History

Author	Datum	Änderung	Version
Lienhard Menzi	21.8.2021	Erste Version	1.0

Lineare Gleichungen

Tools und Hilfsmittel

Die Graphiken sind entweder mit Grapher, einem Macintosh Standard Tool erstellt, oder mit GeoGebra (https://www.geogebra.org/) einem Open Source Mathematik Programm. Formeln sind mit dem in Word integriertem Formel-Editor geschrieben

Weitere Quellen sind:

Lernziele

- Sie wissen was eine lineare Funktion ist
- Sie können eine Wertetabelle erstellen
- Sie können die Wertetabelle in ein kartesisches Koordinatensystem einzeichnen
- Sie können den Schnittpunkt zweier linearer Gleichungen bestimmen

Lineare Funktionen

Ich selbst verwende gerne das Tool Geogebra für das zeichnen von Funktionen. Geogebra gibt es als Applikation (Download) https://www.geogebra.org/download?lang=de
oder online https://www.geogebra.org/calculator.
Downloads für Windows oder OSX möglich.

https://sites.google.com/bbzbl-it.ch/mathematik-v-master

Die allgemeine Form einer linearen Funktion sieht folgendermassen aus:
$y = mx + b$

oder, etwas formaler

$$f: \quad D \longrightarrow W$$
$$x \longmapsto f(x) = mx + b$$

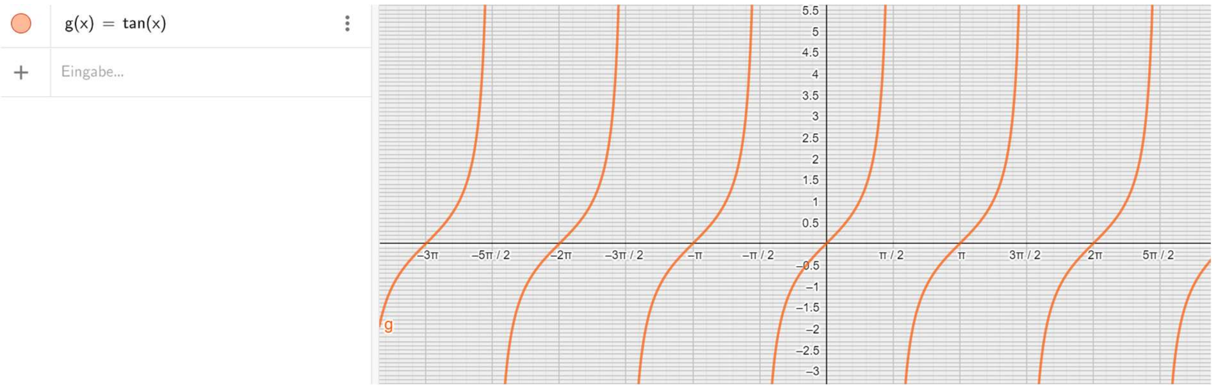
wobei D der Definitionsbereich (das was man für x einsetzen darf) und W der Wertebereich (das was- beim Einsatz von allen x aus D herauskommt) ist
Bei linearen Funktionen gilt immer $D \subseteq \mathbb{R}\ und\ \ W \subseteq \mathbb{R}$ (Untermenge der reelen Zahlen)

Bei $y = mx + b$ nennt man m die Steigung und b den y-Achsenabschnitt bei x=0

Definitionsbereich und Wertebereich (Definitionslücken)

Bei vielen Funktionen darf man nicht beliebige reelen Zahlen einsetzten.
Hier einige Beispiele

$\boldsymbol{f(x)}$	**Definitionsbereich**	**Erläuterung**
$\sqrt{x}$	$D = \{x \in \mathbb{R}\ mit\ x \geq 0\}$ Sprich x Element aus reelen Zahlen mit x grösser gleich Null	Man kann die Wurzel nicht aus negativen Zahlen ziehen
$\frac{1}{(x-1)(x+2)}$	$D = \mathbb{R}\setminus\{1, -2\}$ Sprich: Reele Zahlen ohne(\) 1 oder -2	Setzt man 1 oder -2 für x ein, so wird der Nenner 0. Und durch 0 darf man nicht dividieren.
sin(x)	$D = \mathbb{R}$	Man kann jeden reelen Wert einsetzten
tan(x)	$D = \mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2} + n\pi \quad mit\ n \in \mathbb{Z}\}$ Sprich: alle reelen Zahlen ohne pi/2 plus alle ganzzahligen Vielfache von pi	Sie Bild unten



Auch den Wertebereich schreibt man als Mengen

$\boldsymbol{f(x)}$	**Wertebereich**	**Erläuterung**
$\sqrt{x}$	$W = \{x \in \mathbb{R}\, mit\ x \geq 0\}$	Die Wurzelfunktion liefert immer positive Zahlen
$\lvert x \rvert$	$W = \{x \in \mathbb{R}\, mit\ x \geq 0\}$	Der Betrag liefert immer positive Zahlen
sin(x)	$W = \{x \in \mathbb{R}\, mit\ -1 \leq x \leq 1\}$ Alternativ $W = [-1{,}1]$	Alle Werte zwischen -1 und 1 (inklusive -1 und 1) können erreicht werden

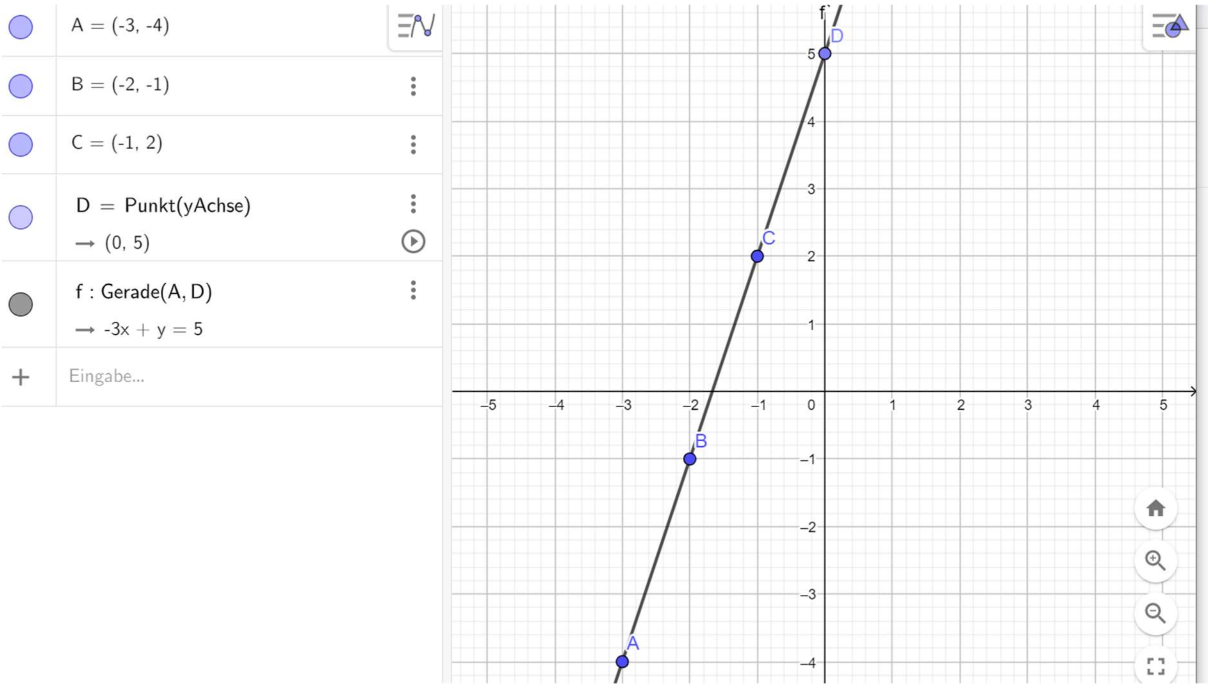
Wertetabelle

Für Funktionen hat man oft eine Wertetabelle (sei das aus Experimenten gemessen, oder aus der Funktion berechnet, die Tabelle hat 2 Zeilen, eine mit den x-Werten, die andere mit den y-Werten. Sei nun unsere Funktion $y = 3x + 5$ so sieht unsere Wertetabelle so aus:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	-4	-1	2	5	8	11	14	17	20

Das ist eine optimale Aufgabe für Excel siehe Excel Wertetabelle.xlsx

Diese Werte kann man in einem kartesischen Koordinatensystem darstellen



Und die Punkte verbinden (bei linearen Funktionen ist das immer eine Gerade)

Durchstoss durch x-Achse und y-Achse

Immer wieder interessien uns bei welchem x-Wert die y-Achse durchstossen wird (was man auch Nullstelle nennt. $Wir\ betrachten\ wieder\ f(x) = 3x + 5$
Wir setzen also die Funktion = 0

$0 = 3x + 5 \qquad -5$

$-5 = 3x \qquad :3$

$x = -\frac{5}{3}$

Der Durchstoss durch die x-Achse ist wesentlich einfacher, wir setzen einfach für x 0 ein.
$f(x) = 3x + 5$ = 3*0+5=5

Nomenklatur

Punkte
Werden in Grossbuchstaben angegeben A,B,C,….will man deren Werte angeben so wird das wie folgt gemacht.
$A = (-3|-4) \quad oder \quad A = (3,4)$

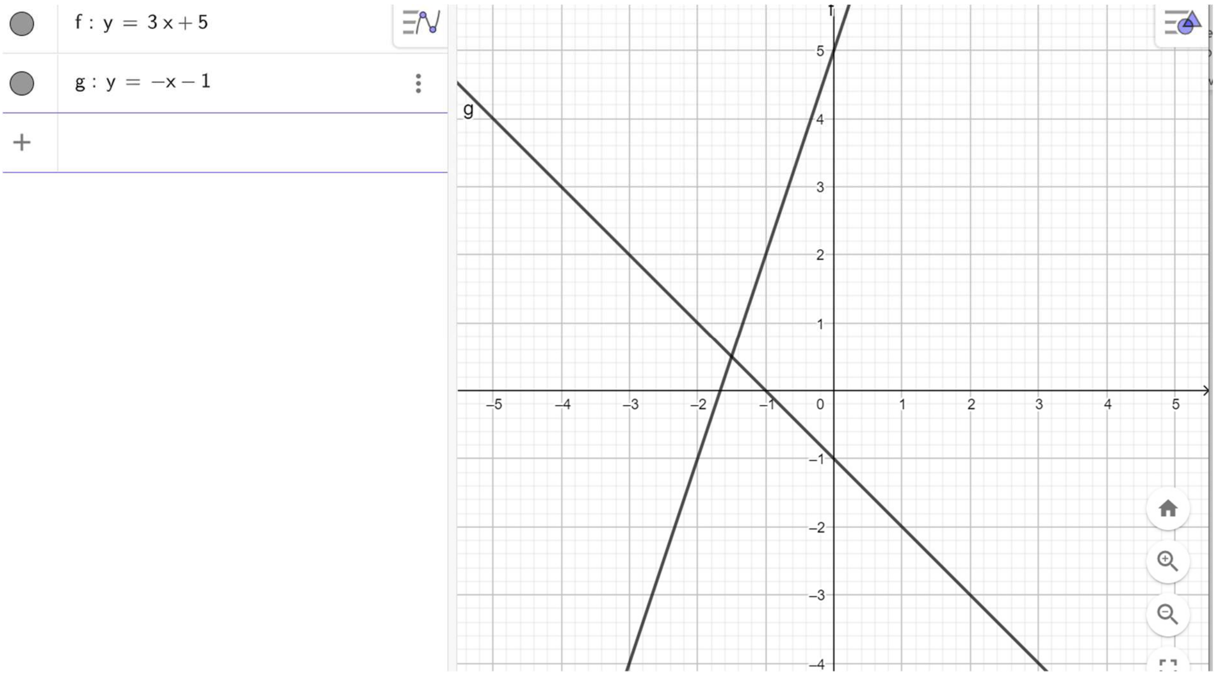
Lineare Funktion $y = mx + b = mx^1 + b$ weil der Exponent von x 1 ist.

Zwei Geraden

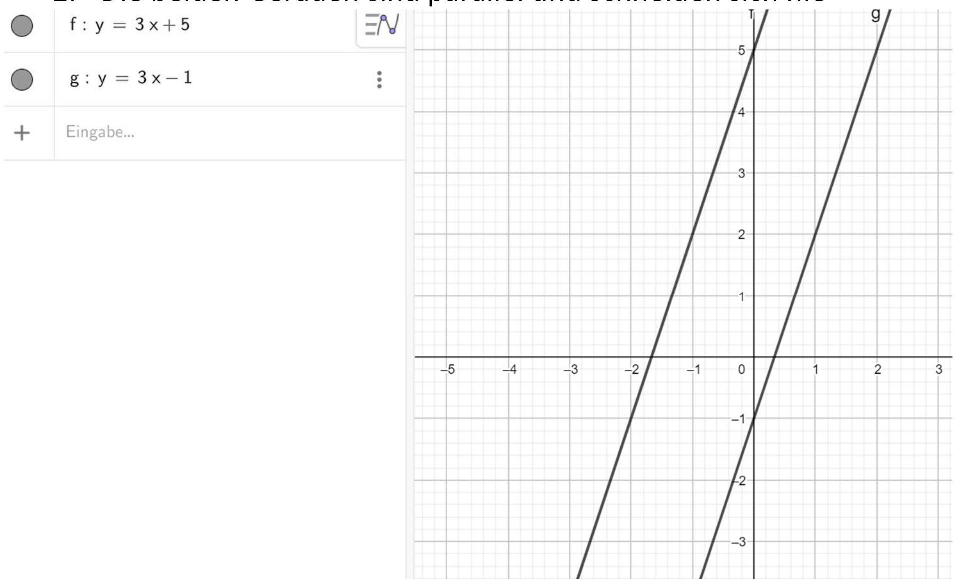
Hat man zwei Gerade, so können folgende 3 Situationen auftretten

1. Die beiden Geraden schneiden sich (eine einzige Lösung)
2. Die beiden Geraden sind parallel und schneiden sich nie (keine Lösung)
3. Die beiden Geraden decken sich und haben unendlich viele Schnittpunkte (unendlich viele Lösungen)

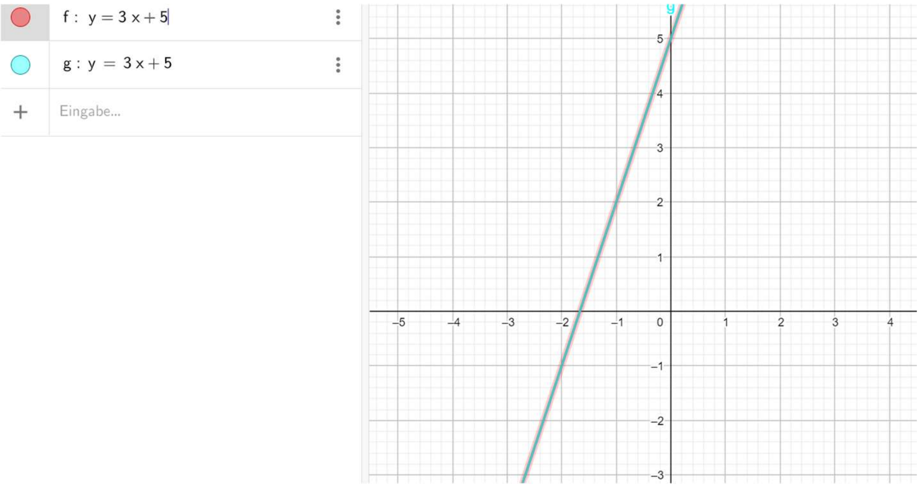
1. Die beiden Geraden schneiden sich



2. Die beiden Geraden sind parallel und schneiden sich nie



3. Die beiden Geraden decken sich und haben unendlich viele Schnittpunkte



Schnittpunkt berechnen

Den Schnittpunkt berechnet man, indem man die beiden Gleichungen gleichsetzt.

1) $y = 3x + 5$
2) $y = -x - 1$

$3x + 5 = -x - 1 \qquad -5$

$3x = -x - 6 \qquad +x$

$4x = -6 \qquad :4$

$x = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2} = -1.5$

Diesen Wert setzt man in eine der beiden Funktionen ein um den y-Wert zu berechnen

$y = 3x + 5 = 3 * (-1.5) + 5 = -4.5 + 5 = 0.5$

Der Schnittpunkt ist also $S = (-1.5|0.5)$ was man auch in der 1. Abbildung sieht.

Oder (Abbildung 2)

1) $y = 3x + 5$
2) $y = 3x - 1$

$3x + 5 = 3x - 1 \qquad -5$

$3x = 3x - 6 \qquad -3x$

$0 = 6 \qquad \textit{Das ist ein Widerspruch, also gibt es keinen Schnittpunkt}$

Oder (Abbildung 3)

1) $y = 3x + 5$
2) $y = 3x + 5$

$3x + 5 = 3x + 5 \quad\quad - 5$
$3x = 3x \quad\quad - 3x$
0
$= 0 \quad\quad Das\ stimmt\ immer, also\ für\ jedes\ x, folglich\ sind\ die\ Geraden\ identisch$

Gerade durch 2 Punkte berechnen

Seien zwei Punkte gegeben $A = (1|8)$ und $B = (5|20)$
Wir wollen nun die Gerade berechnen, sodass sie durch A und B geht, wir wollen also für die Funktion $y = mx + b$ die beiden noch Unbekannten m und b bestimmen.

A liegt auf der Geraden also $8 = m * 1 + b$
B liegt auf der Geraden also $20 = m * 5 + b$

Wir haben also ein Lineares Gleichungssystem mit zwei Unbekannten

1. $8 = m * 1 + b \quad\quad * 1$
2. $20 = m * 5 + b \quad\quad$ *(-1) und addieren

$8 - 20 = \mathrm{m} - 5\mathrm{m}$

$-12 = -4\mathrm{m} \quad\quad : (-4)$
$\frac{-12}{-4} = 3 = m$

Diesen Wert setzen wir in eine der obigen Gleichungen (z.B. in 1.)
$8 = m * 1 + b$
$8 = 3 * 1 + b = 3 + b \quad\quad - 3$
$8 - 3 = b$
$b = 5$

Und somit die Gerade $y = 3x + 5$