Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра вычислительных методов

Практикум на ЭВМ

Вычислительный практикум по исследованию нелинейных динамических систем (самоорганизация во времени)

Работу выполнил:
Д. А. Питеркин
Группа: 304
Преподаватель:
М. М. Хапаев

Москва
2021

Содержание

1. Постановка задачи

Требуется:

- Выбрать задание из набора заданий в учебном пособии «Вычислительный практикум по исследованию нелинейныхдинамических систем (самоорганизация во времени)».
- Исследовать поведение заданной нелинейной динамической системы (НДС) с параметрами.
- Разработать приложение с комфортным пользовательским интерфейсом для вычислительных экспериментов.

Была выбрана задача второго порядка М2.2, в которой описана модель трофической цепи в замкнутой экосистеме:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_1 \left[-E_1 + V_0\left(C - y_1 - y_2\right) - \frac{y_2}{R+y_1}\right] \\ \dot{y}_2 = \left(-E_2 + \frac{y_1}{R+y_1}\right) y_2 \end{cases}$$

Здесь $y_i \geq 0$ - численность популяций.

Параметры: $1 > E_i > 0;\ R > 0;\ V_0 > 0;\ C > 0$ - бифуркационный параметр, суммарное количество вещества в экосистеме: $C = y_0 + y_1 + y_2,\ y_0$ - общий ресурс;

$y_i(0) = y_i^* + \varepsilon_i,\ 0 < \varepsilon_i < 1,\ y^*$ - стационарная точка.

Изучить динамику системы при вариации C и V_0 и фиксированных E_i, R.

Взять $E_1 = 0.1;\ E_2 = 0.2;\ R = 5$

2. Исследование стационарных точек

Найдем стационарные точки:

$$\begin{cases} y_1\left[-E_1 + V_0\left(C - y_1 - y_2\right) - \frac{y_2}{R+y_1}\right] = 0 \\ \left(-E_2 + \frac{y_1}{R+y_1}\right) y_2 = 0 \end{cases}$$

Решая систему, получаем три точки:

$y^{*(0)} = (0;0)$

$y^{*(1)} = (\dfrac{E_2 R}{1-E_2}; \dfrac{-E_1 + V_0 C - V_0 y_1}{V_0 + \frac{1}{R+y_1}})$

$y^{*(2)} = (C - \dfrac{E_1}{V_0}; 0)$

Пользуясь теоремой об устойчивости по первому приближению, исследуем каждую из них.
Сначала посчитаем матрицу Якоби:

$$J(y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{y}_1}{\partial y_1}(y) & \frac{\partial \dot{y}_1}{\partial y_2}(y) \\ \frac{\partial \dot{y}_2}{\partial y_1}(y) & \frac{\partial \dot{y}_2}{\partial y_2}(y) \end{bmatrix}$$

$\dfrac{\partial \dot{y}_1}{\partial y_1}(y) = -E_1 + V_0(C - y_1 - y_2) - \dfrac{y_2}{R+y_1} + y_1(-V_0 + \dfrac{y_2}{(R+y_1)^2})$

$\dfrac{\partial \dot{y}_1}{\partial y_2}(y) = -V_0 y_1 - \dfrac{y_1}{R+y_1}$

$\dfrac{\partial \dot{y}_2}{\partial y_1}(y) = \dfrac{R y_2}{(y_1+R)^2}$

$\dfrac{\partial \dot{y}_2}{\partial y_2}(y) = -E_2 + \dfrac{y_1}{R+y_1}$

Заданием заданы постоянные $E_1 = 0.1,\ E_2 = 0.2,\ R = 5$, поэтому при решении уравнений можно свободно заменять их на соответствующие значения ради простоты. Нужно исследовать бифуркации параметров $V_0 > 0$ и $C > 0$.

2.1. Точка $y^{*(0)} = (0;0)$

Характеристическое уравнение для точки $y^{*(0)}$:

$$|J(y^{*(0)}) - \lambda I| = \begin{vmatrix} -E_1 + V_0 C - \lambda & 0 \\ 0 & -E_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\lambda_1 = -E_1 + V_0 C = -0.1 + V_0 C$

$\lambda_2 = -E_2 = -0.20$

$\begin{cases} \lambda_1 > 0;\ \text{если } C > \frac{0.1}{V_0} \\ \lambda_1 < 0;\ \text{если } C < \frac{0.1}{V_0} \end{cases}$

$\lambda_2 < 0$ всегда

Таким образом, $y^{*(0)}$ — седло или устойчивый узел.

2.2. Точка $y^{*(2)} = (C - \frac{E_1}{V_0}; 0)$

Характеристическое уравнение для точки $y^{*(2)}$:

$$|J(y^{*(2)}) - \lambda I| = \begin{vmatrix} E_1 - V_0 C - \lambda & (...) \\ 0 & -E_2 + \frac{C - \frac{E_1}{V_0}}{R + C - \frac{E_1}{V_0}} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\lambda_1 = E_1 - V_0 C = 0.1 - V_0 C$

$\lambda_2 = -E_2 + \dfrac{CV_0 - E_1}{RV_0 + CV_0 - E_1} = -0.2 + \dfrac{CV_0 - 0.1}{5V_0 + CV_0 - 0.1}$

$$\begin{cases} \lambda_1 > 0; \text{ если } C < \frac{0.1}{V_0} \\ \lambda_1 < 0; \text{ если } C > \frac{0.1}{V_0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_2 > 0; \text{ если } C < \frac{0.1}{V_0} - 5 \\ \lambda_2 < 0; \text{ если } \frac{0.1}{V_0} - 5 < C < \frac{0.1}{V_0} + 1.25 \\ \lambda_2 > 0; \text{ если } C > \frac{0.1}{V_0} + 1.25 \end{cases}$$

У $y^{*(2)}$ получилось 4 зоны — где она неустойчивый узел ($\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0$), седло ($\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 < 0$), устойчивый узел ($\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 < 0$) или седло ($\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 > 0$).

2.3. Точка $y^{*(1)} = (\frac{E_2 R}{1 - E_2}; \frac{-E_1 + V_0 C - V_0 y_1}{V_0 + \frac{1}{R + y_1}})$

$y_1^{*(1)} = \dfrac{E_2 R}{1 - E_2} = \dfrac{0.2 * 5}{1 - 0.2} = 1.25$

$y_2^{*(1)} = \dfrac{-E_1 + V_0 C - V_0 y_1}{V_0 + \frac{1}{R + y_1}} = \dfrac{-0.1 + V_0 C - 1.25 V_0}{V_0 + 0.16}$

Характеристическое уравнение для точки $y^{*(1)}$:

$$|J(y^{*(1)}) - \lambda I| = (-0.1 + V_0(C - 1.25 - y_2^{*(1)}) - \frac{y_2^{*(1)}}{6.25} + 1.25(-V_0 + \frac{y_2^{*(1)}}{6.25^2}) - \lambda)(-0.2 + 0.2 - \lambda) - \\ - (-1.25V_0 - 0.2)0.128 y_2^{*(1)} = 0$$

Подставляя еще $y_2^{*(1)}$ и решая квадратное уравнение, получим корни:

$$\lambda_{1,2} = A(B \pm \sqrt{C})$$

где

$A = \dfrac{1}{5000V_0 + 800}$

$B = 80CV_0 - 3125V_0^2 - 600V_0 - 8$

$C = 6400C^2V_0^2 - 4500000CV_0^3 - 1376000CV_0^2 - 103680CV_0 + 9765V_0^4 +$
$+ 9750000V_0^3 + 2410000V_0^2 + 265600V_0 + 10304$

Т.к. $V_0 > 0,\ C > 0$, то тип особой точки будет зависеть только от знаков B и C.

3. Бифуркации

В предыдущем разделе мы получили, что тип особых точек изменяется при пересечениях параметрами C, V_0 критических значений, описанных уравнениями, образующими бифуркационную диаграмму:

(1) $C = \dfrac{0.1}{V_0} - 5$

(2) $C = \dfrac{0.1}{V_0}$

(3) $C = \dfrac{0.1}{V_0} + 1.25$

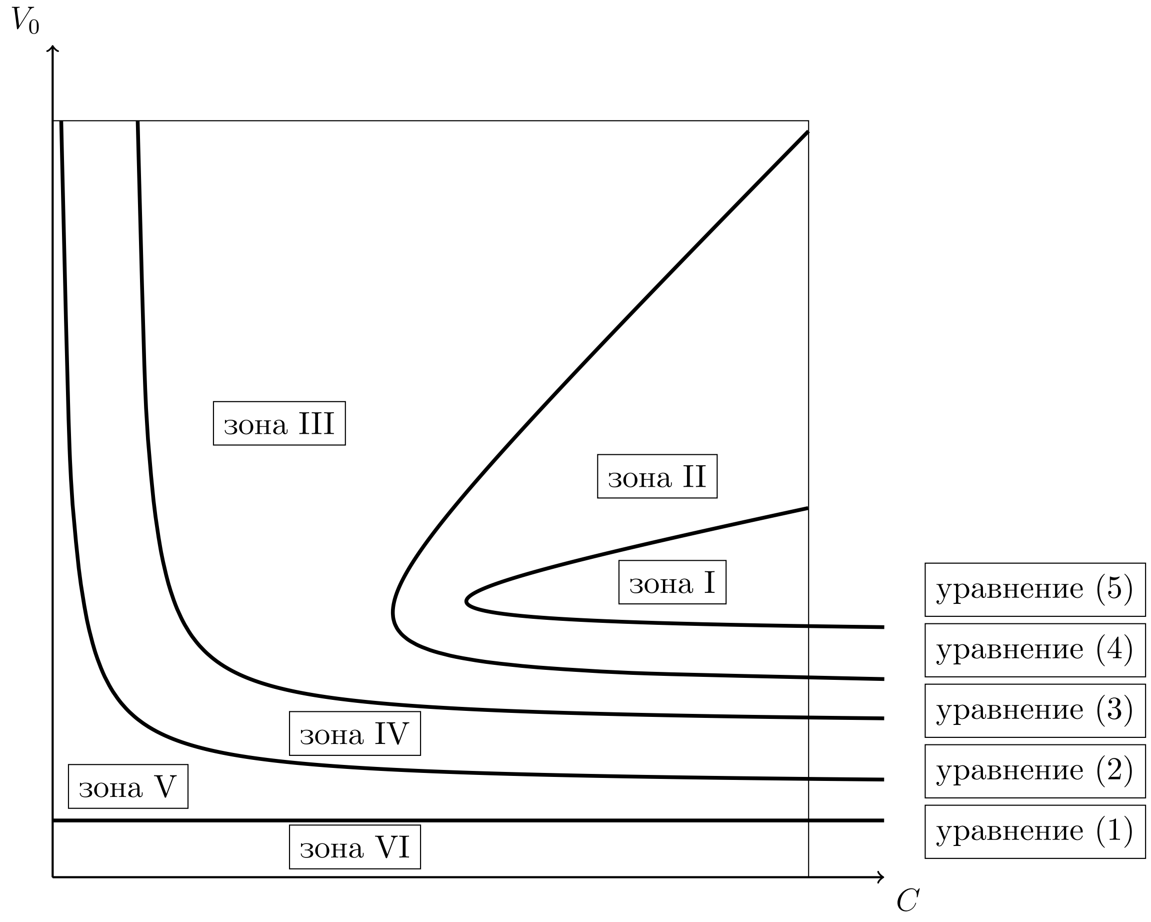
(4) $6400C^2V_0^2 - 4500000CV_0^3 - 1376000CV_0^2 - 103680CV_0 + 9765V_0^4 +$
$+ 9750000V_0^3 + 2410000V_0^2 + 265600V_0 + 10304 = 0$

(5) $80CV_0 - 3125V_0^2 - 600V_0 - 8 = 0$

Эти пять уравнений на области $V_0 > 0,\ C > 0$ не пересекаются, то есть образуют шесть зон качественных бифуркаций (не считаем сами границы зон).

Я построил бифуркационную диаграмму с помощью desmos.com, там ее можно изучить наглядно для подбора параметров: https://www.desmos.com/calculator/1zcvgq5xh2

Схематично же диаграмму можно представить так:



Очень просто вычислить типы точек $(y^{*(0)} - y^{*(1)} - y^{*(2)})$ в каждой зоне:

Зона I) Седло - Неустойчивый фокус - Седло

Зона II) Седло - Устойчивый фокус - Седло

Зона III) Седло - Устойчивый узел - Седло

Зона IV) Седло - Седло - Устойчивый узел

Зона V) Устойчивый узел - Седло - Седло

Зона VI) Устойчивый узел - Седло - Неустойчивый узел

4. Программа

Программа была написана на языке Python. В ней можно задавать параметры (C, V_0, шаг dt, время останова t_stop и ε), начальную точку $(y^{*(i)} + \varepsilon)$ и рисовать графики.

Есть кнопки для задания заготовленных параметров для каждой бифуркационной зоны.

В частности, вычислительный эксперимент показал, что система выходит на предельный цикл в зоне I.

- Для построения графиков использовалась библиотека matplotlib.
- Для численного решения НДС с начальными условиями использовалась библиотека SciPy, а именно функция scipy.integrate.odeint, реализующая многошаговый метод LSODA — разновидность метода Адамса-Башфорта с настройкой шага с автоматическим определением жесткости. Обертка над библиотекой Fortran ODEPACK.
- Пользовательский интерфейс реализован с помощью библиотеки PyQt5.

Весь исходный код, инструкция для компиляции и несколько скриншотов расположены на GitHub:
`https://github.com/MitPitt/food-chain`

Программа скомпилирована в исполняемый файл для ОС Windnows с помощью PyInstaller, ее может запустить каждый желающий:
`https://github.com/MitPitt/food-chain/releases/tag/abc`