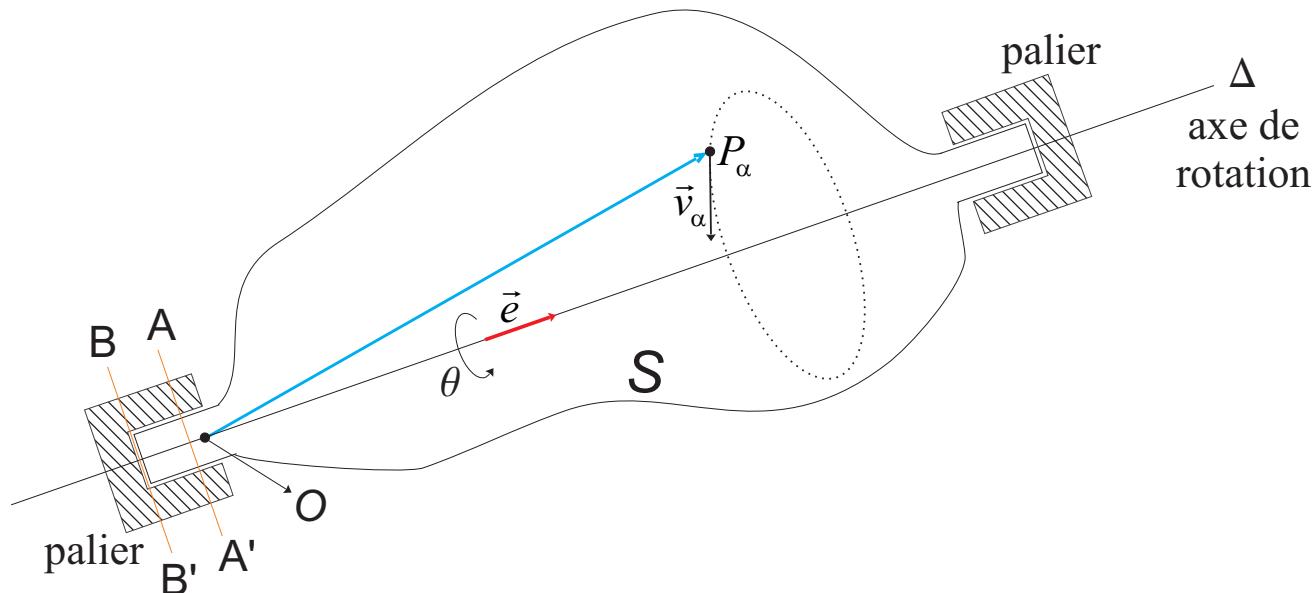
RSG sur un plan incliné (6)

- Équation d'évolution de x_C :

$$\ddot{x}_C = \frac{g \sin \alpha}{1 + \frac{I_C}{m R^2}}.$$

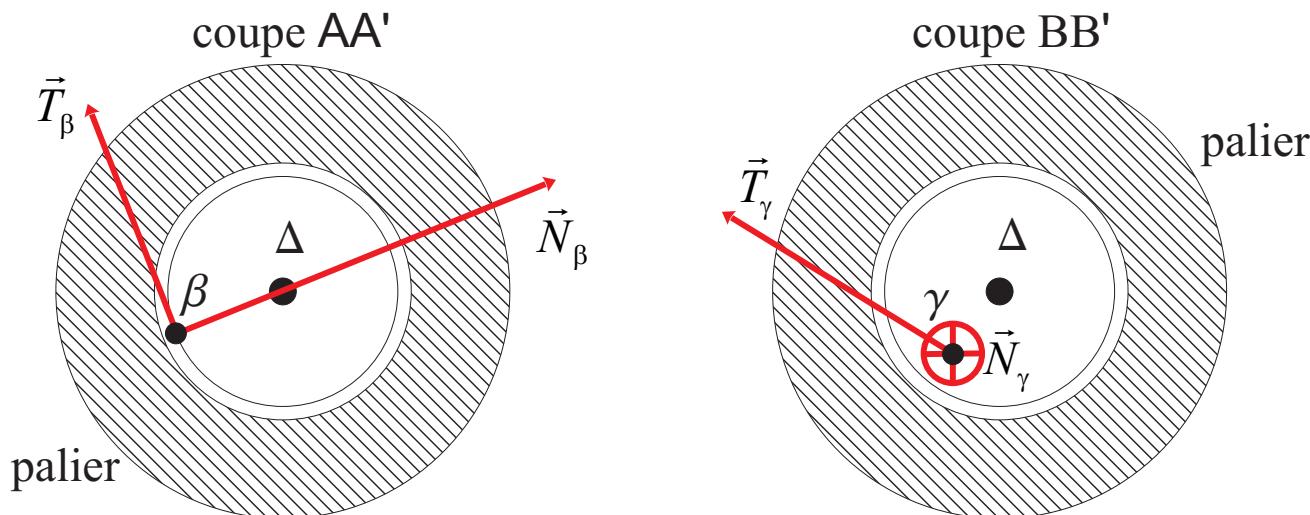
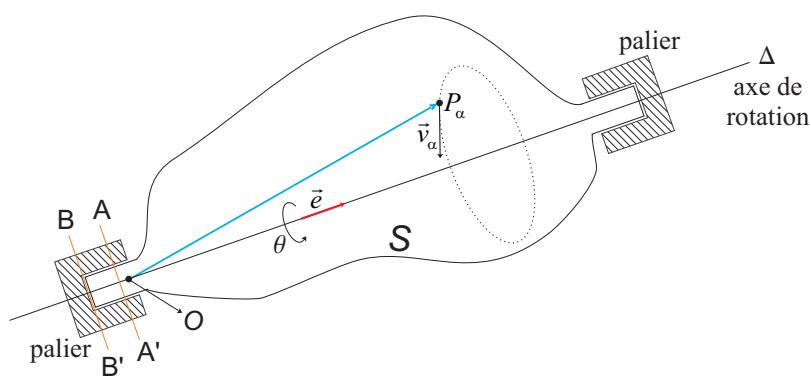
- Mouvement uniformément accéléré
- Accélération du mobile dépend de g , de l'ouverture α du plan incliné, du rapport $I_C/m R^2$.
 \Rightarrow Pour disque et cercle, $I_C/m R^2$ vaut respectivement $1/2$ et 1 (indépendant de la masse et de sa dimension (R) !)
 \Rightarrow disque plein plus rapide, quelles que soient les masses et dimensions !
- $I_C/m R^2$ ne dépend que de la manière dont la matière constituant le solide est *répartie* autour de l'axe de rotation. Indépendant de masse totale et dimension !
- Si $I_C \rightarrow 0$: mouvement d'un point matériel glissant sans frottement le long d'un plan incliné
- Essayer l'exercice à partir de l'équation de conservation de l'énergie cinétique T !

Solide possédant un axe fixe



- Solide maintenu par 2 paliers supposés fixes \Rightarrow mouvement plan
- Vitesse angulaire : $\vec{\omega} = \dot{\theta} \vec{e}$.
- Champ des vitesses : $\vec{v}_\alpha = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP_\alpha}$

Solide possédant un axe fixe (2)



- Forces de contact :
 - ▶ Forces de liaison (inconnues)
 - ▶ Forces de frottement

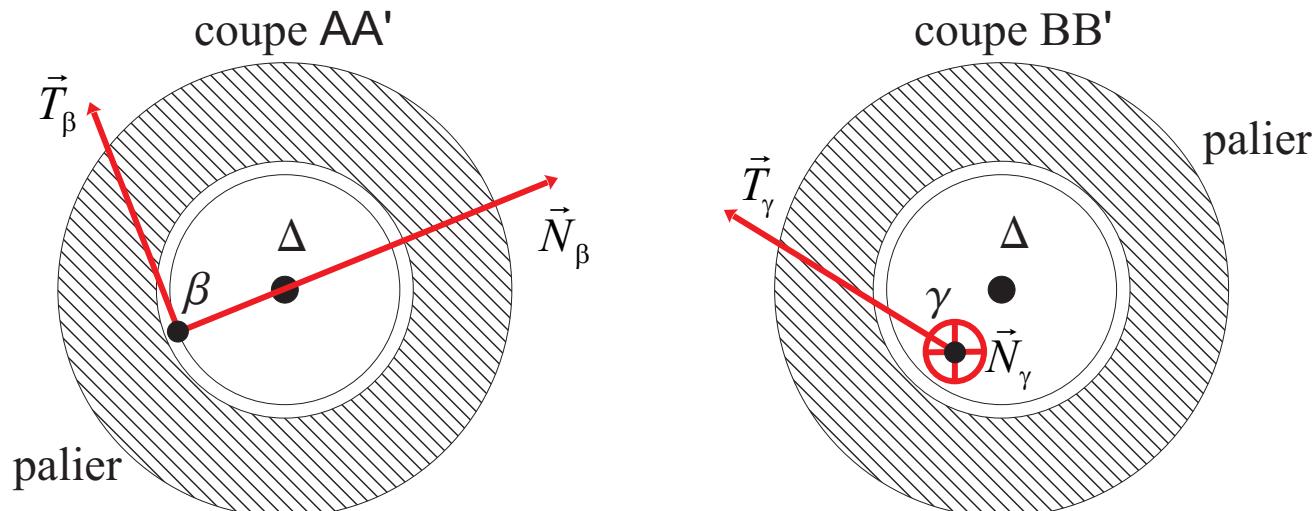
Solide possédant un axe fixe (3)

- Équation d'évolution de θ (*cf.* le solide plan à point fixe) :

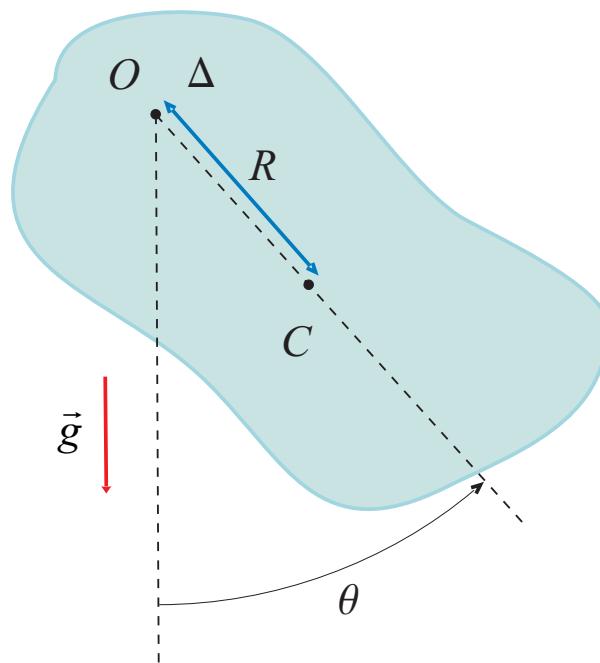
$$I_{\Delta} \ddot{\theta} = M_{\Delta}^{\text{ext}}$$

- Les forces de liaison n'interviennent pas !

\vec{N}_{β} passe par l'axe Δ et \vec{N}_{γ} lui est parallèle : leurs deux moments par rapport à cet axe sont donc nuls



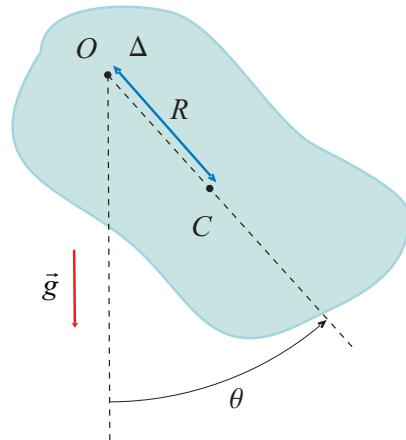
Le pendule composé



- Moment par rapport à Δ des forces de pesanteur (O est un point fixe quelconque de Δ et C est le C. de M.) :

$$M_{\Delta}^{\text{ext}} = \vec{M}_O^{\text{ext}} \cdot \vec{e} = \sum_{\alpha} \left(\overrightarrow{OP}_{\alpha} \wedge m_{\alpha} \vec{g} \right) \cdot \vec{e} = m \left(\overrightarrow{OC} \wedge \vec{g} \right) \cdot \vec{e},$$

Le pendule composé (2)



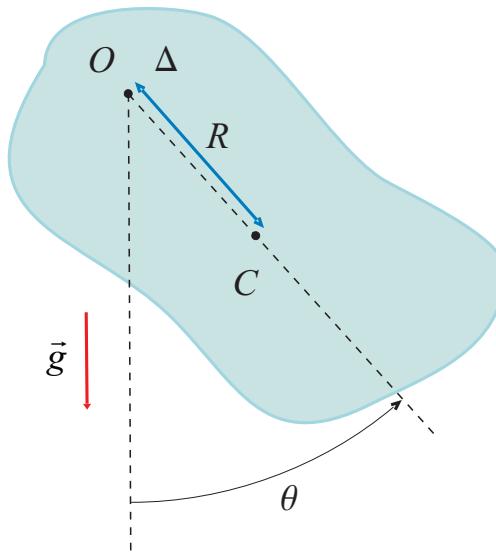
- Puisque C est apparu dans le calcul du moment, il est intéressant de mesurer θ comme indiqué dans la Figure.
- Moment des forces de pesanteur :

$$M_{\Delta}^{\text{ext}} = -m g R \sin \theta.$$

- Équation de mouvement :

$$\ddot{\theta} = -\frac{m g R}{I_{\Delta}} \sin \theta = -\frac{g}{R} \frac{m R^2}{I_{\Delta}} \sin \theta.$$

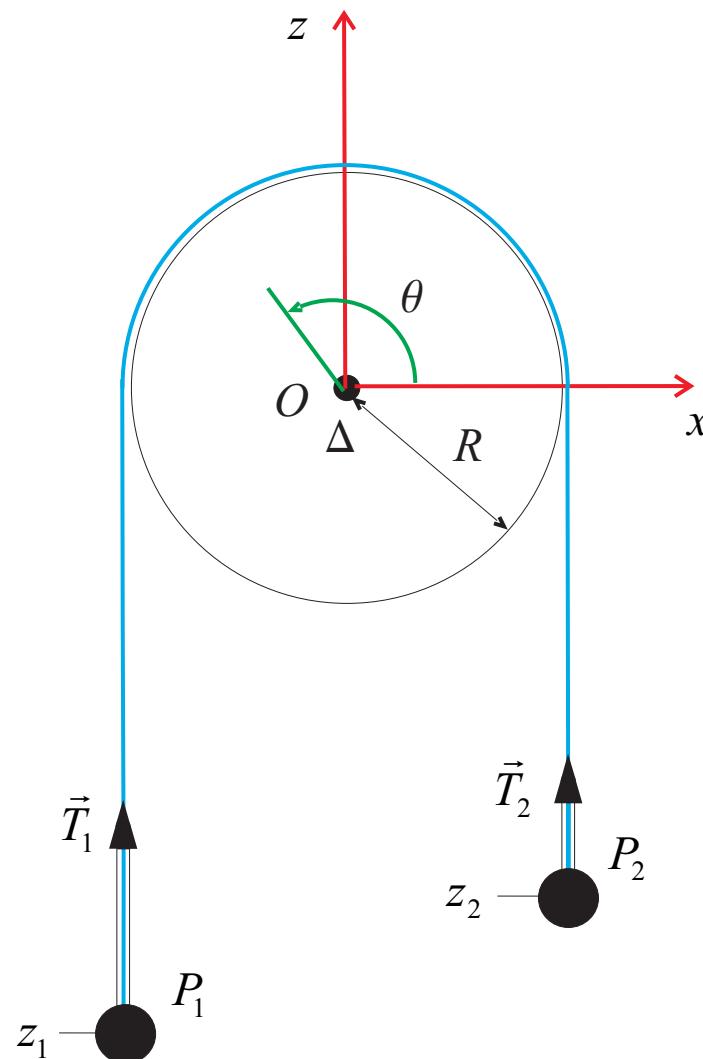
Le pendule composé (3)



$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{R} \frac{m R^2}{I_\Delta} \sin \theta.$$

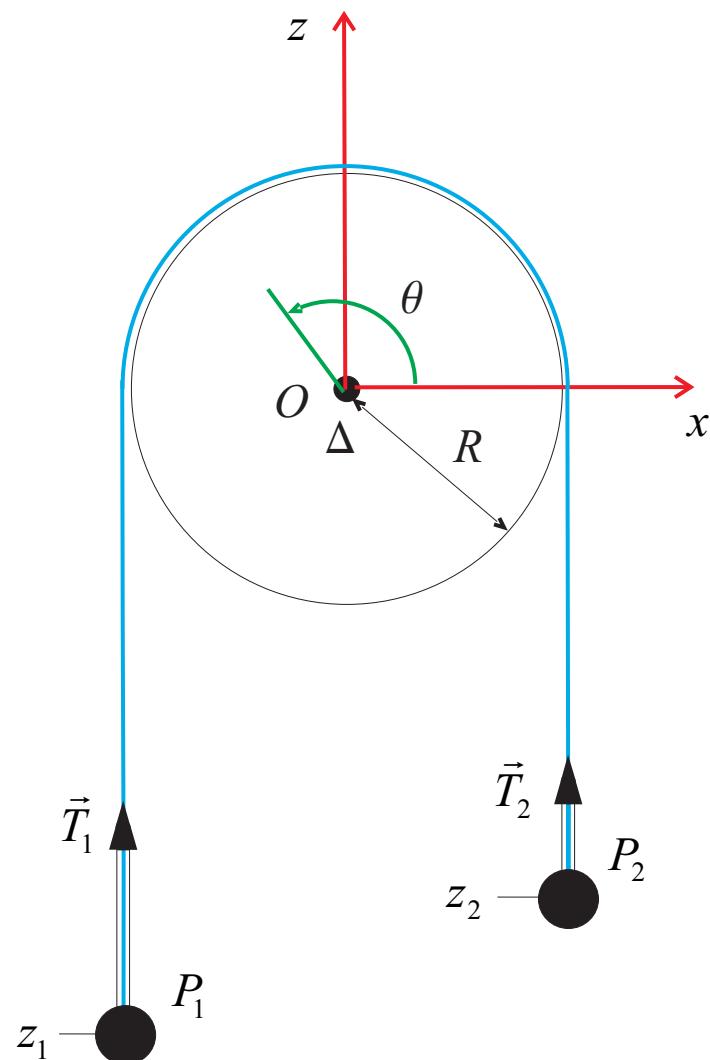
- Cf. pendule simple avec $\omega_0^2 \longrightarrow \frac{g}{R} \frac{m R^2}{I_\Delta}$.
- Pendule simple : cas limite pour ($I_\Delta \rightarrow m R^2$)
- Vérifier que $N_\theta = \vec{N} \cdot \vec{e}_\theta \neq 0$ ($N_\theta = 0$ pour le pendule simple).

La machine d'Atwood



- Symétrie circulaire de la répartition des masses de la poulie
- Fil inextensible de longueur ℓ
- Mouvements des masses purement verticaux
- Frottements de l'air négligés, frottements axe-poulie négligés
- Pas de glissement du fil
- **Pas un solide !**
 - ▶ Lois générales de conservation
- 1 ddl \implies 1 variable : ordonnée z_1 de P_1

La machine d'Atwood (2)



- Fil inextensible :

$$z_2 = -\ell_V - z_1$$

avec $\ell_V = \ell - \pi R$ la longueur (constante) des deux portions verticales du fil

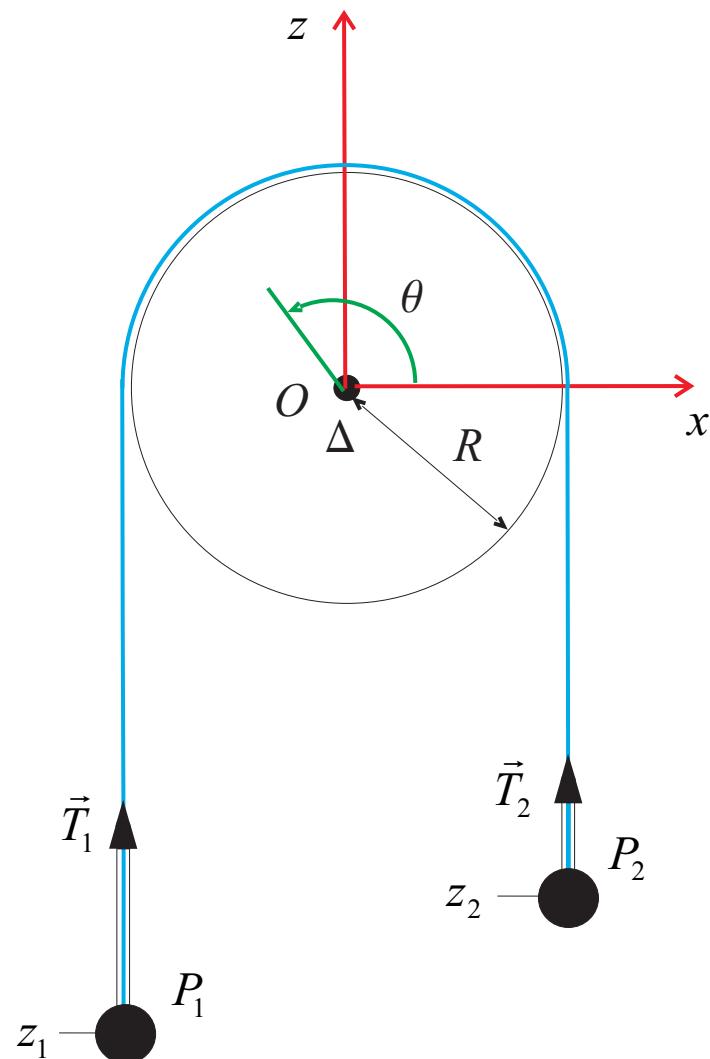
- Absence de glissement du fil sur la poulie :

$$z_1 = \text{constante} - R\theta$$

- Notations :

- ▶ α et β particules du fil
- ▶ μ et ν particules de la poulie

La machine d'Atwood (3)



• Forces

① Forces externes

- $m_1 \vec{g}$, $m_2 \vec{g}$
- $m_\alpha \vec{g} \approx 0$ (négligées)
- $m_\mu \vec{g}$
- \vec{N}_μ (forces de liaison sur l'axe "physique" de rotation de la poulie)

② Forces internes

- $\vec{F}_{\alpha\beta}$
- $\vec{F}_{\mu\nu}$
- $\vec{F}_{\alpha\mu}$ et $\vec{F}_{\mu\alpha}$
- \vec{T}_1 , force que le fil exerce sur P_1 (Voir Fig.), et $-\vec{T}_1$, force que P_1 exerce sur le fil
- \vec{T}_2 , force que le fil exerce sur P_2 (Voir Fig.), et $-\vec{T}_2$, force que P_2 exerce sur le fil

La machine d'Atwood (4)

- Loi d'évolution à partir de la conservation de \vec{L}_O projetée sur l'axe Δ de rotation de la poulie
- Moment cinétique du système par rapport à Δ :

$$L_\Delta = L_\Delta(\text{poulie}) + L_\Delta(P_1) + L_\Delta(P_2)$$

- Moment cinétique de la poulie :

$$L_\Delta(\text{poulie}) = I_\Delta \dot{\theta}.$$

- Moment cinétique de P_1 :

$$\vec{L}_O(P_1) = \overrightarrow{OP_1} \wedge m_1 \vec{v}_1 = m_1 R \dot{z}_1 \vec{e}_y,$$

$$L_\Delta(P_1) = \vec{L}_O(P_1) \cdot \vec{e} = -m_1 R \dot{z}_1.$$

- Moment cinétique de P_2 :

$$L_\Delta(P_2) = m_2 R \dot{z}_2.$$

- Moment cinétique du système par rapport à Δ :

$$L_\Delta = I_\Delta \dot{\theta} - m_1 \dot{z}_1 R + m_2 \dot{z}_2 R = - \left(m_1 + m_2 + M \frac{I_\Delta}{MR^2} \right) R \dot{z}_1,$$

(le facteur adimensionnel I_Δ / MR^2 décrit la répartition des masses de la poulie).

La machine d'Atwood (5)

- Moment des forces extérieures par rapport à Δ :

$$\begin{aligned}\vec{M}_O^{\text{ext}} &= \sum_{\mu} \overrightarrow{OP}_{\mu} \wedge m_{\mu} \vec{g} + \overrightarrow{OP}_1 \wedge m_1 \vec{g} + \overrightarrow{OP}_2 \wedge m_2 \vec{g} + \sum_{\mu} \overrightarrow{OP}_{\mu} \wedge \vec{N}_{\mu} \\ &= M \overrightarrow{OC} \wedge \vec{g} - m_1 R g \vec{e}_y + m_2 R g \vec{e}_y + \sum_{\mu} \overrightarrow{OP}_{\mu} \wedge \vec{N}_{\mu}.\end{aligned}$$

- Projection sur Δ :

$$M_{\Delta} = M \left(\overrightarrow{OC} \wedge \vec{g} \right) \cdot \vec{e} + (m_1 - m_2) R g + \sum_{\mu} \left(\overrightarrow{OP}_{\mu} \wedge \vec{N}_{\mu} \right) \cdot \vec{e}.$$

- Comme $\overrightarrow{OC} \parallel \vec{e}$ et puisque les forces de liaison ont un moment nul par rapport à Δ :

$$M_{\Delta} = (m_1 - m_2) R g.$$

La machine d'Atwood (6)

- Moment cinétique du système par rapport à Δ : $L_\Delta = - \left(m_1 + m_2 + M \frac{I_\Delta}{MR^2} \right) R \dot{z}_1$.
- Moment par rapport à Δ des forces extérieures : $M_\Delta = (m_1 - m_2) Rg$.
- Équation $dL_\Delta/dt = M_\Delta$:

$$\ddot{z}_1 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + M \frac{I_\Delta}{MR^2}} g.$$

- Mouvement uniformément accéléré pour P_1 si $m_1 \neq m_2$ (P_1 descend si $m_1 > m_2$)
- Mouvement est uniforme si $m_1 = m_2$
- Vu liaisons, mouvement uniformément accéléré pour P_2 également (si $m_1 \neq m_2$)
- Vu liaisons, rotation uniformément accélérée de la poulie (si $m_1 \neq m_2$)
- Si I_Δ négligeable, $\ddot{z}_1 = (m_2 - m_1)/(m_1 + m_2) g$.
- “Moteur” : différence entre les poids de P_1 et de P_2
- “Inertie totale” : masses de P_1 et de P_2 + contribution due au moment d'inertie

La machine d'Atwood (7)

- Équation d'évolution à partir de la loi de conservation de l'énergie ?
- Puissance des forces intérieures nulle, même si le système n'est pas un solide.
 - ▶ puissance $\vec{F}_{\mu\nu}$: la poulie est un solide
 - ▶ puissance des $\vec{F}_{\alpha\beta}$
 - hypothèse : force non nulle seulement si α et β se touchent (voisines le long du fil)
 - fil inextensible donc distance entre particules qui se touchent est constante
 - ⇒ puissance nulle pour toutes les paires de forces
 - ⇒ puissance totale nulle
 - ▶ puissance $\vec{F}_{\alpha\mu}$ et $\vec{F}_{\mu\alpha}$
 - hypothèse : force non nulle seulement si α et μ se touchent dans la gorge de la poulie
 - pas de glissement donc distance entre α et μ est constante
 - ⇒ puissance nulle pour toutes les paires de forces
 - ⇒ puissance totale nulle

La machine d'Atwood (8)

- Énergie cinétique ($\vec{v}_C = 0$) :

$$\begin{aligned} T &= T(\text{poulie}) + T(P_1) + T(P_2) \\ &= \frac{1}{2}Mv_C^2 + \frac{1}{2}I_\Delta\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_1\dot{z}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{z}_2^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + M\frac{I_\Delta}{MR^2}\right)\dot{z}_1^2. \end{aligned}$$

- Puissance des forces extérieures ($\vec{N}_\mu \perp \vec{v}_\mu$ et $\vec{v}_C = 0$) :

$$\mathcal{P}^{\text{ext}} = \sum m_\mu \vec{g} \cdot \vec{v}_\mu + \sum \vec{N}_\mu \cdot \vec{v}_\mu + m_1 \vec{g} \cdot \vec{v}_1 + m_2 \vec{g} \cdot \vec{v}_2 = (m_2 - m_1) g \dot{z}_1,$$

- **NB.** Conservation de l'énergie mécanique totale :

$$T + V^{\text{ext}} = \text{constante}, \tag{11}$$

avec $V^{\text{ext}} = m_1gz_1 + m_2gz_2$.

La machine d'Atwood (9)

- Résultante $\vec{R} = \sum \vec{N}_\mu$ des forces de liaison
- Loi de conservation de l'impulsion :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}} = \sum m_{\mu} \vec{g} + \sum \vec{N}_{\mu} + m_1 \vec{g} + m_2 \vec{g}.$$

- Résultante :

$$\vec{R} = \frac{d\vec{p}}{dt} - (M + m_1 + m_2) \vec{g}.$$

- Impulsion : $\vec{p} = M\vec{v}_C + m_1 \dot{z}_1 \vec{e}_z + m_2 \dot{z}_2 \vec{e}_z = (m_1 - m_2) \dot{z}_1 \vec{e}_z$
- En tenant compte de la loi d'évolution de z_1 :

$$\vec{R} = \left[(M + m_1 + m_2) g - \frac{(m_2 - m_1)^2 g}{m_1 + m_2 + M \frac{I_{\Delta}}{MR^2}} \right] \vec{e}_z.$$

Deuxième terme $[= (m_1 - m_2) \ddot{z}_1]$: allègement lié à l'accélération et dû au fait que le système est "en train de tomber" dans le champ de la pesanteur.

La machine d'Atwood (10)

- Tensions $\vec{T}_1 = T_1 \vec{e}_z$ et $\vec{T}_2 = T_2 \vec{e}_z$ dans le fil ?
- Équation de mouvement du *seul* point matériel P_1 projetée sur z :

$$m_1 \ddot{z}_1 = T_1 - m_1 g.$$

- En remplaçant \ddot{z}_1 par la valeur déduite de l'équation d'évolution de la machine d'Atwood :

$$T_1 = \frac{2m_2 + M \frac{I_\Delta}{MR^2}}{m_1 + m_2 + M \frac{I_\Delta}{MR^2}} m_1 g. \quad (12)$$

- De même :

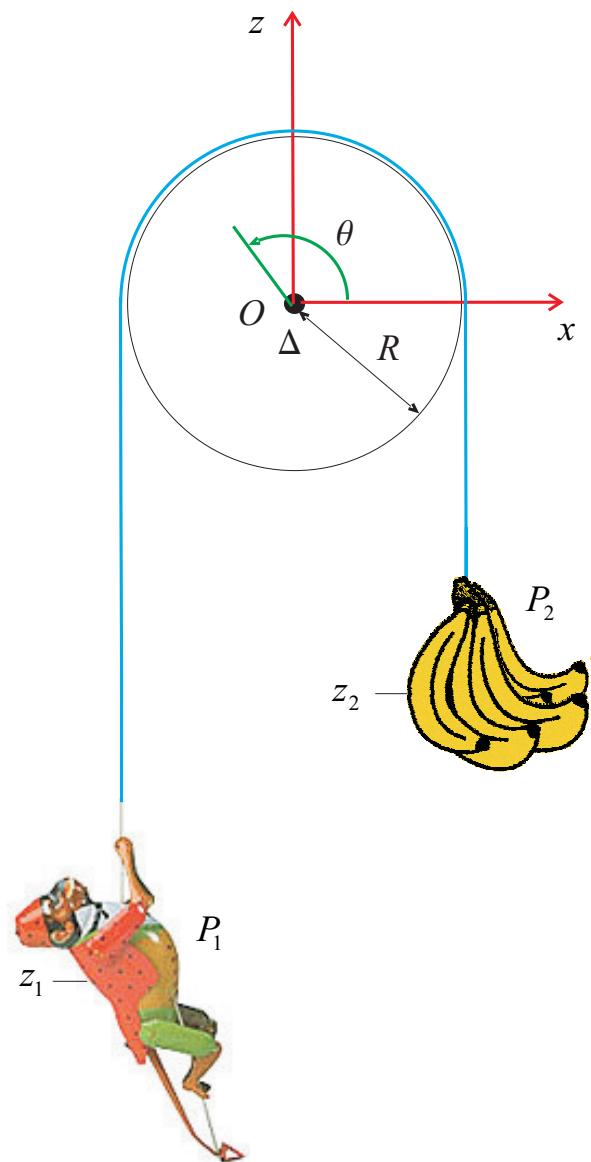
$$T_2 = \frac{2m_1 + M \frac{I_\Delta}{MR^2}}{m_1 + m_2 + M \frac{I_\Delta}{MR^2}} m_2 g. \quad (13)$$

- Si $m_1 = m_2$, le mouvement est uniforme et $T_1 = T_2 = m_1 g = m_2 g$.
- Si $m_1 > m_2$, alors $T_1 > T_2$: la tension est plus grande du côté de la masse la plus importante.

⇒ seule une partie de la tension existant à gauche est transmise à droite, car une partie de cette force "sert" à accélérer la poulie dans son mouvement de rotation

- Si $m_1 > m_2$, on a $T_1 < m_1 g$ et $T_2 < m_2 g$.
- Si I_Δ est négligeable, on a $T_1 = T_2 = 2m_1 m_2 g / (m_1 + m_2)$.

Le singe et les bananes



- P_1 : un singe de masse m_1
- P_2 : régime de bananes de masse m_2
- $m_1 = m_2$
- Grâce à la force de ses bras, le singe peut se déplacer verticalement
 \Rightarrow 2 ddl \Rightarrow 2 variables : z_1 et z_2 .
- Une liaison :

$$z_2 = R \theta + \text{constante.}$$

- Si le singe grimpe, les bananes montent aussi !

Le singe et les bananes (2)

- Écrivons la loi de conservation de L_Δ

- Moment cinétique :

$$L_\Delta = I_\Delta \dot{\theta} - m_1 R \dot{z}_1 + m_2 R \dot{z}_2 = -mR \left(\dot{z}_1 - \left(1 + \frac{I_\Delta}{MR^2} \frac{M}{m} \right) \dot{z}_2 \right).$$

- La force des bras est une force **interne** et comme $m_1 = m_2$:

$$M_\Delta = 0.$$

- Le moment cinétique L_Δ est conservé et vaut zéro à l'instant initial (singe et bananes au repos).
- Relation entre les vitesses :

$$\dot{z}_1 = \left(1 + \frac{I_\Delta}{MR^2} \frac{M}{m} \right) \dot{z}_2.$$

Vitesse du singe toujours plus grande (d'autant plus que I_Δ est grand).

Le singe et les bananes (3)

- Hauteur z^* de la jonction ?
- Si z_1^0 et z_2^0 désignent les positions initiales du singe et des bananes en $t = 0$

$$z_1(t) = z_1^0 + \int_0^t \dot{z}_1(t') dt',$$

$$z_2(t) = z_2^0 + \int_0^t \dot{z}_2(t') dt' = z_2^0 + \frac{1}{\left(1 + \frac{I_\Delta}{MR^2} \frac{M}{m}\right)} \int_0^t \dot{z}_1(t') dt'.$$

$$\implies z_1(t) - z_1^0 = \left(1 + \frac{I_\Delta}{MR^2} \frac{M}{m}\right) (z_2(t) - z_2^0)$$

- Jonction :

$$z^* = z_2^0 + \left(\frac{MR^2}{I_\Delta} \frac{m}{M}\right) (z_2^0 - z_1^0).$$

- ▶ z^* indépendant de la manière de grimper
- ▶ jonction d'autant plus proche du point de départ des bananes que I_Δ est grand

Le singe et les bananes (4)

Remarque 1

- Forces exercées par le singe sur le fil : forces **internes** (force – T_1)
➡ n'apparaissent pas car loi de conservation de \vec{L}_O .

Remarque 2

- Puissance forces intérieures $\neq 0$!
 - ▶ Action-réaction OK entre singe et fil
 - ▶ Mais vitesses singe et fil **differentes** !
- Énergie mécanique totale non conservée

Remarque 3

- Les fonctions $z_1(t)$ et $z_2(t)$ dépendent de la manière dont le singe se hisse sur le fil.

Remarque 4

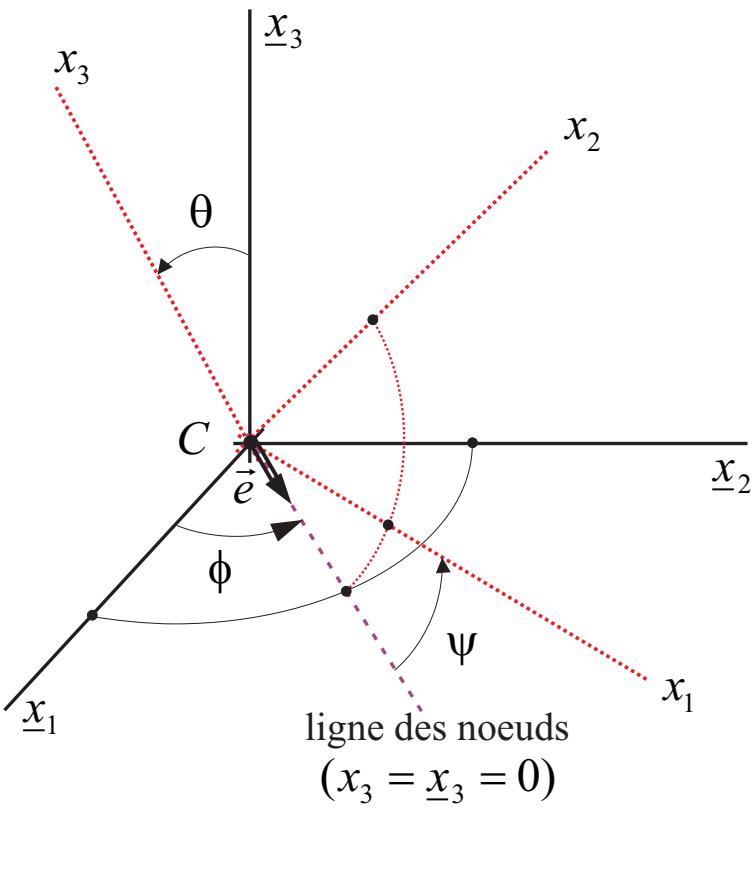
- Interprétation intuitive :

► Seule une **partie** de la force supplémentaire exercée par le singe en vue de grimper est transmise aux bananes
➡ Le singe monte plus vite.

Table des matières

- 4 Mécanique des solides
 - Solides en mouvement plan
 - Solides dans l'espace

Cinématique du solide dans l'espace



- 6 ddl \implies 6 paramètres.
- On peut choisir p. ex.
 - ▶ x_C, y_C, z_C (C quelconque en cinématique, mais souvent centre de masse en dynamique)
 - ▶ angles d'Euler
- Vitesse angulaire du solide par rapport à SR :

$$\vec{\omega} = \omega_i \vec{e}_i$$

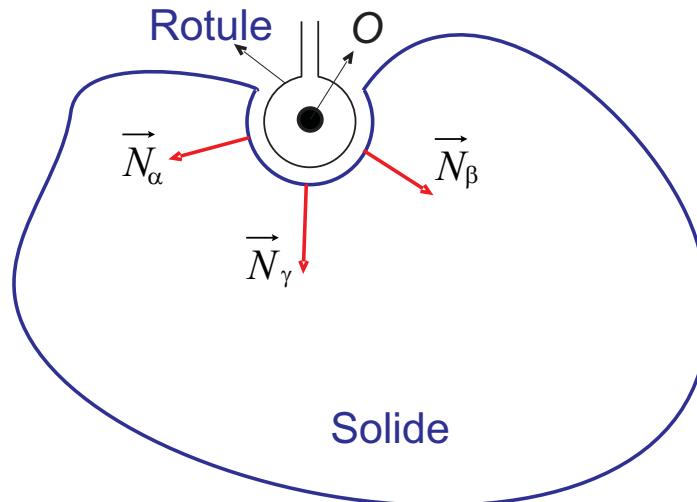
avec

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \omega_1 & = & \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \psi \sin \theta, \\ \omega_2 & = & -\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\phi} \cos \psi \sin \theta, \\ \omega_3 & = & \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta, \end{array} \right.$$

Mouvements généraux des solides

- Si C est le C. de M. : théorème du C. de M.!
 \implies Étude du mouvement de C équivalent à un problème de mécanique du point.
- Il faut encore prouver que les lois de conservation permettent d'étudier les rotations autour du C. de M.
- En fait, on va montrer que les équations d'évolution de \vec{L}_O et de T suffisent à étudier les mouvements d'un solide à point fixe
(Étudier les rotations d'un solide autour de son C. de M. revient à étudier les mouvements de ce solide dans S^* , avec C point fixe dans S^* .)
- Décomposition des mouvements en mouvements de C et variations des angles d'Euler :
 → outil théorique pour montrer que les équations de conservation sont suffisantes, mais peut aussi être utilisée en pratique dans certaines applications (cf. solide plan)

Le solide à point fixe



- “Laboratoire” : système de référence par rapport auquel on étudie les mouvements
- Si $\vec{\omega}$ = vitesse angulaire du solide par rapport au laboratoire :

$$\vec{v}_\alpha = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP}_\alpha = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP}_\alpha$$

- On a $\vec{v}_\alpha \cdot \vec{\omega} = 0$
 \Rightarrow il existe un AIR à chaque instant
 \Rightarrow mouvements du solide équivalent à évolution du vecteur $\vec{\omega}$

Opérateur et tenseur d'inertie

- Moment cinétique du solide par rapport au point fixe O :

$$\begin{aligned}\vec{L}_O &= \sum_{\alpha} \overrightarrow{OP}_{\alpha} \wedge m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} \\ &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \overrightarrow{OP}_{\alpha} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP}_{\alpha}) \\ &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\left\| \overrightarrow{OP}_{\alpha} \right\|^2 \vec{\omega} - (\overrightarrow{OP}_{\alpha} \cdot \vec{\omega}) \overrightarrow{OP}_{\alpha} \right).\end{aligned}$$

- Opérateur d'inertie du solide par rapport au point O :

$$\vec{J}_O = \vec{J}(\vec{\omega}),$$

avec :

$$\vec{J}(\vec{u}) = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\left\| \overrightarrow{OP}_{\alpha} \right\|^2 \vec{u} - (\overrightarrow{OP}_{\alpha} \cdot \vec{u}) \overrightarrow{OP}_{\alpha} \right)$$

Opérateur et tenseur d'inertie (2)

- Opérateur d'inertie du solide par rapport au point O :

$$\vec{J}(\vec{u}) = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\left\| \overrightarrow{OP}_{\alpha} \right\|^2 \vec{u} - (\overrightarrow{OP}_{\alpha} \cdot \vec{u}) \overrightarrow{OP}_{\alpha} \right)$$

- ▶ application linéaire sur les vecteurs
- ▶ dépend du point fixe O du solide, ainsi que de la répartition autour de ce point des masses constituant le solide
- Tenseur d'inertie du solide par rapport au point O :

$$I(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{J}(\vec{v}) = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\left\| \overrightarrow{OP}_{\alpha} \right\|^2 \vec{u} \cdot \vec{v} - (\overrightarrow{OP}_{\alpha} \cdot \vec{u}) (\overrightarrow{OP}_{\alpha} \cdot \vec{v}) \right).$$

- ▶ application bilinéaire sur les paires de vecteurs
- ▶ dépend du point fixe O du solide, ainsi que de la répartition autour de ce point des masses constituant le solide
- ▶ le tenseur est *symétrique* : $I(\vec{u}, \vec{v}) = I(\vec{v}, \vec{u})$.

Opérateur et tenseur d'inertie (3)

- Énergie cinétique et opérateur ou tenseur d'inertie :

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} v_{\alpha}^2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP}_{\alpha}) \cdot \vec{v}_{\alpha} = \frac{1}{2} \left(\sum_{\alpha} \overrightarrow{OP}_{\alpha} \wedge m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} \right) \cdot \vec{\omega},$$

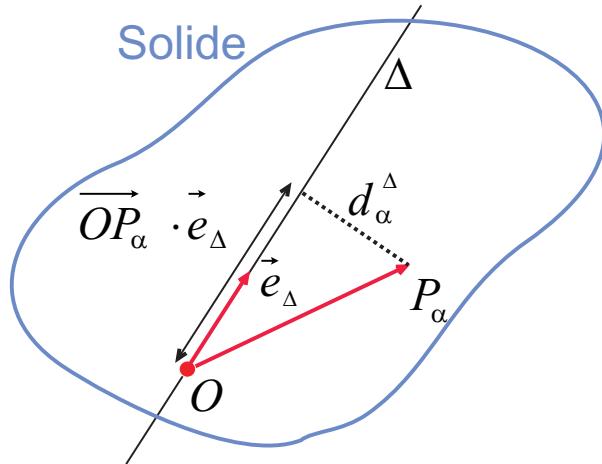
d'où

$$T = \frac{1}{2} \vec{L}_0 \cdot \vec{\omega}$$

ou encore :

$$T = \frac{1}{2} \vec{J}(\vec{\omega}) \cdot \vec{\omega} = \frac{1}{2} I(\vec{\omega}, \vec{\omega}).$$

Tenseur d'inertie et moment d'inertie



- Soit un axe quelconque $\Delta = O + \vec{e}_\Delta$
- On a :

$$I_\Delta = I(\vec{e}_\Delta, \vec{e}_\Delta).$$

En effet :

$$\begin{aligned} I(\vec{e}_\Delta, \vec{e}_\Delta) &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\left\| \overrightarrow{OP_{\alpha}} \right\|^2 \vec{e}_{\Delta} \cdot \vec{e}_{\Delta} - \left(\overrightarrow{OP_{\alpha}} \cdot \vec{e}_{\Delta} \right) \left(\overrightarrow{OP_{\alpha}} \cdot \vec{e}_{\Delta} \right) \right) \\ &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\left\| \overrightarrow{OP_{\alpha}} \right\|^2 - \left(\overrightarrow{OP_{\alpha}} \cdot \vec{e}_{\Delta} \right)^2 \right) \\ &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} d_{\alpha}^{\Delta 2}. \end{aligned}$$

\vec{L}_O , T , \vec{J} , I et AIR

- Si $\vec{e}_{\text{AIR}} = \text{vecteur unitaire de AIR}$, on a :

$$\vec{\omega} = \omega \vec{e}_{\text{AIR}}.$$

- Moment d'inertie par rapport à l'AIR :

$$I_{\text{AIR}} = I(\vec{e}_{\text{AIR}}, \vec{e}_{\text{AIR}}).$$

\vec{L}_O , T , \vec{J} , I et AIR

- Moment cinétique :

$$\vec{L}_O = \vec{J}(\vec{\omega}) = \omega \vec{J}(\vec{e}_{\text{AIR}}).$$

- Projection sur AIR du moment cinétique :

$$L_{\text{AIR}} = \vec{L}_O \cdot \vec{e}_{\text{AIR}} = \omega \vec{J}(\vec{e}_{\text{AIR}}) \cdot \vec{e}_{\text{AIR}} = \omega I(\vec{e}_{\text{AIR}}, \vec{e}_{\text{AIR}})$$

c-à-d

$$L_{\text{AIR}} = I_{\text{AIR}} \omega.$$

- Énergie cinétique :

$$T = \frac{1}{2} I(\vec{\omega}, \vec{\omega}) = \frac{1}{2} I(\vec{e}_{\text{AIR}}, \vec{e}_{\text{AIR}}) \omega^2$$

c-à-d

$$T = \frac{1}{2} I_{\text{AIR}} \omega^2.$$

Composantes d'un tenseur K

- Dans une base quelconque $\{\vec{E}_i\}$, les composantes d'un tenseur K sont définies par :

$$K_{ij} = K(\vec{E}_i, \vec{E}_j).$$

⇒ ces composantes peuvent être vues comme les éléments d'une matrice 3×3 .

- Évaluation du tenseur en termes des composantes :

$$K(\vec{u}, \vec{v}) = K(u_i \vec{E}_i, v_j \vec{E}_j) = u_i v_j K(\vec{E}_i, \vec{E}_j) = u_i v_j K_{ij}.$$

Loi tensorielle

- Passage de base $\{\vec{E}_i\}$ à base $\{\vec{E}'_j\}$ ($A_{ij} = \vec{E}_i \cdot \vec{E}'_j$, $\vec{E}_i = A_{ij} \vec{E}'_j$, $\vec{E}'_i = \tilde{A}_{ij} \vec{E}_j$) :

$$\begin{aligned} K'_{ij} &= K(\vec{E}'_i, \vec{E}'_j) \\ &= K(\tilde{A}_{ir} \vec{E}_r, \tilde{A}_{js} \vec{E}_s) \\ &= \tilde{A}_{ir} \tilde{A}_{js} K(\vec{E}_r, \vec{E}_s) \\ &= \tilde{A}_{ir} \tilde{A}_{js} K_{rs}. \end{aligned}$$

- Loi tensorielle d'ordre 2 :

$$K'_{ij} = \tilde{A}_{ir} \tilde{A}_{js} K_{rs}.$$

- Remarques :

- ▶ Généralisation de la loi vectorielle
- ▶ Peut aussi s'écrire :

$$K' = A^{-1} K A$$

⇒ Loi de transformation matricielle

Composantes du tenseur d'inertie

- Composantes de I :

$$I_{ij} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\left| \left(\left\| \overrightarrow{OP}_{\alpha} \right\|^2 \delta_{ij} - \overrightarrow{OP}_{\alpha} \right|_i \overrightarrow{OP}_{\alpha} \right|_j \right).$$

\implies matrice symétrique car tenseur symétrique.

- Si la base $\{\vec{E}_i\}$ est fixe par rapport au solide, les composantes sont constantes par rapport au temps.
- Si la base $\{\vec{E}_i\}$ est attachée au laboratoire, les composantes varient (leurs variations reflètent les mouvements du solide).
- Les éléments diagonaux sont les moments d'inertie par rapport aux vecteurs de base : $I(\vec{e}_i, \vec{e}_i) = I_{ii}$ (sans somme sur i !)
- Composantes I_{ij} et opérateur \vec{J} :

$$[\vec{J}(\vec{u})]_i = \vec{E}_i \cdot \vec{J}(\vec{u}) = I(\vec{E}_i, \vec{u}) = u_j I(\vec{E}_i, \vec{E}_j) = I_{ij} u_j$$

$\implies I_{ij}$ est la matrice qui représente l'application \vec{J} dans la base $\{\vec{E}_i\}$.

- Moment cinétique et énergie cinétique :

$$L_{O,i} = I_{ij} \omega_j,$$

$$T = \frac{1}{2} I_{ij} \omega_i \omega_j.$$

- **Algèbre** :

Toute matrice réelle et symétrique peut être diagonalisée par une matrice orthogonale

- Loi tensorielle \Rightarrow il existe une base dans laquelle les composantes de I sont diagonales

- ▶ **API** : fixes par rapport au solide, notés x_i ou \vec{e}_i
 - ▶ **MPI** : I_1, I_2 et I_3 (moments d'inertie par rapport aux API : $I(\vec{e}_i, \vec{e}_i) = I_{ii}$ (sans somme sur i !))

- Si $I_1 = I_2 = I_3$, tous les axes passant par O sont des API

Exemples :

- ▶ corps à sym. sphérique en rotation autour de son C. de M.
 - ▶ cube homogène en rotation autour de son C. de M.

- Si $I_1 = I_2 \neq I_3$, l'API $O + \vec{e}_3$ est unique et tous les axes du plan $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ sont des API associés à $I_1 = I_2$

Exemples : corps à symétrie cylindrique en rotation autour de leur C. de M.

- ▶ corps allongé si $I_1 > I_3$ (ballon de rugby)
 - ▶ corps aplati si $I_1 < I_3$ (la Terre)

- Si $I_1 \neq I_2 \neq I_3 \neq I_1$, les trois API sont uniques

Exemples :

- ▶ livre, parallélépipède en rotation autour de leur C. de M.

API et MPI (2)

- Notons $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ les composantes $\vec{\omega}$ dans les API

$$\vec{\omega} = \omega_i \vec{e}_i$$

- Les composantes de \vec{L}_O sont alors $(I_i \omega_i) = (I_1 \omega_1, I_2 \omega_2, I_3 \omega_3)$:

$$\vec{L}_O = I_1 \omega_1 \vec{e}_1 + I_2 \omega_2 \vec{e}_2 + I_3 \omega_3 \vec{e}_3 = I_i \omega_i \vec{e}_i.$$

(NB. somme si **3** indices répétés !)

⇒ Conséquence intéressante :

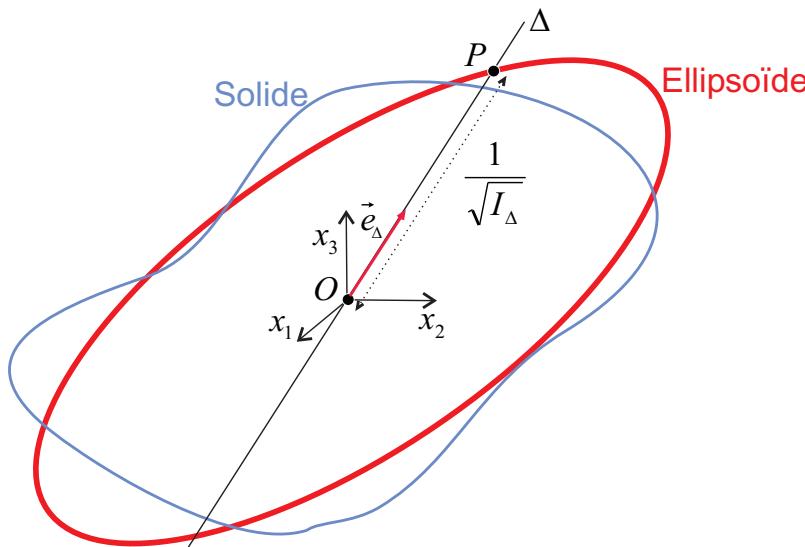
$\vec{L}_O \parallel \vec{\omega}$ ssi rotation autour d'un API

- Énergie cinétique :

$$T = \frac{1}{2} (I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2) = \frac{1}{2} I_i \omega_i^2.$$

(NB. somme si **3** indices répétés !)

Ellipsoïde d'inertie

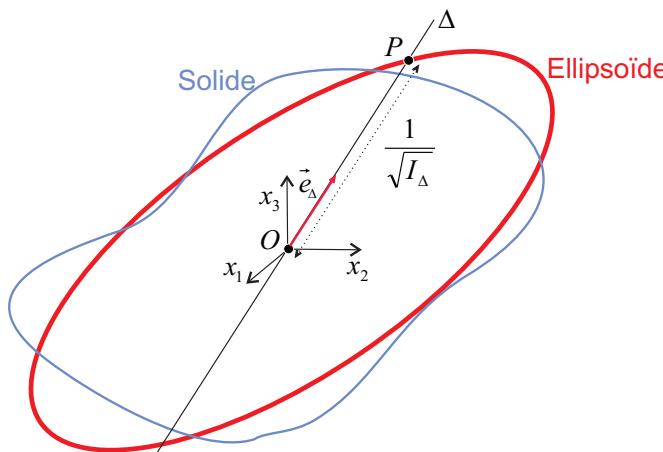


- Visualisation de la notion de moment d'inertie
- Lieu des points P tels que

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{\sqrt{I_\Delta}} \vec{e}_\Delta,$$

où l'axe $\Delta = O + \vec{e}_\Delta$ passe par le point P

Ellipsoïde d'inertie (2)



- Dans axes quelconques centrés en O , soient x_k les coordonnées de P et a_k les composantes de \vec{e}_Δ . L'équation paramétrique du lieu est :

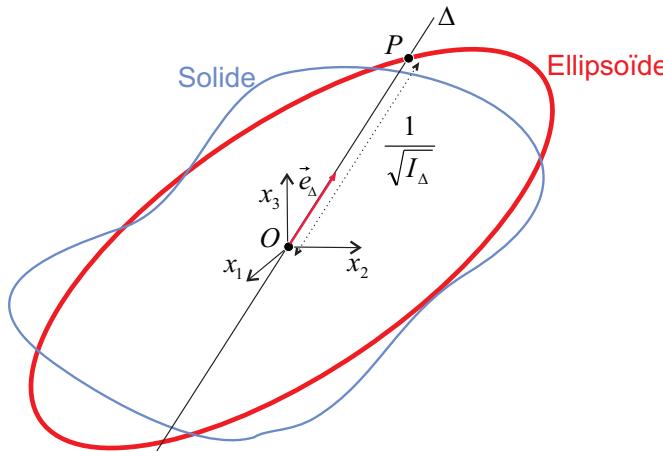
$$x_k = \frac{a_k}{\sqrt{I_{ij} a_i a_j}},$$

où les a_k sont les paramètres.

- Calculons $I_{k\ell} x_k x_\ell$. Il vient :

$$I_{ij} x_i x_j = 1.$$

Ellipsoïde d'inertie (3)



- Dans API, l'équation s'écrit :

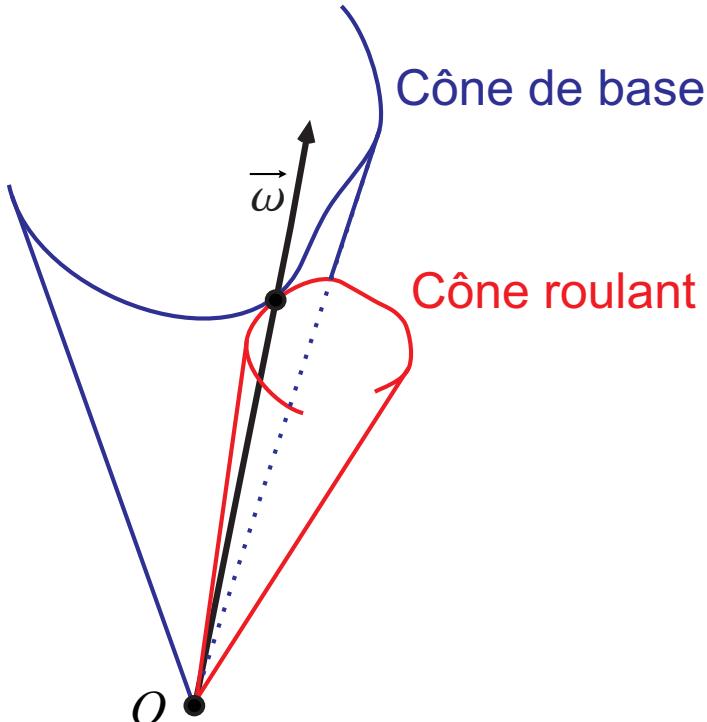
$$I_1 x_1^2 + I_2 x_2^2 + I_3 x_3^2 = 1$$

ellipsoïde d'inertie du solide par rapport au point O

- Ellipsoïde fixe par rapport au solide

- ▶ Si 3 MPI égaux : sphère
- ▶ Si 2 MPI égaux : ellipsoïde de révolution
(allongé ou aplati selon que le solide est allongé ou aplati).

Cône de base et cône roulant



- Visualisation variations du vecteur $\vec{\omega}$ (généralisation des notions de base et de roulante rencontrées pour solide en mouvement plan)
 - ▶ Variation par rapport au labo : **cône de base**
(fixe par rapport au labo)
 - ▶ Variation par rapport au solide : **cône roulant**
(fixe par rapport au solide)
- arête commune = AIR
⇒ le **CR roule sans glisser** sur le **CB**

Dynamique et équations d'Euler

- Équations d'évolution de $\vec{\omega}$ à partir de $d\vec{L}_O/dt = \vec{M}_O^{\text{ext}}$.

- Transportons l'équation $d\vec{L}_O/dt = \vec{M}_O^{\text{ext}}$ dans les API

- Poisson :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \left(\frac{d\vec{L}_O}{dt} \right)_{\text{Labo}} = \left(\frac{d\vec{L}_O}{dt} \right)_{\text{API}} + \vec{\omega} \wedge \vec{L}_O.$$

- Composantes de la dérivée par rapport à API :

$$\left(\frac{d\vec{L}_O}{dt} \right)_{\text{API}} = I_i \dot{\omega}_i \vec{e}_i,$$

- Composantes du produit vectoriel :

$$(- (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3, - (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1, - (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2)$$

- Équations d'Euler :

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_1 = (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 + M_{O,1}^{\text{ext}}, \\ I_2 \dot{\omega}_2 = (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 + M_{O,2}^{\text{ext}}, \\ I_3 \dot{\omega}_3 = (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 + M_{O,3}^{\text{ext}}. \end{cases}$$

Dynamique et équations d'Euler (2)

- Équations d'Euler :

$$\begin{cases} I_1\dot{\omega}_1 = (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 + M_{O,1}^{\text{ext}}, \\ I_2\dot{\omega}_2 = (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 + M_{O,2}^{\text{ext}}, \\ I_3\dot{\omega}_3 = (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 + M_{O,3}^{\text{ext}}. \end{cases}$$

- On en déduit des équations pour les angles d'Euler.

⇒ les équations de conservation sont *suffisantes* pour étudier les mouvements des solides

- Remarques

- ▶ Équations non linéaires
- ▶ Les éventuelles forces de liaison au contact avec la rotule n'interviennent pas

- Au besoin, on peut aussi utiliser l'**équation d'évolution de T** (parfois, c'est plus facile) :

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}} \cdot \vec{v}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}} \cdot (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP}_{\alpha}) = \vec{\omega} \cdot \sum_{\alpha} \overrightarrow{OP}_{\alpha} \wedge \vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}} = \vec{\omega} \cdot \vec{M}_O^{\text{ext}}.$$

et donc :

$$\frac{dT}{dt} = \vec{\omega} \cdot \vec{M}_O^{\text{ext}}.$$

Remarque

- **Parallélisme** étroit entre **translations d'un point matériel** et les **rotations dans le plan ou dans l'espace d'un solide autour d'un point fixe**.

Translations d'un point matériel	Rotations d'un solide plan autour d'un pt. fixe	Rotations dans l'espace d'un solide possédant un point fixe
m	I_Δ	$\vec{J}(\cdot)$ ou $I(\cdot, \cdot)$
\vec{v}	$\dot{\theta}$	$\vec{\omega}$
$\vec{p} = m\vec{v}$ $p_i = mv_i$	$L_\Delta = I_\Delta \dot{\theta}$	$\vec{L}_O = \vec{J}(\vec{\omega})$ $L_{O,i} = I_{ij}\omega_j = I_i\omega_i _{API}$ $L_{AIR} = I_{AIR}\omega$

Remarque (2)

Translations d'un point matériel	Rotations d'un solide plan autour d'un pt. fixe	Rotations dans l'espace d'un solide possédant un point fixe
$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$	$\frac{dL_\Delta}{dt} = M_\Delta^{\text{ext}}$	$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O^{\text{ext}}$
$T = \frac{1}{2} \vec{p} \cdot \vec{v}$ $T = \frac{1}{2} mv^2$	$T = \frac{1}{2} L_\Delta \dot{\theta}$ $T = \frac{1}{2} I_\Delta \dot{\theta}^2$	$T = \frac{1}{2} \vec{L}_O \cdot \vec{\omega}$ $T = \frac{1}{2} \vec{J}(\vec{\omega}) \cdot \vec{\omega} = \frac{1}{2} I(\vec{\omega}, \vec{\omega})$ $= \frac{1}{2} I_{ij} \omega_i \omega_j = \frac{1}{2} I_i \omega_i^2 \Big _{\text{API}}$ $= \frac{1}{2} I_{\text{AIR}} \omega^2$
$\frac{dT}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$	$\frac{dT}{dt} = M_\Delta^{\text{ext}} \dot{\theta}$	$\frac{dT}{dt} = \vec{M}_O^{\text{ext}} \cdot \vec{\omega}$

Le problème d'Euler-Poinsot

- Rotations “libres” d'un solide à point fixe : $\vec{M}_O^{\text{ext}} = 0$

Exemples :

- ▶ Si pas de forces (sauf éventuelles forces de liaison à la rotule).
- ▶ Rotations d'un solide en chute libre autour de son centre de masse (on sait déjà que le C. de M. décrit un mouvement parabolique uniformément accéléré vers le bas).

- Conservation du moment cinétique et de l'énergie cinétique :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O^{\text{ext}} = 0 \implies \vec{L}_O = \text{constante},$$

$$\frac{dT}{dt} = \vec{M}_O^{\text{ext}} \cdot \vec{\omega} = 0 \implies T = \text{constante}.$$

- Équations d'Euler :

$$\begin{cases} I_1\dot{\omega}_1 = (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3, \\ I_2\dot{\omega}_2 = (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1, \\ I_3\dot{\omega}_3 = (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2. \end{cases}$$

E-P pour solide à sym. sphérique

- Équations d'Euler :

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_1 = (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3, \\ I_2 \dot{\omega}_2 = (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1, \\ I_3 \dot{\omega}_3 = (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2. \end{cases}$$

- Si $I_1 = I_2 = I_3$,

$$\omega_i = \text{constante}$$

$\implies \vec{\omega}$ constant dans le solide et dans le labo



les rotations libres sont des
rotations permanentes
autour d'un axe passant par le point fixe (API).

E-P pour solide à sym. cylindrique

- Équations d'Euler :

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_1 = (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3, \\ I_2 \dot{\omega}_2 = (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1, \\ I_3 \dot{\omega}_3 = (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2. \end{cases}$$

- Si $I_1 = I_2 \neq I_3$,

$$\omega_3 = \text{constante.}$$

- D'où les deux 1ères éq. d'Euler :

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 + \Omega \omega_2 = 0, \\ \dot{\omega}_2 - \Omega \omega_1 = 0, \end{cases}$$

avec

$$\Omega = \frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_3 = \text{constante.}$$

E-P pour solide à sym. cylindrique (2)

1. Rotations permanentes ?

- Deux 1ères éq. d'Euler ($\Omega = \frac{l_3 - l_1}{l_1} \omega_3$) :

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 + \Omega\omega_2 = 0, \\ \dot{\omega}_2 - \Omega\omega_1 = 0, \end{cases}$$

- Si $\omega_3 = \text{constante} = 0$, les rotations permanentes sont données par :

$$(\omega_1 = \text{constante}, \omega_2 = \text{constante}, \omega_3 = 0)$$

- Si $\omega_3 = \text{constante} \neq 0$, les rotations permanentes sont données par :

$$(\omega_1 = 0, \omega_2 = 0, \omega_3 = \text{constante} \neq 0)$$



les rotations permanentes sont des rotations autour des API.
(stable autour de API₃, instable autour de API₁ ou API₂)

E-P pour solide à sym. cylindrique (3)

2. Autres solutions

- Calculons $\omega_1 \times (\dot{\omega}_1 + \Omega\omega_2 = 0) + \omega_2 \times (\dot{\omega}_2 - \Omega\omega_1 = 0)$. On en déduit :

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = \text{constante}$$

- Comme ω_3 est constant :

$$\omega = \text{constante.}$$

- Soit α l'angle entre $\vec{\omega}$ et Ox_3 . Comme $\omega_3 = \vec{\omega} \cdot \vec{e}_3 = \omega \cos \alpha$:

$$\alpha = \text{constante.}$$

(α aigu si Ox_3 bien choisi.)



cône roulant est un
cône circulaire droit autour de Ox_3 ,
d'ouverture inférieure à 90°

E-P pour solide à sym. cylindrique (4)

- \vec{L}_O constant \implies on peut choisir $O\underline{x}_3$ parallèle et de même sens que \vec{L}_O
- Comme $T = 1/2 \vec{L}_O \cdot \vec{\omega}$ est constant et positif,
l'angle $\underline{\alpha}$ formé par $\vec{\omega}$ et \vec{L}_O (ou $O\underline{x}_3$) est constant et aigu.



cône de base est un
cône circulaire droit autour de \vec{L}_O (ou $O\underline{x}_3$),
d'ouverture inférieure à 90°

E-P pour solide à sym. cylindrique (5)

- CB et CR circulaires et tangents l'un à l'autre
⇒ les trois axes Ox_3 , $O\underline{x}_3$ et $O + \vec{\omega}$ se trouvent dans un même plan
⇒ 3 possibilités :

\underline{x}_3 ou \vec{L}_O

$\vec{\omega}$

α

α

θ

α

α

α

α

(a)

x_3

x_3

$\vec{\omega}$

α

θ

α

α

\underline{x}_3 ou \vec{L}_O

α

α

α

α

α

(b)

\underline{x}_3 ou \vec{L}_O

$\vec{\omega}$

α

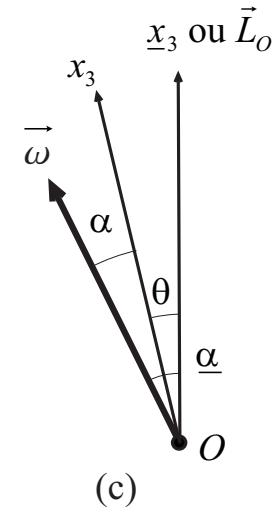
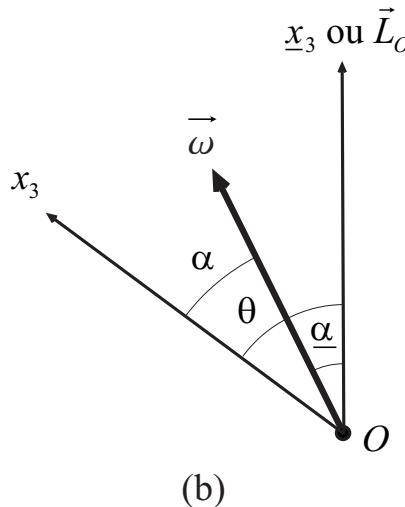
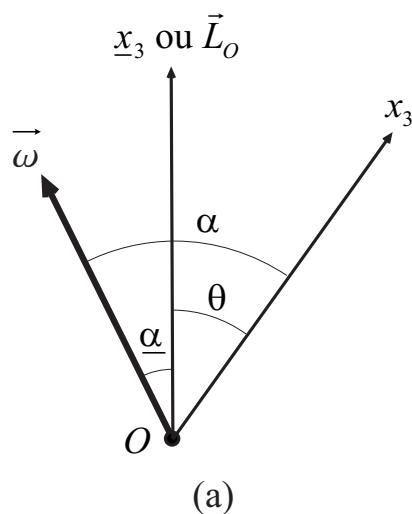
α

α

α

(c)

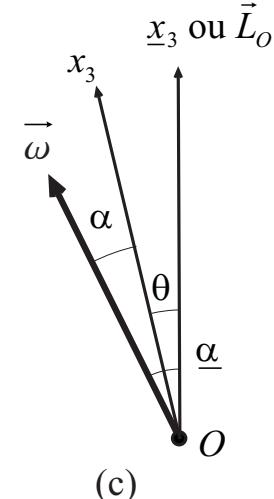
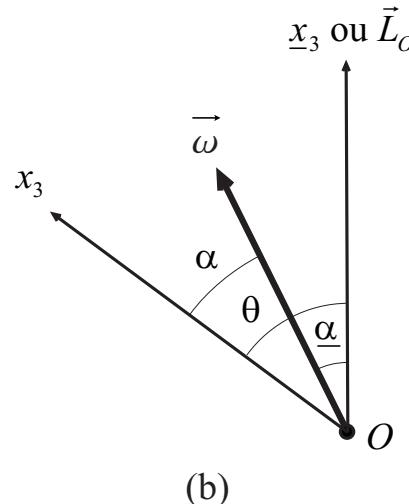
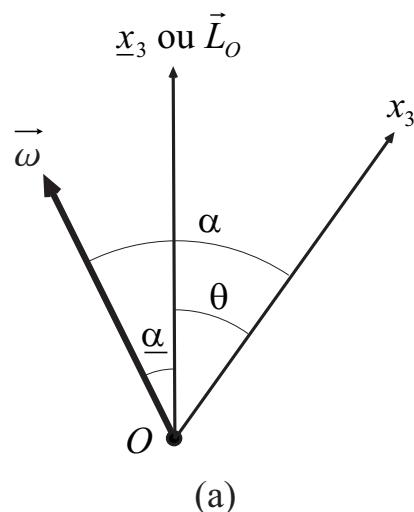
E-P pour solide à sym. cylindrique (6)



- (c) pas possible !
- En effet, considérerons les deux vecteurs \vec{L}_h et $\vec{\omega}_h$ qui constituent les projections des vecteurs \vec{L}_O et $\vec{\omega}$ dans le plan (x_1, x_2)
- Remarquons ensuite que ces deux vecteurs ont des directions opposées dans le cas de l'image (c)

Impossible car $\vec{L}_h = I_1 \vec{\omega}_h$ ($I_1 = I_2 > 0$) !

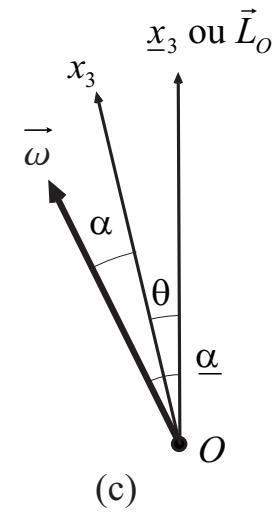
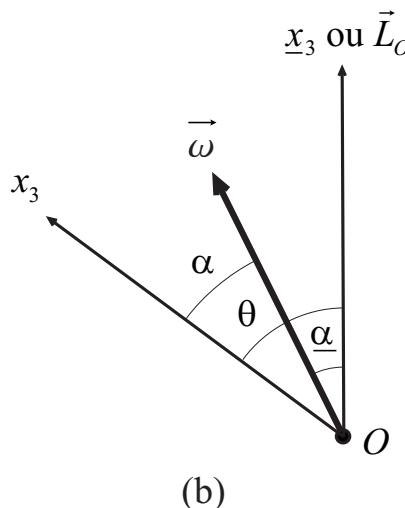
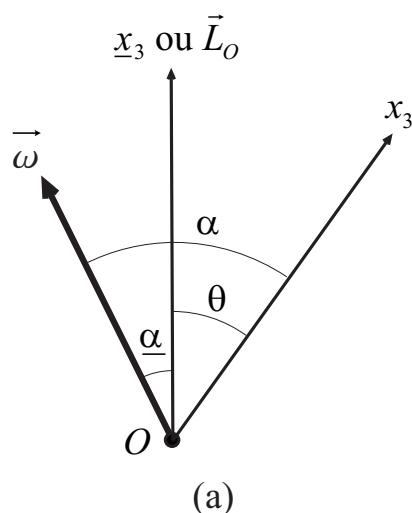
E-P pour solide à sym. cylindrique (7)



- Images (a) et (b) : montrons que $\tan \theta = I_1 / I_3 \tan \alpha$.
- Désignons par L_h et ω_h les normes des vecteurs \vec{L}_h et $\vec{\omega}_h$
- Trigo : $L_h = L_3 \tan \theta$, $\omega_h = \omega_3 \tan \alpha$.
- En divisant membre à membre et vu que $L_3 = I_3 \omega_3$ et $L_h = I_1 \omega_h$:

$$\tan \theta = \frac{I_1}{I_3} \tan \alpha.$$

E-P pour solide à sym. cylindrique (8)



- Comme $\tan \theta = \frac{l_1}{l_3} \tan \alpha$ et $\tan \alpha > 0$:

$$l_1 > l_3 \text{ (solide allongé)} \iff \theta > \alpha \iff \text{image (b) avec } \theta = \alpha + \underline{\alpha},$$

$$l_1 < l_3 \text{ (solide aplati)} \iff \theta < \alpha \iff \text{image (a) avec } \theta = \alpha - \underline{\alpha}.$$

- De toute façon, l'angle de nutation est constant :

$$\theta = \text{constante}$$

E-P pour solide à sym. cylindrique (9)

Angles de spin et de précession ?

- Vitesse angulaire :

$$\vec{\omega} = \omega_i \vec{e}_i \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{lcl} \omega_1 & = & \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \psi \sin \theta, \\ \omega_2 & = & -\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\phi} \cos \psi \sin \theta, \\ \omega_3 & = & \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta, \end{array} \right.$$

- si $\theta = \text{constante}$:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\phi} \sin \psi \sin \theta, \\ \omega_2 &= \dot{\phi} \cos \psi \sin \theta, \\ \omega_3 &= \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta. \end{aligned}$$

- Comme $\omega_1^2 + \omega_2^2 = \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta = \text{constante}$:

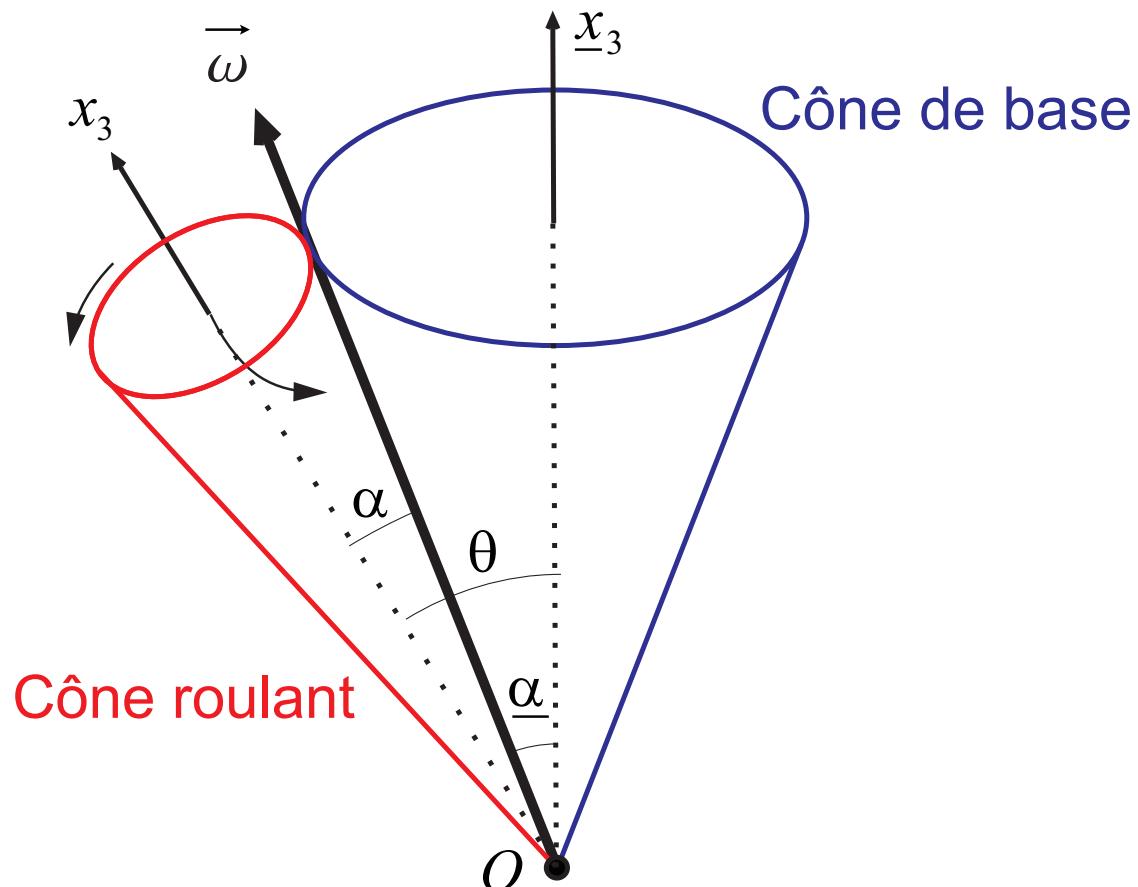
$$\dot{\phi} = \text{constante}$$

- Alors, comme $\omega_3 = \text{constante}$, on déduit de la troisième éq. :

$$\dot{\psi} = \text{constante}$$

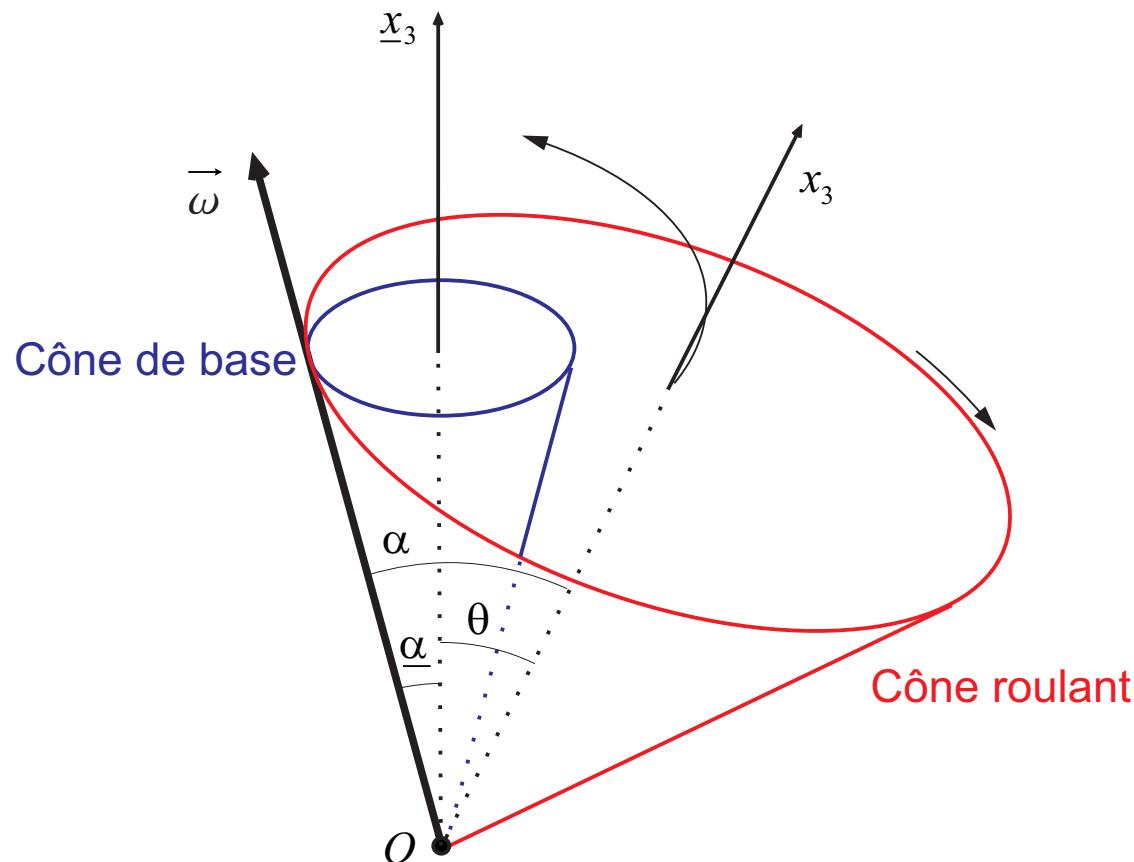
E-P pour solide à sym. cylindrique (10)

- E-P pour solide à sym. cylindrique :
 - ▶ Pas de mouvement de nutation
 - ▶ Spin et précession uniformes
- Solide allongé ($\dot{\phi}$ et $\dot{\psi}$ sont positifs) :



E-P pour solide à sym. cylindrique (11)

- E-P pour solide à sym. cylindrique :
 - ▶ Pas de mouvement de nutation
 - ▶ Spin et précession uniformes
- Solide aplati (ϕ est positif, mais ψ est négatif) :



E-P pour solide à sym. cylindrique (12)

$\dot{\phi}$ et $\dot{\psi}$ peuvent encore être exprimés en termes du moment cinétique et de l'angle de nutation

- Dérivons par rapport à t les éq.

$$\omega_1 = \dot{\phi} \sin \psi \sin \theta,$$

$$\omega_2 = \dot{\phi} \cos \psi \sin \theta.$$

Il vient :

$$\dot{\omega}_1 = \dot{\psi} \omega_2,$$

$$\dot{\omega}_2 = -\dot{\psi} \omega_1.$$

- En comparant avec :

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 + \Omega \omega_2 = 0, \\ \dot{\omega}_2 - \Omega \omega_1 = 0, \end{cases}$$

on déduit

$$\dot{\psi} = -\Omega = \frac{I_1 - I_3}{I_1} \omega_3.$$

E-P pour solide à sym. cylindrique (13)

- L'éq. $\dot{\omega}_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta$ donne alors :

$$\dot{\phi} = \frac{I_3}{I_1} \frac{\omega_3}{\cos \theta}.$$

- Comme $I_3 = I_3 \omega_3 = L \cos \theta$:

$$\begin{aligned}\dot{\psi} &= \frac{I_1 - I_3}{I_1} \frac{L}{I_3} \cos \theta, \\ \dot{\phi} &= \frac{L}{I_1}.\end{aligned}$$

$\implies \dot{\phi}$ est

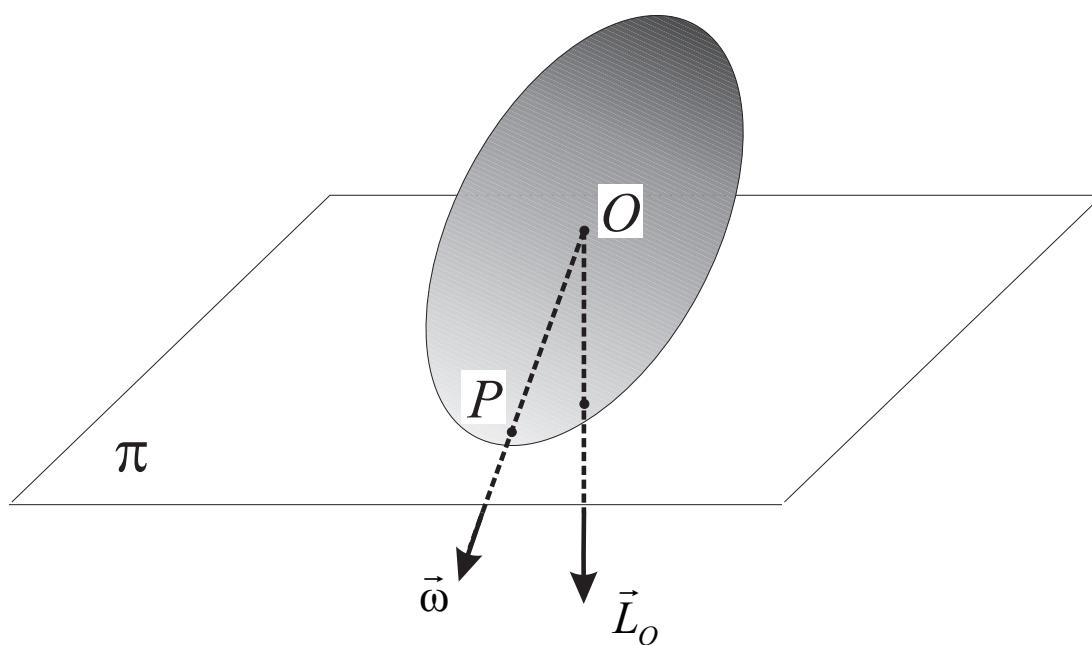
- ▶ toujours positif

$\implies \dot{\psi}$ est

- ▶ positif pour les solides allongés
- ▶ négatif pour les solides aplatis

E-P pour solide quelconque

- Pas étudié en détail ici : construction et interprétation de Poinsot
- En deux mots :
 - ▶ l'ellipsoïde d'inertie roule et pivote sans glisser sur un plan qui est
 - fixe par rapport au laboratoire et
 - perpendiculaire au moment cinétique \vec{L}_O constant
 - ▶ l'axe de rotation $O + \vec{\omega}$ passe à chaque instant par le point de contact entre l'ellipsoïde et le plan



Conclusion

Mouvements un peu **étonnants** car
la vitesse angulaire $\vec{\omega}$ n'est **pas constante**
même en l'**absence de force** !