Chapitre 1 : Géométrie du plan, clipping paramétrique de Cyrus-Beck

1 Polygones

1.1 Définitions

Définition 1 : ligne brisée
On appelle $\mathcal{L}$ une ligne brisée toute suite non circulaire de points reliés par des segments.

$\mathcal{L} = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$, tel que $s_i = [P_{i-1}, P_i]$, $i \geqslant 1$.

Exemple :

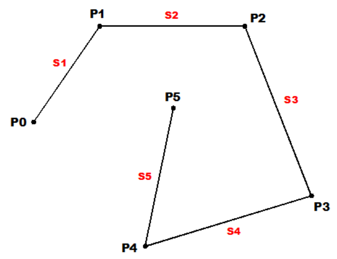

FIGURE 1 – Une ligne brisée

Définition 2 : polygone
On appelle Π un polygone toute suite circulaire de points reliés par des segments.

$\Pi = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$, $n \geqslant 3$, tel que $s_i = [P_{i-1}, P_i]$, $i \geqslant 1$, avec $P_0 = P_n$.

Exemple :

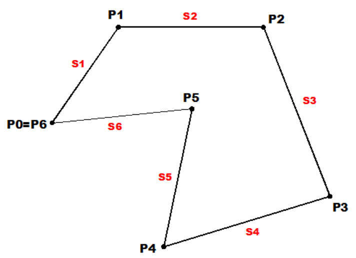

FIGURE 2 – Un polygone

Définition 3 : **polygone croisé**
Un polygone est dit croisé (ou étoilé) si au moins deux de ses côtés sont sécants.

Exemples : pentagramme, heptagramme, octagramme, décagramme, ...

Définition 4 : **polygone convexe**
Un polygone Π est dit convexe si pour tout couple de points intérieurs au polygone, le segment reliant ces deux points est intérieur au polygone.

C'est à dire : $\forall M, M' \in \text{intérieur}(\Pi), [M\ M'] \subset \text{intérieur}(\Pi)$.

Remarque : un polygone croisé n'est pas convexe, mais un polygone non convexe n'est pas forcément croisé.

Si un polygone est non croisé, on peut dire qu'il est convexe si :
- les angles intérieurs sont tous inférieurs à 180°
- le prolongement des côtés passe à l'extérieur du polygone.

Exemples : triangle, rectangle, carré, parallélogramme ...

Définition 5 : **polygone concave**
Un polygone Π est dit concave s'il est non convexe.

C'est à dire : $\exists M, M' \in \text{intérieur}(\Pi), [M\ M'] \not\subset \text{intérieur}(\Pi)$.

On peut dire qu'un polygone est concave si :
- au moins un angle intérieur est supérieur à 180°
- le prolongement de certains côtés passe à l'intérieur du polygone.

Exemples :

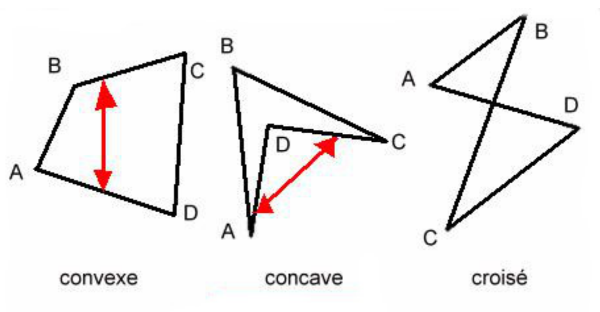

Figure 3 – Trois types de quadrilatères

Définition 6 : **polygone régulier**
Un polygone régulier est un polygone ayant tous les côtés égaux et tous les angles congrus (c'est à dire égaux modulo 2π). Un polygone régulier est soit un polygone convexe, soit un polygone étoilé.

Exemples : triangle équilatéral, carré, pentagone régulier, hexagone régulier, pentagramme régulier, décagramme régulier,...

Tous les polygones réguliers convexes d'un même nombre de côtés sont semblables. C'est à dire obtenus par composition d'une similitude (rotation, puis homothétie : agrandissement ou réduction, de même centre).
Plus un polygone convexe a de côtés, plus il tend vers le cercle. Un polygone régulier de 360 côtés a pour angles au centre des angles d'un degré.

1.2 Propriétés des polygones convexes

Propriété 1 :
Un polygone convexe à n côtés possède $\dfrac{n(n-3)}{2}$ diagonales.

Exemples :

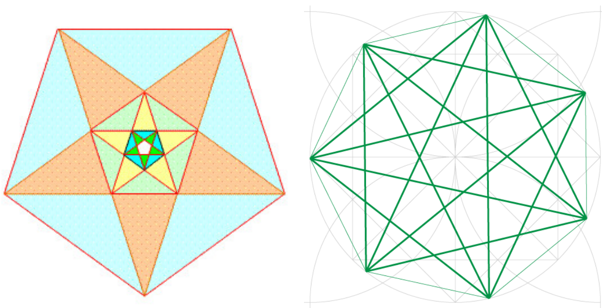

FIGURE 4 – Pentagone, pentagramme, heptagone et diagonales

- Le pentagone possède 5 côtés et $\dfrac{5 \times 2}{2} = 5$ diagonales formant un pentagramme s'interceptant en un pentagone. On peut répéter le processus à l'infini.
- L'heptagone possède 7 cotés et $\dfrac{7 \times 4}{2} = 14$ diagonales. Les diagonales extérieures forme un heptagramme s'interceptant en un heptagone, etc...

Propriété 2 :
Un polygone convexe à n côtés se divise en $n-2$ triangles à partir des diagonales issues d'un même sommet.

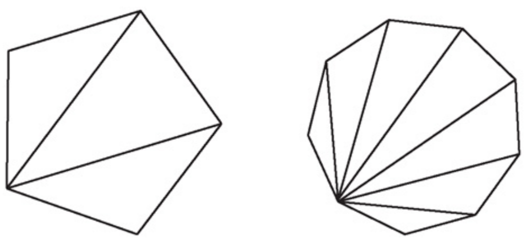

FIGURE 5 – Polygones et triangulations issue d'un sommet

Propriété 3 :
La somme des mesures des angles intérieurs d'un polygone est égale à $(n-2) \times 180^{\circ}$.

Propriété 4 :
Dans un polygone, un angle intérieur et son angle extérieur correspondant sont supplémentaires : la somme vaut 180°.

Propriété 5 :
La somme des mesures des angles extérieurs d'un polygone convexe est égale à 360°.

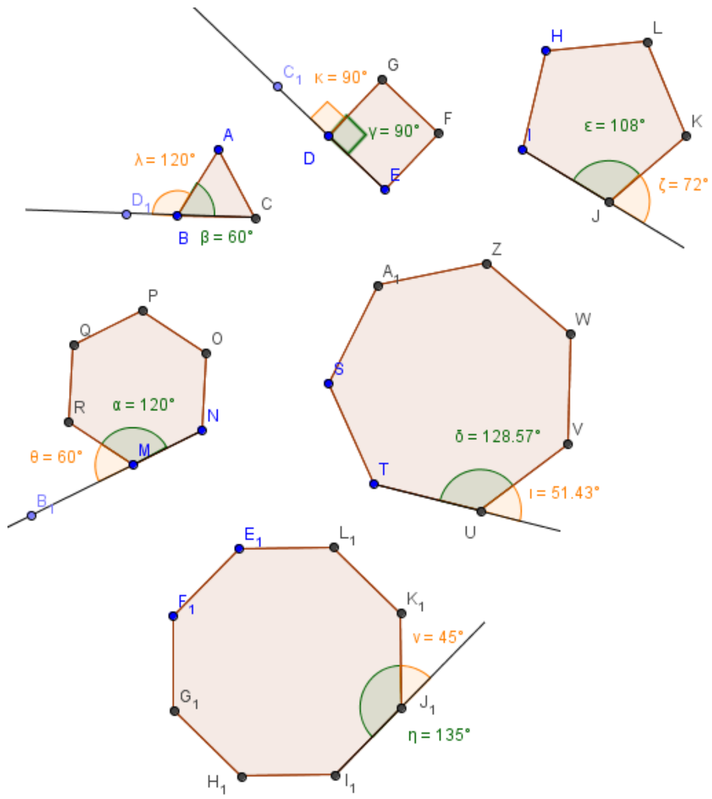

FIGURE 6 – Angles intérieurs et extérieurs

1.3 Test d'appartenance d'un point à un polygone

Méthode 1 : polygone non croisé
Consiste à faire la somme des angles définis par les segments de droite connectant le point à traiter et les sommets ordonnés du polygone convexe ou concave, mais non croisé.

- Si cette somme est 2π, le point est à l'intérieur
- Si cette somme est 0, le point est à l'extérieur

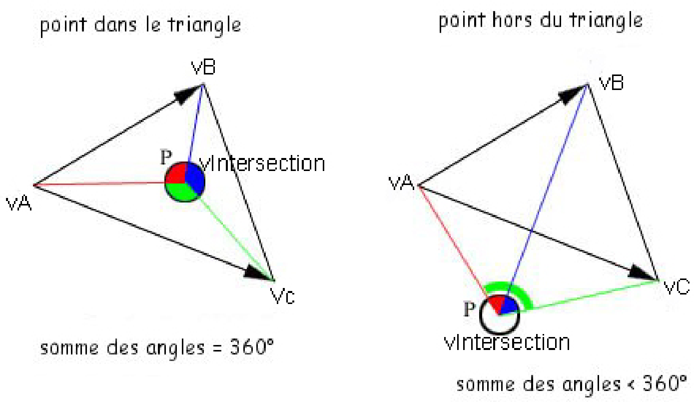

FIGURE 7 – Point intérieur ou extérieur au triangle

Méthode 2 : polygone quelconque
Consiste à calculer le nombre des intersections d'une demi-droite infinie partant du point à traiter avec les côtés du polygone.

- Si le nombre d'intersection est pair, le point est à l'extérieur.
- Si le nombre d'intersection est impair, le point est à l'intérieur.

Cas particuliers à traiter : sommets du polygone constituant des intersections.

- L'intersection est simple (compte pour 1) : les deux côtés du polygone au sommet sont de part et d'autres de la demi-droite.
- L'intersection est double (compte pour 2) : les deux côtés du polygone au sommet sont du même côté de la demi-droite.

Exemple :

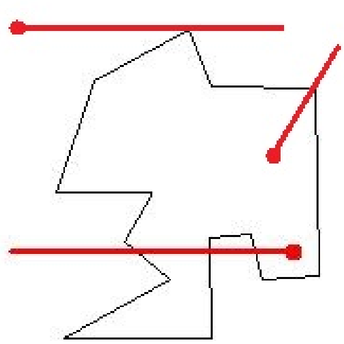

FIGURE 8 – Demi-droites issues de points extérieurs et intérieurs

2 Présentation et méthodes pour le clipping

2.1 Définition du clipping

On appelle clipping tout traitement qui permet de réduire le dessin d'un objet graphique à une région précise de l'écran.
Cette région est classiquement un rectangle, mais peut être de tout autre forme.
Dans ce cours, on s'intéressera au clipping paramétrique 2D convexe. C'est à dire le découpage d'un polygone quelconque par un polygone convexe (qui représente la fenêtre), utilisant l'équation paramétrique du segment.

Exemple :

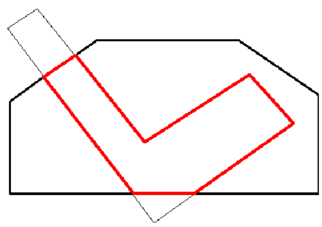

FIGURE 9 – Clipping

2.2 Repère et vecteur

On munit le plan $\mathbb{R}^2$ d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On dit que $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$ (bon de $\mathbb{R}^2$). On note $\| \ \|$ la norme euclidienne.

- $\forall\, M(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{x^2+y^2}$.
- $\vec{i}(1,0)$, $\vec{j}(0,1)$, $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ et $\vec{i} \perp \vec{j}$.

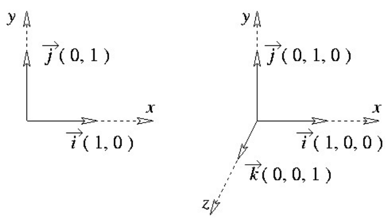

FIGURE 10 – Repère du plan $\mathbb{R}^2$ et de l'espace $\mathbb{R}^3$

Remarques :

- Pour tout point $M(x,y)$ du plan, on a $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} \iff \overrightarrow{OM}(x,y)$
- Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points du plan.
  On a $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A)$ et $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B-x_A)^2 + (y_B-y_A)^2}$.

2.3 Vecteurs orthogonaux, colinéaires et orientation

On munit le plan d'un repère orthonormé. Soient $\overrightarrow{u}(x, y)$ et $\overrightarrow{v}(x', y')$ deux vecteurs du plan.

- $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires (ou dépendants) si :
$$\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}, k \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow |\overrightarrow{u}\ \overrightarrow{v}| = 0 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow xy' - yx' = 0$$

- $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont non colinéaires (ou indépendants) si : $|\overrightarrow{u}\ \overrightarrow{v}| \neq 0$

  On pose $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$. On a deux cas distincts :
  1) $|\overrightarrow{u}\ \overrightarrow{v}| > 0 \Longleftrightarrow$ le triangle ABC est dans le sens positif
  2) $|\overrightarrow{u}\ \overrightarrow{v}| < 0 \Longleftrightarrow$ le triangle ABC est dans le sens négatif

- $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si : $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0 \Longleftrightarrow xx' + yy' = 0$

Remarque : on a aussi, $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}||\ ||\overrightarrow{v}|| \cos \Theta$, Θ étant l'angle défini par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Ainsi :

1) $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} > 0 \Longleftrightarrow \Theta$ est aigu
2) $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} < 0 \Longleftrightarrow \Theta$ est obtu
3) $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0 \Longleftrightarrow \Theta$ est droit

Attention : si l'on veut calculer Θ, connaissant $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{u}$, on a : $\Theta = \cos^{-1}(\dfrac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{||\overrightarrow{u}||\ ||\overrightarrow{v}||})$, qui donne un angle non orienté $\in [0, \pi]$ (car cos est bijective sur $[0, \pi]$). Pour connaître l'angle orienté défini par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, il faut déterminer l'orientation du triangle défini par ces deux vecteurs.

2.4 Vecteur normal

A chaque côté de la fenêtre (convexe), on peut associer un vecteur normal intérieur qui est orthogonal au côté et dirigé vers l'intérieur de la fenêtre. Ce vecteur normal est utilisé pour déterminer si un point est intérieur à une région convexe.

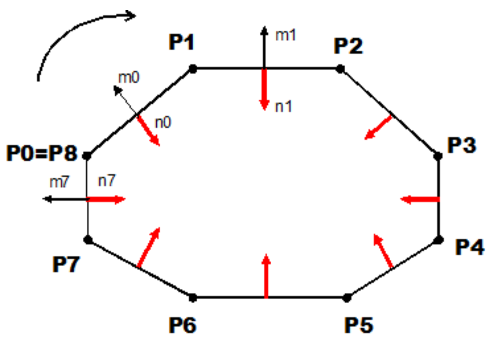

FIGURE 11 – Fenêtre convexe, normales intérieures et extérieures

On pose $\overrightarrow{P_iP_{i+1}} = \begin{pmatrix} x_{i+1} - x_i \\ y_{i+1} - y_i \end{pmatrix}$. Les vecteurs $\overrightarrow{n_i}$ et $\overrightarrow{m_i}$ respectent :

- $\overrightarrow{P_iP_{i+1}} \cdot \overrightarrow{n_i} = 0$ et $\overrightarrow{P_iP_{i+1}} \cdot \overrightarrow{m_i} = 0$
- $\overrightarrow{n_i} \cdot \overrightarrow{P_iP_j} > 0$, avec $j \neq i$, $j \neq i+1$ et P_i, P_{i+1}, P_j non alignés
- $\overrightarrow{m_i} \cdot \overrightarrow{P_iP_j} < 0$, avec $j \neq i$, $j \neq i+1$ et P_i, P_{i+1}, P_j non alignés

Suivant le sens des clics des points de la fenêtre, on a :

- dans le sens horaire (indirect), $\overrightarrow{n_i} = \begin{pmatrix} y_{i+1} - y_i \\ -(x_{i+1} - x_i) \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{m_i} = -\overrightarrow{n_i}$
- dans le sens trigonométrique (direct), $\overrightarrow{n_i} = \begin{pmatrix} -(y_{i+1} - y_i) \\ x_{i+1} - x_i \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{m_i} = -\overrightarrow{n_i}$

2.5 Equation paramétrique d'un segment

Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points du plan.

Notations : $[AB]$ segment AB
$[AB)$ demi-droite AB issue de A
$(AB]$ demi-droite AB issue de B
(AB) droite AB

$$\begin{aligned}
M(x,y) \in [AB] &\iff \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB},\ t \in [0,1] \\
&\iff M - A = t(B - A),\ t \in [0,1] \\
&\iff M = A + t(B - A),\ t \in [0,1] \\
&\iff M = (1-t)A + tB,\ t \in [0,1] \\
&\iff \left\{ \begin{array}{l} x = (1-t)x_A + tx_B \\ y = (1-t)y_A + ty_B \end{array} \right. ,\ t \in [0,1]
\end{aligned}$$

On note $Q(t) = (1-t)A + tB$, $t \in [0,1]$, l'équation paramétrique du segment $[AB]$.

Remarque : $M \notin [AB] \iff \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB},\ t \notin [0,1]$
$M \in (AB) \iff \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB},\ t \in \mathbb{R}$
$M \in [AB) \iff \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB},\ t > 0$
$M \in (AB] \iff \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB},\ t < 1$

2.6 Intersection d'un segment avec un bord de la fenêtre

On s'intéresse à l'intersection entre le segment $[AB]$ et un bord de la fenêtre (convexe).

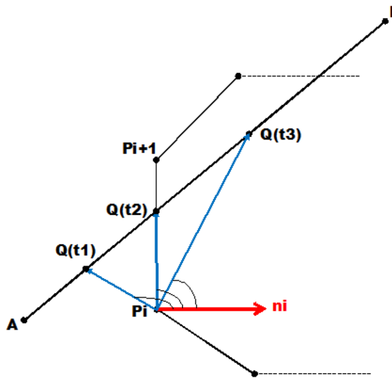

FIGURE 12 – Intersection segment bord fenêtre

On pose $[AB]$: $Q(t) = (1-t)A + tB$, $t \in [0,1]$ l'équation paramétrique du segment.

Soient $[P_iP_{i+1}]$ un bord de la fenêtre et $\overrightarrow{n_i}$ son vecteur normal intérieur. On peut savoir dans quelle région se situe un point du segment $[AB]$ en examinant la valeur du produit scalaire.

- Si $\overrightarrow{n_i}.(Q(t) - P_i) = 0$, alors $\overrightarrow{P_iQ(t)}$ est orthogonal $\overrightarrow{n_i}$
- Si $\overrightarrow{n_i}.(Q(t) - P_i) > 0$, alors $Q(t)$ est à droite de $\overrightarrow{P_iP_{i+1}}$
- Si $\overrightarrow{n_i}.(Q(t) - P_i) < 0$, alors $Q(t)$ est à gauche de $\overrightarrow{P_iP_{i+1}}$

Le calcul de t dans la résolution de $\overrightarrow{n_i}.(Q(t) - P_i) = 0$ permet de déterminer le point d'intersection avec le bord $[P_iP_{i+1}]$. On a :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{n_i}.(Q(t) - P_i) = 0 &\iff \overrightarrow{n_i}.((1-t)A + tB - P_i) = 0 \\
&\iff \overrightarrow{n_i}.(A - P_i + t(B - A)) = 0 \\
&\iff \overrightarrow{n_i}.(A - P_i) + \overrightarrow{n_i}.(B - A)t = 0
\end{aligned}$$

En posant $\overrightarrow{D} = B - A$ et $\overrightarrow{W_i} = A - P_i$, on a $t = -\dfrac{\overrightarrow{W_i}.\overrightarrow{n_i}}{\overrightarrow{D}.\overrightarrow{n_i}}$, avec $\overrightarrow{D} \neq \overrightarrow{0}$.

- Si $t > 1$, l'intersection $Q(t)$ est rejeté
- Si $t < 0$, l'intersection $Q(t)$ est rejeté
- Si $t \in [0,1]$, l'intersection $Q(t)$ est possible, enregistrement du paramètre t

Remarque : $\overrightarrow{D}.\overrightarrow{n_i}$ ne peut être nul que si $\overrightarrow{D} = \overrightarrow{0}$, c'est à dire que le segment est réduit à un point.

3 Fenêtrage Cyrus Beck

3.1 Tri des intersections bords-segment et cas particuliers

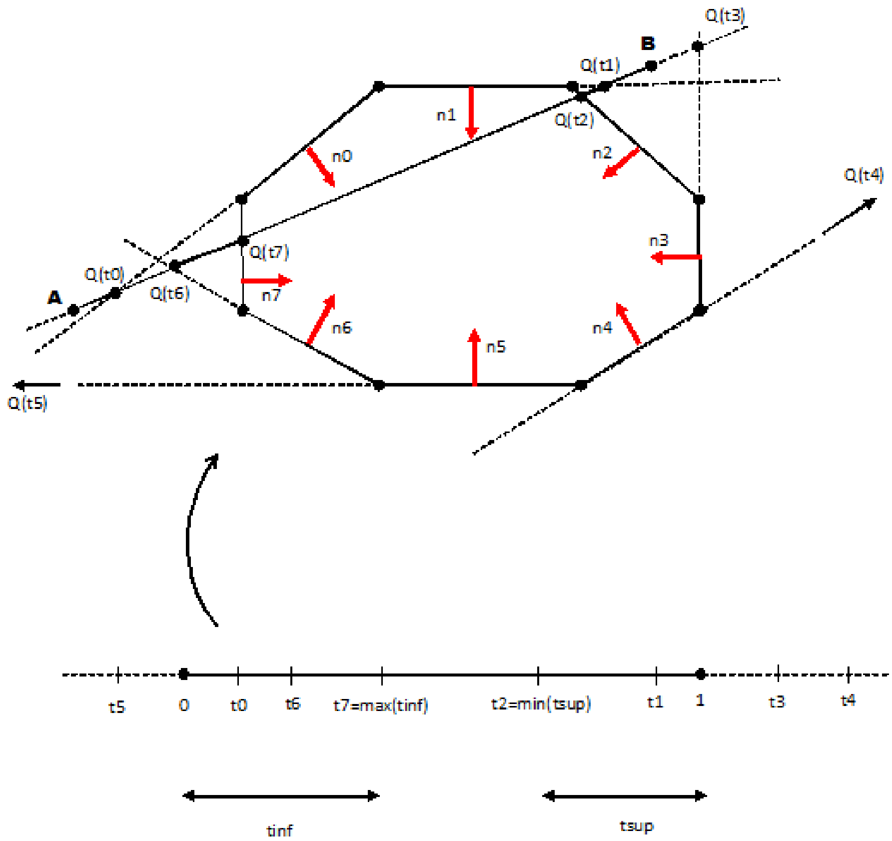

FIGURE 13 – Intersection segment fenêtre, cas général

On pose $\overrightarrow{D} = B - A$, $\overrightarrow{W_i} = A - P_i$ et $\overrightarrow{n_i}$ normale intérieure de $\overrightarrow{P_iP_{i+1}}$.
Le segment coupe la fenêtre en deux points au maximum, mais il y a autant de valeurs de t que de côtés.
On fait deux groupes :

- les paramètres du groupe des voisins de début du segment
  $\text{tinf} = \{t = -\dfrac{\overrightarrow{W_i}.\overrightarrow{n_i}}{\overrightarrow{D}.\overrightarrow{n_i}},\ \overrightarrow{D} \cdot \overrightarrow{n_i} > 0\}$
- les paramètres du groupe des voisins de fin du segment
  $\text{tsup} = \{t = -\dfrac{\overrightarrow{W_i}.\overrightarrow{n_i}}{\overrightarrow{D}.\overrightarrow{n_i}},\ \overrightarrow{D} \cdot \overrightarrow{n_i} \leqslant 0\}$

Si $0 \leqslant \max(\text{tinf}) \leqslant \min(\text{tsup}) \leqslant 1$, les deux intersections sont $Q(\max(\text{tinf}))$ et $Q(\min(\text{tsup}))$.

Cas particuliers :

1) max(tinf)<0 et $0 \leqslant$ min(tsup) $\leqslant 1$. Le segment à tracer va de A vers Q(min(tsup)).

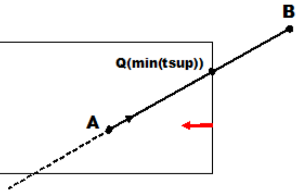

FIGURE 14 – Segment $[A\, Q(\min(\text{tsup})]$

2) $0 \leqslant$ max(tinf) < 1 et min(tsup) > 1. Le segment à tracer va de Q(max(tinf)) vers B.

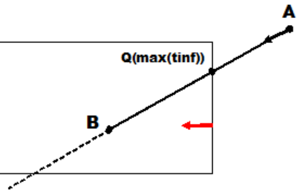

FIGURE 15 – Segment $[Q(\max(\text{tinf})\, B]$

3) max(tinf)<0 et min(tsup)> 1. Le segment à tracer va de A vers B.

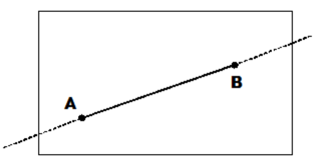

FIGURE 16 – Segment $[AB]$

4) max(tinf)> min(tsup). Rien à tracer.

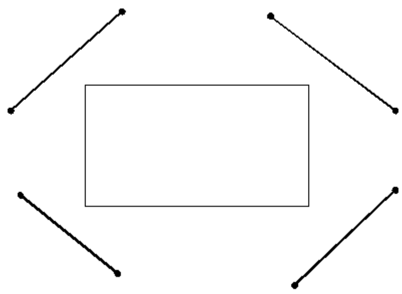

FIGURE 17 – Pas d'intersection fenêtre (cas1)

5) max(tinf)>1 ou min(tsup)<0. Rien à tracer.

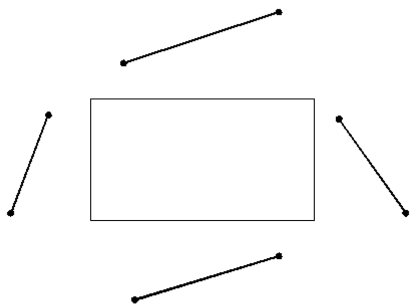

FIGURE 18 – Pas d'intersection fenêtre (cas2)

3.2 Algorithme de Cyrus Beck

fonction cyrusBeck(X_1, Y_1, X_2, Y_2, Poly, Normale, Nbsom) $\longrightarrow$ Booléen

Paramètres formels (PF) :

X_1, Y_1, X_2, Y_2 : réels (ou entiers) /* Coordonnées du segment [AB] */
Nbsom : Entier /* Nombre de sommets du polygone convexe : fenêtre */
Poly : tableau 2D des Nbsom sommets du polygone (fenêtre)
Normale : tableau 2D des normales à chaque segment du polygone (fenêtre)

Variables intermédiaires (VI) :

t, tinf, tsup : réels
DX, DY, WN, DN : réels (ou entiers)
C : point courant du polygone (fenêtre)
i, Nbseg : Entiers

Début

tinf $\longleftarrow$ Min(Réel) ; tsup $\longleftarrow$ Max(Réel)

DX $\longleftarrow X_2 - X_1$; DY $\longleftarrow Y_2 - Y_1$
Nbseg $\longleftarrow$ Nbsom - 1
Pour i variant de 1 à Nbseg **Faire**
    $C \longleftarrow$ Poly[i]
    DN $\longleftarrow$ DX $*$ Normale$[i][x]$ + DY $*$ Normale$[i][y]$
    WN $\longleftarrow (X_1 - C[x]) *$ Normale$[i][x] + (Y_1 - C[y]) *$ Normale$[i][y]$
    Si (DN = 0) **Alors** /* Division impossible, le segment est réduit à un point */
        Renvoyer (WN $\geqslant$ 0)
    Sinon
        $t \longleftarrow -(WN)/(DN)$
        Si (DN > 0) **Alors** /* calcul du max des tinf */
            Si (t > tinf) **Alors**
                tinf $\longleftarrow t$
            FinSi
        Sinon /* calcul du min des tsup */
            Si (t < tsup) **Alors**
                tsup $\longleftarrow t$
            FinSi
        Finsi
    Finsi
FinPour
Si (tinf < tsup) **Alors** /* Intersection possible */
    Si ((tinf < 0) et (tsup > 1)) **Alors** /* Segment intérieur */
        Renvoyer Vrai
    Sinon
        Si ((tinf > 1) ou (tsup < 0)) **Alors** /* Segment extérieur */
            Renvoyer Faux
        Sinon
            Si (tinf < 0) **Alors** /* A : origine du segment intérieure */
                tinf $\longleftarrow$ 0
            Sinon
                Si (tsup > 1) **Alors** /* B : extrémité du segment intérieure */
                    tsup $\longleftarrow$ 1
                FinSi
            FinSi
            /* Calcul des nouvelles intersections donnant le segment découpé */
            $X_2 \longleftarrow X_1 +$ DX $*$ tsup
            $Y_2 \longleftarrow Y_1 +$ DY $*$ tsup
            $X_1 \longleftarrow X_1 +$ DX $*$ tinf
            $Y_1 \longleftarrow Y_1 +$ DY $*$ tinf
            Renvoyer Vrai
        FinSi
    FinSi
Sinon /* Segment extérieur */
    Renvoyer Faux

    FinSi
Fin