History

Author	Datum	Änderung	Version
Lienhard Menzi	4.1.2017	Erste Version	1.0
Lienhard Menzi	12.1.2017	Höhensatz, Sinus und Cosinussatz	1.1

Trigoniometrie

Der Begriff Trigonometrie stammt aus dem Griechischen. Tria heisst Drei; Gonia (Gon) die Ecke, Metria, die Messung, als wir befassen uns mit Messungen im 3-Ecken.

History 1
Trigoniometrie 1
Tools und Hilfsmittel 1
Lernziele 1
Bezeichnungen 2
Definition der Winkelfunktionen im rechtwinkligen Dreieck 3
Vorsicht beim Taschenrechner 4
Steigung und Gefälle 4
Umkehrfunktionen der Winkelfunktionen 5
Das rechtwinklige Dreieck 5
Höhensatz (von Euklid) 5
Beliebiges Dreieck 6
Bogenmass (Radiant) und Gradmass 6
Sinussatz 9
Cosinussatz 9

Tools und Hilfsmittel

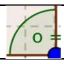
Die Graphiken sind entweder mit Grapher, einem Macintosh Standard Tool erstellt, oder mit GeoGebra (https://www.geogebra.org/) einem Open Source Mathematik Programm.
Formeln sind mit dem in Word integriertem Formel-Editor geschrieben

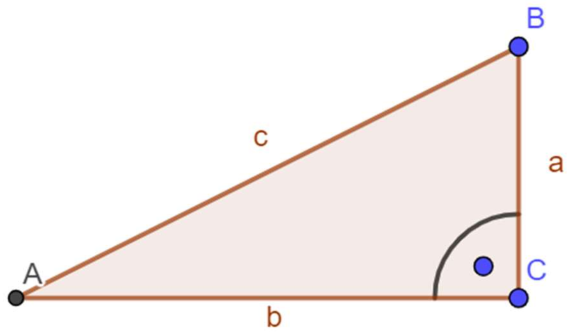
Weitere Quellen sind:

Lernziele

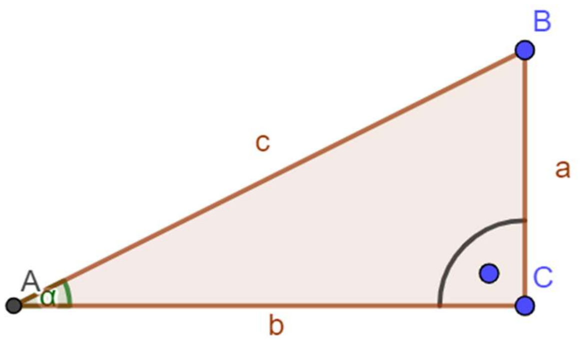
1. Sie sind in der Lage, die vier wichtigsten Winkelfunktionen am rechtwinkligen Dreieck fehlerfrei zu erklären
2. Sie können die Winkelfunktionen Sinus, Cosinus und Tangens mit eigenen Worten am Einheitskreis erklären
3. Sie können Berechnungen am rechtwinkligen Dreieck selbstständig fehlerfrei durchführen
4. Sie können die Rechenregeln an beliebigen Dreiecken selbstständig erklären

Bezeichnungen

Was	Schreibweise	Kommentar
Ecken, Punkte	Grosse lateinische Buchstaben	A,B,C,…
Seiten(längen)	Kleine lateinische Buchstaben	a,b,c
Seiten als Verbindung von Punkten	Beide Punkte und einen Strich darüber	$\overline{AB}, \overline{P_1P_2}$
Winkel	Kleine griechische Buchstaben	$\alpha, \beta, \gamma, \zeta, \xi, \ldots$
Rechter Winkel	Ein Punkt im Winkel	

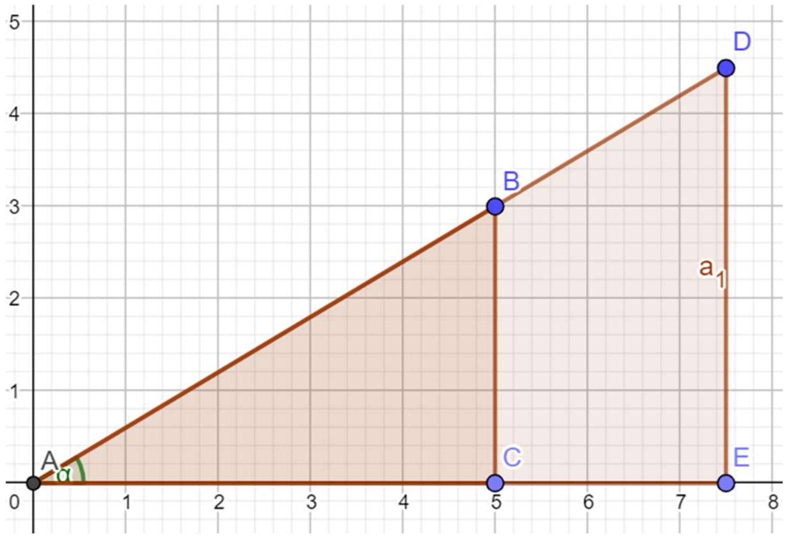


- Normalerweise bezeichnet man die Seiten, nach dessen gegenüberliegenden Eckpunkt (nur klein).
- In der Ecke c ist der rechte Winkel (siehe Punkt). Weil der Winkel im Eckpunkt c liegt, wird der rechte Winkel mit γ (3.ter griechische Buchstabe) bezeichnet.
- Die Seite gegenüber des rechten Winkels (die längste Seite) heisst **Hypotenuse**.
- Die beiden Seiten am rechten Winkel heissen **Kateten**.



- Betrachten wir einen Winkel, hier α (weil in Ecke A), so nennt man die Seite a Gegenkatete von α (gegenüber α) und b die Ankatete von α (weil sie am Winkel α liegt).

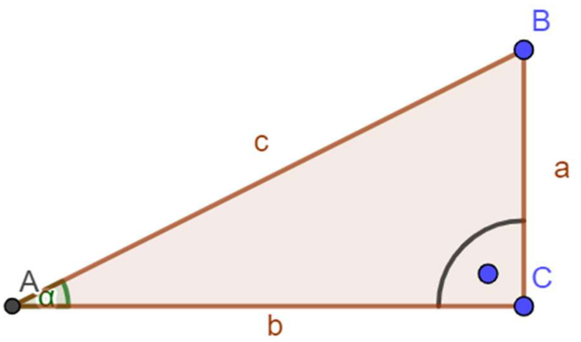
Definition der Winkelfunktionen im rechtwinkligen Dreieck



Wir sehen hier 2 rechtwinklige Dreiecke ABC und ADE. Schauen wir uns die Seitenverhältnis an so stellen wir fest:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DE}}{AD}, \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AD}}\ und\ \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AE}}$$

Diesen Verhältnissen geben wir Namen



Einschänkung $0 < \alpha < 90^{\circ}$

Name	**Seitenverhätnis**	**Seitenverhältnis in Text**
$sin(\alpha)$ sprich Sinus	$\frac{a}{c}$	$\frac{Gegenkatete\ von\ \alpha}{Hypotenuse}$
$cos(\alpha)$ sprich Cosinus	$\frac{b}{c}$	$\frac{Ankatete\ von\ \alpha}{Hypotenuse}$
$tan(\alpha)$	$\frac{a}{c}$	$\frac{Gegenkatete\ von\ \alpha}{Ankatete\ von\alpha}$

sprich Tangens		

Vorsicht beim Taschenrechner

Später werden wir noch sehen, dass man Winkel nicht nur in Grad, sondern auch im Bogenmass messen kann. Ihren Taschenrechner können Sie umstellen, wie Sie messen wollen (bei mir mit der Taste Mode).

Name Englisch-Deutsch	**Bereich bei einem Kreis**	**Anwendung**
Degree – Grad	0-360	Trigonometrie
Radian – Bogenmass	$0 - 2\pi$	Trigonometrie/Physik
Gradian – dummerweise auch Grad	0-400	Militär (wir brauchen das nicht)

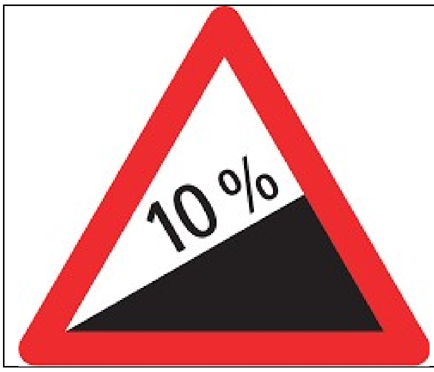
Testen Sie, ob sin(30)=0,5 ist, wenn ja rechnen Sie in Degree, ansonsten ist Ihr Rechner im falschen Modus.

Meistens muss man dafür 30 eintippen und anschliessend die Taste sin.

Die Summe der Innenwinkel eines Dreiecks ist 180°. Wenn wir bei einem rechtwinkligen Dreiecks einen Winkel (ausser dem rechten) kennen, so kennen wir alle, denn:

$$\beta = 180 - 90 - \alpha$$

Steigung und Gefälle



Im Verkehr werden Steigung und Gefälle in % angegeben.

Eine Steigung von 10% bedeutet, dass auf eine Horizontal gemessene Entfernung von 100m um 10m(10% von 100m) ansteigt oder abfällt.

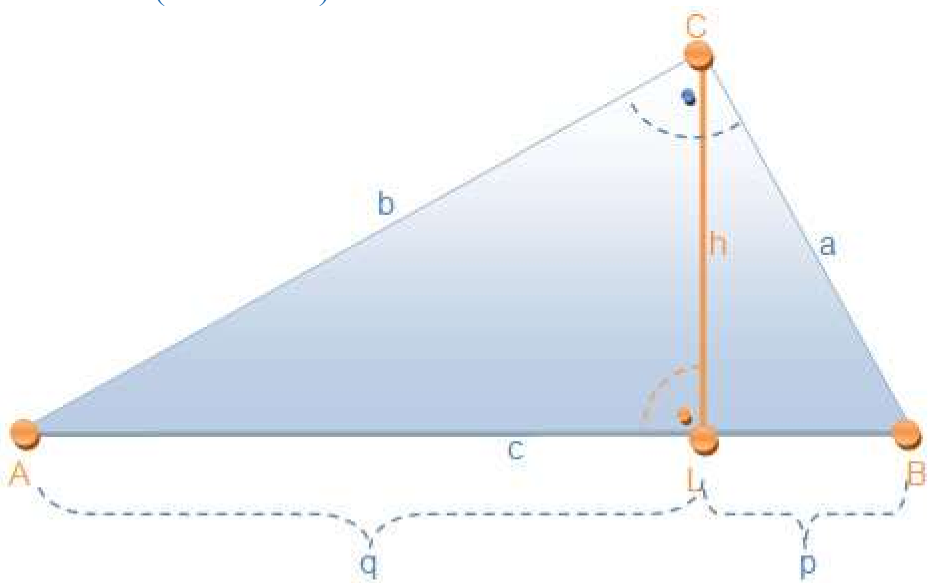
Umkehrfunktionen der Winkelfunktionen

Die Umkehrfunktionen heissen immer Arcus ... oder hoch -1 also

Funktion	**Umkehrfunktion 1**	**Umkehrfunktion 2**
sin	$arcsin$	sin^{-1}
cos	$arccos$	cos
tan	$arctan$	tan^{-1}
cot	$arccot$	cot^{-1}

Das rechtwinklige Dreieck

Höhensatz (von Euklid)

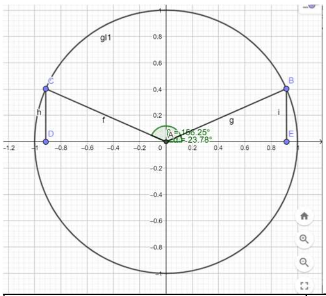


$h^2 = p * q$

Herleitung:
$I)\ a^2 + b^2 = c^2$
$II)\ q^2 + h^2 = b^2$
$III)\ h^2 + p^2 = a^2 \quad in\ I)\ einsetzen$
$h^2 + p^2 + b^2 = c^2 \quad jetzt\ II\ einsetzen$
$h^2 + p^2 + q^2 + h^2 = c^2 \quad c = p + q$
$h^2 + p^2 + q^2 + h^2 = (p + q)^2$
$2h^2 + p^2 + q^2 = p^2 + 2pq + q^2$
$2h^2 = 2pq \quad |: 2$
$h^2 = pq$

Beliebiges Dreieck

Nun gehen die Wikel über 90 Grad hinaus, wie verhalten sich sie Winkelfunktionen bei diesen Winkeln?



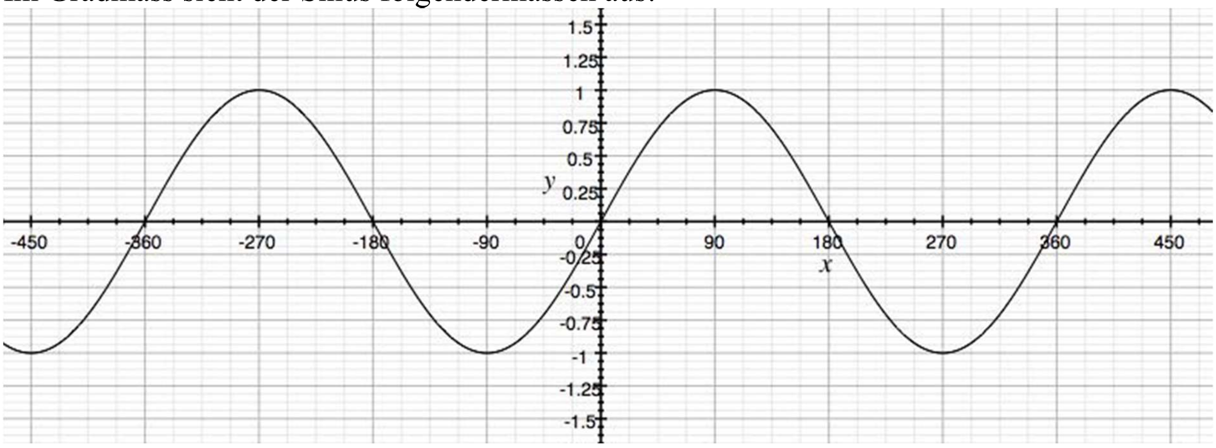
$0 < \propto < 90$	$90 < \propto < 180$	$180 < \propto < 270$	$270 < \propto < 360$
$sin(\propto)$	$sin(180-\propto)$ $= sin(\propto)$	$sin(180+\propto)$ $= -sin(\propto)$	$sin(360-\propto)$ $= -sin(\propto=$
$cos(\propto)$	$cos(180-\propto)$ $= -cos(\propto)$	$cos(180+\propto)$ $= -cos(\propto)$	$cos(360-\propto)$ $= cos(\propto)$

Bogenmass (Radiant) und Gradmass

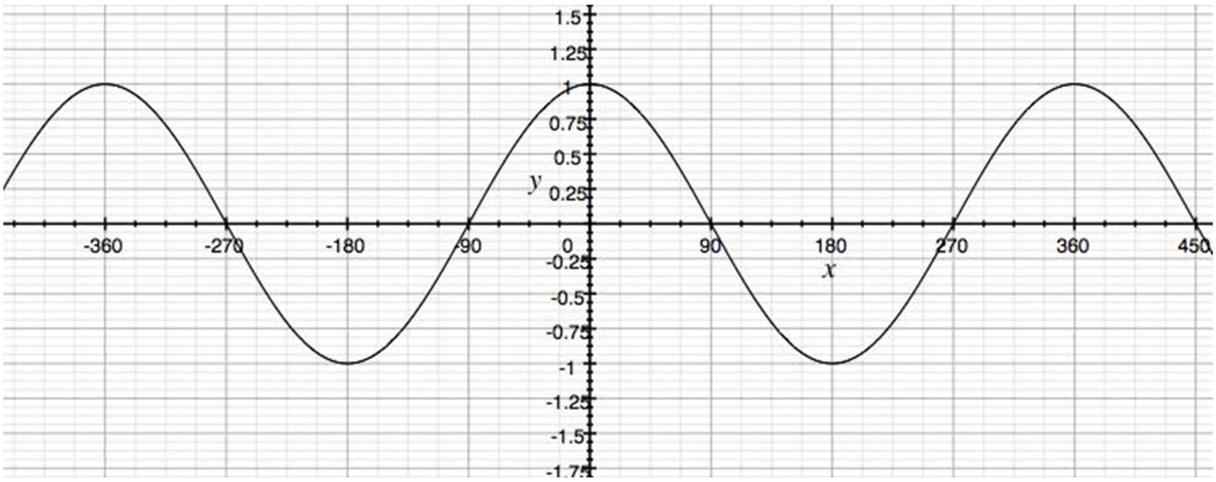
Bisher haben wir immer im Gradmass gerechnet $0 \leq \propto < 360°$
Auf dem Rechner kann man umstellen, ob im Gradmass DEG (Degree) bezeichnet oder mit dem Bogenmass RAD bezeichnet (Radiant) gerechnet werden soll.
Denken wir aber an die Formel des Kreisumfangs $U = 2\pi r$, so stellen wir fest, dass für den Umfang der ganze Kreis durchlaufen werden muss also entspricht 2π 360°.

Man stelle sich vor, wie der Punkt P im Gegenuhrzeigersinn über den Kreis zieht und reduziert die Betrachtungsweise auf den x-Achsenabschnitt. Zuerst wir x kleiner, bis schliesslich bei 90 Grad Null erreicht, dann wird er negativ kleiner bis Minimum von -1, bei 180 Grad. Schliesslich nimmt er wieder zu, bis wir 360 Grad erreichen. (Siehe dazu Graphen von Sinus und Cosinus)

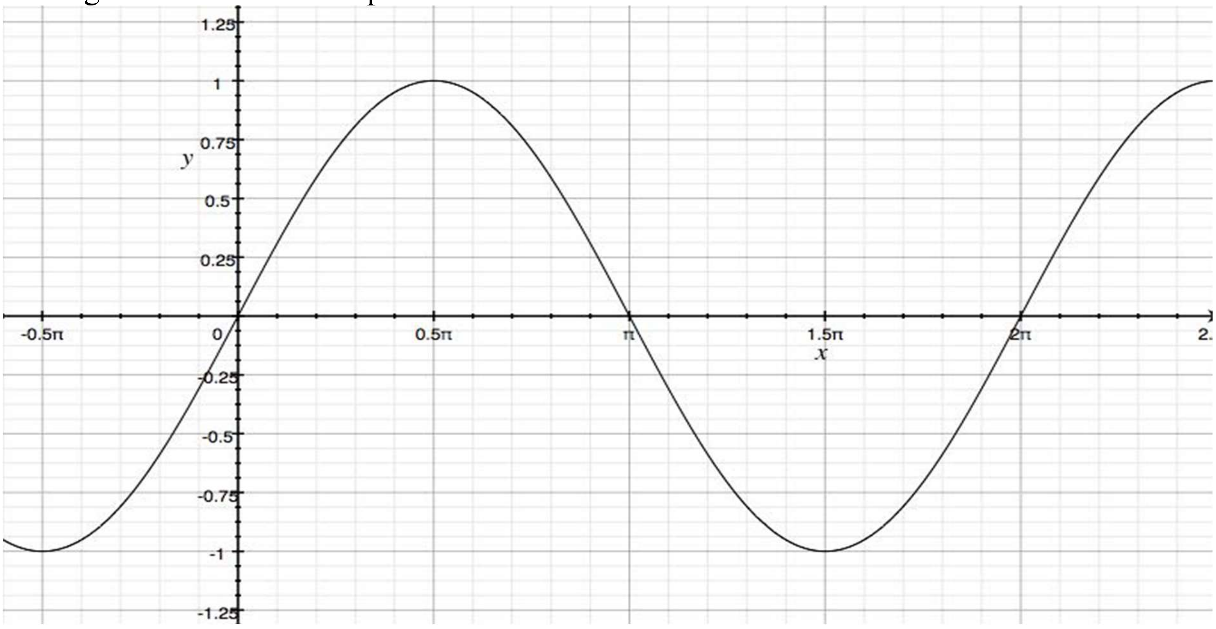
Rechnet man so, so nennt man das das Bogenmass. Auf dem Rechner mit RAD (Radiant) bezeichnet.
Im Gradmass sieht der Sinus folgendermassen aus:



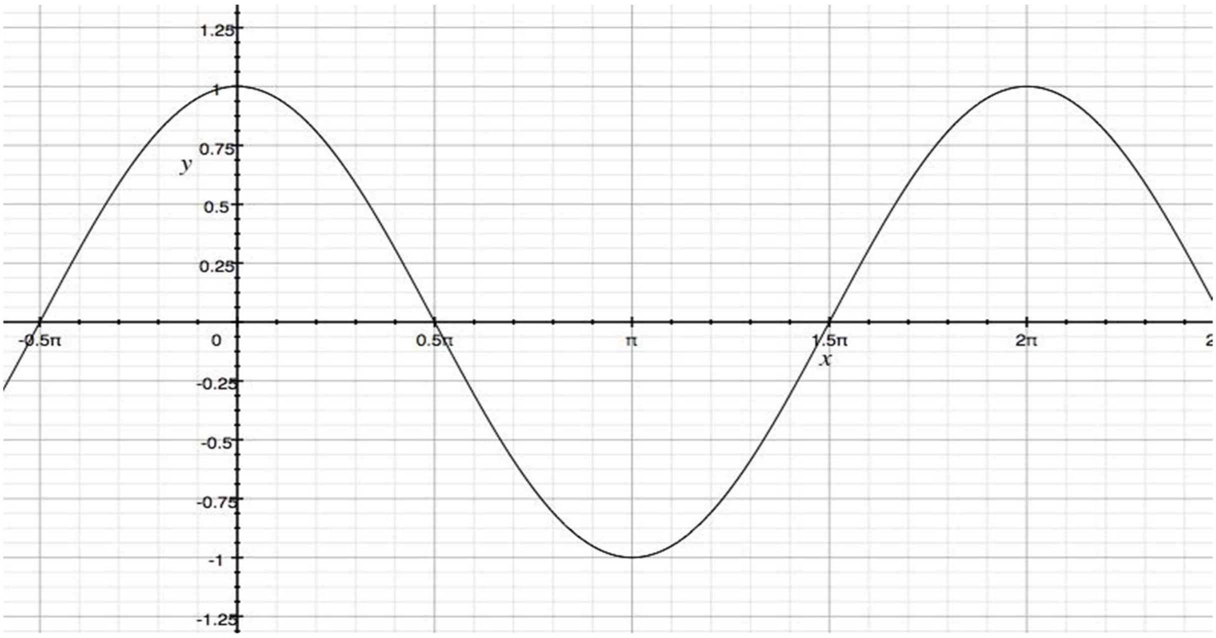
und der Cosinus



Im Bogenmass sieht der Graph der Sinusfunktion sieht so aus:



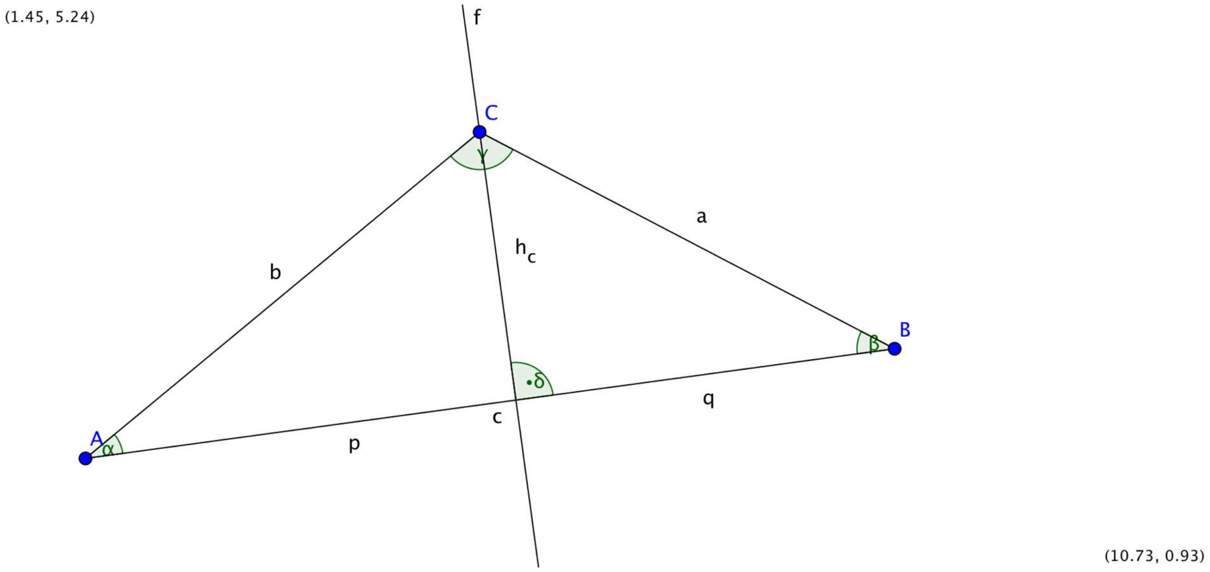
Der des Cosinus so:



Die beiden Graphen ähneln sich, es sieht so aus, als wäre der Sinus um $\frac{\pi}{2}$ nach rechts verschoben. Dem ist tatsächlich so. Man nennt das die **Phasenverschiebung**.
$\sin(\propto) = \cos(90° - \propto)$
$\cos(\propto) = \sin(90° - \propto)$

Haben wir einen Winkel $\alpha°$ in Gradmass, so können wir ihn wie folgt in Bogenmass umrechnen: $\propto = \frac{2\pi}{360}\alpha°$.

Haben wir einen Winkel α in Bogenmass, so können wir ihn wie folgt in Gradmass umrechnen: $\propto° = \frac{360}{2\pi} \propto$.



Sinussatz

$$\frac{a}{\sin(\propto)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

Herleitung:

$$\sin(\alpha) = \frac{h_c}{b} \Leftrightarrow h_c = b * \sin(\alpha)$$

$$\sin(\beta) = \frac{h_c}{a} \Leftrightarrow h_c = a * \sin(\beta)$$

Also:

$$a * \sin(\beta) = b * \sin(\alpha) \qquad |: \sin(\alpha))$$

$$\frac{a * \sin(\beta)}{\sin(\alpha)} = b \qquad |: \sin(\beta)$$

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)}$$

und völlig analog mit den anderen Verhältnissen

Cosinussatz

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc * cos(\propto)$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac * cos(\beta)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab * cos(\gamma)$$