Санкт-Петербургский Политехнический
Университет им. Петра Великого

Институт прикладной математики и механики

Кафедра прикладной математики

Лабораторная работа №8

3 курс, группа 33631/2

Студент Д. А. Плаксин

Преподаватель Баженов А. Н.

Санкт-Петербург
2019 г.

Содержание

1 Список таблиц

2 Постановка задачи

Для двух выборок 20 и 100 элементов, сгенерированных согласно нормальному закону $N(x, 0, 1)$, для параметров масштаба и положения построить асимптотически нормальные интервальные оценки на основе точечных оценок метода максимального правдоподобия и классические интервальные оценки на основе статистик χ^2 и Стьюдента. В качестве параметра надёжности взять $\gamma = 0.95$.

3 Теория

Оценкой максимального правдоподобия для математического ожидания является среднее арифметическое: $\mu = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$.

Оценка максимального правдоподобия для дисперсии вычисляется по формуле: $\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$.

Доверительным интервалом или интервальной оценкой числовой характеристики или параметра распределения θ с доверительной вероятностью γ называется интервал со случайными границами (θ_1, θ_2), содержащий параметр θ с вероятностью γ [4].

Функция распределения Стьюдента [5]:

$$T = \sqrt{n-1}\frac{\overline{x} - \mu}{\delta} \tag{1}$$

Функция плотности распределения χ^2 [6]:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0 \end{cases} \tag{2}$$

Интервальная оценка математического ожидания [7]:

$$P = \left(\overline{x} - \frac{\sigma t_{1-\frac{a}{2}}(n-1)}{\sqrt{n-1}} < \mu < \overline{x} + \frac{\sigma t_{1-\frac{a}{2}}(n-1)}{\sqrt{n-1}}\right) = \gamma, \tag{3}$$

где $t_{1-\frac{a}{2}}$ – квантиль распределения Стьюдента порядка $1 - \frac{a}{2}$.

Интервальная оценка дисперсии [5]:

$$P = \left(\frac{\sigma\sqrt{n}}{\sqrt{\chi^2_{1-\frac{a}{2}}(n-1)}} < \sigma < \frac{\sigma\sqrt{n}}{\sqrt{\chi^2_{\frac{a}{2}}(n-1)}}\right) = \gamma, \tag{4}$$

где $\chi^2_{1-\frac{a}{2}}$, $\chi^2_{\frac{a}{2}}$ – квантили распределения Стьюдента порядков $1 - \frac{a}{2}$ и $\frac{a}{2}$ соответственно.

Асимптотическая интервальная оценка математического ожидания [5]:

$$P = \left(\overline{x} - \frac{\sigma u_{1-\frac{a}{2}}}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x} + \frac{\sigma u_{1-\frac{a}{2}}}{\sqrt{n}}\right) = \gamma, \tag{5}$$

где $u_{1-\frac{a}{2}}$ – квантиль нормального распределения $N(x, 0, 1)$ порядка $1 - \frac{a}{2}$.

4 Реализация

Работы была выполнена на языке *Python*3.7. Для генерации выборок использовался модуль [1]. Для построения графиков использовалась библиотека matplotlib [2]. Функции распределения обрабатывались при помощи библиотеки scipy.stats [3]

5 Результаты

Таблица 1: Результаты

Метод	n	μ	σ
На основе ММП	20	$[-0.33527, 0.40768]$	$[0.71165, 1.36749]$
	100	$[-0.20017, 0.16315]$	$[0.79980, 1.05748]$
Асимптотический	20	$[-0.37421, 0.44662]$	$[0.75586, 1.11704]$
	100	$[-0.19705, 0.16003]$	$[0.80188, 1.01998]$

6 Выводы

По полученным результатам видно, что оба подхода дают лучший результат на выборках большого объема. Если рассматривать результаты для выборки объема $n = 20$ элементов, то видно, что интервал меньше и точнее в классической интервальной оценке.

7 Список литературы

[1] Модуль numpy - https://physics.susu.ru/vorontsov/language/numpy.html

[2] Модуль matplotlib - https://matplotlib.org/users/index.html

[3] Модуль scipy - https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/

[4] https://en.wikipedia.org/wiki/Confidence_interval

[5] https://en.wikipedia.org/wiki/Student%27s_t-distribution

[6] https://en.wikipedia.org/wiki/Chi-squared_distribution

[7] Шевляков Г. Л. Лекции по математической статистике, 2019.

8 Приложения

Код отчёта: https://github.com/MisterProper9000/MatStatLabs/blob/master/MatStatLab5/MatStatLab8.tex

Код лабораторной: https://github.com/MisterProper9000/MatStatLabs/blob/master/MatStatLab5/MatStatLab8.py