Aspects théoriques KNN

Question 15

Comment passer des probabilités classiques ou a priori aux probabilités conditionnelles ? C'est par le biais de la formule de Bayes.

En effet, pour deux classes $Y = +1$ et $Y = -1$, la formule susmentionnée s'écrit de la manière suivante :

$$\boxed{P\{Y = y \mid X = x\} = \frac{P\{X = x \mid Y = y\} \cdot P(Y = y)}{P\{X = x\}}}$$

Où :

- y est égal à $+1$ ou -1
- $P(Y = y)$: probabilité a priori de la classe y
- $P(X = x \mid Y = y)$: densité de probabilité de X sachant $Y = y$

Il y a lieu de bien préciser maintenant que nous nous situons dans un cadre de l'Analyse Discriminante Linéaire (LDA). Par conséquent, on a :

- f_+ et f_- : densités de probabilités des gaussiennes multivariées $N_p(\mu_+, \Sigma)$ et $N_p(\mu_-, \Sigma)$ à chacune.
- $\pi_+ = P\{Y = +1\}$: probabilité a priori de la classe $Y = +1$
- probabilités a posteriori de $Y = +1$:

$$\boxed{P\{Y = +1 \mid X = x\} = \frac{f_+(x) \cdot \pi_+}{f_+(x) \cdot \pi_+ + f_-(x) \cdot (1 - \pi_+)}}$$

- probabilités a posteriori de $Y = -1$

$$\boxed{P\{Y = -1 \mid X = x\} = \frac{f_-(x)(1 - \pi_+)}{f_+(x)\pi_+ + f_-(x)(1 - \pi_+)}}$$