IZS - zadania dodatkowe

Dimitrije Vlajsević
grupa 2

13.01.2026.

1 Wstęp

Celem niniejszego sprawozdania jest empiryczne zbadanie własności centralnego twierdzenia granicznego oraz asymetrycznej wędrówki losowej w jednym wymiarze. Analiza została przeprowadzona metodą symulacji Monte Carlo z wykorzystaniem języka Python.

2 Zadanie 1 – Centralne Twierdzenie Graniczne

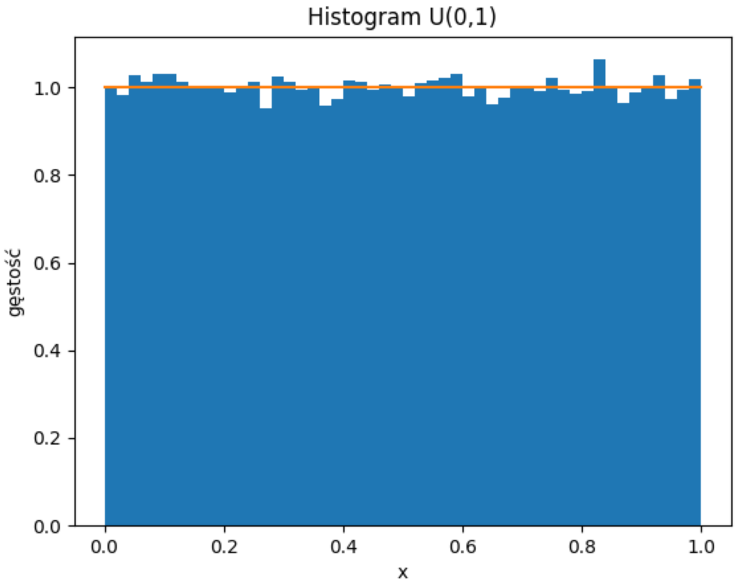
Centralne twierdzenie graniczne (CTG) stwierdza, że dla ciągu niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie, posiadających skończoną wartość oczekiwaną i wariancję, rozkład średniej z próby dąży do rozkładu normalnego wraz ze wzrostem liczby obserwacji.

2.1 Rozkład jednostajny

Rozważono zmienną losową $X \sim U(0, 1)$, dla której:

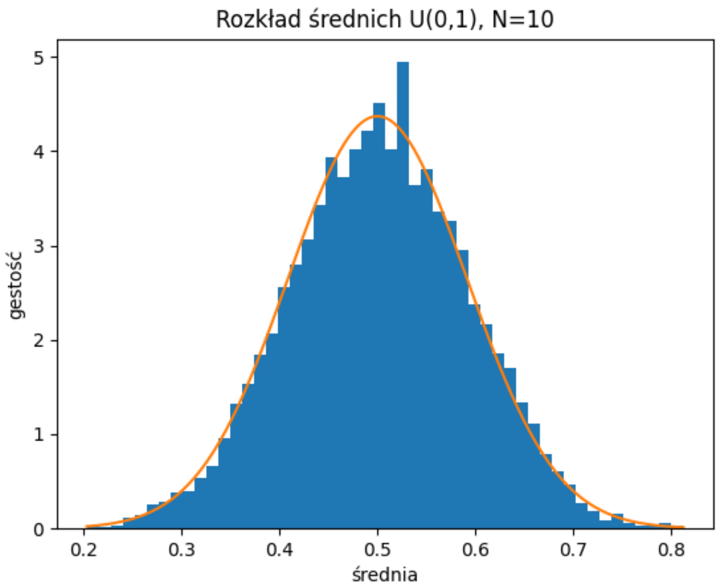
$$\mathbb{E}[X] = 0.5, \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{12}. \tag{1}$$

Najpierw wygenerowano dużą próbę zmiennych losowych w celu weryfikacji zgodności histogramu z teoretyczną gęstością rozkładu jednostajnego.

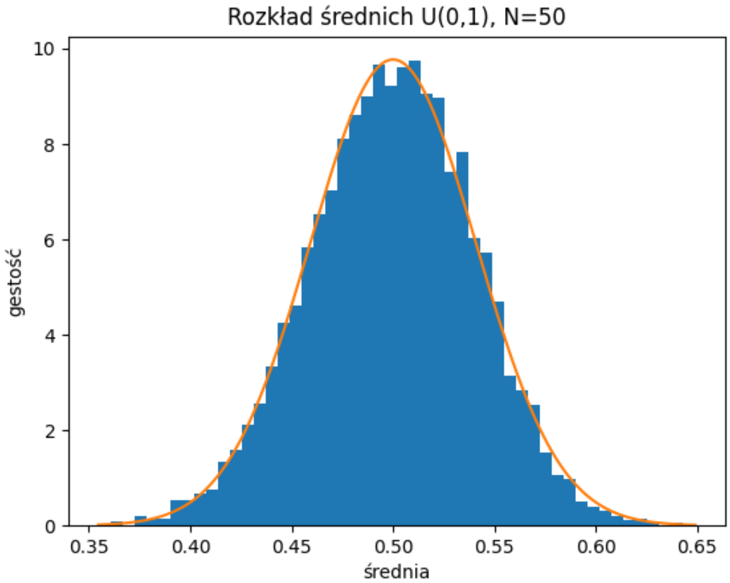


Rysunek 1: Histogram zmiennych losowych z rozkładu jednostajnego $U(0,1)$.

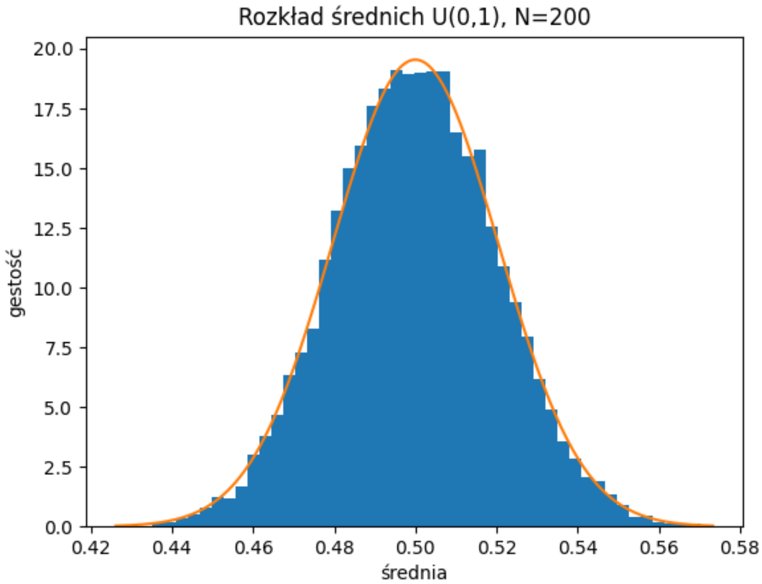
Następnie przeprowadzono $M = 10,000$ niezależnych symulacji, w których obliczano średnią z N obserwacji, gdzie $N \in 10, 50, 200, 1000$. Otrzymane rozkłady średnich porównano z teoretycznym rozkładem normalnym.



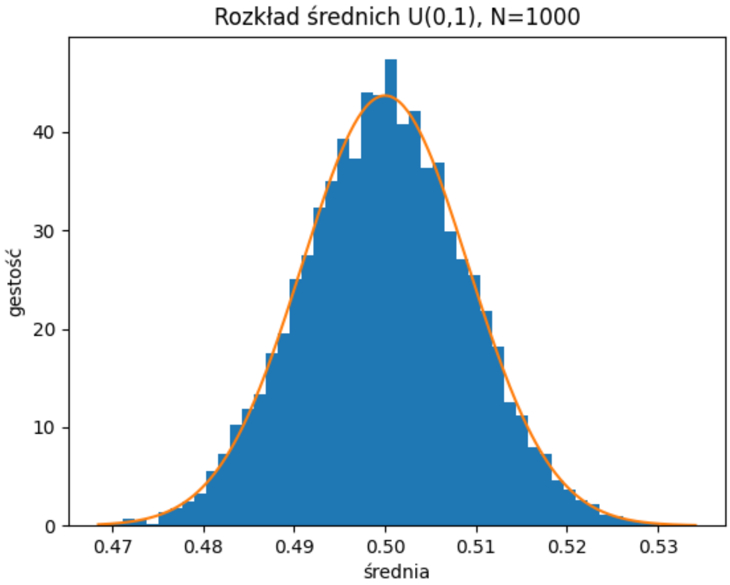
Rysunek 2: Rozkład średnich dla rozkładu jednostajnego, $N = 10$.



Rysunek 3: Rozkład średnich dla rozkładu jednostajnego, $N = 50$.



Rysunek 4: Rozkład średnich dla rozkładu jednostajnego, $N = 200$.

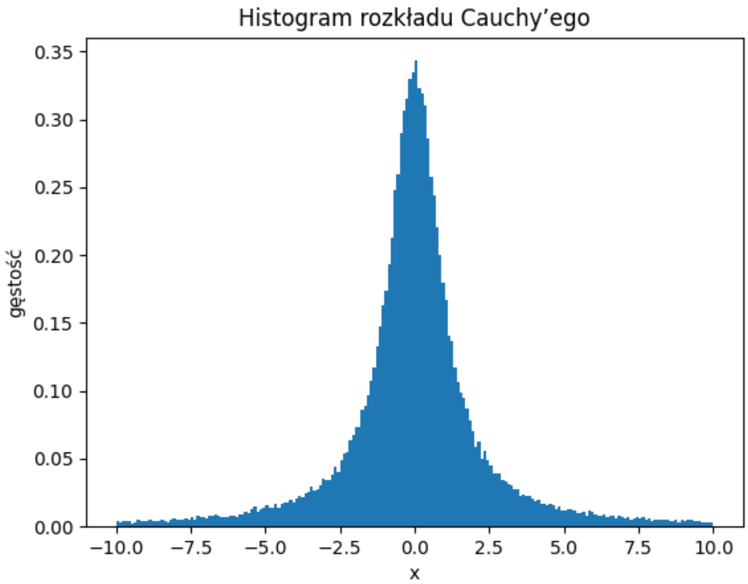


Rysunek 5: Rozkład średnich dla rozkładu jednostajnego, $N = 1000$.

Wraz ze wzrostem liczby obserwacji N rozkład średnich coraz lepiej przybliża rozkład normalny, a jego rozrzut maleje, co potwierdza działanie centralnego twierdzenia granicznego.

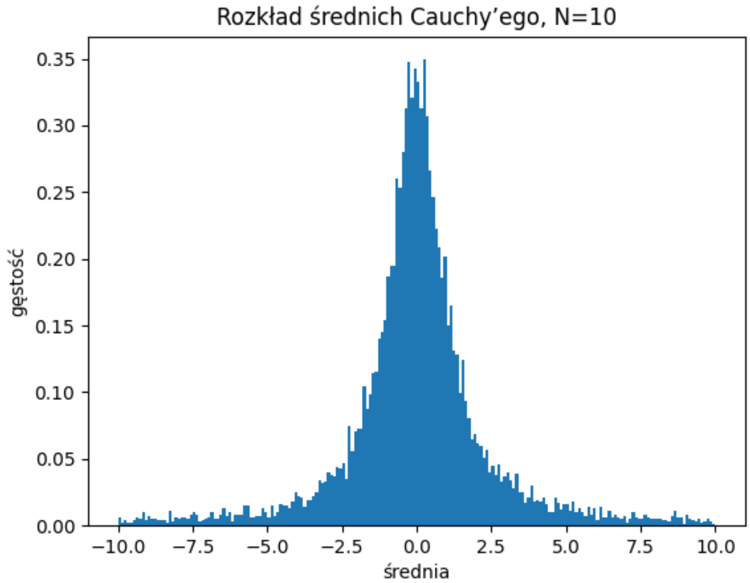
2.2 Rozkład Cauchy'ego

Rozważono rozkład Cauchy'ego, który nie posiada skończonej wartości oczekiwanej ani wariancji. W pierwszym kroku wygenerowano histogram zmiennych losowych.

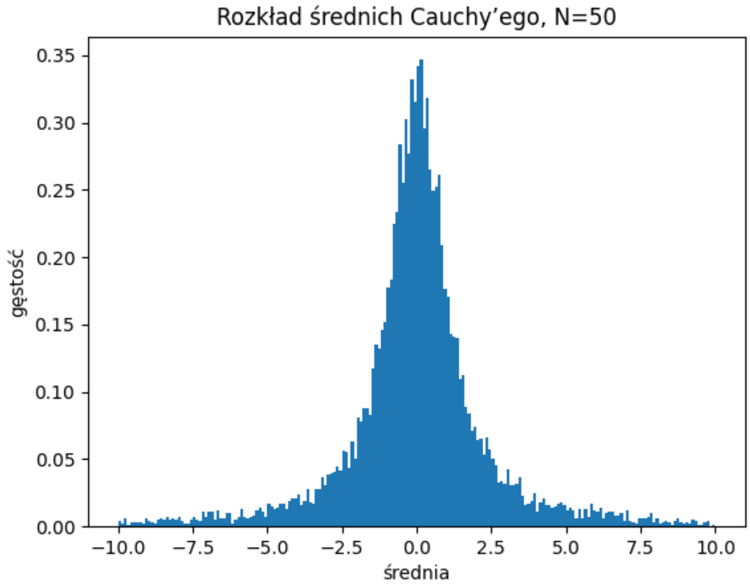


Rysunek 6: Histogram zmiennych losowych z rozkładu Cauchy'ego.

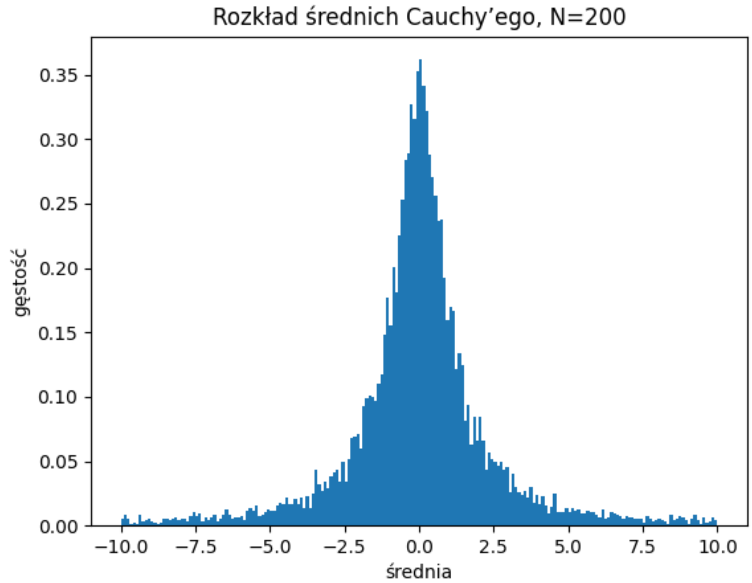
Analogicznie jak poprzednio wyznaczono rozkłady średnich dla różnych wartości N.



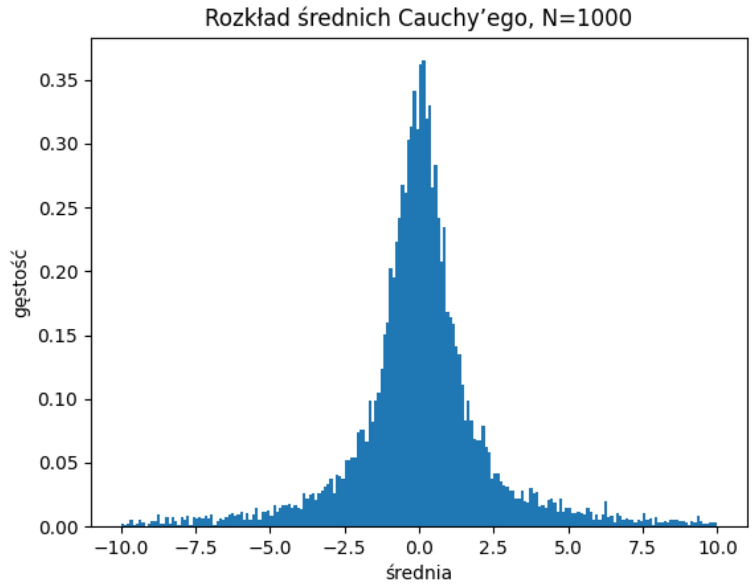
Rysunek 7: Rozkład średnich dla rozkładu Cauchy'ego, $N = 10$.



Rysunek 8: Rozkład średnich dla rozkładu Cauchy'ego, $N = 50$.



Rysunek 9: Rozkład średnich dla rozkładu Cauchy'ego, $N = 200$.



Rysunek 10: Rozkład średnich dla rozkładu Cauchy'ego, $N = 1000$.

Niezależnie od liczby obserwacji N, rozkład średnich nie dąży do rozkładu normalnego, co potwierdza, że centralne twierdzenie graniczne nie obowiązuje dla rozkładu Cauchy'ego.

3 Zadanie 2 – Asymetryczna wędrówka losowa

Rozważono jednowymiarową wędrówkę losową, w której prawdopodobieństwo kroku w górę wynosi $p = 0.11$, a w dół $1 - p = 0.89$. Pozycja początkowa cząsteczki była równa zero.

3.1 Opis teoretyczny

Wartość oczekiwana pojedynczego kroku wynosi:

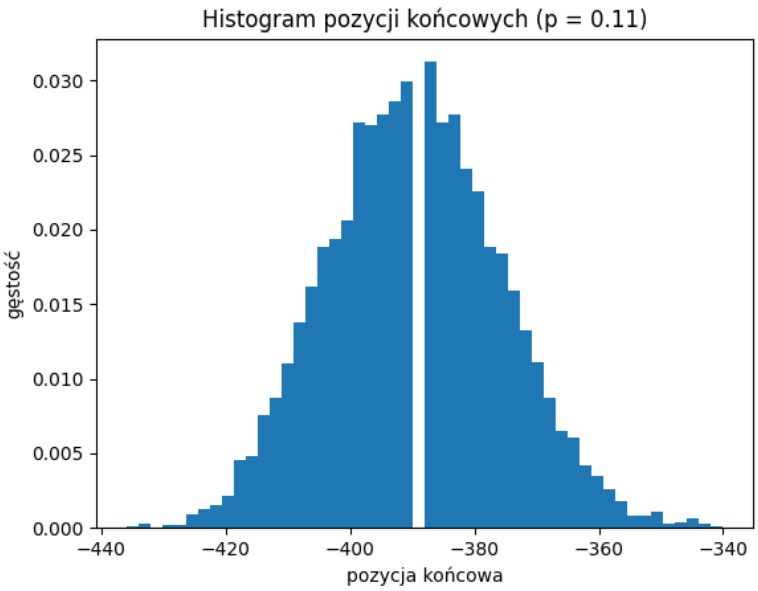
$$\mathbb{E}[Y] = 2p - 1, \tag{2}$$

co prowadzi do zależności:

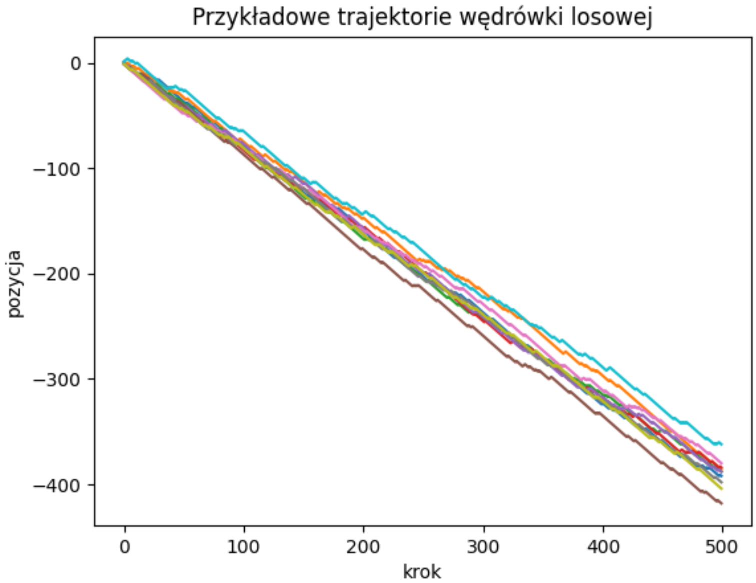
$$\mathbb{E}[X_N] = N(2p - 1). \tag{3}$$

3.2 Wyniki symulacji

Przeprowadzono $M = 5000$ niezależnych realizacji wędrówki losowej dla $N = 500$ kroków. Na podstawie wyników wyznaczono średnią pozycję końcową wraz z 95% przedziałem ufności.



Rysunek 11: Histogram pozycji końcowych dla asymetrycznej wędrówki losowej ($p = 0.11$).



Rysunek 12: Przykładowe trajektorie asymetrycznej wędrówki losowej.

Uzyskane wyniki wskazują na wyraźny ujemny dryf wędrówki, zgodny z przewidywaniami teoretycznymi.

4 Podsumowanie

Przeprowadzone symulacje potwierdziły poprawność centralnego twierdzenia granicznego dla rozkładów o skończonej wariancji oraz jego nieobowiązywanie dla rozkładu Cauchy'ego. Analiza asymetrycznej wędrówki losowej wykazała istotny wpływ parametru p oraz liczby kroków N na zachowanie procesu losowego.