

Analisi 3

A cura di Manuel Trezzi

12 dicembre 2017

Indice

1	Successioni e serie di funzioni	5
1.1	Successioni di funzioni	5
1.1.1	Convergenza puntuale	5
1.1.2	Convergenza uniforme	6
1.1.3	Proprietà della convergenza uniforme	7
1.2	Serie di funzioni	10
1.2.1	Convergenza di una serie di funzioni	10
1.2.2	Serie di potenze	12
2	Funzioni implicite	17
2.1	Premessa	17
2.2	Teorema di Dini	17
2.3	Contrazioni e Teorema del punto fisso	19
2.4	Teorema di Invertibilità locale	21
2.5	Teorema di Dini (Multidimensionale)	23
2.6	Estremi vincolati	24
3	Equazioni Differenziali	27
3.1	Equazioni di forma speciale	28
3.1.1	Equazioni lineari del primo ordine	28
3.1.2	Equazioni a variabile separabile	29
3.1.3	Equazioni di Bernoulli	30
3.2	Semplificazioni di equazioni differenziali generiche	30
3.2.1	Da equazione di ordine k a equazione del primo ordine	31
3.2.2	Passaggio a integrale	31
3.3	Teoremi di esistenza e unicità	32
3.4	Stabilità rispetto al modello e ai dati iniziali	36

Capitolo 1

Successioni e serie di funzioni

1.1 Successioni di funzioni

1.1.1 Convergenza puntuale

Definizione 1.1.1: Sia X un insieme qualunque e sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$, diciamo che $\{f_n\}$ converge puntualmente (o semplicemente) in X alla funzione $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ se $\forall x_0 \in X$ si ha che:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = f(x_0)$$

Analogamente possiamo dire che:

$$\forall x_0 \in X \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists N = N(x_0, \epsilon): \text{ se } n \geq N \Rightarrow |f_n(x_0) - f(x_0)| < \epsilon$$

Osservazione 1.1.2:

- L'eventuale struttura di X non ha ruolo
- Essendo x_0 fissato $\{f_n(x_0)\}$ e $f(x_0)$ sono numeri, la relazione $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = f(x_0)$ è quindi quella di successioni in \mathbb{R}
- \mathbb{R} è uno spazio metrico quindi rispetta la proprietà di Hausdorff, questo vuol dire che il limite se esiste è unico. La funzione f è univocamente determinata

$$f(x_0) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0)$$

- Nella definizione si può sostituire \mathbb{R} con \mathbb{R}^n o un qualsiasi altro spazio metrico

La convergenza puntuale non preserva proprietà importanti quali: limitatezza, continuità, derivabilità e integrabilità

Esempio 1.1.3: $f_n(x) \rightarrow f(x)$ con f_n limitata $\forall n$ non implica che f sia limitata.

$f_n(x) = \min(|x|, n)$, ogni f_n è limitata ma la successione converge puntualmente a $f(x) = |x|$ che non è limitata

Esempio 1.1.4: $f_n(x) \rightarrow f(x)$ con f_n continua $\forall n$ non implica che f sia continua.

$f_n(x) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ $f_n(x) = x^n$, le f_n sono continue ma la successione converge puntualmente a

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = 1 \\ 0 & x \in [0, 1) \end{cases}$$

f non è continua

Esempio 1.1.5: $f_n(x) \rightarrow f(x)$ con f_n integrabile $\forall n$ non implica che f sia integrabile.

$f_n(x) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ con

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & x = \frac{a}{2^n}, a \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

le f_n sono Riemann integrabili ma la successione converge puntualmente a

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = \frac{a}{2^b}, a, b \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

siccome i due insiemi di discontinuità sono densi l'uno nell'altro la funzione non è integrabile

Esempio 1.1.6: $f_n(x) \rightarrow f(x)$ con f_n derivabile $\forall n$ non implica che f sia derivabile.

$f_n(x) : \Omega \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con Ω aperto $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$, tutte le f_n sono derivabili ma la successione converge puntualmente a $f(x) = |x|$ che non è derivabile

1.1.2 Convergenza uniforme

Definizione 1.1.7: Sia X un insieme qualunque e sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$, diciamo che $\{f_n\}$ converge uniformemente in X alla funzione $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ se:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) : \text{se } n \geq N \Rightarrow |f_n(x_0) - f(x_0)| < \epsilon \forall x_0 \in X$$

A differenza della definizione di convergenza puntuale la convergenza uniforme richiede che lo stesso ϵ valga per ogni x_0

Definizione 1.1.8: Data $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ definiamo $\|g\|_{\infty, X} := \sup |g(x)|$ $x \in X$, il perchè lo indichiamo con il simbolo di norma lo vedremo in seguito

Possiamo riscrivere la definizione 1.2 attraverso questo nuovo concetto

$$\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) : \text{se } n \geq N \Rightarrow \|f_n - f\|_{\infty, X} < \epsilon$$

Ovvero che: $n \leq N \Rightarrow \sup |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$

Proposizione 1.1.9: Data $\{f_n\} : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, se $\{f_n\}$ converge uniformemente a f in X allora converge puntualmente alla stessa f $\forall x \in X$. La convergenza uniforme è una condizione più forte della convergenza semplice.

Dimostrazione: Fissato $x_0 \in X$ e si ha che $|f_n(x_0) - f(x_0)| \leq \sup |f_n - f| = \|f_n - f\|_{\infty, X}$ quindi se non ci fosse convergenza puntuale non potrebbe esistere convergenza uniforme. \square

1.1.3 Proprietà della convergenza uniforme

Teorema 1.1.10: Data $\{f_n\} : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, se $\{f_n\}$ converge uniformemente a f in X allora se ogni f_n è limitata f è limitata

Dimostrazione: Scelgo $\epsilon = 1$ nella definizione di convergenza uniforme quindi $\exists N = N(\epsilon)$: se $n \geq N \Rightarrow |f_n(x_0) - f(x_0)| < 1$

Scriviamo $|f(x)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x)| \leq 1 + \|f_n\|_{\infty, X}$ per la nostra scelta fatta su ϵ

Dall'ipotesi di limitatezza si ha che $\|f_n\|_{\infty, X} < \infty$ da cui deduciamo $\sup |f(x)| \leq 1 + \|f_n\|_{\infty, X} < \infty$ quindi f limitata. \square

Teorema 1.1.11: Data $\{f_n\} : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ (con $X \subseteq \mathbb{R}$) con $\{f_n\} \rightarrow f$ uniformemente in X allora se ogni f_n è continua in $x_0 \in X$ anche f è continua in x_0

Dimostrazione: Se $x_0 \in X$ è un punto isolato la funzione è sicuramente continua quindi scelgo x_0 d'accumulazione, fisso $\epsilon > 0$ e dalla definizione di convergenza uniforme segue che $\exists N = N(\epsilon)$: se $n \geq N \Rightarrow |f_n(x_0) - f(x_0)| < \epsilon$. Scrivo che:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \end{aligned}$$

Il primo e il terzo addendo sono ciascuno $< \epsilon$ per l'ipotesi di convergenza uniforme perciò:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq 2\epsilon + |f_n(x) - f_n(x_0)|$$

Dall'ipotesi che le $\{f_n\}$ sono continue so che $\exists \delta = \delta(\epsilon)$: se $|x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(x_0)| < \epsilon$ quindi $|f(x) - f(x_0)| \leq 3\epsilon$. \square

Definizione 1.1.12: Definiamo $B(X, \mathbb{R}) := \{f : X \rightarrow \mathbb{R}, \sup |f(x)| < \infty\}$ come l'insieme delle funzioni limitate da X in \mathbb{R}

Osservazione 1.1.13: $B(X, \mathbb{R})$ è uno spazio vettoriale infatti $\sup |(f + g)(x)| = \sup |f(x) + g(x)| \leq \|f\|_{\infty, X} + \|g\|_{\infty, X} < \infty$ quindi la somma di due funzioni limitate è limitata e se moltiplico per uno scalare $|\lambda f(x)| = |\lambda| \cdot |f(x)| \leq \sup |f(x)| = \sup |f(x)| = |\lambda| \cdot \|f\|_{\infty, X}$ ottengo sempre una funzione limitata

Osservazione 1.1.14: $\|f\|_{\infty, X}$ è una norma su $B(X, \mathbb{R})$

- $\|f\|_{\infty, X} \geq 0$ e $\|f\|_{\infty, X} = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0$
- Rispetta la disuguaglianza triangolare (si veda sopra)
- $\|\lambda f\|_{\infty, X} = |\lambda| \cdot \|f\|_{\infty, X}$

Proposizione 1.1.15: $B(X, \mathbb{R})$ dotato della norma $\|f\|_{\infty, X}$ è uno spazio normato completo (è uno spazio di Banach)

Dimostrazione: Vogliamo dimostrare che ogni sequenza di Cauchy è convergente. Sia $\{f_n\}$ una successione di Cauchy, per definizione $\forall \epsilon > 0$ si ha che: $\exists N = N(\epsilon)$: se $n, m \geq N \Rightarrow \|f_n - f_m\|_{\infty, X} < \epsilon$

Fisso x_0 nello spazio, $\epsilon > 0$ e N come sopra quindi per $m, n \geq N$:

$$|f_n(x_0) - f_m(x_0)| \leq \sup |f_n(x) - f_m(x)| = \|f_n - f_m\|_{\infty, X} < \epsilon$$

Quindi la successione $\{f_n(x_0)\}$ è di Cauchy in \mathbb{R} che è completo $\Rightarrow \{f_n(x_0)\}$ converge $\forall x_0 \in X$ scelto arbitrariamente $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0)$ esiste $\forall x_0 \in X$. Sia $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ allora $\{f_n\} \rightarrow f$ puntualmente

Dalla proprietà di Cauchy segue che $\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon)$: se $n, m \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$ $\forall x$ per cui se fisso x_0 ho $|f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \epsilon$, prendo il limite per m che tende a $+\infty$ e ho $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \epsilon$ e siccome x_0 è arbitrario e N non dipende da esso la convergenza è uniforme $\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon)$: se $n \geq N \Rightarrow \|f_n - f\|_{\infty, X} < \epsilon$. \square

Definizione 1.1.16: Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ aperto $C(\Omega, \mathbb{R}) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ continua}\}$, prendiamo l'intersezione $C(\Omega, \mathbb{R}) \cap B(\Omega, \mathbb{R}) =: CB(\Omega, \mathbb{R})$ ovvero l'insieme delle funzioni continue e limitate in Ω

Proposizione 1.1.17: $CB(\Omega, \mathbb{R})$ dotato della norma $\|f\|_{\infty, X}$ è uno spazio di Banach

Dimostrazione: Per la proposizione precedente, poichè siamo in un sottoinsieme di uno spazio completo, è sufficiente provare la chiusura dell'insieme. Sia $\{f_n\} \subseteq CB(\Omega, \mathbb{R})$ che converge puntualmente a $f \in B(\Omega, \mathbb{R})$, siccome la convergenza è uniforme f sta anche in $C(\Omega, \mathbb{R}) \Rightarrow f \in CB(\Omega, \mathbb{R})$. \square

Teorema 1.1.18: Siano $\{f_n\}, f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $\{f_n\} \rightarrow f$ uniformemente e $\{f_n\} \in \mathcal{R}([a, b])$ allora:

- $f \in \mathcal{R}([a, b])$
- $|\int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx| \leq (b - a) \cdot \|f_n - f\|_{\infty, X}$ quindi $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$ ovvero $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$ (limite e integrale con queste ipotesi si possono scambiare)

Dimostrazione: Per l'ipotesi di convergenza uniforme fisso $\epsilon > 0$ per cui $\exists N = N(\epsilon)$: se $n \geq N \Rightarrow \|f_n - f\|_{\infty, [a, b]} < \epsilon$. Siccome $\{f_n\} \in \mathcal{R}([a, b]) \exists P$ partizione per la quale:

$$\sum_{j=1}^n (\widetilde{M}_{j,N} - \widetilde{m}_{j,N}) \cdot (x_j - x_{j-1}) \leq \epsilon$$

dove $\widetilde{M}_{j,N} := \sup_{[x_{j-1}, x_j]} f_n(x)$ e $\widetilde{m}_{j,N} := \inf_{[x_{j-1}, x_j]} f_n(x)$.

Poniamo $f(x) = f_n(x) + f(x) - f_n(x)$ da cui:

$$f(x) \leq f_n(x) + |f(x) - f_n(x)| \leq f_n(x) + \|f_n - f\|_{\infty, [a, b]} \leq f_n(x) + \epsilon$$

quindi se $x \in [x_{j-1}, x_j]$ ho $f(x) \leq \sup f_n(x) + \epsilon = \widetilde{M}_{j,N} + \epsilon$ perciò $M_{j,N} := \sup f(x) \leq \widetilde{M}_{j,N} + \epsilon$.

Passiamo ora a $f(x) \geq f_n(x) - |f(x) - f_n(x)| \geq f_n(x) - \|f_n - f\| \geq f_n(x) - \epsilon$ quindi se $x \in [x_{j-1}, x_j]$ ho $f(x) \geq \inf f_n(x) - \epsilon = \tilde{m}_{j,N} + \epsilon$ perciò $m_{j,N} := \inf f(x) \geq \tilde{m}_{j,N} + \epsilon$.

Ora sappiamo che:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n (\tilde{M}_{j,N} - \tilde{m}_{j,N}) \cdot (x_j - x_{j-1}) &\leq \sum_{j=1}^n (M_{j,N} - m_{j,N} + 2\epsilon) \cdot (x_j - x_{j-1}) \\ &= \sum_{j=1}^n (M_{j,N} - m_{j,N}) \cdot (x_j - x_{j-1}) + 2\epsilon \sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1}) \leq \epsilon + 2\epsilon(b-a) \end{aligned}$$

$$|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx| = |\int_a^b (f_n(x) - f(x))dx| \leq \int_a^b \|f_n - f\|_{\infty, [a,b]} dx = \|f_n - f\|_{\infty, [a,b]}(b-a) \quad \square$$

Osservazione 1.1.19: Integrale e limite in generale non possono essere scambiati

$$f_n(x) = \begin{cases} n & x \in (\frac{1}{n}, \frac{2}{n}) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

quindi $\{f_n\} \rightarrow f \equiv 0$. Si ha che $\int_0^1 f_n(x)dx = 1 \forall n$ perciò $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 1$ ma $\int_0^1 f(x)dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)dx = 0$

Osservazione 1.1.20: Il teorema non vale per gli integrali impropri

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & x \in (-n, n) \\ 0 & |x| \geq n \end{cases}$$

Allora $\{f_n\} \rightarrow f$ uniformemente in \mathbb{R} poichè $\sup |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{n} \rightarrow 0$. Valutiamo gli integrali $\int_{\mathbb{R}} f_n = 2$ ma $\int_{\mathbb{R}} f = 0$

Osservazione 1.21: La convergenza uniforme non preserva la derivabilità. Si consideri l'esempio 1.4 e si osservi che $\{f_n\} \rightarrow f$ uniformemente.

Teorema 1.1.22: Sia $\{f_n\} : (a, b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e supponiamo che $f_n(x_0)$ converga a un numero l con $x_0 \in (a, b)$, ipotizziamo anche che ogni f_n è derivabile in (a, b) e che $\exists g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\{f'_n\} \rightarrow g$ uniformemente allora:

- $\exists f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\{f_n\} \rightarrow f \quad \forall x \in (a, b)$
- la convergenza è uniforme sui compatti contenuti in (a, b)
- f è derivabile e $f'(x) = g(x) \quad \forall x \in (a, b)$ ovvero $\frac{d}{dx}(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n)(x) = (\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{d}{dx} f_n))(x)$

Dimostrazione: Per semplificarci il lavoro supponiamo inoltre che f'_n siano continue $\forall n$ (il teorema è comunque valido senza questa ipotesi aggiuntiva).

Vale che $f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f'_n(u)du$, g è il limite uniforme delle $\{f'_n\}$ continue quindi anche g è continua. Sia

$$f(x) := l + \int_{x_0}^x g(u)du$$

f è ben definita per quanto detto su g e derivabile in (a, b) con derivata g continua $\Rightarrow f \in C^1((a, b))$.

Prendiamo $f_n(x) - f(x) = f_n(x_0) - l + \int_{x_0}^x (f'_n(u) - g(u))du$. Per la disuguaglianza triangolare:

$$f_n(x) - f(x) \leq |f_n(x_0) - l| + \left| \int_{x_0}^x (f'_n(u) - g(u))du \right|$$

Sia $K = [\alpha, \beta]$ compatto in (a, b) allora tornando alla disuguaglianza si ha:

$$\begin{aligned} f_n(x) - f(x) &\leq |f_n(x_0) - l| + \left| \int_{x_0}^x \|f'_n - g\|_{\infty, K} du \right| = \\ |f_n(x_0) - l| + \|f'_n - g\|_{\infty, (a, b)} |x - x_0| &\leq |f_n(x_0) - l| + \|f'_n - g\|_{\infty, (a, b)} |\beta - \alpha| \end{aligned}$$

Abbiamo quindi stimato $\|f_n - f\|_{\infty, K} \leq |f_n(x_0) - l| + \|f'_n - g\|_{\infty, (a, b)} |\beta - \alpha|$ ma entrambi gli addendi per ipotesi tendono a zero quindi $\|f_n - f\|_{\infty, K} \rightarrow 0$ ovvero la convergenza è uniforme su K compatto; inoltre siccome K è arbitrario si ha convergenza puntuale su tutto (a, b) . \square

Esercizio 1.1.23: Sia $C^1B((a, b)) := \{f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, f \in C^1 \text{ e limitata}\}$ verificare che è uno spazio vettoriale e data $\|f\|_1 := \|f\|_{\infty, (a, b)} + \|f'\|_{\infty, (a, b)}$ dimostrare che è ben definita ed è una norma, C^1B dotato della norma $\|\cdot\|_1$ è uno spazio di Banach.

Esercizio 1.1.24: Sia x_0 fissato allora anche $\|f\|_2 := |f(x_0)| + \|f'\|_{\infty, (a, b)}$ è una norma ed inoltre $\frac{1}{b-a+1} \|f\|_1 \leq \|f\|_2 \leq \|f\|_1$. Segue che le due norme sono equivalenti e C^1B è uno spazio di Banach anche con la norma $\|\cdot\|_2$

1.2 Serie di funzioni

1.2.1 Convergenza di una serie di funzioni

Siano $\{f_k\} : X \rightarrow \mathbb{R}$ costruisco $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ come limite della successione delle somme parziali $S_n = \sum_{k=0}^n f_k$; $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ rappresenta il limite delle S_n qualora esso dovesse esistere in qualche senso.

Osservazione 1.2.0: Con questa notazione si possono vedere le successioni come caso particolare delle successioni in realtà si può scrivere ogni serie come una successione e viceversa. Si potrebbero studiare prima le serie e poi le successioni viste come caso particolare di serie.

Osservazione 1.2.1: C'è un abuso di notazione: il simbolo $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ all'inizio indica la successione delle somme parziali, una volta stabilita la sua convergenza passa ad indicare il limite della successione

Dalla definizione di \sum come limite della sequenza delle somme parziali segue che ogni risultato per la convergenza delle successioni si trasmette alla serie. Quindi $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ converge uniformemente in X se la successione $S_n = \sum_{k=0}^n f_k$ converge uniformemente $\Rightarrow \{S_n\}$ è di Cauchy ovvero $\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) : m, n \geq N \Rightarrow \|\sum_{k=n}^m f_k\|_{\infty, X} = \|S_m - S_n\|_{\infty, X} < \epsilon$

Supponiamo che $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ sia di Cauchy in norma sup, sia $X \Rightarrow$ la sequenza S_n è di Cauchy con norma sup su $X \Rightarrow S_n$ è limitata (perchè di Cauchy) $S_n \in B(X, \mathbb{R})$ e siccome B è completo \exists limite uniforme delle S_n ovvero che:

$$f := \sum_{k=0}^{\infty} f_k = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k$$

Definizione 1.2.2: Data $\{f_k\} : X \rightarrow \mathbb{R}$ la $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ converge uniformemente in X se e solo se è rispettata la condizione di Cauchy ovvero:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) : m \geq n \geq N \Rightarrow \left\| \sum_{k=n}^m f_k \right\|_{\infty, X} < \epsilon$$

Corollario 1.2.3: Data $\{f_k\} : X \rightarrow \mathbb{R}$ se $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ converge uniformemente allora $\|f_k\|_{\infty, X} \rightarrow 0$

Osservazione 1.2.4: Il criterio è solo necessario.

Dimostrazione: Basta prendere $m = n$ nella definizione.

Corollario (Criterio di Weierstrass) 1.2.5: Se $\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_{\infty, X}$ converge allora $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ converge uniformemente.

Dimostrazione: Fisso $\epsilon > 0$, siccome $\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_{\infty, X}$ converge $\exists N = N(\epsilon) : m \geq n \geq N \Rightarrow \sum_{k=n}^m \|f_k\|_{\infty, X} \leq \epsilon$ ma allora

$$\left\| \sum_{k=n}^m f_k \right\|_{\infty, X} \leq \sum_{k=n}^m \|f_k\|_{\infty, X} < \epsilon$$

quindi $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ soddisfa la condizione equivalente alla convergenza uniforme. \square

Osservazione 1.2.6: Il valore di $\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_{\infty, X}$ non ha alcun ruolo, per applicare Weierstrass basta stabilire la sua esistenza come numero in \mathbb{R} . Quindi si può non calcolare il valore di $\|f_k\|_{\infty, X}$, basta avere delle stime.

Esercizio 1.2.7: Stabilire se $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^2 + e^k x}$ converge uniformemente. Sia $f_k = \frac{\sin kx}{k^2 + e^k x}$ allora

$$|f_k(x)| \leq \frac{1}{k^2 + e^k x} \leq \frac{1}{k^2} \Rightarrow \|f_k\|_{\infty, \mathbb{R}} \leq \frac{1}{k^2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_{\infty, \mathbb{R}} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$$

quindi converge per Weierstrass.

Definizione 1.2.8: Se $\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_{\infty, X} < \infty$ allora la serie converge totalmente.

Osservazione 1.2.9: $\|f_k\|_{\infty, X} = \|f_k\|_{\infty, X}$ quindi la convergenza totale implica quella assoluta.

Osservazione 1.2.10: La convergenza totale implica quella assoluta e uniforme ma non vale il viceversa.

Esempio 1.2.11: $f_k(x) := \frac{1}{x} \chi_{[k, k+1)}(x)$ allora la serie $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ converge uniformemente e assolutamente a $\frac{1}{x} \chi_{[1, \infty)}(x)$ tuttavia $\|f_k\|_{\infty, X} = \frac{1}{x}$ e $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{x}$ non converge.

Esercizio 1.2.12: Provare che $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+x}$ converge uniformemente in $[0, +\infty)$ ma non totalmente.

Proposizione 1.2.13: $\{f_k\} : \Omega \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (Ω aperto) con le f_k continue in x_0 e supponiamo che $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ converga uniformemente allora $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$ è continua in x_0

Proposizione 1.2.14: $\{f_k\} : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f_k \in \mathcal{R}([a, b])$, supponiamo che $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ converga uniformemente in $[a, b]$ allora $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \in \mathcal{R}([a, b])$ e inoltre: $\int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} f_k dx = \int_a^b F(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} S(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b S(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \int_a^b f_k(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b f_k(x) dx$

Proposizione 1.2.15: $\{f_k\} : (a, b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con ogni f_k è derivabile in (a, b) ed esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x_0)$ converge, supponiamo che $\sum_{k=0}^{\infty} f'_k$ converga uniformemente in (a, b) allora la $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$ converge semplicemente in (a, b) , la convergenza è uniforme su ogni compatto contenuto in (a, b) e la $F(x)$ è derivabile con $F'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f'_k$ ovvero $(\frac{d}{dx} \sum f_k)(x) = \sum (\frac{d}{dx} f_k)(x)$

1.2.2 Serie di potenze

Definizione 1.2.16: Chiamiamo serie di potenze un arnese siffatto:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

con $\{a_k\}$ serie numerica e $x_0 \in \mathbb{R}$, x_0 è detto centro.

Osservazione 1.2.17: Se pongo $x - x_0 = w$ ottengo una serie di potenze di centro 0, questo procedimento si chiama riduzione in forma standard. D'ora in avanti cercheremo di studiare serie centrate in 0.

Data una serie di potenze cerchiamo di studiare il dominio di convergenza $D := \{x \in \mathbb{R} : \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \text{ converge}\}$.

Osservazione 1.2.18: Il dominio non è mai vuoto infatti $0 \in D$.

Lemma 1.2.19: Se la serie converge in w allora converge puntualmente in $(-|w|, |w|)$ e la convergenza è totale nei compatti K contenuti in $(-|w|, |w|)$.

Dimostrazione: Se $w = 0$ è banale, supponiamo $x \neq 0$ allora $\sum_{k=0}^{\infty} a_k w^k$ è una serie numerica convergente perciò $\{a_k w^k\}$ tende a 0 \Rightarrow limitata ovvero $\exists c : |a_k w^k| < c$ perciò

$$|a_k x^k| = |a_k w^k| \cdot \left(\frac{x}{w}\right)^k \leq c \cdot \left(\frac{|x|}{|w|}\right)^k$$

Siccome siamo in un compatto K allora $\exists \alpha$ con $0 < \alpha < |w| : K \subseteq [-\alpha, \alpha]$ allora $|a_k x^k| \leq c \cdot \left(\frac{\alpha}{|w|}\right)^k \Rightarrow \|a_k x^k\| \leq c \cdot \left(\frac{\alpha}{|w|}\right)^k$ e tende a 0 quindi $\sum \|a_k x^k\| \leq \sum c \cdot \left(\frac{\alpha}{|w|}\right)^k < \infty$ ovvero la convergenza è totale. \square

Definizione 1.2.20: Chiamiamo raggio di convergenza $\rho := \sup D$. Si ha che $(-\rho, \rho) \subseteq D \subseteq [-\rho, \rho]$, se $\rho = \infty$ intendiamo che $D = \mathbb{R}$.

Criterio di Cauchy - Hadamard 1.2.21: Posto $l := \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ allora si ha che $\rho = \frac{1}{l}$ (se $l = \infty$ allora $\rho = 0$ e viceversa).

Criterio di d'Alembert 1.2.22: Se $a_k \neq 0 \forall k$ allora se esiste $l := \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|$ in $\overline{\mathbb{R}}$ si ha che $\rho = \frac{1}{l}$

Dimostrazioni: Sono conseguenze immediate del criterio della radice e del confronto per le serie numeriche

Osservazione 1.2.23: Il criterio di Chauchy - Hadamard è sempre applicabile in quanto il \limsup esiste sempre. Al contrario il criterio di d'Alembert potrebbe "fallire" e quindi è preferibile applicare il criterio precedente

Esempi 1.2.24:

- $\sum k = 1^\infty \frac{x^k}{k^2}$ allora $\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{k^2}{1+k^2} \rightarrow 1$ quindi $l = \rho = 1$ e converge sia in $x = 1$ e $x = -1 \Rightarrow D = [-1, 1]$
- $\sum k = 0^\infty k^2 x^k$ e dal criterio del rapporto $l = \rho = 1$ ma converge solo in $(-1, 1)$
- $\sum k = 1^\infty \frac{x^k}{k}$ converge in $(-1, 1)$
- $\sum k = 0^\infty \frac{x^k}{k!}$ e $\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{1}{k+1} \rightarrow 0 \Rightarrow \rho = \infty$ (con $k!$ a numeratore avremmo ottenuto $\rho = 0$)

Teorema di Abel 1.2.25: Se la serie $\sum_{k=0}^\infty a_k x^k$ converge in w allora converge uniformemente in $[0, w]$ o $[w, 0]$ (a seconda che w sia positivo o negativo).

Corollario 1.2.26: La convergenza della serie è uniforme in D .

Teorema 1.2.27: Sia $\sum_{k=0}^\infty a_k x^k$ con $\rho > 0$. Allora $f : (-\rho, \rho) \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = \sum_{k=0}^\infty a_k x^k \in \mathcal{C}^\infty((\rho, \rho))$

- $f^{(l)} = \sum_{k=0}^\infty a_k \cdot \underbrace{k \cdot (k-1) \cdots (k-l+1)}_1 \cdot x^{k-l} = \sum_{k=0}^\infty a_{k+l} \cdot \underbrace{(k+l) \cdots (k-1)}_{l \text{ fattori}} \cdot x^k$
- Il raggio di convergenza di $f^{(l)}$ è sempre ρ
- $f^{(l)}(0) = a_l \cdot l!$ ovvero $a_l = \frac{f^{(l)}(0)}{l!}$

Dimostrazione: Osservo che f è una serie di polinomi $a_k x^k$ che quindi sono certamente funzioni \mathbb{C}^1 . Infatti la serie delle derivate:

$$\sum_{k=0}^\infty a_k k x^{k-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots = \sum_{k=0}^\infty a_{k+1} (k+1) x^k$$

è ancora una serie di potenze. Sia ρ' il suo raggio di convergenza allora $\rho' = \frac{1}{l'}$ dove $l' = \limsup_{k \rightarrow \infty} [(k+1)|a_{k+1}|]^{\frac{1}{k}}$. Osservo che

$$[(k+1)|a_{k+1}|]^{\frac{1}{k}} = e^{\frac{1}{k} \log k + 1 + \frac{1}{k} \log a_{k+1}}$$

(questo vale anche se $a_{k+1} = 0$ intendendo $e^{-\infty} = 0$). Inoltre la funzione esponenziale è monotona crescente quindi $\limsup_{k \rightarrow \infty} e^{b_k} = e^{\limsup_{k \rightarrow \infty} b_k} \Rightarrow$

$$l' = \limsup_{k \rightarrow \infty} e^{b_k} = e^{\limsup_{k \rightarrow \infty} [\frac{1}{k} \log(k+1) + \frac{1}{k} \log |a_{k+1}|]}$$

ma $\frac{1}{k} \log(k+1) \rightarrow 0$ quindi:

$$l' = e^{\limsup_{k \rightarrow \infty} [0 + \frac{1}{k} \log |a_{k+1}|]} = e^{\limsup_{k \rightarrow \infty} [\frac{k+1}{k} \cdot \frac{1}{k+1} \log |a_{k+1}|]}$$

ma $\frac{k+1}{k} \rightarrow 1$ quindi:

$$l' = e^{\limsup_{k \rightarrow \infty} [\frac{1}{k+1} \log |a_{k+1}|]} = \limsup_{k \rightarrow \infty} |a_{k+1}|^{\frac{1}{k+1}} = l$$

Da cui $\rho' = \rho$. Ne segue che la serie delle derivate converge in $(-\rho, \rho)$, totalmente nei compatti. Ma allora su ciascun aperto (a, b) con $-\rho < a < 0 < b < \rho$ valgono le ipotesi del teorema di derivazione (con 0 come x_0), da cui segue che f è \mathcal{C}^1 con $f' = \sum_{k=0}^{\infty} a_k k x^{k-1}$ in $(-\rho, \rho)$. Iterando il processo (cosa possibile perchè la derivata è una serie di potenze) si ha la tesi. \square

Osservazione 1.2.28: La convergenza è totale nei compatti contenuti in $(-\rho, \rho)$ perciò:

$$\int_0^x \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k u^k \right) du = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_0^x u^k du = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k x^{k+1}}{k+1}$$

Quindi la funzione primitiva di una serie di potenze è ancora una serie di potenze. Questa identità vale $\forall x \in D$

Osservazione 1.2.29: Da Abel segue che se $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \rho^k$ converge allora l'uguaglianza $\int_0^x \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k u^k \right) du = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k x^{k+1}}{k+1}$ vale anche per $x = \rho$.

Osservazione 1.2.30: Date due serie di potenze: $\sum_1 = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ e $\sum_2 = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ di raggio rispettivamente ρ_1 e ρ_2 definiamo la serie somma e la serie prodotto come:

- $\sum_1 + \sum_2 = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) x^k$
- $\sum_1 \cdot \sum_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{u,v \geq 0} a_u b_v \right) x^k$

Allora si hanno le seguenti proprietà (verificare per esercizio)

1. $\rho(\sum_1 + \sum_2)$ e $\rho(\sum_1 \cdot \sum_2)$ sono entrambi $\leq \min\{\rho_1, \rho_2\}$
2. $(\sum_1 + \sum_2) = \sum_1(x) + \sum_2(x)$ se $|x| < \min\{\rho_1, \rho_2\}$ (analogo per il prodotto)
3. Se $\rho_1 \neq \rho_2$ allora $\rho(\sum_1 + \sum_2) = \min\{\rho_1, \rho_2\}$ (non vale per il prodotto)

Osservazione 1.2.31: L'insieme $\{\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \rho \leq 1\}$ gode di buone proprietà analitiche (le \sum sono di classe \mathcal{C}^{∞} e si conserva per derivazione e integrazione *i.e* è un anello differenziale) e algebriche (è un anello commutativo con unità di cui l'insieme dei polinomi è un suo sottoanello)

Se una funzione f è esprimibile come serie di potenze allora è di classe \mathcal{C}^{∞} . Non vale il viceversa, neanche localmente.

Esempio 1.2.32: Se f è una serie di potenze $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ allora $f^{(l)}(0) = a_l l! \Rightarrow$ se è una serie di potenze è $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(l)}(u)}{l!} x^l$ (unicità della rappresentazione). Sia ora:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

f è \mathcal{C}^∞ e $f^{(l)}(0) = 0 \forall l$ ma allora f è rappresentabile dalla serie nulla che rappresenta la funzione $g \equiv 0$ che non è f

Proposizione 1.2.33: Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ aperto indichiamo con $\Omega(A)$ l'insieme $\{f : A \rightarrow \mathbb{R}, f \in \mathcal{C}^\infty$ e tali per cui in ogni punto $x_0 \in A$ la serie di potenze $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$ converge ad f in un intorno di $x_0\}$. Le funzioni di $\Omega(A)$ sono dette analitiche e l'esempio mostra che $\Omega(A) \subset \mathcal{C}^\infty$ (strettamente)

Proposizione 1.2.34: Data $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ con $\rho > 0$ allora $f : (-\rho, \rho) \rightarrow \mathbb{R} f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ $|x| < \rho$ è analitica in $(-\rho, \rho)$

Se una funzione f è rappresentabile come serie di potenze di centro x_0 in un intorno del punto allora la serie che rappresenta il punto è il suo sviluppo di Taylor centrato in x_0

Proposizione 1.2.35: Sia $f : (-r, r) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ di classe \mathcal{C}^∞ in $(-r, r)$, supponiamo che $\|f^{(k)}\|_{\infty, (-r, r)} \ll \frac{k!}{r^k}$ per $k \rightarrow \infty$ allora f è rappresentata dalla sua serie di Taylor.

Dimostrazione: Fissato $x \in (-r, r)$ valutiamo la differenza $f(x) - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} (x)^k$ e verifichiamo che tende a 0. Il secondo termine della differenza il polinomio di Taylor arrestato all'ordine $N-1$, da Lagrange sappiamo che $\exists \xi \in (0, x)$ tale che la differenza considerata sopra è uguale a $\frac{f^{(N)}(\xi)}{N!} x^N$. Siccome $|\xi| < r$ si ha che:

$$|f(x) - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} (x)^k| = \left| \frac{f^{(N)}(\xi)}{N!} x^N \right| \leq |f^{(N)}(\xi)| \frac{|x|^N}{N!} \leq \|f^{(N)}\| \cdot \frac{|x|^N}{N!} \ll \frac{N!}{r^N} \cdot \frac{|x|^N}{N!} = \left(\frac{|x|}{r} \right)^N \rightarrow 0$$

poichè $|x| < r$. \square

Teorema 1.2.36: $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

Dimostrazione: Fisso $r > 0$, si ha che $f^{(k)}(x) = e^x \forall k \in \mathbb{N}$ allora $|f^{(k)}(x)| = |e^x| \leq e^r \Rightarrow \|f^{(k)}\|_{\infty, (-r, r)} = e^r \ll \frac{k!}{r^k}$ ed è vero poichè il rapporto $\frac{e^r r^k}{k!}$ tende a 0 (e^r è limitato in un compatto K) \square

Teorema 1.2.37: $\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$ e $\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$

Esercizio 1.2.38: Verificare tramite serie di potenze:

1. $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$
2. $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$
3. $\exp^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$

Capitolo 2

Funzioni implicite

2.1 Premessa

L'obiettivo è quello di descrivere il luogo degli zeri di opportune funzioni $f(\underline{x}) = 0$ per opportune classi di funzioni f .

Osservazione 2.1:

1. Ogni grafico è il luogo degli zeri di qualcosa infatti sia $y = g(x)$ la funzione $f(x, y) = y - g(x)$ ha per luogo degli zeri il grafico di g .
2. L'unione (anche molteplice) di zeri è luogo di zeri: $Z_f = \{(x, y) : f(x, y) = 0\}$ e $Z_g = \{(x, y) : g(x, y) = 0\}$ allora $Z_f \cup Z_g = Z_{f \cdot g}$ e $Z_f \cap Z_g = Z_{f^2 + g^2}$.
3. In generale i luoghi di zeri non sono grafici di funzioni ad esempio $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

L'obiettivo dei prossimi teoremi è dimostrare che se f è abbastanza "buona" allora Z_f è localmente il grafico di una funzione.

Proposizione 2.2: Data $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ supponiamo:

1. $\forall x \in [a, b], f(x, \bullet) : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua e $f(x, c) \cdot f(x, d) < 0$
2. $\forall x \in [a, b], f(x, \bullet)$ è strettamente monotona

Allora il grafico degli zeri di f in $[a, b] \times [c, d]$ coincide con il grafico di una funzione $\phi : [a, b] \rightarrow [c, d]$.

Dimostrazione: Fisso $x_0 \in [a, b]$, da 1 (teorema degli zeri) esiste almeno un punto in cui la funzione f si annulla, da 2 segue che è unico. Poichè vale $\forall x$ si ha la tesi. \square

2.2 Teorema di Dini

Una volta stabilita l'esistenza della funzione ϕ ci chiediamo come è possibile studiarne la regolarità.

Teorema di Dini (monodimensionale) 2.3: Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, con Ω aperto e $f \in C^1(\Omega)$:

1. Sia $(x_0, y_0) \in \Omega$ tale che $f(x_0, y_0) = 0$

2. $\partial_y f(x_0, y_0) \neq 0$

Allora \exists un intorno aperto $(a, b) \times (c, d)$ con $(x_0, y_0) \in (a, b) \times (c, d)$ e $[a, b] \times [c, d] \subseteq \Omega$ ed esiste una funzione $\phi : (a, b) \times (c, d)$ tale che il luogo degli zeri di f in $(a, b) \times (c, d)$ coincide con il grafico di ϕ . Inoltre $\phi \in \mathcal{C}((a, b))$ e:

$$\frac{d\phi}{dx}(x) = -\frac{\partial_x f}{\partial_y f}(x, \phi(x)), \quad \forall x \in (a, b)$$

Dimostrazione: Assumiamo $f(x_0, y_0) > 0$ (altrimenti si cambia f con $-f$), siccome $\partial_y f$ è continua $\exists [a', b'] \times [c, d] \subseteq \Omega$ contenente il punto (x_0, y_0) in cui $\partial_y f > 0$. Considero $f(x_0, \bullet) : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ essa vale 0 in y_0 ed è strettamente crescente quindi $f(x_0, c) < 0$ e $f(x_0, d) > 0$. Ma f è continua perciò $\exists \mathcal{U}((x_0, c))$ dove $f < 0$ e $\exists \mathcal{U}((x_0, d))$ dove $f > 0$. Allora $\exists [a, b]$ con $a' \leq a \leq x_0 \leq b \leq b'$ in cui $f(x, c) < 0$ e $f(x, d) > 0$ $f(x, c) < 0$. Ristretta ad $[a, b] \times [c, d]$ la funzione f soddisfa le ipotesi della proposizione 2.2 perciò $\exists \phi : (a, b) \rightarrow (c, d)$ tale che il luogo degli zeri di f coincide con il grafico di ϕ .

Dimostriamo ora la regolarità della funzione ϕ . Sia $x \in (a, b)$ fissato e h tale che $x + h \in (a, b)$. f si annulla in $(x, \phi(x))$ e $(x + h, \phi(x + h))$ (per come è stata costruita ϕ , inoltre è $\mathcal{C}^1(\Omega)$) allora:

$$0 = f(x + h, \phi(x + h)) - f(x, \phi(x)) = \langle \nabla f(\alpha, \beta), (h, \phi(x + h) - \phi(x)) \rangle$$

Dove (α, β) sta nel segmento congiungente $(x, \phi(x))$ e $(x + h, \phi(x + h))$ perciò:

$$(\phi(x + h) - \phi(x)) \cdot \partial_y f(\alpha, \beta) + h \partial_x f(\alpha, \beta) = 0$$

ovvero $\phi(x + h) - \phi(x) = -\frac{\partial_x f}{\partial_y f}(\alpha, \beta) \cdot h$ (ciò è possibile perchè $\partial_y f(\alpha, \beta) \neq 0$) ma $(\alpha, \beta) \in [a', b'] \times [c, d]$ e $\frac{\partial_x f}{\partial_y f}$ è continua (quoziente di funzioni continue) quindi ha massimo $M := \|\frac{\partial_x f}{\partial_y f}\|_{\infty, [a', b'] \times [c, d]}$, da (*) segue che:

$$\phi(x + h) - \phi(x) \leq M \cdot |h|$$

quindi ϕ è lipschitziana in $x \Rightarrow$ continua. Questo mostra che se $h \rightarrow 0$ allora $(\alpha, \beta) \rightarrow (x, \phi(x))$ perciò $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\partial_x f}{\partial_y f}(\alpha, \beta)$ esiste e vale $\frac{\partial_x f}{\partial_y f}(x, \phi(x))$ e così:

$$\frac{\phi(x + h) - \phi(x)}{h} = -\frac{\partial_x f}{\partial_y f}(\alpha, \beta) \rightarrow -\frac{\partial_x f}{\partial_y f}(x, \phi(x))$$

Allora ϕ è derivabile in x con $\phi' = -\frac{\partial_x f}{\partial_y f}(x, \phi(x))$ e ϕ' è continua perchè composizione di continue. \square

Corollario 2.4: Se poi $f \in \mathcal{C}^k(\Omega)$ allora ϕ è di classe \mathcal{C}^k dove esiste ($k \geq 1$).

Dimostrazione: Uso ϕ' in modo iterato. \square

Osservazione 2.5: Se $\partial_x f(x_0, y_0) \neq 0$ si può procedere come prima ma col ruolo di x e y invertiti ovvero $\exists \psi : (c, d) \rightarrow (a, b)$ tale che il grafico di ψ coincide localmente col luogo degli zeri di f cioè: $f(\psi(y), y) = 0 \quad \forall y \in (c, d)$. Se $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$ il luogo degli zeri è localmente il grafico di qualcosa, ciò porta a definire critici quei punti in cui il gradiente si annulla e non è possibile applicare Dini.

Esempi 2.6:

- $f(x, y) = x^2 - y^2$ $f(0, 0) = 0$ ma $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$ e il luogo degli zeri di f sono le rette $y = x$ e $y = -x$ che in un intorno di $(0, 0)$ non è il grafico di una funzione.
- $f(x, y) = x^2 + y^2$ $f(0, 0) = 0$ ma $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$ e il luogo degli zeri è il solo punto $(0, 0)$ che non è un grafico.
- $f(x, y) = y^2 - x^2(x+1)$ $f(0, 0) = 0$ (parabola campaniformis cum ovali) ma $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$ e il luogo degli zeri non è il grafico di nessuna funzione in $(0, 0)$

2.3 Contrazioni e Teorema del punto fisso

Ora ci prendiamo una pausa per enunciare un importante risultato negli spazi metrici completi:

Definizione 2.7: Sia (X, d) uno spazio metrico completo e T una mappa $T : X \rightarrow X$, diciamo che T è una contrazione se $\exists \lambda < 1$ tale che $d(Tx, Ty) < \lambda \cdot d(x, y) \forall x, y$ (T è lipschitziana con costante di lipschitz < 1).

Teorema di Banach - Cacciopoli 2.8: Sia (X, d) uno spazio metrico completo e T una contrazione allora l'equazione $Tx = x$ ha una e una sola soluzione.

Dimostrazione: Sia $x_0 \in X$ fissato a caso e sia $\{x_n\}$ la successione: $x_{n+1} = Tx_n$ (quindi $x_n = \underbrace{T \circ \dots \circ T}_n x_0$). Dalla disuguaglianza triangolare segue che $d(x, y) \leq d(x, Tx) + d(Tx, Ty) + d(Ty, y) \leq d(x, Tx) + \lambda d(x, y) + d(Ty, y)$, da cui si ricava:

$$d(x, y) \leq \frac{1}{1-\lambda} (d(x, Tx) + d(y, Ty)) \quad (*)$$

Osservo che $d(x_{n+1}, x_n) = d(Tx_n, Tx_{n-1}) \leq \lambda d(x_n, x_{n-1}) \leq \dots \leq \lambda^n d(x_1, x_0)$ (**). Applico (*) e (**) ai punti x_n e x_m ed ottengo

$$d(x_n, x_m) \leq \frac{1}{1-\lambda} (d(Tx_n, x_n) + d(Tx_m, x_m)) \leq \frac{\lambda^n + \lambda^m}{1-\lambda} d(x_1, x_0)$$

Fisso $\epsilon > 0$, sia $N : \lambda^N < \epsilon$ allora se $n, m \geq N$ segue $d(x_n, x_m) \leq \epsilon \cdot \frac{2d(x_1, x_0)}{1-\lambda}$ perciò $\{x_n\}$ è una successione di Cauchy quindi converge perchè siamo in uno spazio metrico completo, sia $x_\infty := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, $Tx_\infty = T(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = (\text{per la continuità}) \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = x_\infty$.

Verifico ora l'unicità, siano x e y due punti fissi allora $d(x, y) \leq \frac{1}{1-\lambda} (d(Tx, x) + d(Ty, y)) = 0$ (in quanto $x = Tx$ e $y = Ty$) $\Rightarrow d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$. \square

Osservazione 2.9: La dimostrazione contiene un metodo costruttivo per trovare x_∞ . Inoltre passando al limite si ha $d(x_n, x_\infty) = \lim_{m \rightarrow \infty} d(x_n, x_m) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(x_1, x_0)$ che dà la distanza di x_n dal limite in funzione dei dati.

Corollario 2.10: Il teorema può essere generalizzato: sia (X, d) uno spazio metrico completo e $T : X \rightarrow X$. Supponiamo che $\exists K$ tale che $T^{(k)} = T \circ \dots \circ T$ (k volte) sia una contrazione allora T ha un unico punto fisso.

Dimostrazione: Sia x_∞ punto fisso per $T^{(k)}$ (che esiste per via del teorema) allora $T^{(k)}(Tx_\infty) = T^{(k+1)}x_\infty = T(T^{(k)}x_\infty) = Tx_\infty$ perciò Tx_∞ è fisso per $T^{(k)}$ ma $T^{(k)}$ ha x_∞ come punto unico

fisso $\Rightarrow Tx_\infty = x_\infty$ ovvero x_∞ è punto fisso per T .

Devo dimostrare che è unico ma ogni punto fissato da T è fissato da $T(k)$ quindi T ha un solo punto fisso (altrimenti $T(k)$ non ne avrebbe uno solo).

Osservazione 2.11: Se T è contrazione allora anche T^2 (mappa iterata) è contrazione e $d(T^2(x), T^2(y)) = d(T(Tx), T(Ty)) \leq \lambda d(Tx, Ty) \leq \lambda^2 d(x, y)$ e $\lambda^2 < \lambda$ (vale anche per le altre potenze). Se però ogni T con iterata contrattiva fosse contrattiva il corollario precedente sarebbe inutile ma non è questo il caso:

$T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $T(x) = \cos(x)$ non è una contrazione ma $T^2(x) = \cos(\cos(x))$ lo è.

Esempio 2.12: (Metodo di Newton) Il metodo di Newton serve per calcolare gli zeri di una funzione f . Idea: sia x_0 un punto scelto a caso e si trova la tangente al grafico nel punto $f(x_0)$. L'intersezione della tangente con l'asse delle ascisse darà un nuovo punto x_1 , si prende poi la tangente nel punto $f(x_1)$ e si itera il procedimento. La relazione di ricorrenza è:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Esercizio 2.13: Voglio trovare una soluzione di $f(x) = 0$ con $f(x) = x^3 + 2x - 1$ utilizzando il metodo di Newton. $T(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^3+2x-1}{3x^2+2} = \frac{2x^3+1}{3x^2+2}$, se considero \mathbb{R} intero è difficile dimostrare che T è una contrazione perciò osservo che $T: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ e che in questo sottointervallo $T'(x) = \frac{6x^4+12x^2-6x}{(3x^2+2)^2} \leq \frac{6x^4+12x^2}{(3x^2+2)^2} = \frac{3}{4} - \frac{3x^4-12x^2-6x}{(3x^2+2)^2} \leq \frac{3}{4}$ e $T'(x) \geq \frac{-6x}{(3x^2+2)^2} \geq \frac{-3}{4}$ quindi $|T'(x)| \leq \frac{3}{4}$.

Da Lagrange so che $|T(x) - T(y)| = |T'(\xi)| \cdot |x - y| \leq \frac{3}{4}|x - y|$ perciò T è una contrazione e quindi $\exists!$ punto fisso di T , ovvero soluzione di $Tx = x$ ovvero di $f(x)$. Non solo ma se x_0 è scelto a caso e $x_n = Tx_{n-1}$ allora: $|x_n - x_\infty| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n |x_1 - x_0| = 4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n \left|\frac{2x_0^3+1}{3x_0^2+2} - x_0\right|$. Scelgo $x_0 = 0$ e ho:

- $x_0 = 0$
- $x_1 = Tx_0 = 0,454545\dots$
- $x_2 = Tx_1 = 0,453398\dots$
- $x_3 = Tx_2 = 0,453397\dots$
- $x_4 = Tx_3 = 0,453397\dots$

La successione sembra convergere più velocemente di quanto stimato. Ciò non è colpa di $\frac{3}{4}$ che è una buona stima di $\sup |T'(x)| = 0,7499$; osservo che $T^2(x) = T(Tx) = \frac{8x^9+51x^8+\dots}{18x^8+39x^6+\dots}$ ha una derivata che in modulo è $\leq \frac{1}{10}$. Ne segue che se $S := T^2$ e $x_n = S^n x_0 = T^{2n} x_0$ allora per $x_0 = 0$ vale:

$$|x_n - x_\infty| \leq \frac{1}{10^n} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{10^n}$$

Il fattore $\frac{1}{10}$ è decisamente migliore del $\left(\frac{3}{4}\right)^2$ che si era ottenuto prima per la stessa sequenza.

Esercizio 2.14: Cercare le soluzioni di $f(x) = x^5 + 4x - 4 f(x) = 0$.

Esercizio 2.15: Trovare le soluzioni di $f(x) = x^a + bx - c f(x) = 0$ con $a < 0$, $0 \leq c \leq b$ e $a^2 \leq b$

2.4 Teorema di Invertibilità locale

Prima di enunciare e dimostrare il teorema è bene ricordare un lemma utile ai fini della dimostrazione.

Lemma 2.16: Sia $F : X \rightarrow M(m \times n, \mathbb{R})$ chiamo $\|F\|_{2,\infty,X} := \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \|F_{ij}\|_{\infty,X}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, se considero $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, Ω aperto convesso, di classe $\mathcal{C}^1(\Omega)$ allora $\|f(x) - f(w)\|_{2,\mathbb{R}^n} \leq \|Jf\|_{2,\infty,X} \cdot \|x - w\|_{2,\mathbb{R}^m}$.

Dimostrazione: f , in quanto funzione vettoriale, è un elenco $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, considero $f_j : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ quindi è una funzione a valori scalari e per il teorema di Lagrange $f_j(x) - f_j(w) = \langle \nabla f_j(\alpha), (x - w) \rangle$ dove α sta nel segmento che congiunge x e w . Per Cauchy-Schwarz:

$$|f_j(x) - f_j(w)|^2 \leq \|\nabla f_j(\alpha)\|_2^2 \cdot \|x - w\|_2^2$$

e quindi:

$$|f_j(x) - f_j(w)|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^m \left\| \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right\|_{2,\infty}^2 \right) \cdot \|x - w\|_2^2$$

Questo risultato vale per ogni $j = 1 \dots n$ quindi sommo tra loro le varie disuguaglianze ed arrivo alla tesi. \square

Teorema di invertibilità locale 2.17: Sia $\underline{f} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, Ω aperto, supponiamo $\underline{f} \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ e sia $\underline{x}_0 \in \Omega$ con $J\underline{f}(\underline{x}_0)$ invertibile. Allora esiste un intorno $\mathcal{U}(\underline{x}_0)$ e un intorno $\mathcal{V}(\underline{f}(\underline{x}_0))$ aperti tali che $\underline{f}|_{\mathcal{U}(\underline{x}_0)} : \mathcal{U}(\underline{x}_0) \rightarrow \mathcal{V}(\underline{f}(\underline{x}_0))$ è biunivoca con $\underline{f}^{-1} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{V}(\underline{f}(\underline{x}_0)))$. Inoltre:

$$(J\underline{f}^{-1})(\underline{f}(x)) = [J\underline{f}(x)]^{-1} \quad \forall x \in \mathcal{U}(\underline{x}_0)$$

(Per non appesantire la notazione verranno omesse le barrette per indicare i vettori).

Dimostrazione: La dimostrazione è un'applicazione del teorema di punto fisso. Prendo la funzione $g(x) := ((Jf)(x_0))^{-1} \cdot (f(x_0 + x) - f(x_0))$ (è ben definita in $\Omega - x_0$, traslato di Ω , perchè $((Jf)(x_0))^{-1}$ esiste per ipotesi). Osservo che $g(0) = 0$ e $(Jg)(0) = ((Jg)(x_0))^{-1} \cdot (Jg)(x_0) = I$. D'altra parte $f(x) = (Jf)(x_0) \cdot g(x - x_0) + f(x_0)$ e questa relazione evidenzia che f è invertibile in $\mathcal{U}(x_0)$ se e solo se g è invertibile in $\mathcal{U}(x_0) - x_0$. Nel procedere con la dimostrazione potremmo quindi assumere come ipotesi aggiuntive $x_0 = 0$, $f(x_0) = 0$ e $(Jf)(x_0) = I$.

Sia $H(x) := x - f(x) \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ con $H(0) = 0$ e $(JH)(0) = I - I = 0$. Visto che le funzioni in JH sono continue esiste $\epsilon > 0$ sufficientemente piccolo affinché $\|JH\|_{2,\infty,\overline{B}_\epsilon} \leq \frac{1}{2}$ (scelto arbitrariamente) dove $\overline{B}_\epsilon = \{x : \|x\| \leq \epsilon\}$ (bolla chiusa). Inoltre visto che $\det Jf$ è continua e che $\det Jf(0) = \det I = 1$ possiamo scegliere ϵ in modo che alla relazione precedente si abbia anche $\det Jf(x) \neq 0$.

Dato che $\|JH\|_{2,\infty,\overline{B}_\epsilon} \leq \frac{1}{2}$ dal lemma si ha che:

$$\|H(x) - H(w)\| \leq \frac{1}{2} \cdot \|x - w\| \quad \forall x, w \in \overline{B}_\epsilon \quad (*)$$

e così:

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(w)\| &= \|x - w - (H(x) - H(w))\| \geq \\ \|x - w\| - \|H(x) - H(w)\| &\geq \|x - w\| - \frac{1}{2}\|x - w\| = \frac{1}{2}\|x - w\| \quad (**) \end{aligned}$$

da qui segue che f è iniettiva in \overline{B}_ϵ perchè se fosse $f(x) = f(w)$ da (**) seguirebbe $\|x - w\| \leq 2 \cdot 0 \Rightarrow x = w$.

Sia $y \in \overline{B}_{\frac{\epsilon}{2}}$, ovvero $\|y\| \leq \frac{\epsilon}{2}$, definisco $H_y(x) := y + H(x)$ e osservo che

$$\|H_y(x)\| = \|y + H(x)\| \leq \|y\| + \|H(x)\| = \|y\| + \|H(x) - H(0)\|$$

siccome $\|y\| \leq \frac{\epsilon}{2}$, $H(0) = 0$ e $x \in \overline{B}_\epsilon$ ho:

$$\|H_y(x)\| \leq \frac{\epsilon}{2} = \frac{1}{2}\|x - 0\| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}(**) = \epsilon$$

Da qui ricaviamo che $H_y : \overline{B}_\epsilon \rightarrow \overline{B}_\epsilon$. Inoltre $H_y(x) - H_y(w) = H(x) - y - H(w) + y = H(x) - H(w)$ allora $\|H_y(x) - H_y(w)\| = \|H(x) - H(w)\| \leq \frac{1}{2}\|x - w\|$ quindi $H_y(x)$ è una contrazione ma \mathbb{R}^n con la metrica euclidea è uno spazio di Banach allora H_y ha un unico punto fisso. Ovvero $\exists! x$ tale che:

$$H_y(x) = x \Leftrightarrow y + H(x) = x \Leftrightarrow y + x - f(x) = x \Leftrightarrow y = f(x)$$

quindi ogni $y \in \overline{B}_{\frac{\epsilon}{2}}$ è immagine di uno e uno solo punto $x \in \overline{B}_\epsilon$ perciò f è suriettiva tra $\overline{B}_{\frac{\epsilon}{2}}$ e \overline{B}_ϵ . Ciò non basta perché il teorema parla di insiemi aperti e non chiusi.

Siano x e y come sopra $\|x\| = \|y + x - f(x)\| = \|y + H(x)\| \leq \|y\| + \|H(x)\| \leq \|y\| + \frac{1}{2}\|x\|(**) \Rightarrow \|x\| \leq 2\|y\|$. In particolare se $y \in B_{\frac{\epsilon}{2}}$ (aperto), ovvero $\|y\| < \frac{\epsilon}{2}$, $\|x\| < \epsilon$ perciò l'aperto va nell'aperto quindi f è suriettiva tra B_ϵ e $B_{\frac{\epsilon}{2}}$.

Infine, non è detto che $f(B_\epsilon) \subseteq B_{\frac{\epsilon}{2}}$ (purtroppo!) sia allora $U := B_\epsilon \cap f^{-1}(B_{\frac{\epsilon}{2}})$. U è aperto (intersezione di aperti), $0 \in U$ ($f(0) = 0$), f è iniettiva su U (perché lo è su B_ϵ) e suriettiva su $B_{\frac{\epsilon}{2}}$ (perché sappiamo che $\forall y \in B_{\frac{\epsilon}{2}}$ esiste un $x \in B_\epsilon$ tale che $f(x) = y$). Quindi $f : U \rightarrow B_{\frac{\epsilon}{2}}$ è biunivoca.

Sia $g : B_{\frac{\epsilon}{2}} \rightarrow U$ l'inversa di f tra questi insiemi. Allora (**) dice che in $B_{\frac{\epsilon}{2}}$ (posto $x := g(y)$ e $w := g(z)$):

$$\|g(y) - g(z)\| \leq 2\|y - z\| \quad (*3*)$$

ovvero che g è lipschitziana in $B_{\frac{\epsilon}{2}}$.

Mostro che g è differenziabile e che $Jg = (Jf)^{-1}$. Siccome f è differenziabile in $x \in \Omega$:

$$f(w) - f(x) = (Jf)(x) \cdot (w - x) + R(w, x) \quad (*4*)$$

con $\frac{\|R(w, x)\|}{\|x - w\|} \rightarrow 0$ per $x \rightarrow w$ (*5*). Da (*4*) segue che

$$g(z) - g(y) = (Jf(x))^{-1} \cdot (z - y) - (Jf(x))^{-1} \cdot R(w, x) \quad (*6*)$$

perchè $Jf(x)$ è invertibile quando $x \in B_\epsilon$. Supponiamo $z \rightarrow y$ allora $w = g(z) \rightarrow g(y) = x$ perchè $(*3*)$ dice che g è continua. Inoltre:

$$\frac{\|R(w, x)\|}{\|z - y\|} = \frac{\|R(w, x)\|}{\|w - x\|} \cdot \frac{\|w - x\|}{\|z - y\|} = \frac{\|R(w, x)\|}{\|w - x\|} \cdot \frac{\|g(z) - g(y)\|}{\|z - w\|} \leq 2 \frac{\|R(w, x)\|}{\|w - x\|} \quad (*3*) \rightarrow 0 \quad (*5*)$$

ma questo e $(*6*)$ mostrano che g è differenziabile in y con $(Jg)(y) = ((Jf)(x))^{-1}$.

Gli elementi di Jf sono continui e il suo determinante è diverso da 0 quindi gli elementi della matrice $(Jf)^{-1}$ sono continui. Visto che $x = g(y)$ e g è continua ne segue che $(Jg)(y) = (Jf)^{-1}(g(y))$ è continuo. \square .

Osservazione 2.18: L'invertibilità locale in tutti i punti non implica l'invertibilità globale.

Si consideri $f(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$ con $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. f non è globalmente invertibile perchè $f(-x, -y) = f(x, y)$ eppure $Jf = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{vmatrix}$ ha determinante sempre diverso da 0.

Corollario 2.19: Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, Ω aperto e $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$. Supponiamo $Jf(x)$ invertibile $\forall x \in \Omega$ allora f è una mappa aperta ovvero A aperto in $\Omega \Rightarrow f(A)$ aperto.

Dimostrazione: Per il teorema f è localmente invertibile in ogni punto e questo dà la tesi.

2.5 Teorema di Dini (Multidimensionale)

Ricordo che se $M := \begin{vmatrix} I & 0 \\ A & B \end{vmatrix}$ è una matrice quadrata $\det M = \det I \cdot \det B$ ed M è invertibile se e solo se B è invertibile e la sua inversa è $M^{-1} = \begin{vmatrix} I & 0 \\ -B^{-1}A & B^{-1} \end{vmatrix}$.

Teorema di Dini (multidimensionale) 2.20: Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, con Ω aperto e $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$:

1. Sia $(x_0, y_0) \in \Omega$ tale che $f(x_0, y_0) = 0$ ($x_0 \in \mathbb{R}^m$ e $y_0 \in \mathbb{R}^n$)
2. $(J_y f)(x_0, y_0)$ è invertibile (la matrice quadrata di ordine $n \times n$ rispetto alle y)

Allora esistono due intorni aperti $\mathcal{U}(x_0)$ e $\mathbb{V}(y_0)$ con $\overline{\mathcal{U}(x_0) \times \mathbb{V}(y_0)} \subseteq \Omega$ tali che l'insieme degli zeri di f in $\mathcal{U}(x_0) \times \mathbb{V}(y_0)$ coincide con il grafico di una funzione $\phi : \mathcal{U}(x_0) \rightarrow \mathbb{V}(y_0)$, $\phi \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}(x_0))$ e $J\phi(x) = -(J_y f)^{-1} \cdot (J_x f)|_{x, \phi(x)} \quad \forall x \in \mathcal{U}(x_0)$.

Dimostrazione: Sia $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ definita come $F(x, y) := \begin{pmatrix} x \\ f(x, y) \end{pmatrix}$ ed $F \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ con $(JF)(x, y) = \begin{vmatrix} I & 0 \\ J_x f & J_y f \end{vmatrix}$. In particolare $(JF)(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} I & 0 \\ J_x f(x_0, y_0) & J_y f(x_0, y_0) \end{vmatrix}$ è invertibile per ipotesi ed $F(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ quindi per il teorema di invertibilità locale F è localmente invertibile in (x_0, y_0) ovvero esistono due intorni aperti (in realtà sono delle bolle aperte) $\mathcal{W}(x_0, y_0)$ e $\mathcal{S}(x_0, 0)$ tra i quali F agisce come un diffeomorfismo. Siano

- $\mathcal{U} :=$ proiezione sulle x di \mathcal{S} (aperto perchè la proiezione è una mappa aperta)
- $\mathcal{V} :=$ proiezione sulle y di \mathcal{W} (aperto perchè la proiezione è una mappa aperta)

Siano poi $i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, $i(x) := \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ (immersione) e $p_{r_y} : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $p_{r_y}(x, y) = x$ (proiezione). Costruiamo $\phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ $\phi(x) := (p_{r_y} \circ F^{-1} \circ i)(x)$ di classe \mathcal{C}^1 (perchè p_{r_y} e y lo sono in quanto lineari e F^{-1} lo è per Dini) e:

$$J\phi = (Jp_{r_y}) \cdot (JF^{-1}) \cdot (Ji) = (0, I) \cdot (JF)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} = (0, I) \cdot \begin{vmatrix} I & 0 \\ -(J_y f)^{-1} J_x f & (J_y f)^{-1} \end{vmatrix} = -(J_y f)^{-1} J_x f$$

Infine $f(x, \phi(x)) = p_{r_y}(F(x, \phi(x))) = (p_{r_y} \circ F)(p_{r_x}(F^{-1}(x, 0)), (p_{r_y}(F^{-1}(x, 0)))) = (p_{r_y} \circ F)(F^{-1}(x, 0)) = (p_{r_y} \circ F \circ F^{-1})(x, 0) = p_{r_y}(x, 0) = 0$ ovvero il grafico di ϕ è contenuto negli zeri di f . Dal fatto che F è biunivoca segue che vale anche il viceversa. \square

Osservazione 2.21: Nella dimostrazione del teorema si decompone lo spazio di partenza in un $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, lo jacobiano di f è una matrice rettangolare di ordine $n \times (n + m)$ e non è detto che la sua coda $n \times n$ sia invertibile. Chiamo y tutto ciò che dà la sottomatrice $n \times n$ invertibile. Si può quindi riformulare le ipotesi del teorema chiedendo che $rk(Jf(x_0, y_0)) = n$ che è equivalente alla richiesta di invertibilità.

2.6 Estremi vincolati

Data $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $\Sigma \subseteq \Omega$ una regione. Sia $p \in \Sigma$ e supponiamo che $f(p) = \max\{f(x) \mid x \in \Sigma \cap \mathcal{U}(x)\}$ in tal caso diciamo che p è un punto di massimo locale per f vincolato a Σ (analoga definizione per il minimo).

Se $\Sigma \cap \mathcal{U}(x)$ fosse un insieme aperto si sa come procedere, in particolare se $f \in \mathcal{C}^1$ cerchiamo gli estremanti tra gli zeri di ∇f . La situazione è però nuova se $\Sigma \cap \mathcal{U}(x)$ non è un aperto di Ω , in tal caso in genere $\nabla f(p) \neq 0$.

Se Σ è il grafico di una funzione è chiaro come procedere:

Teorema dei Moltiplicatori di Lagrange 2.22: Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, con Ω aperto e $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, sia Σ il luogo degli zeri di $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($m > n$) e $g \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, sia $p \in \Sigma$ tale che f ha in p un estremo locale vincolato a Σ e che il rango di $(Jg(p))$ sia massimo ($= n$). Allora esistono $\lambda_1 \dots \lambda_n$ tali che:

$$\begin{cases} \nabla f(p) = \lambda_1 \nabla g_1(p) + \dots + \lambda_n \nabla g_n(p) & \leftarrow m \text{ equazioni scalari} \\ g_1(p) = 0 \\ \vdots \\ g_n(p) = 0 \end{cases} \quad \leftarrow n \text{ equazioni scalari}$$

Dove $g = (g_1, \dots, g_n)$, il sistema ha $m + n$ equazioni in $m + n$ incognite x e λ .

Dimostrazione: Per ipotesi $rk(Jg(p)) = n$ quindi esiste in $Jg(p)$ una sottomatrice di ordine $n \times n$ invertibile. Senza perdita di generalità possiamo supporre che $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}_x^{m-n} \times \mathbb{R}_y^n$ e che $J_y g(p)$ abbia rango massimo e quindi sia invertibile. Da Dini segue che in un intorno di p Σ è il grafico di una funzione quindi esistono due intorni aperti $\mathcal{U}(x_p)$ e $\mathcal{V}(y_p)$ e una mappa $\phi : \mathcal{U}(x_p) \rightarrow \mathcal{V}(y_p)$ tali che il grafico di ϕ coincide con $(\mathcal{U}(x_p) \times \mathcal{V}(y_p)) \cap \Sigma$.

Ma allora $f|_{\Sigma}$ coincide con $x \mapsto (x, \phi(x))$. Prendo $h(x) := f(x, \phi(x))$ questa è definita su un aperto $\mathcal{U}(x_p)$, è di classe \mathcal{C}^1 ed ha un estremo in x_p quindi:

$$0 = (\nabla h)(x_p)^T = (Jh)(x_p) = Jf \cdot \begin{pmatrix} I \\ J\phi \end{pmatrix} = (Jf_x | Jf_y) \cdot \begin{pmatrix} I \\ -(J_y g)^{-1}(J_x g) \end{pmatrix} = J_x f - J_y f (J_y g)^{-1} J_x g$$

ovvero

$$J_x f = J_y f (J_y g)^{-1} J_x g \quad (*)$$

Pongo $J_y f (J_y g)^{-1}$ matrice $1 \times n = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Allora (*) diventa:

$$\nabla_x f = \lambda_1 \nabla_x g_1 + \dots + \lambda_n \nabla_x g_n$$

Moltiplicando a destra $J_y f (J_y g)^{-1}$ per $J_y g$ si ottiene:

$$\nabla_y f = \lambda_1 \nabla_y g_1 + \dots + \lambda_n \nabla_y g_n$$

Queste due messe insieme danno il sistema della tesi. \square

Osservazione 2.23: Se si introduce $\mathcal{L} : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{L}(x, \lambda) := f(x) - \lambda g(x)$ allora il sistema può essere riscritto come:

$$\begin{cases} \nabla_x \mathcal{L} = 0 \\ \nabla_y \mathcal{L} = 0 \end{cases}$$

ovvero $\nabla_{x,y} \mathcal{L} = 0$. Quindi il problema originale (cercare estremi vincolati per f) è diventato cercare estremi liberi per \mathcal{L} . \mathcal{L} è detta Lagrangiana.

Osservazione 2.24: Il teorema fornisce solo un criterio sufficiente, non è detto che i punti trovati risolvendo il sistema siano effettivamente estremanti. Per stabilirlo si potrebbe usare un'analisi al secondo ordine locale sulla restrizione o considerazioni sulla compattezza.

Osservazione 2.25: C'è un altro modo di interpretare il teorema dei moltiplicatori basato su nozioni di geometria differenziale:

Passo 1) In \mathbb{R}^m sia $p \in \mathbb{R}^m$ e sia $E_p = \{\text{freccie uscenti da } p\}$ allora E_p con la somma vettoriale e il prodotto per uno scalare è uno spazio vettoriale di dimensione m .

Passo 2) Sia $g : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, Ω aperto, $m > n$, $g \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ e sia $p \in \Omega$ con $g(p) = 0$ e $Jg(p)$ di rango n (massimo). Sia $T_p \Sigma := \{v \in E_p \text{ che sono derivate in } p \text{ di qualche cammino su } \Sigma \text{ ovvero tali che } \exists \psi : (-1, 1) \rightarrow \Sigma \subseteq \mathbb{R}^m \text{ di classe } \mathcal{C}^1 \text{ e } \psi(0) = p, \psi'(0) = v\}$, $T_p \Sigma$ è lo spazio tangente a Σ in p e per costruzione $T_p \Sigma$ è un sottospazio di E_p .

Passo 3) Dalle ipotesi fatte su g e dal teorema di Dini segue che $\dim T_p \Sigma \leq m - n$. Infatti per Dini localmente Σ è grafico di una funzione che a meno di riordinare le variabili possiamo immaginare dia le x_{m-n+1}, \dots, x_n coordinate in funzione delle x_1, \dots, x_{m-n} . Ma allora la curva

$$\psi_1 : t \rightarrow (x_{1,p} + t, x_{2,p}, \dots, x_{m-n,p}, \phi(x_{1,p} + t, x_{2,p}, \dots, x_{m-n,p}))$$

è ben definita in $\mathcal{U}(0)$ dove $p = (x_{1,p}, \dots, x_{m-n,p})$ e $\psi_1'(0) = 1, 0, \dots, 0, \frac{d\phi}{dx_1}()$ che quindi $\in T_p \Sigma$. Lo stesso risultato si può ottenere per $\psi_2, \dots, \psi_{m-n}$. Questi sono $m - n$ vettori linearmente indipendenti.

Passo 4) Sia ora $\psi : (-1, 1)$ una curva su Σ di classe \mathcal{C}^1 e $\psi(0) = p$. Visto che è su Σ allora $(g_1 \circ \psi)(t) = 0 \quad \forall t$. In particolare

$$0 = \frac{d((g_1 \circ \psi)(t))}{dt} \Big|_{t=0} = \nabla g_1(p) \cdot \psi'(0)$$

ovvero $\nabla g_1(p)$ è ortogonale a $\psi'(0)$. Visto che ogni vettore di $T_p\Sigma$ è di questo tipo ne segue che $\nabla g_1(p) \in (T_p\Sigma)^\perp$ ma questo può essere ripetuto per g_2, \dots, g_n . La condizione " $Jg(p)$ ha rango n " garantisce che questi sono linearmente indipendenti quindi $\dim(T_p\Sigma)^\perp \geq n$.

Passo 5) Visto che $\dim(T_p\Sigma) + \dim(T_p\Sigma)^\perp = \dim E_p = n$, da $\dim T_p\Sigma \geq m - n$ e $\dim(T_p\Sigma)^\perp \geq n$, segue che $\dim T_p\Sigma = m - n$ e $\dim(T_p\Sigma)^\perp = n$. Inoltre $(T_p\Sigma)^\perp$ è generato dai $\nabla g_j(p) \quad j = 1, \dots, n$

Capitolo 3

Equazioni Differenziali

Possiamo definire un'equazione differenziale come un'equazione le cui soluzioni sono funzioni φ di cui si chiede un legame tra $x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(k)}(x)$ che deve essere soddisfatto $\forall x$ nel dominio. In modo meno vago è data $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}$ e si cerca $\varphi : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ di classe \mathcal{C}^k tale che:

$$f(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(k)}(x)) = 0 \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$$

Una tale equazione è detta di ordine k .

Osservazione 3.1: Se $k = 0$ l'equazione è di tipo "implicito" che è già stato tratta nel capitolo 2. Considereremo quindi sempre $k \geq 1$.

La teoria delle equazioni differenziali è abbastanza sviluppata nel caso l'equazione sia scrivibile in forma speciale:

$$\varphi^{(k)} = f(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(k-1)})$$

In cui la derivata di ordine massimo è esplicitata. Queste equazioni sono dette in forma normale.

Le equazioni in forma normale possono essere generalizzate a equazioni vettoriali, ovvero equazioni dove l'incognita cercata $\varphi : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ di classe $\mathcal{C}^k((\alpha, \beta))$ è in realtà vettoriale:

$$\underline{\varphi}^{(k)}(x) = \underline{f}(x, \underline{\varphi}(x), \underline{\varphi}'(x), \dots, \underline{\varphi}^{(k-1)}(x)) \quad (*)$$

$\forall x \in (\alpha, \beta)$ dove $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n)^k \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Osservazione 3.2: In genere un'equazione differenziale ha più di una soluzione. Si considerino:

- $y' = f(x)$ (f continua) ha $\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(u)du$ come soluzione $\forall (x_0, y_0)$
- $y' = y$ ha $\varphi(x) = y_0 e^x$ con $y_0 \in \mathbb{R}$

La struttura dell'equazione normale (*) suggerisce però che la soluzione sia unica qualora si aggiunga una condizione iniziale della forma: $(\varphi(x_0), \underline{\varphi}'(x_0), \dots, \underline{\varphi}^{(k-1)}(x_0)) = (\underline{y}_0, \underline{y}_1, \underline{y}_2, \dots, \underline{y}_{k-1})$ con x_0 e \underline{y} assegnati. Questo perchè la conoscenza delle condizioni iniziali e di (*) danno: $\varphi^{(k)}(x_0) = f(x_0, \varphi(x_0), \varphi'(x_0), \dots, \varphi^{(k-1)}(x_0))$ che è noto e per derivazione (sempre se è possibile) di (*) si ha:

$$\varphi^{(k+1)}(x) = \frac{d}{dx} \varphi^{(k)}(x) = \frac{d}{dx} f(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(k-1)}(x))$$

e chiamando $x, y_0, y_1, \dots, y_{k-1}$ gli argomenti di f questo è:

$$= \frac{d}{dx} \Big|_{(x, \varphi(x), \dots, \varphi^{(k-1)})} + \frac{d}{dy_0} \Big|_{(x, \varphi(x), \dots, \varphi^{(k-1)})} \cdot \varphi'(x) + \dots + \frac{d}{dy_{k-1}} \Big|_{(x, \varphi(x), \dots, \varphi^{(k-1)})} \cdot \varphi^{(k)}(x)$$

e valutando in x_0 tutti i termini a destra risultano noti (si osservi che in x_0 $\varphi^{(k)}$ è stato calcolato al passo precedente), quindi $\varphi^{(k+1)}(x_0)$ è noto.

Il processo può formalmente proseguire ad ogni ordine (se f è \mathcal{C}^∞) e dà $\varphi^{(j)}(x_0) \forall j$, quindi di φ è determinato lo sviluppo di Taylor. Se questo converge e se converge a φ ne segue che φ è stata trovata univocamente. Tutto questo è formale (f potrebbe non essere \mathcal{C}^∞ , la serie di Taylor potrebbe non convergere...) ma mostra che è ragionevole supporre che la coppia:

$$\left\{ \begin{array}{l} y^{(k)} = f(x, y, y', \dots, y^{(k-1)}) \quad \leftarrow \text{equazione normale} \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \vdots \\ y^{(k-1)}(x_0) = y_{k-1} \end{array} \right\} \quad \leftarrow \text{condizioni} \quad (*)$$

abbia una sola soluzione. Buona parte della teoria che andremo a sviluppare servirà proprio ad individuare le condizioni sotto cui questo principio è valido.

Definizione 3.3: Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n)^k \rightarrow \mathbb{R}^n$, Ω aperto e $f \in \mathcal{C}(\Omega)$; sia inoltre $(x_0, y_0, y_1, \dots, y_{k-1}) \in \Omega$ allora chiamo $(*)$ problema di Cauchy. Chiamo soluzione di $(*)$ una funzione $\varphi : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ tale che:

1. $\varphi \in \mathcal{C}^k((\alpha, \beta))$
2. $\alpha < x_0 < \beta$
3. φ (e le sue derivate) hanno valori tali per cui $(*)$ vale $\forall x \in (\alpha, \beta)$

Si usa chiamare "soluzione globale" una soluzione per la quale (α, β) sia noto ed esplicitato, e invece "soluzione locale" una soluzione per la quale (α, β) sia noto esistere ma non venga determinato esplicitamente.

Osservazione 3.4: Il dominio di una soluzione è (α, β) in particolare è un intervallo aperto e φ è di classe \mathcal{C}^k se l'equazione ha ordine k .

3.1 Equazioni di forma speciale

Per certe funzioni f esistono procedure capaci di dare una formula esplicita della soluzione del problema di Cauchy. Vediamone alcune:

3.1.1 Equazioni lineari del primo ordine

$$\begin{cases} y' + p(x)y = q(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

dove p e $q \in \mathcal{C}((\alpha, \beta))$, $x_0 \in (\alpha, \beta)$ e $y_0 \in \mathbb{R}$ qualunque.

Sia $H(x)$ una (qualunque) primitiva di $p(x)$ ad esempio: $H(x) = \int_{x_0}^x p(u)du$ (esiste perchè $p(x)$ è continua e $H' = p$ in (α, β)). Moltiplicando per $e^{H(x)}$, ottengo:

$$q(x)e^{H(x)} = y'(x)e^{H(x)} + p(x)e^{H(x)}y = \frac{d}{dx}(y(x)e^{H(x)})$$

ma allora $y(x)e^{H(x)}$ è una primitiva per $q(x)e^{H(x)}$ per cui:

$$y(x)e^{H(x)} - y(x_0)e^{H(x_0)} = \int_{x_0}^x q(v)e^{H(v)}dv$$

Siccome $y(x_0) = y_0$ per la condizione iniziale e $e^{H(x_0)} = 1$ ho che:

$$y(x) = e^{-H(x)} \left[y_0 + \int_{x_0}^x q(v)e^{H(v)}dv \right]$$

ed è soluzione su (α, β) e la procedura dimostra che è unica su tale intervallo.

Esempio 3.5: Si consideri il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = 2xy + e^{x^2-x} \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

Abbiamo che $H(x) = \int_0^x -2udu = -x^2$ mentre $\int_0^x e^{u^2-u}e^{-u^2}du = \int_0^x e^{-u}du = 1 - e^{-x}$ perciò la soluzione (unica su \mathbb{R}) è:

$$y(x) = e^{x^2}(4 - e^{-x})$$

Esempio 3.6: Si consideri il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = -\frac{y}{x} + \cos(x) \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

La procedura ci dà che l'unica soluzione su $(0, +\infty)$, è $y(x) = \frac{1}{x}(2 + x \sin(x) + \cos(x) - \sin 1 - \cos 1)$.

3.1.2 Equazioni a variabile separabile

$$\begin{cases} y' = h(x)g(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Con $h \in \mathcal{C}((\alpha, \beta))$, $g \in \mathcal{C}((\gamma, \delta))$, $x_0 \in (\alpha, \beta)$ e $y_0 \in (\gamma, \delta)$. Allora $\exists!$ soluzione locale (di fatto esiste sul più ampio intervallo su cui la procedura seguente è corretta in ogni passo:

Passo A: Se $g(y_0) = 0$, allora $y(x) = y_0$ (funzione costante) $\forall x \in (\alpha, \beta)$ è soluzione.

Passo B: Supponiamo $g(y_0) \neq 0$. Allora $\exists \mathcal{U}(y_0)$ in cui g è diverso da 0, in tal caso:

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = h(x)$$

e per integrazione:

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{du}{g(u)} = \int_{x_0}^x h(v)dv \quad (**)$$

La (**) è un'equazione implicita per $y(x)$, $F(x, y) = 0$ con

$$F(x, y) = \int_{y_0}^{y(x)} \frac{du}{g(u)} - \int_{x_0}^x h(v) dv$$

Visto che $\frac{dF}{dy} = \frac{1}{g(y)} \neq 0$ la (**) definisce implicitamente 1! funzione e il ragionamento che ci ha portato alla (**) mostra che la soluzione del problema di Cauchy e la soluzione di $F(x, y) = 0$ coincidono fino a dove è lecito dividere per $g(y)$.

Esempio 3.7: Si consideri il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = -8x^3 \sqrt{y} \\ y(0) = 64 \end{cases}$$

Siccome $64 \neq 0$ la funzione $y(x) = 64$ non è soluzione di questo problema di Cauchy. Allora $\frac{y'}{2\sqrt{y}} = -4x^3 \Leftrightarrow \int_{64}^y \frac{du}{2\sqrt{u}} = \int_0^x -4v^3 dv$ perciò $\sqrt{y} - \sqrt{64} = -x^4 \Leftrightarrow y = (\sqrt{64} - x^4)^2$ ed è soluzione globale, di fatto lo è su tutto l'intervallo $(-64^{\frac{1}{8}}, 64^{\frac{1}{8}})$.

3.1.3 Equazioni di Bernoulli

$$\begin{cases} y' + p(x)y = q(x)y^\gamma \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

dove p e $q \in \mathcal{C}((\alpha, \beta))$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $x_0 \in (\alpha, \beta)$ e y_0 tale che y_0^γ è ben definita.

Se $\gamma = 0$ o $\gamma = 1$ allora l'equazione è lineare e come trattarla è stato visto in precedenza, supponiamo $\gamma \neq 0, 1$.

Se $\gamma > 0$ tra le soluzioni dell'equazione c'è $y(x) \equiv 0 \forall x$ (che soddisfa il problema di Cauchy nel caso $y_0 = 0$). Assumo $y_0 \neq 0$ allora posso dividere per y^γ ed ho:

$$\frac{y'}{y^\gamma} + p(x) \frac{1}{y^{\gamma-1}} = q(x)$$

Pongo $z(x) = y^{1-\gamma}$ allora $z'(x) = (1-\gamma) \frac{y'}{y^\gamma}$ quindi z soddisfa:

$$\begin{cases} \frac{z'}{1-\gamma} + p(x)z = q(x) \\ z(x_0) = y_0^{1-\gamma} \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} z' + (1-\gamma)p(x)z = (1-\gamma)q(x) \\ z(x_0) = y_0^{1-\gamma} \end{cases}$$

Quindi l'equazione per z è lineare. Risolto il problema di Cauchy per z si ottiene la y invertendo la soluzione $z(x) = y(x)^{1-\gamma}$. (Attenzione a dove questa soluzione sia invertibile!)

Osservazione 3.8: La procedura è invertibile ad ogni punto se $y_0 \neq 0$ quindi quella così trovata è l'unica soluzione locale.

3.2 Semplificazioni di equazioni differenziali generiche

Proseguiamo ora nello studio delle equazioni differenziali generiche:

3.2.1 Da equazione di ordine k a equazione del primo ordine

Verifichiamo che da un certo punto di vista basta studiare le equazioni del primo ordine, purché vettoriali, perché ogni equazione di ordine k può sempre essere scritta come equazione del primo ordine vettoriale. Infatti sia data:

$$\begin{cases} \underline{y}^{(k)} = \underline{f}(x, \underline{y}, \underline{y}', \dots, \underline{y}^{(k-1)}) \\ \underline{y}^{(j)}(x_0) = \underline{\widetilde{y}}_j \quad j = 0, \dots, k-1 \end{cases} \quad (*)$$

con $\underline{f} : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n)^k \rightarrow \mathbb{R}^n$, Ω aperto, $\underline{f} \in \mathcal{C}(\Omega)$ e $(x_0, \widetilde{y}_0, \dots, \widetilde{y}_{k-1}) \in \Omega$. Pongo:

$$\underline{z}(x) = \begin{bmatrix} \underline{y}(x) \\ \underline{y}'(x) \\ \vdots \\ \underline{y}^{(k-1)}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{z}_1 \\ \underline{z}_2 \\ \vdots \\ \underline{z}_k \end{bmatrix}$$

Provo a derivare le componenti del vettore (è possibile in quanto di classe \mathcal{C}^k) e ottengo:

$$\underline{z}'(x) = \begin{bmatrix} \underline{y}'(x) \\ \underline{y}''(x) \\ \vdots \\ \underline{y}^{(k)}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{y}'(x) \\ \underline{y}''(x) \\ \vdots \\ \underline{f}(x, \underline{y}, \underline{y}', \dots, \underline{y}^{(k-1)}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{z}_2 \\ \vdots \\ \underline{z}_k \\ \underline{f}(x, \underline{y}, \underline{y}', \dots, \underline{y}^{(k-1)}) \end{bmatrix} := \underline{F}(x, \underline{z})$$

ed è chiaro che $\underline{F} \in \mathcal{C}(\Omega)$. Inoltre:

$$\underline{z}(x_0) = \begin{bmatrix} \widetilde{y}_0 \\ \vdots \\ \widetilde{y}_{k-1} \end{bmatrix}$$

Quindi se \underline{y} soddisfa (*) allora \underline{z} soddisfa:

$$\begin{cases} \underline{z}' = \underline{F}(x, \underline{z}) \\ \underline{z}(x_0) = \begin{bmatrix} \widetilde{y}_0 \\ \vdots \\ \widetilde{y}_{k-1} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (**)$$

che è del primo ordine vettoriale con $\underline{F} \in \mathcal{C}(\Omega)$

Viceversa se \underline{z} soddisfa (**) (quindi $\underline{z} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}(x_0))$) allora la funzione $y(x) := z_1(x)$ è chiaramente \mathcal{C}^1 ma (**) dice $y'(x) = z_2$ che è \mathcal{C}^1 allora $y(x)$ è in realtà \mathcal{C}^2 . Iterando il procedimento si afferma che $y(x)$ è di classe \mathcal{C}^k e $y^{(k)} = z'_k = f(x, z_1, z_2, \dots, z_k)$ ovvero \underline{y} soddisfa (*) comprese le condizioni iniziali quindi (*) equivale a (**)

D'ora in poi ci limiteremo a problemi di Cauchy del primo ordine vettoriale.

3.2.2 Passaggio a integrale

Sia dato il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \underline{y}' = \underline{f}(x, \underline{y}) \\ \underline{y}(x_0) = \underline{y}_0 \end{cases} \quad (*3*)$$

con $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, Ω aperto, $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ e $(x_0, \underline{y}_0) \in \Omega$.

Supponiamo che y sia una soluzione del problema di Cauchy (quindi è di classe \mathcal{C}^1 su un intervallo (α, β)). Integrando l'equazione tra x_0 e x si ha allora:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(u, y(u)) du \text{ in } (\alpha, \beta)$$

Introduco allora un "operatore", data una funzione "buona" φ definiamo:

$$T : \varphi \rightarrow (T\varphi) \quad (T\varphi)(x) := y_0 + \int_{x_0}^x f(u, \varphi(u)) du$$

Perciò se y è soluzione di $(*3*)$ su (α, β) ($y \in \mathcal{C}^1$) allora Ty è ben definito e $Ty = y$ ovvero y è punto fisso per T .

Viceversa, supponiamo che φ sia $\mathcal{C}((\alpha, \beta))$ e sia punto fisso per T . Allora:

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(u, \varphi(u)) du \quad \forall x \in (\alpha, \beta) \quad (*4*)$$

ma $u \rightarrow f(u, \varphi(u))$ è continua (composizione di funzioni continue), quindi $x \rightarrow \int_{x_0}^x f(u, \varphi(u)) du$ è \mathcal{C}^1 (è integrale di una continua), ma allora $\varphi \in \mathcal{C}^1((\alpha, \beta))$ per la $(*4*)$. Valutando in x_0 la $(*4*)$ si ha $\varphi(x_0) = y_0$ e derivando la $(*4*)$ si ha $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$. Quindi φ soddisfa la $(*3*)$ ovvero se $y \in \mathcal{C}((\alpha, \beta))$ e $Ty = y$ in (α, β) allora y è soluzione di $(*3*)$ su (α, β) e $y \in \mathcal{C}^1((\alpha, \beta))$

Quindi il problema di Cauchy equivale ad un problema di punto fisso (detto problema integrale di Volterra) che però per essere formulato ha bisogno solo di assumere che $y \in \mathcal{C}((\alpha, \beta))$ (e non \mathcal{C}^1). Questo semplifica notevolmente la teoria.

3.3 Teoremi di esistenza e unicità

Basandosi se questa equivalenza si può dimostrare il seguente teorema:

Teorema di Peano 3.9: Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, Ω aperto e $f \in \mathcal{C}(\Omega)$. Sia $(x_0, y_0) \in \Omega$ allora il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

ha una soluzione locale (non dimostriamo questo risultato).

Osserviamo che il teorema afferma l'esistenza della soluzione ma non la sua unicità. In effetti sotto ipotesi così deboli (la sola continuità) non si ha unicità. Ad esempio:

Esempio 3.10: Sia dato il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = 3y^{\frac{2}{3}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

ha sia $y(x) \equiv 0$ che $y(x) = x^3$ come soluzioni.

La sola continuità di f garantisce l'esistenza locale della soluzione del problema di Cauchy ma non la sua unicità. Introduciamo ora una proprietà aggiuntiva che si rivelerà adatta per l'unicità:

Definizione 3.11: Data $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, Ω aperto e dato $(x_0, y_0) \in \Omega$; f è detta localmente lipschitziana nelle y uniformemente nelle x nel punto (x_0, y_0) quando $\exists d, \delta, L$ tali che:

$$\left. \begin{array}{l} x \in [x_0 - d, x_0 + d] \\ y_1, y_2 \in \overline{B_\delta(y_0)} \end{array} \right\} \Rightarrow \|f(x, y_1) - f(x, y_2)\|_2 \leq L \|y_1 - y_2\|_2$$

Osservazione 3.12: È una condizione di regolarità ma solo nelle y , non in tutte le variabili di f . Ad esempio $f(x, y) := [x] + y$ ($[x]$ parte intera di x) ha quella proprietà ma non è continua.

Osservazione 3.13: Se $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ allora sicuramente ha quella proprietà in tutti i punti di Ω (perché le derivate parziali di f sono continue quindi limitate sui compatti).

Teorema esistenza e unicità locale 3.14: Data $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, Ω aperto, $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ e sia $(x_0, y_0) \in \Omega$. Supponiamo che f sia localmente lipschitziana nelle y uniformemente nelle x in (x_0, y_0) allora il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

ha una e una sola soluzione locale.

Dimostrazione: Siano d, δ, L come nella definizione 3.11. Sia $M := \max \|f(x, y)\|_2$ ($(x, y) \in [x_0 - d, x_0 + d] \times \overline{B_\delta(y_0)}$), osservo che $[x_0 - d, x_0 + d] \times \overline{B_\delta(y_0)}$ è compatto e f è continua quindi esiste M . Sia $d' = \min(d, \frac{\delta}{M}, \frac{1}{2L})$ e sia $\mathcal{X} := \mathcal{C}([x_0 - d', x_0 + d'], \overline{B_\delta(y_0)})$ ovvero l'insieme delle funzioni continue da $[x_0 - d', x_0 + d']$ a $\overline{B_\delta(y_0)}$. \mathcal{X} è uno spazio metrico completo rispetto alla metrica $d(\varphi, \psi) := \|\varphi - \psi\|_\infty$ (perché il limite uniforme di funzioni continue è continuo e $\overline{B_\delta(y_0)}$ è chiuso).

Sia T l'operatore integrale di Volterra:

$$(T\varphi)(x) := y_0 + \int_{x_0}^x f(u, \varphi(u)) du$$

1) T è una mappa $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ infatti è chiaro che se $\varphi \in \mathcal{X}$ allora $T\varphi$ è continua su $[x_0 - d', x_0 + d']$ (qui si usa la continuità di f) e inoltre:

$$\|(T\varphi)(x) - y_0\|_2 = \left\| \int_{x_0}^x f(u, \varphi(u)) du \right\|_2 \leq \left| \int_{x_0}^x \|f(u, \varphi(u))\|_2 du \right| \leq M(x - x_0) \leq Md' \leq \delta$$

2) T è una contrazione. Infatti se $\varphi, \psi \in \mathcal{X}$ si ha:

$$\|(T\varphi)(x) - (T\psi)(x)\|_2 = \left\| \int_{x_0}^x (f(u, \varphi(u)) - f(u, \psi(u))) du \right\|_2 \leq \left| \int_{x_0}^x \|f(u, \varphi(u)) - f(u, \psi(u))\|_2 du \right|$$

ma f è localmente lipschitziana nelle y uniformemente nelle x quindi:

$$\leq \left| \int_{x_0}^x L \|\varphi(u) - \psi(u)\|_2 du \right| \leq L \|\varphi - \psi\|_\infty \cdot (x - x_0) \leq d' L \cdot \|\varphi - \psi\|_\infty$$

Questo vale $\forall x \in [x_0 - d', x_0 + d']$ allora abbiamo verificato che:

$$\|T\varphi - T\psi\|_\infty \leq d'L \cdot \|\varphi - \psi\|_\infty$$

ma $d'L \leq \frac{1}{2}$ quindi T è una contrazione.

3) Quindi T è una contrazione e \mathcal{X} è completo, dal teorema di Banach - Cacciopoli sappiamo che esiste ed è unico il punto fisso per T ovvero una mappa φ tale che $T\varphi = \varphi$. Abbiamo già visto che l'esistenza e unicità della soluzione del problema di Volterra equivale all'esistenza e unicità del problema di Cauchy. \square

Esercizio 3.15: Sia dato il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

il teorema precedente garantisce l'esistenza e unicità della soluzione e lo fa tramite il teorema di Banach - Cacciopoli applicato a $(T\varphi)(x) := 1 + \int_0^x \varphi(u)du$. Sia $\varphi_0(x) \equiv 0$ e dato φ_n costruisco $\varphi_{n+1}(x) = (T\varphi_n)(x) = 1 + \int_0^x \varphi_n(u)du$.

1. Calcolare $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$
2. Determinare φ_n esplicitamente $\forall n$ (per induzione)
3. Verificare che $\varphi_n(x) \rightarrow \exp^x \forall x \in \mathbb{R}$ e verificare che effettivamente \exp^x soddisfa il problema di Cauchy.

Quindi dato un problema di Cauchy nella forma del teorema se f è continua il problema di Cauchy ha almeno una soluzione locale (Peano), se poi f è di classe \mathcal{C}^1 la soluzione è unica ovvero l'esistenza e unicità locale sono legate alla regolarità di f .

Diversa è invece la questione dell'esistenza e/o unicità globale.

Esempio 3.16: Si consideri:

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

esso ammette come soluzione $y(x) = \frac{\alpha}{1-\alpha x}$ negli intervalli $(-\infty, \frac{1}{\alpha})$ se $\alpha > 0$, $(\frac{1}{\alpha}, +\infty)$ se $\alpha < 0$ e \mathbb{R} se $\alpha = 0$. Ciò nonostante $y' = f(x, y)$ con $f(x, y) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. L'esistenza e unicità in grande è infatti sensibile alla crescita di f in y .

Teorema esistenza e unicità globale (striscia) 3.17: Sia $f : S := [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f \in \mathcal{C}(S)$. Supponiamo che f sia lipschitziana nelle y uniformemente nelle x , ovvero $\exists L > 0$ tale che: $\forall x \in [a, b], \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n \|f(x, y_1) - f(x, y_2)\|_2 \leq L\|y_1 - y_2\|$ allora ogni problema di Cauchy della forma:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

con $(x_0, y_0) \in S$ ha un'unica soluzione su $[a, b]$.

Osservazione 3.18: La condizione su f dice (tra le altre cose) che f cresce al più linearmente nelle y visto che:

$$\|f(x, y)\|_2 \leq \|f(x, 0)\|_2 + \|f(x, y) - f(x, 0)\|_2 \leq A + L\|y\|_2$$

dove $A := \max \|f(x, 0)\|_2$ (con $x \in [a, b]$) che esiste per la continuità di f .

Dimostrazione: Dimostro la tesi prima in $[x_0, b]$ poi in $[a, x_0]$ dopo di che uso il teorema di esistenza e unicità locale per unire le due soluzioni in un'unica soluzione in $[a, b]$

Dimostro su $[x_0, b]$. Sia $\mathcal{X} := \mathcal{C}([x_0, b], \mathbb{R}^n)$ e sia:

$$(T\varphi)(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(u, \varphi(u)) du$$

è chiaro che $T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ (più semplice dell'altra volta perchè le funzioni in \mathcal{X} non sono soggette a vincoli se non la continuità). Osservo che \mathcal{X} è completo rispetto a $\|\cdot\|_\infty$.

Introduco però una norma diversa fisso $\lambda > 0$ e pongo:

$$\|\varphi\|_\lambda := \sup_{x \in [x_0, b]} \|e^{-\lambda x} \varphi(x)\|_2$$

Osservo che $e^{-\lambda b} \leq e^{-\lambda x} \leq e^{-\lambda x_0}$ e che quindi:

$$e^{-\lambda b} \|\varphi\|_\infty \leq \|\varphi\|_\lambda \leq e^{-\lambda x_0} \|\varphi\|_\infty$$

Questo dimostra che $\|\cdot\|_\infty$ e $\|\cdot\|_\lambda$ sono norme equivalenti per cui \mathcal{X} è completo anche rispetto a $\|\cdot\|_\lambda$. Ora:

$$\|T\varphi(x) - T\psi(x)\|_2 \leq \int_{x_0}^x \|f(u, \varphi(u)) - f(u, \psi(u))\|_2 du$$

ma f è lipschitziana quindi:

$$\begin{aligned} L \int_{x_0}^x \|\varphi(u) - \psi(u)\|_2 du &= L \int_{x_0}^x e^{\lambda u} \underbrace{e^{-\lambda u} \|\varphi(u) - \psi(u)\|_2}_{\leq \|\varphi - \psi\|_\lambda} du \\ &\leq L \|\varphi - \psi\|_\lambda \int_{x_0}^x e^{\lambda u} du = \frac{L}{\lambda} (e^{\lambda x} - e^{\lambda x_0}) \|\varphi - \psi\|_\lambda \end{aligned}$$

Ma allora

$$e^{-\lambda x} \|T\varphi(x) - T\psi(x)\|_2 \leq \frac{L}{\lambda} (1 - e^{-\lambda(x-x_0)}) \|\varphi - \psi\|_\lambda \leq \frac{L}{\lambda} \|\varphi - \psi\|_\lambda$$

ovvero:

$$\|T\varphi - T\psi\|_\lambda \leq \frac{L}{\lambda} \|\varphi - \psi\|_\lambda$$

Scegliendo $\lambda > L$ si trova una norma rispetto alla quale T è una contrazione.

Su $[a, x_0]$ uso invece

$$\|\varphi\|_\lambda := \sup_{x \in [a, x_0]} \|e^{\lambda x} \varphi(x)\|_2$$

(sempre $\lambda > 0$). \square

3.4 Stabilità rispetto al modello e ai dati iniziali

Teorema 3.19: Siano $f, g : [a, b] \times B \rightarrow \mathbb{R}^n$ dove B è un aperto di \mathbb{R}^n . Supponiamo che:

- $\exists L$ con $\|f(x, y) - f(x, z)\| \leq L\|y - z\| \quad \forall x \in [a, b] \quad y, z \in B$
- $\exists R : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua con $\|f(x, y) - g(x, y)\| \leq R(x) \quad \forall x \in [a, b] \quad y \in B$

Siano $\alpha, \beta \in B$ e siano φ e ψ di classe $\mathcal{C}^1([a, \beta])$ che soddisfano:

$$\varphi : \begin{cases} \varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \\ \varphi(a) = \alpha \end{cases} \quad \psi : \begin{cases} \psi'(x) = g(x, \psi(x)) \\ \psi(a) = \beta \end{cases}$$

Allora $\|\varphi(x) - \psi(x)\| \leq e^{L(x-a)}\|\alpha - \beta\| + e^{L(x-a)} \int_a^x e^{-L(s-a)} R(s) ds$.

Dimostrazione: Considero $\|\varphi(x) - \psi(x)\|$, questa è una mappa $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua che in tutti i punti in cui $\varphi(x) \neq \psi(x)$ soddisfa:

$$\frac{d}{dx} \|\varphi(x) - \psi(x)\| = \frac{d}{dx} \left[\sum_{i=1}^n (\varphi_i(x) - \psi_i(x))^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{\langle \varphi(x) - \psi(x), \varphi'(x) - \psi'(x) \rangle}{\|\varphi(x) - \psi(x)\|}$$

Così dalla disuguaglianza di Cauchy - Schwartz segue che:

$$\leq \frac{\|\varphi(x) - \psi(x)\| \cdot \|\varphi'(x) - \psi'(x)\|}{\|\varphi(x) - \psi(x)\|} = \|\varphi'(x) - \psi'(x)\|$$

Dalle ipotesi iniziali posso scrivere che questa quantità è uguale a:

$$\begin{aligned} &= \|f(x, \varphi(x)) - g(x, \psi(x))\| \leq \|f(x, \varphi(x)) - f(x, \psi(x))\| + \|f(x, \psi(x)) - g(x, \psi(x))\| \text{ ovvero} \\ &\quad \frac{d}{dx} \|\varphi(x) - \psi(x)\| \leq L\|\varphi(x) - \psi(x)\| + R(x) \end{aligned}$$

Moltiplico la disuguaglianza per e^{-Lx} ed ottengo:

$$\frac{d}{dx} (e^{-Lx} \|\varphi(x) - \psi(x)\|) \leq e^{-Lx} R(x)$$

che integrata su $[a, x]$ dà:

$$e^{-Lx} \|\varphi(x) - \psi(x)\| - e^{-La} \|\alpha - \beta\| \leq \int_a^x e^{-Ls} R(s) ds$$

quindi:

$$\|\varphi(x) - \psi(x)\| \leq e^{L(x-a)} \|\alpha - \beta\| + e^{Lx} \int_a^x e^{-Ls} R(s) ds$$

che è la tesi ma è stata ottenuta supponendo $\varphi(x) \neq \psi(x)$ nell'intervallo di integrazione (o almeno nella sua parte aperta). La tesi in generale è ottenuta incollando questi risultati (cosa che è possibile perché $\|\varphi(x) - \psi(x)\|$ è continua su $[a, b]$). \square

Questo risultato è noto col nome di Lemma di Gronwall. Dà una stima di quanto velocemente cambia la soluzione al variare della condizione iniziale (α o β) e della forma dell'equazione (f o g). La stima in sé non è però molto buona per via del termine $e^{L(x-a)}$ (esponenziale). Questo risultato è il più semplice all'interno di una vasta famiglia di risultati di dipendenza continua dei parametri.