
Quadratmittelproblem Documentation

Release 1

Fischer Michele

Jan 16, 2018

CONTENTS:

1	Aufgabenstellung und die zugrundeliegende Theorie	1
2	Programm und die Implementierung	2
3	Experimente	3
3.1	<i>Für $n=3$:</i>	3
3.2	<i>Für $n=10$:</i>	7
3.3	<i>Für $n = 20$:</i>	9
4	Indices and tables	12

AUFGABENSTELLUNG UND DIE ZUGRUNDELIEGENDE THEORIE

Die Aufgabe besteht darin für bestimmte Ausgangswerte die dazu erhaltenen Messwerte in einen funktionalen Zusammenhang zu stellen und diese dann approximativ anzunähern.

In unserer Aufgabe werden für eine an den Endpunkten aufgehängte Kette für die auf der x-Achse eines 2-Dimensionalen Koordinatensystems gegebenen Werte x_i - Werten: 1.2, 2.2, 3.9, 6.1, 8.9, 13.5, 17.5, 19.5, 21.6, 22.5

folgende y_i -Werte gemessen : 12.8, 10.7, 6.9, 4.1, 2.5, 1.8, 3.0, 5.2, 8.0, 9.8.

Um nun sich der Form einer Kette anzunähern ist eine Funktion gesucht, die sich diesen Wertepaaren annähert. Dabei ist uns als geeigneter Ansatz als Basis die Funktionengleichung gegeben $y_i = ae^{x_i d} + be^{-x_i d} + c$, deren Parameter a, b und c gesucht sind. Zum Lösen des linearen Ausgleichsproblems suchen wir also unsere sogenannte Ausgleichsfunktion. Dabei sei die Funktion optimal im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate. Dies entspricht der Forderung, dass die 2-Norm der Annäherungsfunktionen minimal wird.

Weiter sei $2 < n \in \mathbb{N}$ und für $d_k^{(n)} := 0.1 + 0.4k/(n-1) \in [0.1, 0.5]$ mit $k = 0, \dots, n-1$ gegeben. Da jede Funktion auch als Matrix- Vektorprodukt geschrieben werden kann, können wir unser Problem durch die Gleichung $Ax = b$ beschreiben, wobei A unsere Koeffizientenmatrix darstellt und x den Vektor für die gesuchten Parameter a, b und c. Dabei ist die Abweichung von dem gesuchten Vektor x genau dann minimal wenn

$$\frac{1}{2} \|Ax_* - b\|_2^2 = \min_{x \in \mathbb{R}} \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2$$

Um am Computer unser Problem zu Lösen verwenden wir die QR-Zerlegung unserer Koeffizientenmatrix A, da diese auch bei überbestimmten linearen Gleichungssystemen zu einer Lösung führt. Im Allgemeinen haben überbestimmte Gleichungssystem keine Lösung, daher suchen wir eine Lösung genannt x_* , so dass die oben erwähnte Abweichungsgleichung erfüllt ist. Aus der Vorlesung wissen wir dass unsere Abweichung $\|Ax - b\|_2$ genau dann minimal ist, wenn wir x anhand des Algorithmus berechnen der sich wie folgt gestaltet. Da die durch die QR-Zerlegung erhaltenen Matrix Q sich leicht am Computer transponieren lässt, errechnen wir uns zuerst ein z durch folgende Umstellung:

$$Ax = b \Rightarrow QRx = b \Rightarrow Rx = Q^T b$$

und definieren $z := Q^T b$.

Mit dem erhaltenen Vektor z können wir nun durch Rückwärtseinsetzen die Gleichung $R_1 x = z_1$ lösen und erhalten unser gesuchtes x, wobei

$$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ 0 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

Die minimale Abweichung beträgt dann $\|Ax - b\|_2 = \|z_2\|_2$.

Nach dem Satz 3.41 aus der Vorlesung wissen wir dass ein Quadratmittellösung eine Lösung besitzt und auch jede Quadratmittellösung auch die Lösung der Normalengleichung $A^T Ax = A^T b$ ist.

Für die grafische Darstellung der Approximation sehen wir in unseren Experimenten eine Funktionenschar in Abhängigkeit von $d_k^{(n)}$.

PROGRAMM UND DIE IMPLEMENTIERUNG

Bei der Benutzung des Programmes kann der Benutzer selber auswählen für welche Datensätze er die Berechnung der gesuchten Parameter durchführen möchte:

Mit dem aufgerufenen Programm koennen sie durch eine Ausgleichsfunktion sich einer an
↪zwei Endpunkten aufgehaengten Kette annaehern. Dabei berechnet das Programm die
↪notwendigen Parameter um die optimalste Annaeherung an die gesuchte Kette durch die
↪Funktion zu erhalten.

Fuer welche Daten moechten Sie Ausgleichsfunktion berechnen?

- 1 fuer gegebene Messdaten,
- 2 fuer gestoerte Daten,
- 3 fuer weniger Messdaten und
- 4 fuer alle.

Auch kann der Nutzer selber die Schrittweite der $d_k^{(n)}$ bestimmen:

Geben Sie eine natuerliche Zahl $n > 2$ ein, mit der die Genauigkeit der gesuchten
↪Parameter bestimmt wird, je groesser desto genauer:

Die jeweiligen Datensätze liegen in *.txt-Format* vor und werden je nach Auswahl des Benutzers in der *main* - Methode aufgerufen, dies befindet sich in dem Programm *leastSquares_7.py* sowie auch die weiteren Funktionen zur Berechnung der QR-Zerlegung und dem im Theorieteil beschriebenen Algorithmus. Ausgeführt wird das Programm über das Programm *start.py*

EXPERIMENTE

3.1 Für $n=3$:

```
dk: [0.1, 0.30000000000000004, 0.5]
```

3.1.1 gegebene Messdaten

```
Fuer 0.1 erhaelt man :

Spaltenanzahl von Q: 10 ,Spaltenanzahl von R: 10
Die Parameter lauten : [ 2.25708445 27.7187257 -14.61915005]
Das Residuum fuer r = b-Ax in der 2 Norm ist: 0.0111526443443
Die minimale Abweichung in der Norm von z2 ist: 1.06579109024
Die Kondition von A in der 2-Norm: 52.6393359886
Die Kondition von A^tA in der 2-Norm: 2770.89969332

Fuer 0.3 erhaelt man :

Spaltenanzahl von Q: 10 ,Spaltenanzahl von R: 10
Die Parameter lauten : [1.01854466e-02 1.72737481e+01 1.23244654e+00]
Das Residuum fuer r = b-Ax in der 2 Norm ist: 0.0331149740509
Die minimale Abweichung in der Norm von z2 ist: 0.974500807637
Die Kondition von A in der 2-Norm: 1870.33866935
Die Kondition von A^tA in der 2-Norm: 3498166.73807

Fuer 0.5 erhaelt man :

Spaltenanzahl von Q: 10 ,Spaltenanzahl von R: 10
Die Parameter lauten : [9.48502772e-05 1.99136849e+01 2.89456660e+00]
Das Residuum fuer r = b-Ax in der 2 Norm ist: 0.260339901681
Die minimale Abweichung in der Norm von z2 ist: 2.60288514197
Die Kondition von A in der 2-Norm: 179156.60265
Die Kondition von A^tA in der 2-Norm: 32097088273.1
```

Der dazugehöriger Plot vgl. Fig. 3.1

3.1.2 gestörte Daten

```
Fuer 0.1 erhaelt man :
```

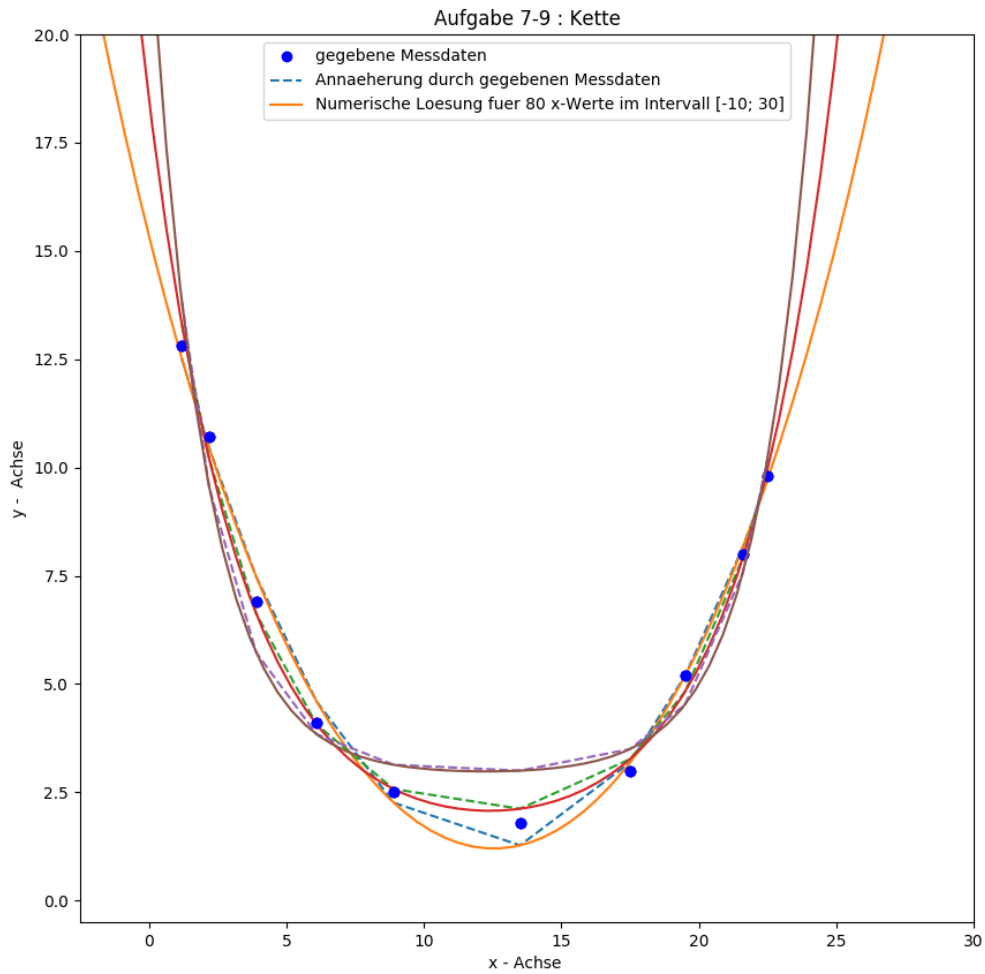


Fig. 3.1: Annäherung für $n=3$ und gegebene Daten.

```

Spaltenanzahl von Q: 10 ,Spaltenanzahl von R: 10
Die Parameter lauten : [ 2.24079555 27.79666776 -14.46131378]
Das Residuum fuer r = b-Ax in der 2 Norm ist: 0.174587001226
Die minimale Abweichung in der Norm von z2 ist: 1.48269684433
Die Kondition von A in der 2-Norm: 52.6393359886
Die Kondition von A^tA in der 2-Norm: 2770.89969332

Fuer 0.3 erhaelt man :

Spaltenanzahl von Q: 10 ,Spaltenanzahl von R: 10
Die Parameter lauten : [1.01091434e-02 1.74605681e+01 1.33538108e+00]
Das Residuum fuer r = b-Ax in der 2 Norm ist: 0.0103722209108
Die minimale Abweichung in der Norm von z2 ist: 1.01734255768
Die Kondition von A in der 2-Norm: 1870.33866935
Die Kondition von A^tA in der 2-Norm: 3498166.73807

Fuer 0.5 erhaelt man :

Spaltenanzahl von Q: 10 ,Spaltenanzahl von R: 10
Die Parameter lauten : [9.46706557e-05 2.02042721e+01 2.98575529e+00]
Das Residuum fuer r = b-Ax in der 2 Norm ist: 0.0553931143959
Die minimale Abweichung in der Norm von z2 ist: 2.46182197626
Die Kondition von A in der 2-Norm: 179156.60265
Die Kondition von A^tA in der 2-Norm: 32097088273.1

```

Der dazugehöriger Plot vgl. Fig. 3.2

3.1.3 weniger Daten

```

Fuer 0.1 erhaelt man :

Spaltenanzahl von Q: 4 ,Spaltenanzahl von R: 4
Die Parameter lauten : [ 2.43043945 29.63398399 -16.30415022]
Das Residuum fuer r = b-Ax in der 2 Norm ist: 0.0786161683309
Die minimale Abweichung in der Norm von z2 ist: 0.264839408836
Die Kondition von A in der 2-Norm: 54.5844732357
Die Kondition von A^tA in der 2-Norm: 2979.46471842

Fuer 0.3 erhaelt man :

Spaltenanzahl von Q: 4 ,Spaltenanzahl von R: 4
Die Parameter lauten : [1.00247638e-02 1.66917942e+01 1.18020606e+00]
Das Residuum fuer r = b-Ax in der 2 Norm ist: 0.0385124497038
Die minimale Abweichung in der Norm von z2 ist: 0.259094873399
Die Kondition von A in der 2-Norm: 1960.97804443
Die Kondition von A^tA in der 2-Norm: 3845434.89074

Fuer 0.5 erhaelt man :

Spaltenanzahl von Q: 4 ,Spaltenanzahl von R: 4
Die Parameter lauten : [9.02249942e-05 1.82289993e+01 2.83033497e+00]
Das Residuum fuer r = b-Ax in der 2 Norm ist: 0.0329376004551
Die minimale Abweichung in der Norm von z2 ist: 0.572685922469
Die Kondition von A in der 2-Norm: 187044.207885
Die Kondition von A^tA in der 2-Norm: 34985535703.5

```

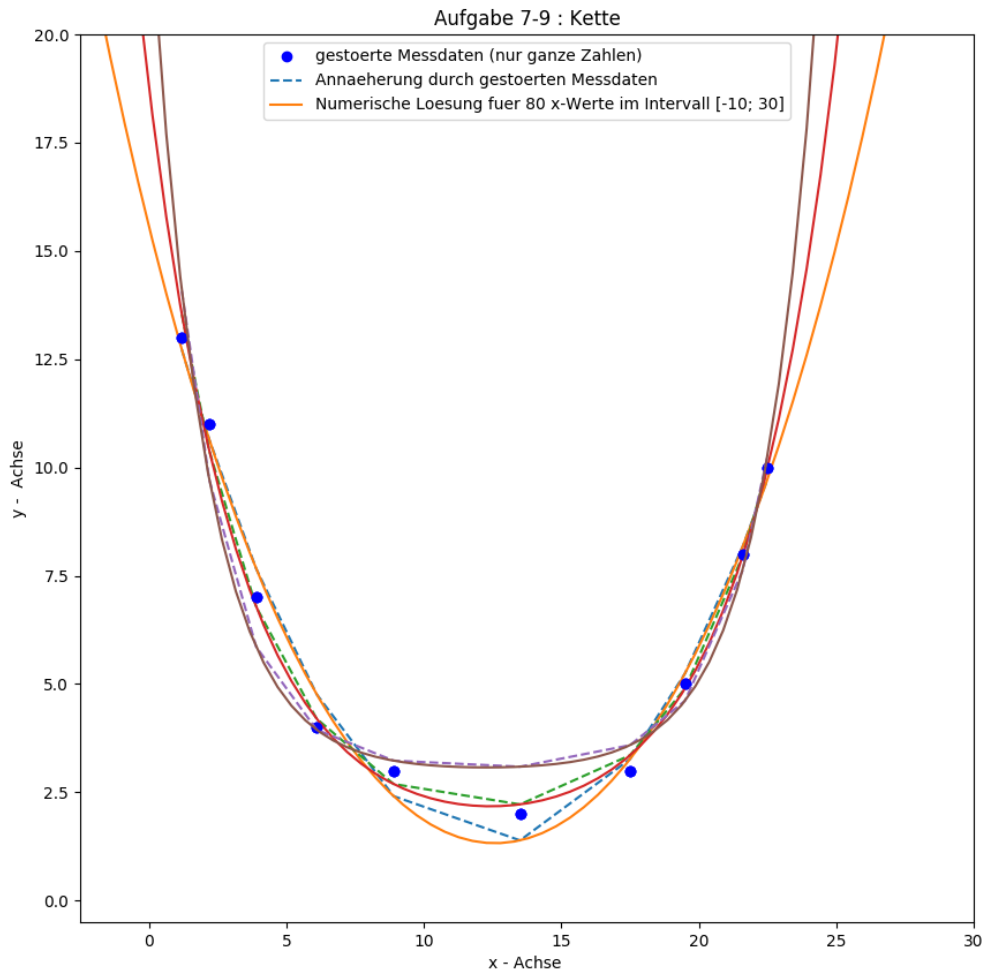


Fig. 3.2: Annäherung für $n=3$ und gestörte Daten.

Der dazugehöriger Plot vgl. Fig. 3.3

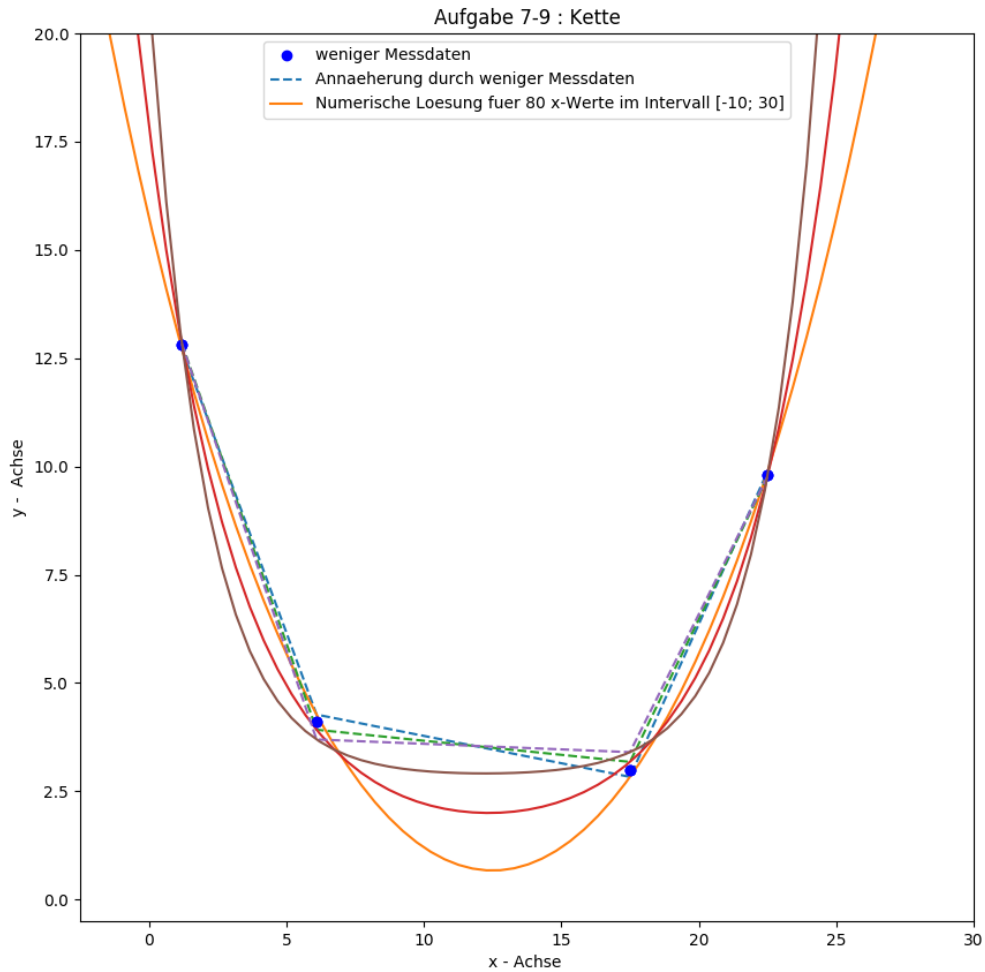


Fig. 3.3: Annäherung für $n=3$ und weniger Messdaten.

3.2 Für $n=10$:

```
dk: [0.1, 0.14444444444444446, 0.18888888888888888, 0.23333333333333336, 0.
↪ 2777777777777778, 0.3222222222222222, 0.3666666666666667, 0.4111111111111111, 0.
↪ 4555555555555556, 0.5]
```

3.2.1 gegebene Daten

Fuer 0.1 erhaelt man :

Spaltenanzahl von Q: 10 ,Spaltenanzahl von R: 10
 Die Parameter lauten : [2.25708445 27.7187257 -14.61915005]
 Das Residuum fuer $r = b - Ax$ in der 2 Norm ist: 0.0111526443443
 Die minimale Abweichung in der Norm von z_2 ist: 1.06579109024
 Die Kondition von A in der 2-Norm: 52.6393359886
 Die Kondition von A^tA in der 2-Norm: 2770.89969332

Fuer 0.144444444444 erhaelt man :

Spaltenanzahl von Q: 10 ,Spaltenanzahl von R: 10
 Die Parameter lauten : [0.55911266 20.78235834 -5.47209196]
 Das Residuum fuer $r = b - Ax$ in der 2 Norm ist: 0.0465669611015
 Die minimale Abweichung in der Norm von z_2 ist: 0.82908165955
 Die Kondition von A in der 2-Norm: 87.6341803924
 Die Kondition von A^tA in der 2-Norm: 7679.74957304

Fuer 0.188888888889 erhaelt man :

Spaltenanzahl von Q: 10 ,Spaltenanzahl von R: 10
 Die Parameter lauten : [0.16364039 18.2834834 -1.93116174]
 Das Residuum fuer $r = b - Ax$ in der 2 Norm ist: 0.00171542417263
 Die minimale Abweichung in der Norm von z_2 ist: 0.613353236447
 Die Kondition von A in der 2-Norm: 186.909121907
 Die Kondition von A^tA in der 2-Norm: 34935.0198522

Fuer 0.233333333333 erhaelt man :

Spaltenanzahl von Q: 10 ,Spaltenanzahl von R: 10
 Die Parameter lauten : [0.05213119 17.37835968 -0.16687056]
 Das Residuum fuer $r = b - Ax$ in der 2 Norm ist: 0.00166204747209
 Die minimale Abweichung in der Norm von z_2 ist: 0.583738882077
 Die Kondition von A in der 2-Norm: 449.152755247
 Die Kondition von A^tA in der 2-Norm: 201738.197546

Fuer 0.277777777778 erhaelt man :

Spaltenanzahl von Q: 10 ,Spaltenanzahl von R: 10
 Die Parameter lauten : [0.01741908 17.20347959 0.86390522]
 Das Residuum fuer $r = b - Ax$ in der 2 Norm ist: 0.0190288858348
 Die minimale Abweichung in der Norm von z_2 ist: 0.809501010022
 Die Kondition von A in der 2-Norm: 1150.98519786
 Die Kondition von A^tA in der 2-Norm: 1324766.92569

Fuer 0.322222222222 erhaelt man :

Spaltenanzahl von Q: 10 ,Spaltenanzahl von R: 10
 Die Parameter lauten : [5.98858621e-03 1.74158011e+01 1.53758334e+00]
 Das Residuum fuer $r = b - Ax$ in der 2 Norm ist: 0.080093524882
 Die minimale Abweichung in der Norm von z_2 ist: 1.15421476191
 Die Kondition von A in der 2-Norm: 3060.7309902
 Die Kondition von A^tA in der 2-Norm: 9368074.19435

Fuer 0.366666666667 erhaelt man :

```

Spaltenanzahl von Q: 10 ,Spaltenanzahl von R: 10
Die Parameter lauten : [2.09564550e-03 1.78565131e+01 2.01574756e+00]
Das Residuum fuer r = b-Ax in der 2 Norm ist: 0.157308021654
Die minimale Abweichung in der Norm von z2 ist: 1.52967890342
Die Kondition von A in der 2-Norm: 8323.8242779
Die Kondition von A^tA in der 2-Norm: 69286050.6093

Fuer 0.411111111111 erhaelt man :

Spaltenanzahl von Q: 10 ,Spaltenanzahl von R: 10
Die Parameter lauten : [7.41763102e-04 1.84451649e+01 2.37660874e+00]
Das Residuum fuer r = b-Ax in der 2 Norm ist: 0.211943271809
Die minimale Abweichung in der Norm von z2 ist: 1.90356802961
Die Kondition von A in der 2-Norm: 22960.9186464
Die Kondition von A^tA in der 2-Norm: 527203785.087

Fuer 0.455555555556 erhaelt man :

Spaltenanzahl von Q: 10 ,Spaltenanzahl von R: 10
Die Parameter lauten : [2.64553247e-04 1.91387737e+01 2.66164383e+00]
Das Residuum fuer r = b-Ax in der 2 Norm ist: 0.245435611561
Die minimale Abweichung in der Norm von z2 ist: 2.2630606688
Die Kondition von A in der 2-Norm: 63932.4760392
Die Kondition von A^tA in der 2-Norm: 4087361492.5

Fuer 0.5 erhaelt man :

Spaltenanzahl von Q: 10 ,Spaltenanzahl von R: 10
Die Parameter lauten : [9.48502772e-05 1.99136849e+01 2.89456660e+00]
Das Residuum fuer r = b-Ax in der 2 Norm ist: 0.260339901681
Die minimale Abweichung in der Norm von z2 ist: 2.60288514197
Die Kondition von A in der 2-Norm: 179156.60265
Die Kondition von A^tA in der 2-Norm: 32097088273.1

```

Der dazugehöriger Plot vgl. [Fig. 3.4](#)

3.3 Für $n = 20$:

Sehen wir uns noch die Annäherung für $n=20$ an [Fig. 3.5](#)

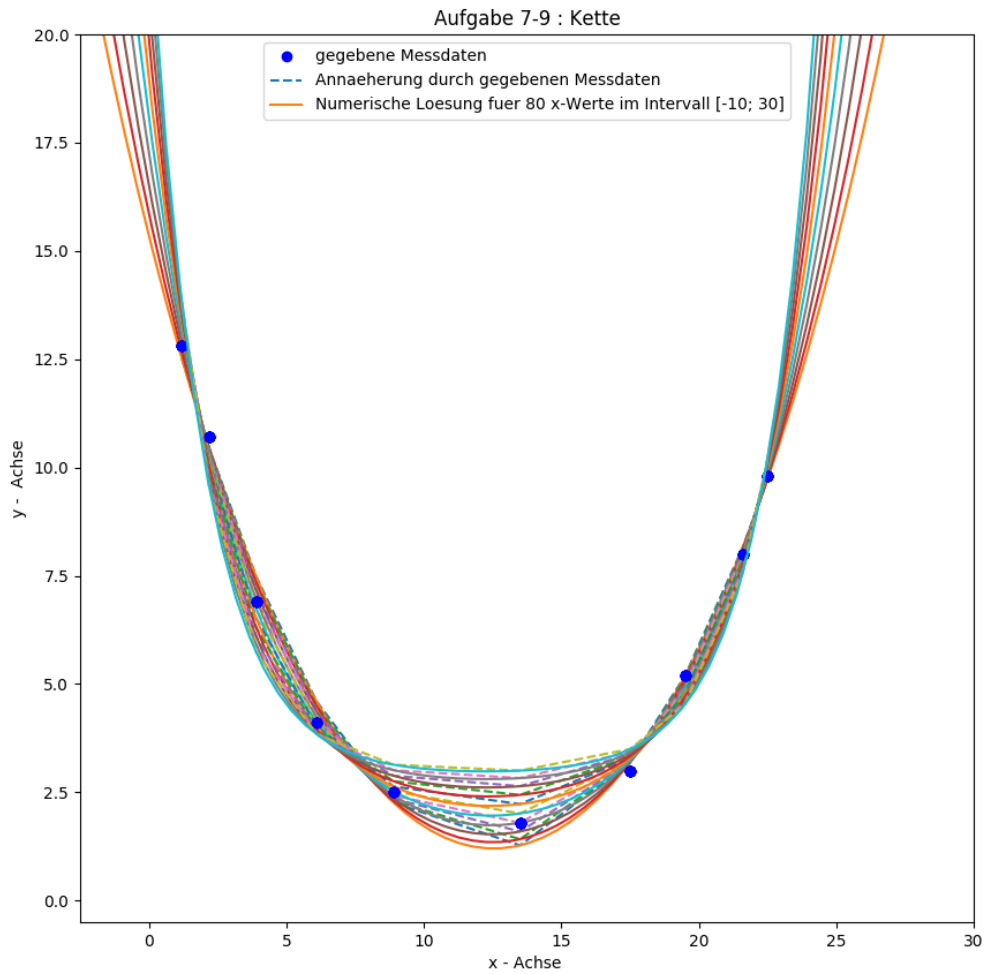


Fig. 3.4: Annäherung für $n=10$.

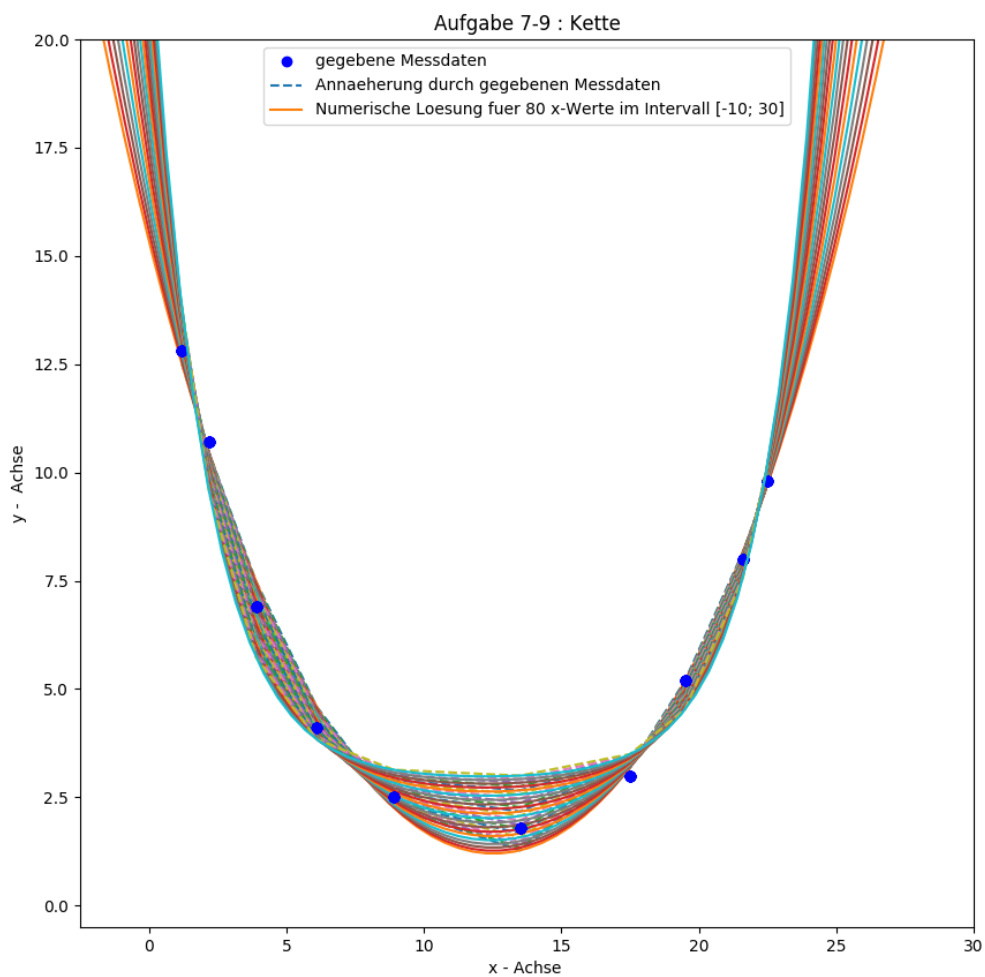


Fig. 3.5: Annäherung für $n=20$ und gegebene Daten.

INDICES AND TABLES

- `genindex`
- `modindex`
- `search`