Chapitre 2: MÉTHODES D'AGRÉGATION

Ghislain PANDRY

Chercheurs, Traitement du signal et des images

Méthodes d'agrégation

Il existe trois groupes de méthodes :

1. Agrégation complète « approche nord-américaine »
   - On cherche à agréger les n critères afin de les réduire en un critère ;
   - On suppose que tous les jugements sont transitifs ;
2. Agrégation partielle « approche francophone »
   - On cherche à comparer des actions potentielles ou des classements les uns par rapport aux autres et à établir entre ces éléments des relations de surclassement.
3. Agrégation locale.
   - On cherche en premier lieu une solution de départ ;
   - Par la suite, on procède à une recherche itérative pour trouver une meilleure solution.

Principe : Agrégation complète

1. Établir une fonction-critère unique agrégeant les divers critères.
2. Utiliser le résultat de cette agrégation pour choisir, trier ou ranger.

Les méthodes d'agrégation complète permettent, indifféremment de choisir, de trier ou de ranger.

Principales méthodes : Agrégation complète

- **Somme pondérée**
- Moyenne pondérée
- Weight Product Method WPM
- **Goal programming**
- Déclassement comparé
- Méthodes politiques (vote$\cdots$)
- Analytic Hierarchy Process AHP
- Théorie de l'utilité multi-attribut (Multi-Attribute Utility Theory MAUT)
- Méthodes d'utilité additives

Pondération des critères

- Ces méthodes proposent une pondération des critères. Le Poids permet de faire ressortir l'importance de chaque critère. Il peut être subjectif (Le poids représente l'importance relative des critères accordés par les décideurs) ou normalisé.
- cette information affecte directement l'agrégation des préférences

Évaluation des performances

- chaque action est jugée selon chaque critère
- l'ensemble des évaluation peut être représenté par un tableau à double entrée appelé matrice ou tableau des performances.

Agrégation de préférence

L'agrégation est une opération permettant d'obtenir des informations sur la préférence globale entre les actions potentielles, à partir des préférences par critère.
$g(a, \omega) = \mathcal{A}(g_1(a), \cdots, g_p(a), \omega)$, où ω paramètre(s) préférentiel(s).

Présentation

La façon la plus naturelle d'agréger différents critères est de recourir à une somme pondérée. Il s'agit alors :

- Construire un critère unique g agrégeant les p critères $g_1, g_2, \cdots, g_p$.
- Évaluation d'une action $a \in A$:

$$g(a) = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j g_j(a)$$

pour un profit : $g(a) = \max_i \sum_{j=1}^{p} \lambda_{ij} g_j(a)$

pour un coût : $g(a) = \min_i \sum_{j=1}^{p} \lambda_{ij} g_j(a)$

où λ_j est le poids associé au critère g_j défini par $\lambda_j > 0$, $\forall j \in \{1, \cdots, p\}$, $\forall i \in \{1, \cdots, m\}$ et $\sum_{j=1}^{p} \lambda_j = 1$

- Dans un contexte de choix, il suffit de sélectionner l'action a^* tel que $g(a^*) \geqslant g(a)\ \forall a \in A$

c'est-à-dire l'action dont l'évaluation, au sens de g, est la meilleure.

Représentation

Critères

Actions ou Décisions

	g_1	g_2	g_3	...
a	$g_1(a)$	$g_2(a)$	$g_3(a)$	...
b	$g_1(b)$	$g_2(b)$	$g_3(b)$	...
c	...			
...	...			
	λ_1	λ_2	λ_3	...

Poids des critères

EXEMPLE 1

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	$g(.)$
a	100	100	100	100	55	91
b	85	85	85	85	100	88
	1/5	1/5	1/5	1/5	1/5	

$g(a) = 91$, $g(b) = 88$ Compensation totale des actions fortes et des actions faibles.
Pour un profit l'action a serait meilleure car $\max\{91, 88\} = 91$

EXEMPLE 2

	g_1	g_2	$g(.)$
a	100	0	50
b	0	100	50
c	50	50	50
d	50	50	50
	1/2	1/2	

$g(a) = g(b) = g(c) = g(d) = 50$ Élimination des conflits.

Avantages de la somme pondérée

- Il s'agit de la façon la plus connue et la plus simple d'agréger différents critères.
- Toute solution optimale selon une somme pondérée est efficace.

Rappel : Relation de dominance

Principe d'unanimité : pour $a, b \in A$, a domine b ($a\underline{\Delta}b$ ssi $g_j(a) \geq g_j(b) \forall j$ (au moins $>$)

Actions efficaces (Pareto-optimales) : a est efficace ssi a n'est pas dominée par aucune autre action de A

Exemple : relation de Dominance

I	g1	g2
a	100	100
b	20	30

a efficace (a $\underline{\Delta}$ b)
a préférée à b

II	g1	g2
a	100	30
b	20	100

a et b efficaces
a et b incomparables

III	g1	g2
a	100	99
b	20	100

a et b efficaces
a préférée à b

IV	g1	g2
a	100	99
b	99	100

a et b efficaces
a et b indifférentes

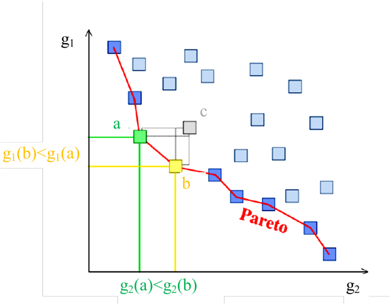
V	g1	g2
a	100	100
b	99	99

a efficace (a $\underline{\Delta}$ b)
a et b indifférentes

Pareto-optimal

- La notion d'optimum de Pareto permet de diviser en deux ensemble des états possibles de la société. On peut distinguer :
  - ceux qui sont uniformément améliorables : il est possible d'augmenter le bien-être de certains individus sans réduire celui des autres.
  - ceux qui ne sont pas uniformément améliorables : l'augmentation du bien-être de certains individus impliquent la réduction du bien-être d'au moins un individu.
- Ces derniers états que l'on désigne comme optimaux au sens de Pareto ou Pareto-optimaux.

Optimum de Pareto



Exemple de frontière d'efficacité de Pareto

Si les situations préférables sont celles où g_1 et g_2 sont les plus faibles, le point c n'est pas sur la frontière de Pareto parce qu'il est dominé par les points a et b. Les points a et b sont tous les deux efficaces.

Limites

- L'interprétation des poids n'est pas très claire car ils intègrent à la fois la notion d'importance relative des critères et un facteur de normalisation des échelles des critères. Un poids plus élevé ne correspond donc pas nécessairement à un critère plus important.
- Effet de compensation.

Définition

- Cette technique permet de poursuivre simultanément plusieurs objectifs
- La fonction objectif de cette méthode consiste à minimiser es écarts entre les finalités et les réalisations tout en traitant en priorité les écarts les plus importants par rapport aux objectifs.
- La recherche de optimum revient à minimiser ces écarts selon l'ordre de priorité de chacune.
- Ainsi, au lieu de s'accrocher à l'objectif optimum, la démarche mathématique s'approche de la réalité quotidienne.

Étapes du Goal Programming

1. Définition des variables de décision
   - Les variables de décision sont semblables à celles de la Programmation Linéaire (Nombre de produits, heures de travail...)
2. Définition des écarts par rapport aux buts
   - Les variables liées aux écarts par rapport aux buts sont de deux sortes : écarts inférieurs et écarts supérieurs aux buts.
     - d^+ représente les écarts supérieurs
     - d^- représente les écarts inférieurs
3. Formulation des équations contraintes
   - Contraintes économiques
   - Contraintes liées aux buts
4. Formulation de la fonction objectif

Les contraintes

- Contraintes économiques
  - Expression : $<=, >=$, ou $=$
  - Linéaire (exprimées en fonction des variables de décision)
  - Exemple : $3x + 2y <= 50$ heures
- Contraintes liées aux buts
  - Forme générale : $\boxed{\text{Variables de décision}} - d^+ + d^- = \boxed{\text{Niveau du But recherché}}$

EXEMPLE

Microcom est une société orientée croissance qui établit des buts de performance mensuels pour évaluer sa force de vente. Microcom décide que la force de vente soit équivalente à un maximum de 640 heures de visites mensuels à ses clients. De plus, on estime que chaque visite à un nouveau client potentiel exige 3 heures et chaque visite à un ancien client exige 2 heures.
Combien de clients anciens et nouveaux visités ?
Microcom fixe deux buts pour le mois suivant :Contacter au moins 200 anciens clients;Contacter au moins 120 nouveaux clients.
Il est évident que le dépassement des buts est bénéfique (non pénalisant)

RÉSOLUTION :ETAPES DU GOAL PROGRAMMING

- Étape 1 :Les variables de décision :
  - X_1 = le nombre d'anciens clients visités
  - X_2 = le nombre de nouveaux clients visités
- Étape 2 : Les Buts :
  - But 1 – Contacter 200 anciens clients
  - But 2 – Contacter 120 nouveaux clients
- Étape 3 : Les variables de déviation :
  - d_1^+ = Nombre de clients anciens visités en excès par rapport au but de 200
  - d_1^- = Nombre de clients anciens visités en moins par rapport au but de 200
  - d_2^+ = Nombre de clients nouveaux visités en excès par rapport au but de 120
  - d_2^- = Nombre de clients nouveaux visités en moins par rapport au but de 120

RÉSOLUTION : Formulation

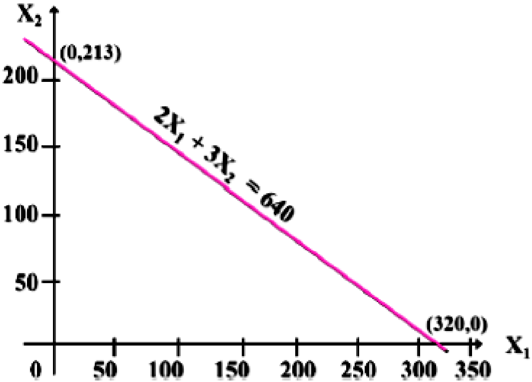
- Contraintes économiques :
  - $2X_1 + 3X_2 \leq 640$
  - $X_1, X2 \geq 0$
  - $d_1^+, d_1^-, d_2^+, d_2^- \geq 0$
- Contraintes liées aux buts :
  - Anciens Clients :$X_1 + d_1^- - d_1^+ = 200$
  - Nouveaux Clients : $X_2 + d_2^- - d_2^+ = 120$
- Fonction Objectif : Minimiser la somme pondérée des écarts
  - Minimiser $Z = d_1^- + d_2^-$

RÉSOLUTION : Formulation complète

- Minimiser $Z = d_1^- + d_2^-$
- s.c :
  - $2X_1 + 3X_2 \leq 640$
  - $X_1 + d_1^- - d_1^+ = 200$
  - $X_2 + d_2^- - d_2^+ = 120$
  - $X_1, X2 \geq 0$
  - $d_1^+, d_1^-, d_2^+, d_2^- \geq 0$

RÉSOLUTION : Graphique des contraintes

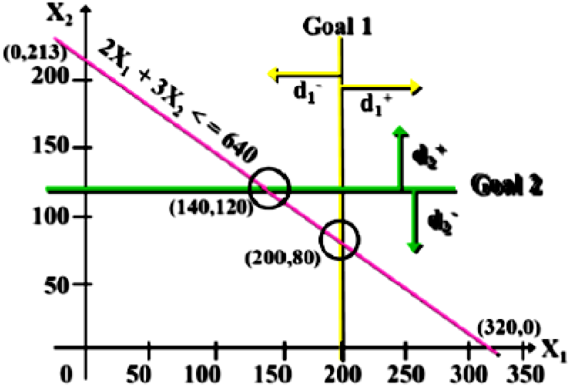
$$2X_1 + 3X_2 = 640$$



RÉSOLUTION : Graphe des lignes de déviation

- $X_1 + d_1^- - d_1^+ = 200$
- $X_2 + d_2^- - d_2^+ = 120$

Tracer les droites $X_1 = 200$ et $X_2 = 120$



RÉPONSE OPTIMALE

- minimiser $d_1^- + d_2^-$
- Evaluer les candidats:

Point Optimal

Pour le point (140, 120)	Pour le point (200, 80)
$d_1^- = 60$ et $d_2^- = 0$	$d_1^- = 0$ et $d_2^- = 40$
$Z = 60 + 0 = 60$	$Z = 0 + 40 = 40$

$X_1 = 200$	But 1 atteint
$X_2 = 80$	But 2 non atteint
$d_1^+ = 0$	$d_2^+ = 0$
$d_1^- = 0$	$d_2^- = 40$

$Z = 40$

Principe

Développées par [B. Roy, 60s] :

- à l'occasion d'applications réelles
- pour résoudre des difficultés avec l'utilisation d'approche du type critère unique de synthèse

Ces méthodes ne concernent que le cas où l'ensemble des actions A est défini explicitement par une liste.

- un critère (au moins) n'est pas quantitatif
- Comparaisons par paires des actions
- Plus proche du problème de décision.
- la compensation entre critères n'est pas justifiée
- des seuils de préférences ou de véto doivent être pris en compte

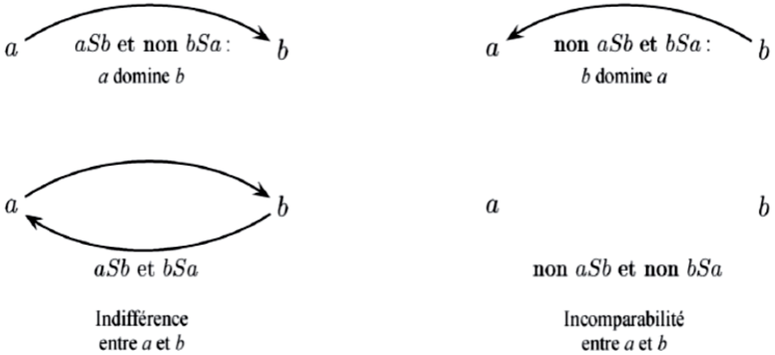
Le concept de relation de surclassement

Une relation de surclassement est une relation binaire S définie dans A telle que aSb (*a surclasse b*) si, étant donné ce que l'on sait des préférences du décideur et étant donnée la qualité des évaluations des actions et la nature du problème, il y a suffisamment d'arguments pour admettre que a **est au moins aussi bonne que** b, sans qu'il y ait de raison importante de refuser cette affirmation.

REMARQUE

- S peut être perçue comme résultant d'un enrichissement de la relation de dominance : en effet $a\underline{\Delta}b$ entraîne aSb (i.e $\underline{\Delta} \subseteq S$)
- S est réflexive : $\forall a \in A, aSa$
- S n'est pas nécessairement transitive : aSb et bSc n'entraînent pas nécessairement aSc.
  (Justification : Expériences des poids de Poincaré (Poids de $10g(a)$ et $11g(b)$ produisent les mêmes sensations ; Poids de $11g(b)$ et $12g(c)$) produisent les mêmes sensations On distingue sans peine a et c

4 situations de comparaison



Méthodes de surclassement

Les différences entre les méthodes de surclassement vont provenir notamment de la façon de formaliser et d'exploiter la définition du surclassement :

- **Electre**
- Promethee
- Melchior
- ....

Méthodes de surclassement procèdent en deux étapes :

- construction de la relation de surclassement ;
- exploitation de la relation de surclassement en fonction de la problématique choisie.

Famille des méthodes ELECTRE

ELicitation **E**t **C**hoix **T**raduisant la **RE**alité :

- ELECTRE I et ELECTRE IS : choisir une ou plusieurs action(s) (P_α)
- ELECTRE tri : déterminer toutes les bonnes actions (P_β)
- ELECTRE II, ELECTRE III et ELECTRE IV : classer les actions de la meilleure à la moins bonne (P_δ)

Tableau	Tableau de performances					
Critères	g_1	g_2	...	g_j	...	g_n
Poids	k_1	k_2		k_j		k_n
	p_1	p_2	...	p_j	...	p_n
Seuils	q_1	q_2	...	q_j	...	q_n
	v_1	v_2	...	v_3	...	v_n
Actions						
a_1	$g_1(a_1)$	$g_2(a_i)$	...	$g_j(a_1)$	...	$g_n(a_i)$
a_2	.	.		.		.
.	.	.		.		.
.	.	.		.		.
.	.	.		.		.
a_i	$g_1(a_i)$	$g_2(a_i)$	...	$g_j(a_i)$	...	$g_n(a_i)$
.						
.						
.						
a_m	$g_1(a_m)$	$g_2(a_m)$	...	$g_j(a_m)$	...	$g_n(a_m)$

L'affirmation aSb est acceptée si on s'appuie sur les deux principes fondamentaux que sont : le principe de concordance et le principe de discordance.

Principe de concordance

Il y a concordance si une majorité de critères, compte-tenu de leur importance, sont concordants avec aSb (principe de majorité).

Principe de non discordance

Il n'y a pas discordance si aucun des critères non-concordants (discordant ou critères minoritaires) réfute fortement aSb (principe de respect des minorités).

Indice de concordance

Pour calculer l'indice de concordance, on procède en deux étapes :

1. on calcule l'indice de concordance partielle ;
2. on calcule l'indice de concordance globale.

Indice de Concordance Partielle (ICP)

Pour chaque critère g_j, on examine la contribution de g_j à l'assertion aSb. Soit $c_j(a,b) \in [0;1] (j = 1, \cdots, p)$ l'ICP.

- si $p_j = q_j$

$$c_j(a,b) = \begin{cases} 0 & \text{ssi } g_j \text{ n'est absolument pas en faveur de } aSb \\ 1 & \text{ssi } g_j \text{ est totalement en faveur de } aSb \end{cases}$$

g_j n'est absolument pas en faveur de $aSb \Leftrightarrow g_j(b) \geq g_j(a) + p_j$.
g_j est totalement en faveur de $aSb \Leftrightarrow g_j(b) \leq g_j(a) + q_j$.

- si $p_j \neq q_j$

$c_j(a,b) = 0$ ou $c_j(a,b) = 1$
ou $c_j(a,b) = \dfrac{p_j(g_j(b) - g_j(a))}{p_j - q_j} \in]0;1[$ ssi g_j est partiellement en faveur de aSb.
g_j est partiellement en faveur de aSb $\Leftrightarrow g_j(a) + q_j \leq g_j(b) \leq g_j(a) + p_j$.

REMARQUE

Pour chaque critère g_j est associé un seuil de préférence p_j, un seuil d'indifférence q_j et un poids k_j.
Les seuils p_j et q_j associés au critère g_j servent à déterminer les IPC de chaque g_j par contre le poids k_j associé à chaque ICP sert à déterminer l'ICG (Indice de Concordance Globale).

Construction des Matrices Concordances Partielles (MCP)

La construction des MCP se fait sur la base des ICP. Ainsi, à chaque critère g_j correspond une MCP. Les lignes et les colonnes d'un MCP sont les différentes actions. Le remplissage d'une MCP pour un critère g_j donné se fait en considérant si g_j est à maximiser ou minimiser.

MINIMISATION g_j

	a_1	a_2	a_3
a_1	-	$a_2 S a_1$	$a_3 S a_1$
a_2	$a_1 S a_2$	-	$a_3 S a_2$
a_3	$a_1 S a_3$	$a_2 S a_3$	-

MAXIMISATION g_j

	a_1	a_2	a_3
a_1	-	$a_1 S a_2$	$a_1 S a_3$
a_2	$a_2 S a_1$	-	$a_2 S a_3$
a_3	$a_3 S a_1$	$a_3 S a_2$	-

EX :DÉTERMINATION DES ICP (CAS MINIMISATION DE g_j)

Prenons le cas où $p_j = q_j$. Dans ce cas, la MCP peut se remplir soit en utilisant $g_j(b) \geq g_j(a) + p_j$ soit $g_j(b) \leq g_j(a) + q_j$ soit les deux mais pas nécessaire tout simple parce que nous sommes dans un cas binaire.

si $g_j(b) \geq g_j(a) + p_j \Rightarrow aSb$ (non favorable)

si $g_j(a_2) \geq g_j(a_1) + p_j \Rightarrow a_1 S a_2$
si $g_j(a_3) \geq g_j(a_1) + p_j \Rightarrow a_1 S a_3$
si $g_j(a_1) \geq g_j(a_2) + p_j \Rightarrow a_2 S a_1$
si $g_j(a_3) \geq g_j(a_2) + p_j \Rightarrow a_2 S a_3$
si $g_j(a_1) \geq g_j(a_3) + p_j \Rightarrow a_3 S a_1$
si $g_j(a_2) \geq g_j(a_3) + p_j \Rightarrow a_3 S a_2$

$g_j(b) \leq g_j(a) + q_j \Rightarrow aSb$ (favorable)

si $g_j(a_2) \leq g_j(a_1) + q_j \Rightarrow a_1 S a_2$
si $g_j(a_3) \leq g_j(a_1) + q_j \Rightarrow a_1 S a_3$
si $g_j(a_1) \leq g_j(a_2) + q_j \Rightarrow a_2 S a_1$
si $g_j(a_3) \leq g_j(a_2) + q_j \Rightarrow a_2 S a_3$
si $g_j(a_1) \leq g_j(a_3) + q_j \Rightarrow a_3 S a_1$
si $g_j(a_2) \leq g_j(a_3) + q_j \Rightarrow a_3 S a_2$

Exemple :si $g_j(b) \geq g_j(a) + p_j \Rightarrow c_j(a,b) = 0$ sinon $c_j(a,b) = 1$

si $g_j(a_2) \geq g_j(a_1) + p_j \Rightarrow c_j(a_1; a_2) = 0$ sinon $c_j(a_1; a_2) = 1$
si $g_j(a_3) \geq g_j(a_1) + p_j \Rightarrow c_j(a_1; a_3) = 0$ sinon $c_j(a_1; a_3) = 1$
si $g_j(a_1) \geq g_j(a_2) + p_j \Rightarrow c_j(a_2; a_1) = 0$ sinon $c_j(a_2; a_1) = 1$
si $g_j(a_3) \geq g_j(a_2) + p_j \Rightarrow c_j(a_2; a_3) = 0$ sinon $c_j(a_2; a_3) = 1$
si $g_j(a_1) \geq g_j(a_3) + p_j \Rightarrow c_j(a_3; a_1) = 0$ sinon $c_j(a_3; a_1) = 1$
si $g_j(a_2) \geq g_j(a_3) + p_j \Rightarrow c_j(a_3; a_2) = 0$ sinon $c_j(a_3; a_2) = 1$

Exemple : MCP

	a_1	a_2	a_3
a_1	-	$c_j(a_2; a_1) = 0ou1$	$c_j(a_3; a_1) = 0ou1$
a_2	$c_j(a_1; a_2) = 0ou1$	-	$c_j(a_2; a_3) = 0ou1$
a_3	$c_j(a_1; a_3) = 0ou1$	$c_j(a_3; a_2) = 0ou1$	-

Indice de Concordance Globale (ICG)

Pour évaluer la contribution globale de l'ensemble des critères à l'assertion aSb, on construit un ICG $C(a,b) \in [0;1]$ défini par :

$$\forall a, b \in A,\ C(a,b) = \frac{\sum_{j=1}^{p} k_j \times c_j(a,b)}{\sum_{j=1}^{p} k_j}$$

où k_j est le poids associé à g_j, avec : $\sum_{j=1}^{p} k_j = 1$.

L'ICG ne nécessite pas la comparabilité entre les critères (comparaisons critère par critère). Ainsi, pour déterminer l'ICG, on se base sur l'ICP de chaque critère g_j.

EXEMPLE POUR DEUX CRITÈRES

MCP : critère g_1, poids k_1

	a_1	a_2	a_3
a_1	-	c_{21}	c_{31}
a_2	c_{12}	-	c_{32}
a_3	c_{13}	c_{23}	-

MCP :critère g_2, poids k_2

	a_1	a_2	a_3
a_1	-	c_{21}	c_{31}
a_2	c_{12}	-	c_{32}
a_3	c_{13}	c_{23}	-

Matrice de Concordance Globale (MCG)

	a_1	a_2	a_3
a_1	-	$\frac{k_1 c_{21} + k_2 c_{21}}{k_1 + k_2}$	$\frac{k_1 c_{31} + k_2 c_{31}}{k_1 + k_2}$
a_2	$\frac{k_1 c_{12} + k_2 c_{12}}{k_1 + k_2}$	-	$\frac{k_1 c_{32} + k_2 c_{32}}{k_1 + k_2}$
a_3	$\frac{k_1 c_{13} + k_2 c_{13}}{k_1 + k_2}$	$\frac{k_1 c_{23} + k_2 c_{23}}{k_1 + k_2}$	-

EXERCICE D'APPLICATION

Vous recherchez un 2 pièces à louer sur Yopougon ou dans la périphérie de Yopougon. Disposant d'un budget mensuel logement d'au plus 1000 euros, vous avez retenu 6 logements candidats évalués selon les aspects qui vous semblent importants afin de guider votre décision, à savoir :

- g_1 : le montant du loyer mensuel,charges comprises,
- g_2 : le temps de trajet logement-lieu de travail,
- g_3 : la superficie.

Afin d'établir votre choix, vous décidez de recourir à une méthodologie multicritère. Nous fixerons $q_1 = 50$, $q_2 = 5$ et $q_3 = 3$. Par souci de simplicité, nous fixerons $q_j = p_j$, $(j = 1, 2, 3)$ utilisant donc nos critères comme des quasi-critères.

Logement	g_1 : Loyer c.c. (en €/mois)	g_2 : Temps de trajet (en mn)	g_3 : Superficie (en m^2)
ℓ_1	700	30	35
ℓ_2	660	50	45
ℓ_3	1000	15	50
ℓ_4	720	20	40
ℓ_5	600	45	25
ℓ_6	800	30	38
	Minimisation	**Minimisation**	**Maximisation**

TAB. 12.2 – TABLEAU DE PERFORMANCES SUR LES CRITÈRES PRIX, TEMPS DE TRAJET ET SUPERFICIE

- Quel est le meilleur achat ?
- Quel est le meilleur compromis ?
- Quelles sont les priorités du locataire ?

DÉTERMINATION de la MCP du critère g_1

MINIMISATION g_1

	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	l_6
l_1	-	$l_2 S l_1$	$l_3 S l_1$	$l_4 S l_1$	$l_5 S l_1$	$l_6 S l_1$
l_2	$l_1 S l_2$	-	$l_3 S l_2$	$l_4 S l_2$	$l_5 S l_2$	$l_6 S l_2$
l_3	$l_1 S l_3$	$l_2 S l_3$	-	$l_4 S l_3$	$l_5 S l_3$	$l_6 S l_3$
l_4	$l_1 S l_4$	$l_2 S l_4$	$l_3 S l_4$	-	$l_5 S l_4$	$l_6 S l_4$
l_5	$l_1 S l_5$	$l_2 S l_5$	$l_3 S l_5$	$l_4 S l_5$	-	$l_6 S l_5$
l_6	$l_1 S l_6$	$l_2 S l_6$	$l_3 S l_6$	$l_4 S l_6$	$l_5 S l_6$	-

Pour remplir notre MCP, on se basera sur cette condition si $g_j(b) \geq g_j(a) + p_j \Rightarrow aSb$ (non favorable) par conséquent, si $g_j(b) \geq g_j(a) + p_j \Rightarrow c_j(a, b) = 0$ sinon $c_j(a, b) = 1$. On a :$g_1(l_1) = 700$;$g_1(l_2) = 660$;$g_1(l_3) = 1000$;$g_1(l_4) = 720$;$g_1(l_5) = 600$;$g_1(l_6) = 800$;$q_1 = 50$ et $p_1 = q_1$.

DÉTERMINATION de la MCP du critère g_1

Vérification de $l_1 S l_2$

si $g_1(l_2) \geq g_1(l_1) + p_1 \Rightarrow c_1(l_1; l_2) = 0$ sinon $c_1(l_1; l_2) = 1$

AN : On évalue $g_1(l_2) = 660$ et $g_1(l_1) + p_1 = 700 + 50 = 750$

On remarque 660 n'est pas supérieure à 750 donc $c_1(l_1; l_2) = 1$

Vérification de $l_1 S l_3$

si $g_1(l_3) \geq g_1(l_1) + p_1 \Rightarrow c_1(l_1; l_3) = 0$ sinon $c_1(l_1; l_3) = 1$

AN : On évalue $g_1(l_3) = 1000$ et $g_1(l_1) + p_1 = 700 + 50 = 750$

On remarque 1000 est supérieure à 750 donc $c_1(l_1; l_3) = 0$

Vérification de $l_1 S l_4$

si $g_1(l_4) \geq g_1(l_1) + p_1 \Rightarrow c_1(l_1; l_4) = 0$ sinon $c_1(l_1; l_4) = 1$

AN : On évalue $g_1(l_4) = 720$ et $g_1(l_1) + p_1 = 700 + 50 = 750$

On remarque 720 n'est pas supérieure à 750 donc $c_1(l_1; l_4) = 1$

DÉTERMINATION de la MCP du critère g_1 (SUITE)

Vérification de $I_1 S I_5$

si $g_1(I_5) \geq g_1(I_1) + p_1 \Rightarrow c_1(I_1; I_5) = 0$ sinon $c_1(I_1; I_5) = 1$

AN : On évalue $g_1(I_5) = 600$ et $g_1(I_1) + p_1 = 700 + 50 = 750$

On remarque 600 n'est pas supérieure à 750 donc $c_1(I_1; I_5) = 1$

Vérification de $I_1 S I_6$

si $g_1(I_6) \geq g_1(I_1) + p_1 \Rightarrow c_1(I_1; I_6) = 0$ sinon $c_1(I_1; I_6) = 1$

AN : On évalue $g_1(I_6) = 1000$ et $g_1(I_1) + p_1 = 700 + 50 = 750$

On remarque 800 est supérieure à 750 donc $c_1(I_1; I_6) = 0$

DÉTERMINATION de la MCP du critère g_1 (SUITE)

Vérification de $l_2 S l_1$

si $g_1(l_1) \geq g_1(l_2) + p_1 \Rightarrow c_1(l_2; l_1) = 0$ sinon $c_1(l_2; l_1) = 1$

AN : On évalue $g_1(l_1) = 700$ et $g_1(l_2) + p_1 = 660 + 50 = 710$

On remarque 700 n'est pas supérieure à 710 donc $c_1(l_2; l_1) = 1$

Vérification de $l_2 S l_3$

si $g_1(l_3) \geq g_1(l_2) + p_1 \Rightarrow c_1(l_2; l_3) = 0$ sinon $c_1(l_2; l_3) = 1$

AN : On évalue $g_1(l_3) = 1000$ et $g_1(l_2) + p_1 = 660 + 50 = 710$

On remarque 1000 est supérieure à 710 donc $c_1(l_2; l_3) = 0$

Vérification de $l_2 S l_4$

si $g_1(l_4) \geq g_1(l_2) + p_1 \Rightarrow c_1(l_2; l_4) = 0$ sinon $c_1(l_2; l_4) = 1$

AN : On évalue $g_1(l_4) = 720$ et $g_1(l_2) + p_1 = 660 + 50 = 710$

On remarque 720 est supérieure 710 à donc $c_1(l_2; l_4) = 0$

DÉTERMINATION de la MCP du critère g_1 (SUITE)

Vérification de $l_2 S l_5$

si $g_1(l_5) \geq g_1(l_2) + p_1 \Rightarrow c_1(l_2; l_5) = 0$ sinon $c_1(l_2; l_5) = 1$

AN : On évalue $g_1(l_5) = 600$ et $g_1(l_2) + p_1 = 660 + 50 = 710$

On remarque 600 n'est pas supérieure à 710 donc $c_1(l_2; l_5) = 1$

Vérification de $l_2 S l_6$

si $g_1(l_6) \geq g_1(l_2) + p_1 \Rightarrow c_1(l_2; l_6) = 0$ sinon $c_1(l_2; l_6) = 1$

AN : On évalue $g_1(l_6) = 1000$ et $g_1(l_2) + p_1 = 660 + 50 = 710$

On remarque 1000 est supérieure à 710 donc $c_1(l_2; l_6) = 0$

REMARQUE

Pour une question d'exemple, le remplissage du MCP finale s'est fait en évaluant seulement le surclassement des actions I_1 et I_2 en relation avec les autres actions. L'étudiant devra faire le reste (I_3, I_4, I_5 et I_6 en relation avec les autres actions) en s'inspirant de la méthodologie déjà utilisée.

MCP finale de la MINIMISATION de g_1

	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6
I_1	-	1	1	1	0	1
I_2	1	-	1	1	0	1
I_3	0	0	-	0	0	0
I_4	1	0	1	-	0	1
I_5	1	1	1	1	-	1
I_6	0	0	1	0	1	-

DÉTERMINATION de la MCP du critère g_3

MAXIMISATION g_3

	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	l_6
l_1	-	$l_1 S l_2$	$l_1 S l_3$	$l_1 S l_4$	$l_1 S l_5$	$l_1 S l_6$
l_2	$l_2 S l_1$	-	$l_2 S l_3$	$l_2 S l_4$	$l_2 S l_5$	$l_2 S l_6$
l_3	$l_3 S l_1$	$l_3 S l_2$	-	$l_3 S l_4$	$l_3 S l_5$	$l_3 S l_6$
l_4	$l_4 S l_1$	$l_4 S l_2$	$l_4 S l_3$	-	$l_4 S l_5$	$l_4 S l_6$
l_5	$l_5 S l_1$	$l_5 S l_2$	$l_5 S l_3$	$l_5 S l_4$	-	$l_5 S l_6$
l_6	$l_6 S l_1$	$l_6 S l_2$	$l_6 S l_3$	$l_6 S l_4$	$l_6 S l_5$	-

Pour remplir notre MCP, on se basera sur cette condition si $g_j(b) \geq g_j(a) + p_j \Rightarrow aSb$ (non favorable) par conséquent, si $g_j(b) \geq g_j(a) + p_j \Rightarrow c_j(a,b) = 0$ sinon $c_j(a,b) = 1$. On a :$g_3(l_1) = 35$;$g_3(l_2) = 45$;$g_3(l_3) = 50$;$g_3(l_4) = 40$;$g_3(l_5) = 25$;$g_3(l_6) = 38$;$q_3 = 3$ et $p_3 = q_3$.

DÉTERMINATION de la MCP du critère g_3

Vérification de $I_2 S I_1$

si $g_3(I_1) \geq g_3(I_2) + p_1 \Rightarrow c_1(I_2; I_1) = 0$ sinon $c_1(I_2; I_1) = 1$
AN : On évalue $g_3(I_1) = 35$ et $g_3(I_2) + p_1 = 45 + 3 = 48$
On remarque 35 n'est pas supérieure à 48 donc $c_1(I_2; I_1) = 1$

Vérification de $I_3 S I_1$

si $g_3(I_1) \geq g_3(I_3) + p_1 \Rightarrow c_1(I_3; I_1) = 0$ sinon $c_1(I_3; I_1) = 1$
AN : On évalue $g_3(I_1) = 35$ et $g_3(I_3) + p_1 = 50 + 3 = 53$
On remarque 35 n'est pas supérieure à 53 donc $c_1(I_3; I_1) = 1$

Vérification de $I_4 S I_1$

si $g_3(I_1) \geq g_3(I_4) + p_1 \Rightarrow c_1(I_4; I_1) = 0$ sinon $c_1(I_4; I_1) = 1$
AN : On évalue $g_3(I_1) = 35$ et $g_3(I_4) + p_1 = 40 + 3 = 43$
On remarque 35 n'est pas supérieure à 43 donc $c_1(I_4; I_1) = 1$

DÉTERMINATION de la MCP du critère g_3 (SUITE)

Vérification de $l_5 S l_1$

si $g_3(l_1) \geq g_3(l_5) + p_1 \Rightarrow c_1(l_5; l_1) = 0$ sinon $c_1(l_5; l_1) = 1$

AN : On évalue $g_3(l_1) = 35$ et $g_3(l_5) + p_1 = 25 + 3 = 28$

On remarque 35 est supérieure à 28 donc $c_1(l_5; l_1) = 0$

Vérification de $l_6 S l_1$

si $g_3(l_1) \geq g_3(l_6) + p_1 \Rightarrow c_1(l_6; l_1) = 0$ sinon $c_1(l_6; l_1) = 1$

AN : On évalue $g_3(l_1) = 35$ et $g_3(l_6) + p_1 = 38 + 3 = 28$

On remarque 35 n'est pas supérieure à 41 donc $c_1(l_6; l_1) = 1$

DÉTERMINATION de la MCP du critère g_3 (SUITE)

Vérification de $l_1 S l_2$

si $g_3(l_2) \geq g_3(l_1) + p_1 \Rightarrow c_1(l_1; l_2) = 0$ sinon $c_1(l_1; l_2) = 1$

AN : On évalue $g_3(l_2) = 45$ et $g_3(l_1) + p_1 = 35 + 3 = 38$

On remarque 45 est supérieure à 38 donc $c_1(l_1; l_2) = 0$

Vérification de $l_3 S l_2$

si $g_3(l_2) \geq g_3(l_3) + p_1 \Rightarrow c_1(l_3; l_2) = 0$ sinon $c_1(l_3; l_2) = 1$

AN : On évalue $g_3(l_2) = 45$ et $g_3(l_3) + p_1 = 50 + 3 = 53$

On remarque 45 n'est pas supérieure à 53 donc $c_1(l_3; l_2) = 1$

Vérification de $l_4 S l_2$

si $g_3(l_2) \geq g_3(l_4) + p_1 \Rightarrow c_1(l_4; l_2) = 0$ sinon $c_1(l_4; l_2) = 1$

AN : On évalue $g_3(l_2) = 45$ et $g_3(l_4) + p_1 = 40 + 3 = 43$

On remarque 45 est supérieure à 43 donc $c_1(l_4; l_2) = 0$

DÉTERMINATION de la MCP du critère g_3 (SUITE)

Vérification de $l_5 S l_2$

si $g_3(l_2) \geq g_3(l_5) + p_1 \Rightarrow c_1(l_5; l_2) = 0$ sinon $c_1(l_5; l_2) = 1$

AN : On évalue $g_3(l_2) = 45$ et $g_3(l_5) + p_1 = 25 + 3 = 28$

On remarque 45 est supérieure à 28 donc $c_1(l_5; l_2) = 0$

Vérification de $l_6 S l_2$

si $g_3(l_2) \geq g_3(l_6) + p_1 \Rightarrow c_1(l_6; l_2) = 0$ sinon $c_1(l_6; l_2) = 1$

AN : On évalue $g_3(l_2) = 45$ et $g_3(l_6) + p_1 = 38 + 3 = 28$

On remarque 45 est supérieure à 41 donc $c_1(l_6; l_2) = 0$

REMARQUE

Pour une question d'exemple, le remplissage du MCP finale s'est fait en évaluant seulement le surclassement des actions I_1 et I_2 en relation avec les autres actions. L'étudiant devra faire le reste (I_3, I_4, I_5 et I_6 en relation avec les autres actions) en s'inspirant de la méthodologie déjà utilisée.

MCP finale de la MAXIMISATION de g_3

	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6
I_1	-	0	0	0	1	1
I_2	1	-	0	1	1	1
I_3	1	1	-	1	1	1
I_4	1	0	0	-	1	1
I_5	0	0	0	0	-	0
I_6	1	0	0	1	1	-

MCP de g_1

$S \nearrow$	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6
I_1	-	1	1	1	0	1
I_2	1	-	1	1	0	1
I_3	0	0	-	0	0	0
I_4	1	0	1	-	0	1
I_5	1	1	1	1	-	1
I_6	0	0	1	0	1	-

MCP de g_2

$S \nearrow$	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6
I_1	-	1	0	0	1	1
I_2	0	-	0	0	1	0
I_3	1	1	-	1	1	1
I_4	1	1	1	-	1	1
I_5	0	1	0	0	-	0
I_6	1	1	0	0	1	-

MCP de g_3

$S \nearrow$	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6
I_1	-	0	0	0	1	1
I_2	1	-	0	1	1	1
I_3	1	1	-	1	1	1
I_4	1	0	0	-	1	1
I_5	0	0	0	0	-	0
I_6	1	0	0	1	1	-

REMARQUE

Au regard des MCP, l'on constate que $I_4 S I_6$ sur tous les critères $\Rightarrow$ $I_4 \triangle I_6$ par conséquent, on peut éliminer I_6.

MCP de $g_1, k_1 = 0.4$

$S \nearrow$	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5
l_1	-	1	1	1	0
l_2	1	-	1	1	0
l_3	0	0	-	0	0
l_4	1	0	1	-	0
l_5	1	1	1	1	-

MCP de $g_2, k_2 = 0.4$

$S \nearrow$	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5
l_1	-	1	0	0	1
l_2	0	-	0	0	1
l_3	1	1	-	1	1
l_4	1	1	1	-	1
l_5	0	1	0	0	-

MCP de $g_3, k_3 = 0.2$

$S \nearrow$	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5
l_1	-	0	0	0	1
l_2	1	-	0	1	1
l_3	1	1	-	1	1
l_4	1	0	0	-	1
l_5	0	0	0	0	-

MCG

$S \nearrow$	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5
l_1	-	0,8	0,4	0,4	0,6
l_2	$\frac{0{,}4\cdot 1+0{,}4\cdot 0+0{,}2\cdot 1}{0{,}4+0{,}4+0{,}2}$	-	0,4	0,6	0,6
l_3	0,6	0,6	-	0,6	0,6
l_4	1	0,4	0,8	-	0,6
l_5	0,5	0,8	0,4	$\frac{0{,}4\cdot 1+0{,}4\cdot 0+0{,}2\cdot 0}{0{,}4+0{,}4+0{,}2}$	-

MATRICE DE DISCORDANCE GLOBALE (MDG)

Pour déterminer, la MDG on recherchera la Matrice de Discordance Partielle (MDP).Pour ce faire, parmi les critères qui ne sont pas concordants avec l'assertion aSb, certains peuvent exprimer une forte opposition, un veto, conduisant à rejeter aSb. Un critère g_j pourra ainsi opposer son veto à l'assertion aSb lorsque $g_j(a)$ est beaucoup plus faible que $g_j(b)$. On définit donc pour chaque critère g_j un seuil de veto v_j où $v_j \geq p_j (j = 1, \cdots, p)$. Dès qu'il existe un critère g_j tel que $g_j(b) \geq g_j(a) + v_j$, l'assertion aSb est rejetée. Notons que plus le seuil v_j est faible, plus le pouvoir de veto de g_j est grand.

Ainsi dit, pour construire le MDP de chaque critère, on s'intéresser aux 0 qui sont dans le MCP correspondant. Le 0 parce que cela correspond à " **le critère g_j n'est pas concordant avec l'assertion aSb**".

Matrice de Discordance Partielle

si $g_j(b) \geq g_j(a) + v_j \Rightarrow aSb$ est rejetée =1 sinon aSb est acceptée =0.
Dans le principe, on ne s'intéresse qu'aux 1 qui se trouve dans la MCP de chaque critère. L'objectif est de vérifier par la condition (en jaune) si on maintient le 0 ou bien on le transforme en 1.

MCP de g_1

	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5
l_1	-	1	1	1	0
l_2	1	-	1	1	0
l_3	0	0	-	0	0
l_4	1	0	1	-	0
l_5	1	1	1	1	-

$\Rightarrow$

MDP de $g_1, v_1 = 400$

	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5
l_1	-	0	0	0	0
l_2	0	-	0	0	0
l_3	0	0	-	0	1
l_4	0	0	0	-	0
l_5	0	0	0	0	-

si $g_1(l_3) \geq g_1(l_1) + v_1 \Rightarrow l_1 S l_3$ est rejetée =1 sinon $l_1 S l_3$ est acceptée =0. AN :$g_1(l_3) = 1000$ et $g_1(l_1) + v_1 = 700 + 400 = 1100$, on remarque 1000 n'est pas supérieur à 1100 donc $l_1 S l_3$ est acceptée =0. si $g_1(l_3) \geq g_1(l_5) + v_1 \Rightarrow l_5 S l_3$ est rejetée =1 sinon $l_5 S l_3$ est acceptée =0. AN :$g_1(l_3) = 1000$ et $g_1(l_5) + v_1 = 600 + 400 = 1000$, on remarque 1000 est égale à 1000 donc $l_5 S l_3$ est rejetée =1.

MCP de $g_2, k_2 = 0.4$

	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5
l_1	-	1	0	0	1
l_2	0	-	0	0	1
l_3	1	1	-	1	1
l_4	1	1	1	-	1
l_5	0	1	0	0	-

$\Rightarrow$

MDP de $g_2, v_2 = 20$

	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5
l_1	-	0	0	0	0
l_2	0	-	1	1	0
l_3	0	0	-	0	0
l_4	0	0	0	-	0
l_5	0	0	1	0	-

MCP de $g_3, k_3 = 0.2$

	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5
l_1	-	0	0	0	1
l_2	1	-	0	1	1
l_3	1	1	-	1	1
l_4	1	0	0	-	1
l_5	0	0	0	0	-

$\Rightarrow$

MDP de $g_3, v_3 = 40$

	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5
l_1	-	0	0	0	0
l_2	0	-	0	0	0
l_3	0	0	-	0	0
l_4	0	0	0	-	0
l_5	0	0	0	0	-

MDP de $g_1, v_1 = 400$

	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5
l_1	-	0	0	0	0
l_2	0	-	0	0	0
l_3	0	0	-	0	1
l_4	0	0	0	-	0
l_5	0	0	0	0	-

MDP de $g_2, v_2 = 20$

	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5
l_1	-	0	0	0	0
l_2	0	-	1	1	0
l_3	0	0	-	0	0
l_4	0	0	0	-	0
l_5	0	0	1	0	-

MDP de $g_3, v_3 = 40$

	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5
l_1	-	0	0	0	0
l_2	0	-	0	0	0
l_3	0	0	-	0	0
l_4	0	0	0	-	0
l_5	0	0	0	0	-

Matrice de Discordance

	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5
l_1	-	0	0	0	0
l_2	0	-	1	1	0
l_3	0	0	-	0	$\max(1,0,0)=1$
l_4	0	0	0	-	0
l_5	0	0	1	0	-

Test Surclassement

Afin d'accepter aSb on doit vérifier les deux conditions suivantes :

1. une condition de concordance : $C(a, b) > s$
2. une condition de **non discordance** : $g_j(b) < g_j(a) + v_j$, $\forall j \in \{1; \cdots; p\}$

où s représente le seuil de concordance. La condition de concordance s'inspirant d'un principe de type majoritaire, il est légitime d'imposer $s > 0,5$. En pratique, on prend des valeurs entre 0,6 et 0,9.

Matrice de Non-Discordance

Formule :**Matrice de non-Discordance**$=1_{m \times m}$-**Matrice de Concordance, avec m=lignes et colonnes.**

MATRICE DE NON DISCORDANCE

	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5
l_1	-	1	1	1	1
l_2	1	-	0	0	1
l_3	1	1	-	1	0
l_4	1	1	1	-	1
l_5	1	1	0	1	-

$$= 1_{5\times 5} -$$

Matrice de Discordance

	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5
l_1	-	0	0	0	0
l_2	0	-	1	1	0
l_3	0	0	-	0	1
l_4	0	0	0	-	0
l_5	0	0	1	0	-

$$\text{avec } 1_{5\times 5} = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

Matrice de surclassement

Pour déterminer la matrice de surclassement, on fait une multiplication point à point entre la Matrice de Concordance Globale (MCG) et la Matrice Non-Discordance (MN-D).

Exemple de multiplication point à point

$$A = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \times B = \begin{matrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{matrix} = C = \begin{matrix} a_{11} \times b_{11} & a_{12} \times b_{12} & a_{13} \times b_{13} \\ a_{21} \times b_{21} & a_{22} \times b_{22} & a_{23} \times b_{23} \\ a_{31} \times b_{31} & a_{32} \times b_{32} & a_{3} \times b_{33} \end{matrix}$$

MCG

	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5
l_1	-	0,8	0,4	0,4	0,6
l_2	0,6	-	0,4	0,6	0,6
l_3	0,6	0,6	-	0,6	0,6
l_4	1	0,4	0,8	-	0,6
l_5	0,5	0,8	0,4	0.4	-

$\times$

Matrice de Non-Discordance

	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5
l_1	-	1	1	1	1
l_2	1	-	0	0	1
l_3	1	1	-	1	0
l_4	1	1	1	-	1
l_5	1	1	0	1	-

RÉSULTAT DU CALCUL

	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5
l_1	-	0,8	0,4	0,4	0,6
l_2	0,6	-	0	0	0,6
l_3	0,6	0,6	-	0,6	0
l_4	1	0,4	0,8	-	0,6
l_5	0,5	0,8	0	0.4	-

$s \geq 0,8$

Matrice de Surclassement

$S \nearrow$	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5
l_1	-	1	-	-	-
l_2	-	-	-	-	-
l_3	-	-	-	-	-
l_4	1	-	1	-	-
l_5	-	1	-	-	-

$l_1 S l_2 \Rightarrow \ell_1 \longrightarrow \ell_2$

$l_5 S l_2 \Rightarrow \ell_5 \longrightarrow \ell_2$

$l_4 S l_3 \Rightarrow \ell_4 \longrightarrow \ell_3$

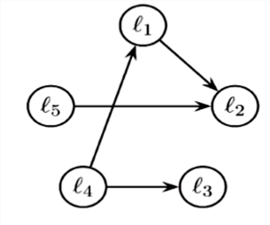
$l_4 S l_1 \Rightarrow \ell_4 \longrightarrow \ell_1$

Matrice de Surclassement

$S \nearrow$	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5
l_1	-	1	-	-	-
l_2	-	-	-	-	-
l_3	-	-	-	-	-
l_4	1	-	1	-	-
l_5	-	1	-	-	-

$\Rightarrow$

Graphe de Surclassement



Matrice de Surclassement

$S \nearrow$	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5
l_1	-	1	-	-	-
l_2	-	-	-	-	-
l_3	-	-	-	-	-
l_4	1	-	1	-	-
l_5	-	1	-	-	-

$\Rightarrow$

Lecture de surclassement de la matrice

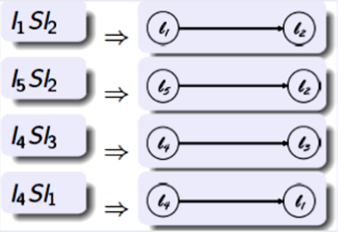
$l_1 \, S \, l_2$

$l_5 \, S \, l_2$

$l_4 \, S \, l_3$

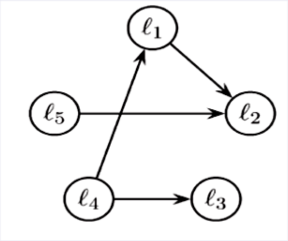
$l_4 \, S \, l_1$

Traduction du surclassement en arc



$\Rightarrow$

Graphe de surclassement



Définition du Noyau

Une fois que la relation de surclassement est construite, il convient de l'exploiter afin de dégager le sous-ensemble des actions les meilleures. Considérant le graphe correspondant, on s'intéressera à un sous-ensemble d'actions $N \subset A$, appelé noyau du graphe, vérifiant les deux propriétés suivantes :

- deux sommets quelconques d'un noyau ne peuvent pas être adjacents : $\forall a \in N, \forall b \in N, non(aSb)etnon(bSa)$
- pour tout sommet hors du noyau, il existe un arc depuis un sommet du noyau vers ce sommet :$\forall \notin b \in N \exists a \in N : aSb$

Un noyau est donc un sous-ensemble d'actions incomparables tel que toute action ne faisant pas partie du noyau est surclassée par au moins une action du noyau.

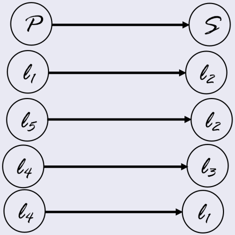
Algorithme de détermination du noyau

$$\mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{S}$$

P=Prédécesseur et S=Successeur

Tant que possible faire
(1) Marquer tout sommet (ou action) dont la liste est vide (sans prédécesseurs)
(2) Barrer tout sommet (ou action) qui contient au moins un sommet (ou action) marqué dans sa liste
(3) Supprimer des listes les sommets (ou actions) barrés
L'ensemble des sommets (ou action) marqués à l'issue de l'algorithme constitue le noyau.

Exécution de l'algorithme :Remplissage du tableau



Actions=Sommets	P	S
l_1	l_4	l_2
l_2	l_5	
l_3	l_4	
l_4		l_3
l_5		l_2

Exécution de l'algorithme :(1) Marquer tout sommet (ou action) dont la liste est vide (sans prédécesseurs)

Ici, les actions ou les sommets marqués en rouge désignent ceux qui n'ont pas de prédécesseurs.

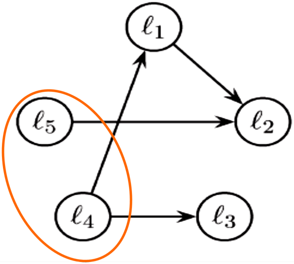
Actions=Sommets	P	S
I_1	I_4	I_2
I_2	I_5	
I_3	I_4	
I_4		I_3
I_5		I_2

Exécution de l'algorithme :(2) Barrer tout sommet (ou action) qui contient au moins un sommet marqué dans sa liste

Actions=Sommets	P	S
$\cancel{I_1}$	I_4	I_2
$\cancel{I_2}$	I_5	
$\cancel{I_3}$	I_4	
I_4		I_3
I_5		I_2

Le Noyau

Un noyau est donc un sous-ensemble d'actions incomparables tel que toute action ne faisant pas partie du noyau est surclassée par au moins une action du noyau.
Ici, le noyau est $N = \{l_4; l_5\}$ car on remarque l_4 et l_5 sont incomparables et surclassent d'autres actions.
Remarque : L'incomparabilité est la propriété fondamentale dans la détermination des éléments (ou actions) du noyau.



Test de robustesse

Le test de robustesse consiste à faire varier tous les seuils vus dans le cours et les poids des différents critères. L'objectif est double :

1. évaluer l'influence de la variation des poids et des seuils ;
2. permettre de faire ressortir l'action qui apparait dans toutes les évaluations.

Exercice à faire

Dans l'exercice "exemple 2 : choix de logement" qui se trouve dans le fichier pdf qui vous a été remis et que j'ai développé dans cette partie du cours, je vous demande de faire le graphe de surclassement pour $s \leq 0.6$ et déterminer le noyau.

Surclassement

	Approche Unicritère	Somme pondérée	Comparaisons par paires
Bien-fondé	Mathématique	Economique	Economique
Compensation entre critères	-	Totale	Partielle
Echelles	-	Liées aux poids des critères	Prises en compte
Détection des conflits	-	Non	Oui