Question 16

Avant d'entrer dans le vif du sujet, il faut bien fixer notre objectif. Il s'agit de présenter le log-ratio des deux classes suivant

$$\log\left(\frac{P(Y=+1 \mid X=x)}{P(Y=-1 \mid X=x)}\right)$$ en fonction de $\pi_+$, $\mu_+$, $\mu_-$ et $\Sigma$.

Pour ce faire, partons des données :

- $$f_-(x) = \frac{1}{(2\Pi)^{p/2}\sqrt{\det(\Sigma_-)}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\mu_-)^T\Sigma_-^{-1}(x-\mu_-)\right\}$$

- $$f_+(x) = \frac{1}{(2\Pi)^{p/2}\sqrt{\det(\Sigma_+)}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\mu_+)^T\Sigma_+(x-\mu_+)\right\}$$

Nous avons vu tout à l'heure que :

- $$P\{Y=+1 \mid X=x\} = \frac{f_+(x)\,\pi_+}{f_+(x)\,\pi_+ + f_-(x)(1-\pi_+)}$$

- $$P\{Y=-1 \mid X=x\} = \frac{f_-(x)\,\pi_-}{f_+(x)\,\pi_+ + f_-(x)(1-\pi_+)}$$

En conséquence,

$$\frac{P(Y=+1 \mid X=x)}{P(Y=-1 \mid X=x)} = \frac{f_+(x)\,\pi_+}{\cancel{f_+(x)\,\pi_+ + f_-(x)(1-\pi_+)}} \times \frac{\cancel{f_+(x)\,\pi_+ + f_-(x)(1-\pi_+)}}{f_-(x)\,\pi_-}$$

$$\frac{P(Y=+1 \mid X=x)}{P(Y=-1 \mid X=x)} = \frac{f_+(x)\,\pi_+}{f_-(x)\,\pi_-}$$

$$\boxed{\frac{P(Y=+1 \mid X=x)}{P(Y=-1 \mid X=x)} = \left(\frac{f_+(x)}{f_-(x)}\right) \times \left(\frac{\pi_+}{\pi_-}\right)}$$

Il suffit d'avoir la forme avec logarithme de l'expression