(1) $\log\left(\dfrac{P(Y=+1 \mid Y=x)}{P(Y=-1 \mid X=x)}\right) = \log\left(\dfrac{f_+(x)}{f_-(x)}\right) + \log\left(\dfrac{\pi_+}{\pi_-}\right)$

car $\log(a \times b) = \log a + \log b$

Donnons à présent l'expression de $\log\left(\dfrac{f_+(x)}{f_-(x)}\right)$.

Tout d'abord,

$$\frac{f_+(x)}{f_-(x)} = \frac{\dfrac{1}{\cancel{(2\pi)^{p/2}}\sqrt{\det(\Sigma_+)}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\mu_+)^T \Sigma_+^{-1}(x-\mu_+)\right\}}{\dfrac{1}{\cancel{(2\pi)^{p/2}}\sqrt{\det(\Sigma_-)}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\mu_-)^T \Sigma_-^{-1}(x-\mu_-)\right\}}$$

(2) : $$= \frac{\sqrt{\det(\Sigma_+)}}{\sqrt{\det(\Sigma_-)}} \times \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu_+)^T \Sigma_+^{-1}(x-\mu_+)\right)}{\exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu_-)^T \Sigma_-^{-1}(x-\mu_-)\right)}$$

Par conséquent :

(3) : $$\log\left(\frac{f_+(x)}{f_-(x)}\right) = \log\left(\frac{\sqrt{\det(\Sigma_+)}}{\sqrt{\det(\Sigma_-)}}\right) + \log\frac{\exp(A)}{\exp(B)}$$

A et B sont des simplifications des termes dans (2).

$$\log\left(\frac{f_+(x)}{f_-(x)}\right) = \log\left(\frac{\sqrt{\det(\Sigma_+)}}{\sqrt{\det(\Sigma_-)}}\right) + A - B$$

Si on revient à (1) et on développe A et B :

$$\log\left(\frac{P(Y=+1 \mid X=x)}{P(Y=-1 \mid X=x)}\right) = \log\left(\frac{\sqrt{\det(\Sigma_+)}}{\sqrt{\det(\Sigma_-)}}\right) + \left[-\frac{1}{2}(x-\mu_+)^T \Sigma_+^{-1}(x-\mu_+)\right] - \left[-\frac{1}{2}(x-\mu_-)^T \Sigma_-^{-1}(x-\mu_-)\right] + \log\left(\frac{\pi_+}{\pi_-}\right)$$

$\longrightarrow$

...