Introducción

Curso: Métodos Numéricos y Programación III

Prof. Rosa Luz Medina Aguilar
Facultad de Ciencias Matemáticas.

Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América

Contenido

Aspectos Físicos de las EDPs

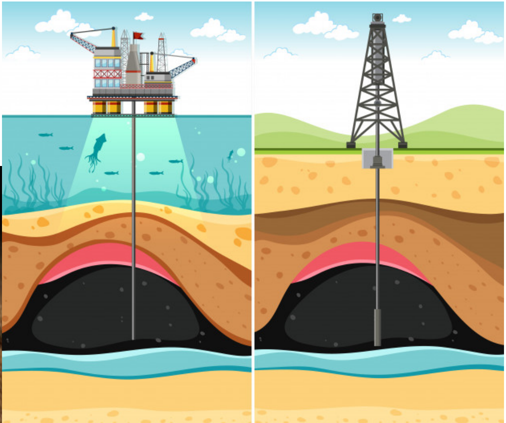
Aspectos Matemáticos de las EDPs

Diferencias finitas en la resolución numérica de EDP

Aspectos Físicos de las EDPs

- La EDPs que describen fenómenos físicos de ínteres pueden ser clasificadas en tres categorias básicas
  - Elípticas
  - Parabólicas
  - Hiperbólicas
- Cada clase de ecuaciones está asociada a una categoría diferente de fenómenos físicos.
- En la naturaleza se puede distinguir dos tipos básicos de fenómenos físicos: aquellos que evolucionan en el tiempo (transitorios) y aquellos que estan en un estado de equilibrio (estacionarios)

Aspectos Físicos de las EDPs



Problemas de Equilibrio

- Problemas de equilibrio son aquellos en los cuales la propiedad de interés no se altera con el pasar del tiempo.
- Matemáticamente, estos problemas son, en general, representados por ecuaciones diferenciales parciales elípticas

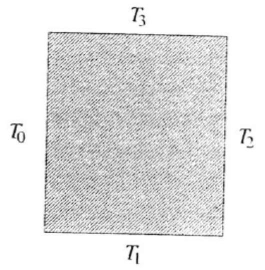
$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

- La ecuación modelo es la ecuación de Laplace.

Problemas de Equilibrio

Por ejemplo

Considere una placa de metal aislada térmicamente, con espesura despreciable y solo se puede sufrir cambios de calor por los bordes laterales,



- Cuando la placa está en equilibrio térmico, la temperatura en cada punto interno satisface

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

  que es la ecuación de Laplace.
- La solución única para problemas envolviendo ecuaciones diferenciales parciales elípticas se obtiene especificando las condiciones de frontera sobre la variable dependiente.
- Problemas que exigen condiciones de frontera son llamados problemas de valor de contorno.

Problemas de Equilibrio

- Se puede dar también el flujo en el borde o una combinación de ambos.
- Una característica de los problemas regidos por ecuaciones elípticas, es que toda la región es inmediatamente afectada por cualquier cambio en el valor de la variable dependiente en un punto en el interior de la región.
- Los métodos numéricos que se emplean para resolver estos problemas, deben tener en cuenta que cada punto de la frontera afecta la solución global.

Problemas No estacionarios

- Los problemas no estacionarios (transitorios, transientes o de propagación), envuelven la variación temporal de las propiedades físicas de interes.
- Cuando no se dispone de solución analítica, la solución numérica de la EDP se calcula a partir de un tiempo t_0 en pasos de tiempo Δt hasta alcanzar el instante final t_f.

$$t_0, t_0 + \Delta t, t_0 + 2\Delta t, \cdots, t_f - \Delta t, t_f$$

- Cuando se resuelve un problema transiente, es importante tener una condición inicial correcta.

Problemas No estacionarios

- Los fenómenos no estacionarios son modelados por ecuaciones diferenciales parabólicas o hiperbólicas.
- Cuando presentan mecánismos de disipación de energia (por ejemplo, en la difusión de calor, en el flujo de fluidos). Los fenómenos son llamados disipativos y son descritos por ecuaciónes parabólicas. En el caso contrario, estos fenómenos serán representados por ecuaciones hiperbólicas.

Ecuaciones Parabólicas

- La ecuación modelo para problemas parabólicos es la ecuación transiente de difusión de calor

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

donde, T es la temperatura y α es el coeficiente de difusividad térmica del material.

Ecuaciones Parabólicas

Por ejemplo

Considere una barra delgada de longitud de 10cm, aislada térmicamente a lo largo de su longitud

Suponiendo que la barra inicialmente tiene temperatura de $\boldsymbol{T = 100}$ grados centigrados, queremos conocer su evolución temporal a lo largo de la barra.

Ecuaciones Parabólicas

- A partir de un estado inicial, pasamos por una sucesión de distribuciones de temperatura. Después de un tiempo suficientemente largo es alcanzado el equilbrio térmico (estado estacionario) y la temperatura de la barra no varía más.
- Para poder estudiar la evolución temporal de la temperatura en la barra, es necesario que la condición inicial de la temperatura a lo largo de ella sea especifícado.
- Las condiciones de frontera serán auxiliares para su resolución. Problemas de este tipo son llamados problemas de valor inicial.

Ecuaciones Parabólicas

- Notemos que podemos "marchar" indefinidamente en el tiempo, entonces la región puede ser abierta.
- Cualquier perturbación que ocurra en un punto P de la región en el instante $t_p > 0$ solo va influenciar a la solución en $t > t_p$.
- Los mécanismos disipativos presentes en los problemas parabólicas hacen que la solución para $t > 0$ sea suave, asi las condiciones iniales no lo sean.
- El término disipativo es dado por

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

Ecuaciones Hiperbólicas

- Las ecuaciones hiperbólicas están relacionadas a problemas de vibración o de convección, los fenómenos disipativos son mínimos o pueden ser despreciados.
- También son problemas de valor inicial, pues situaciones descritas por estas ecuaciones necesitan de condiciones de frontera y de condiciones iniciales.
- La ecuación modelo del problema hiperbólico es la ecuación de convección que, para una dimensión espacial, es descrita como:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -v \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

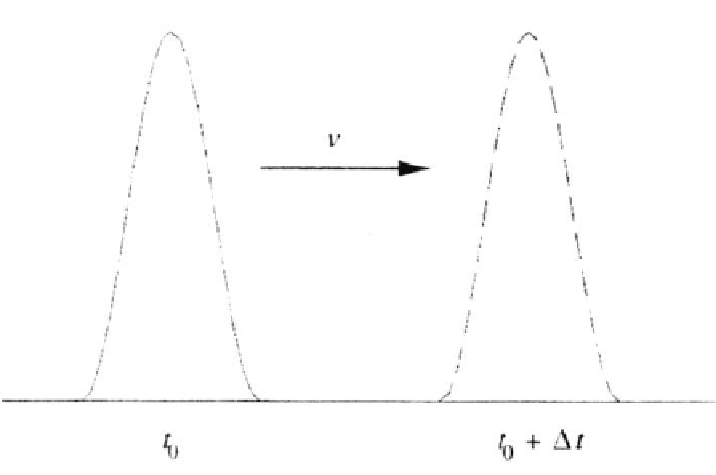
Ecuaciones Hiperbólicas

- La ecuación representa el transporte de ϕ para la derecha a lo largo de x con velocidad $v > 0$.
- Como la ecuación no tiene un término disipativo, el valor de ϕ debe ser solamente transportado a lo largo de x sin alteración entre los instante t_0 y $t_0 + \Delta t$.
- El producto

$$v\frac{\partial \phi}{\partial x}$$

es llamado término convectivo o inercial.

Ecuaciones Hiperbólicas



Ecuaciones Hiperbólicas

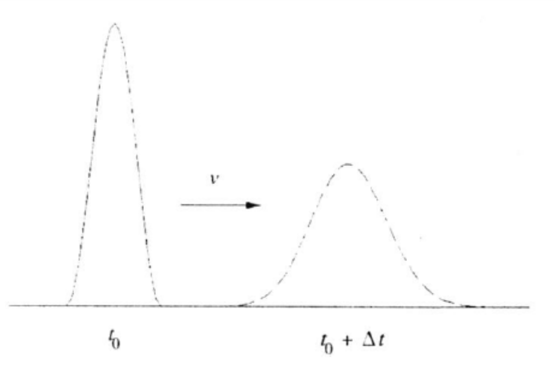
- Debido a la ausencia de mecanismos disipativos cualquier discontinuidad en las condiciones iniciales pueden ser propagados para la solución. Esto hay que tomar encuenta en el momento de resolverlo numéricamente.
- Un proceso de convección que tenga mecanismos disipativos obedece a la ecuación parabólica de convección-difusión tambien llamada ecuación de transporte.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -v\frac{\partial \phi}{\partial x} + D\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

donde D es el coeficiente de difusión de ϕ.

Ecuaciones Hiperbólicas

- Podemos ilustrar los efectos disipativos del término de difusión.



Ecuaciones Hiperbólicas

- Otra ecuación hiperbólica importante, es la ecuación de la onda de segundo orden

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

que describe el desplazamiento transversal de una cuerda bajo tensión. La constante c es la velocidad de propagación de la onda en la cuerda.

Problema	Tipo de ecuación	Ecuación modelo	Condiciones	Región
Equilibrio	Elíptico	$\nabla^2\phi = 0$	Frontera	Cerrada
Transitorio con disipación	Parabólica	$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \alpha\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}$	Frontera e iniciales	Abierta
Transitorio sin disipación	Hiperbólica	$\frac{\partial\phi}{\partial t} = -v\frac{\partial\phi}{\partial x}$	Frontera e iniciales	Abierta

- Recordemos también que las ecuaciones hiperbólicas admiten soluciones discontinuas.

Aspectos Matemáticos de las EDPs

- Se denominan ecuaciones diferenciales parciales (EDP) a aquellas ecuaciones que involucran derivadas parciales de una función desconocida con dos o más variables independientes.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

- Se denomina orden de una ecuación diferencial al orden de la derivada más alta que exista en dicha ecuación.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -v \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

Aspectos Matemáticos de las EDPs

- Una ecuación diferencial parcial lineal es aquella que es lineal en la función desconocida y en todas sus derivadas, con coeficientes que dependen solo de las variables independientes de la función.
- Considere la ecuación diferencial de segunda orden en dos variables $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$, que no necesariamente representan coordenadas espaciales :

$$\boldsymbol{A\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+D\frac{\partial\phi}{\partial x}+E\frac{\partial\phi}{\partial y}+F\phi=G}$$

Cuando $\boldsymbol{A, B, C, D, E, F}$ y $\boldsymbol{G}$ son constantes o funciones de $\boldsymbol{x, y}$ la ecuación es llamada lineal. En caso contrario, es considerada nolineal.

Aspectos Matemáticos de las EDPs

La ecuación de Burgers.

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -v\frac{\partial v}{\partial x} + \Gamma\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

es una ecuación no lineal del tipo convección-difusión, siendo de naturaleza parabólica. La no linealidad aparece en el producto

$$v\frac{\partial v}{\partial x}$$

que representa el transporte de v con velocidad v.

Aspectos Matemáticos de las EDPs

Más ejemplos de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales:

- $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = 1$ lineal de segundo orden
- $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 8u = 5y$ lineal de tercer orden
- $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^3 + 6\frac{\partial^3 u}{\partial x \cdot \partial y^2} = x$ no lineal de tercer orden
- $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xu\frac{\partial u}{\partial y} = x$ no lineal de segundo orden

Clasificación matemática

En función de los valores de A, B y C, podemos clasificar la ecuación

$$A\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} + C\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + D\frac{\partial\phi}{\partial x} + E\frac{\partial\phi}{\partial y} + F\phi = G$$

en las tres familias vistas anteriormente:

- Eliptica si $B^2 - 4AC < 0$.
- Parabólica, si $B^2 - 4AC = 0$.
- Hiperbólica, si $B^2 - 4AC > 0$.

Clasificación matemática

- Por ejemplo, la ecuación de difusión

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = D\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

es una ecuación lineal de segundo orden, con coeficientes

$$A = 1, \quad E = -1, \quad B = C = D = F = G = 0$$

Portanto, $B^2 - 4AC = 0$ y la ecuación es parabólica en toda la región de solución R.

Clasificación matemática

- En el caso de la ecuación de ondas,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

  identificando coeficientes:

$$A = -c^2, C = 1, B = D = E = F = G = 0$$
$$\rightarrow B^2 - AC = c^2 > 0$$

  por lo que se trata de una EDP hiperbólica.
-

Clasificación matemática

- En cuanto a la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

$$A = C = 1, B = D = E = F = G = 0$$
$$\rightarrow B^2 - AC = -1 < 0$$

por lo que estamos ante una EDP elíptica.

Clasificación matemática

- Cuando los coeficientes A, B y C no son constantes, es posible que la EDP cambie de família dentro da región R. Como ejemplo, tenemos la ecuación de Tricomi

$$y\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0, \quad B^2 - 4AC = -4y$$

  es eliptica para $y > 0$, parabólica en $y = 0$ e hiperbólica para $y < 0$.
- El cambio de las propriedades causa problemas en la resolución numérica.

Condiciones Auxiliares

- Para resolver un problema modelado por una EDP es importante que este bien puesto, es decir que la solución
  - exista
  - sea única
  - dependa continuamente de las condiciones iniciales y de frontera.
- Condiciones iniciales o de frontera especificadas incorretameote, por "falta o exceso", frecuentemente hacen que la solución no sea única.
- Pequeñas variaciones en las condiciones auxiliares deben producir cambios compatibles en la solución numérica.

Condiciones Auxiliares

- En problemas que envuelven EDPs, se pueden especificar tres tipos básicos de condiciones sobre la variable dependiente en la frontera de la región $\boldsymbol{R}$:
  - Condición de frontera tipo Dirichlet: el valor de $\boldsymbol{\phi}$ es especificado en $\boldsymbol{\delta R}$.
  - Condición de frontera tipo Neumann: el gradiente normal $\frac{\partial \phi}{\partial n} = f$ o el gradiente tangencial $\frac{\partial \phi}{\partial s} = g$ es especificado en la frontera.

    Cuando $f = 0$, decimos que la condición utilizada es una condición de frontera natural.
  - Condición de frontera tipo Robin: una combinación lineal es dada en $\boldsymbol{\delta R}$; por ejemplo, $\alpha \frac{\partial \phi}{\partial n} + \beta \phi = f$.

Diferencias finitas en la resolución numérica de EDP

Discretización

Proceso por el que cualquier ecuación en derivadas parciales se convierte en una ecuación en diferencias. Éstas suelen ser sistemas lineales o no lineales.

Los métodos en diferencias finitas suelen ser de dos tipos:

- Métodos explícitos
  - Sencillos y fáciles de implementar
  - Inestables
  - Requieren condiciones de convergencia

Diferencias finitas en la resolución numérica de EDP

- Métodos implícitos
  - Más complejos
  - Estables
  - Sin condiciones de convergencia

Cuando trabajamos en un dominio regular (en general, rectángulo, cubo, ...) los resultados proporcionados por los métodos en diferencias finitas son satisfactorios.

Tomaremos las variables x y t, siendo la función incógnita $u(x,t)$, y los intervalos de las variables $x \in [a,b], t \in [0, T_{\text{máx}}]$.
Discretizamos la variable x.
Definimos $h = \frac{b-a}{n}$, donde n_x es el número de nodos donde vamos a encontrar la solución menos 1 , y obtenemos x_i como:

$$x_i = a + ih, i = 0, 1, \ldots, n_x - 1, n_x$$

Procedemos de una forma similar con la variable t.
Definimos $k = \frac{T_{max}}{n_t}$, donde n_t es el número de nodos donde vamos a encontrar la solución menos 1 , y obtenemos t_j como:

$$t_j = jk, j = 0, 1, \ldots, n_t - 1, n_t$$

Note que los nodos finales para las variables son:

$$\boldsymbol{x_{nx} = a + nx \cdot h = b}$$
$$\boldsymbol{t_{nt} = j \cdot nt = T_{\text{máx}}}$$

Las soluciones $\boldsymbol{u_{i,j}}$ se corresponden de forma unívoca con las soluciones $\boldsymbol{u(x,t)}$ de la forma: $\boldsymbol{u_{i,j} = u\left(x_i, t_j\right)}$.
Una vez tenemos definidos los nodos, debemos discretizar la ecuación en derivadas parciales correspondientes.
Presentamos una serie de definiciones de diferencias finitas que utilizaremos cuando abordemos las EDP parabólicas, hiperbólicas y elípticas.

- Diferencia progresiva:

$$u_x(x,t) \approx \frac{u(x+h,t)-u(x,t)}{h} \rightarrow u_x\left(x_i,t_j\right) = \frac{u_{i+1,j}-u_{i,j}}{h}$$
$$u_t(x,t) \approx \frac{u(x,t+k)-u(x,t)}{k} \rightarrow u_t\left(x_i,t_j\right) = \frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{k}$$

- Diferencia regresiva:

$$u_x(x,t) \approx \frac{u(x,t)-u(x-h,t)}{h} \rightarrow u_x\left(x_i,t_j\right) = \frac{u_{i,j}-u_{i-1,j}}{h}$$
$$u_t(x,t) \approx \frac{u(x,t)-u(x,t-k)}{k} \rightarrow u_t\left(x_i,t_j\right) = \frac{u_{i,j}-u_{i,j-1}}{k}$$

- Diferencia central:

$$u_x(x,t) \approx \frac{u(x+h,t)-u(x-h,t)}{2h}$$

$$\rightarrow u_x\left(x_i,t_j\right) = \frac{u_{i+1,j}-u_{i-1,j}}{2h}$$

$$u_t(x,t) \approx \frac{u(x,t+k)-u(x,t-k)}{2k}$$

$$\rightarrow u_t\left(x_i,t_j\right) = \frac{u_{i,j+1}-u_{i,j-1}}{2k}$$

Diferencias de segundo orden, para derivadas segundas:
Diferencia central:

$$u_{xx}(x,t) \approx \frac{u(x+h,t) - 2u(x,h) + u(x-h,t)}{h^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow u_{xx}\left(x_i, t_j\right) = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h^2}$$

$$u_{tt}(x,t) \approx \frac{u(x,t+k) - 2u(x,t) - u(x,t-k)}{k^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow u_{tt}\left(x_i, t_j\right) = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} - u_{i,j-1}}{k^2}$$