

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Sistemas Lineales Métodos Iterativos

Prof. Rosa Luz Medina Aguilar



May 23, 2024

Contenido

- 1 Introducción
 - Normas de vectores y matrices
 - Criterio de convergencia
 - Criterios de parada
- 2 El método de Jacobi
- 3 El método de Gauss-Seidel
- 4 Método de Sobrerrelajación

Contenido

- 1 **Introducción**
 - Normas de vectores y matrices
 - Criterio de convergencia
 - Criterios de parada
- 2 El método de Jacobi
- 3 El método de Gauss-Seidel
- 4 Método de Sobrerrelajación

Métodos iterativos - Introducción

En numerosos problemas modelizados mediante sistemas lineales $Ax = b$, la matriz A tiene al menos dos características esenciales:

- Tamaño grande, $n \gg \gg$
- Matriz dispersa.

Estas características desaconsejan el uso de métodos directos, ya que

- El orden de magnitud del número de operaciones para calcular $\text{inv}(A)$ es $O(n^3)$, lo que en tiempo de ejecución pueden ser incluso años.
- Tanto el cálculo de $\text{inv}(A)$ como el método de eliminación de Gauss hace perder el carácter disperso de la matriz A , lo que se traduce en un mayor número de operaciones y en el incremento del error de redondeo.

Métodos iterativos - Introducción

- La idea central de los métodos iterativos es generalizar el método del punto fijo utilizado anteriormente para buscar raíces de una ecuación.
- Sea el sistema lineal $Ax = b$, donde:
 - A: matriz de los coeficientes, $n \times n$
 - x: vector de las variables, $n \times 1$
 - b: vector de los terminos constantes, $n \times 1$.
- Este sistema es convertido, de alguna forma, en un sistema del tipo $x = Tx + c$ donde T es una matriz $n \times n$ y c es un vector $n \times 1$.
- Observamos que $\varphi(x) = Tx + c$ es una función de iteración dada en la forma matricial.

Métodos iterativos- Introducción

Entonces

- Partimos de $x^{(0)}$ (vector aproximación inicial) y construimos consecutivamente los vectores:

$$x^{(1)} = Tx^{(0)} + c = \varphi \left(x^{(0)} \right), \quad (\text{primera aproximación})$$

$$x^{(2)} = Tx^{(1)} + b = \varphi \left(x^{(1)} \right), \quad (\text{segunda aproximación})$$

etc.

- En general, la aproximación $x^{(k+1)}$ es calculada por la fórmula $x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + c$ es decir,

$$x^{(k+1)} = \varphi \left(x^{(k)} \right), k = 0, 1, \dots$$

Métodos iterativos- Introducción

- Observe que si la sucesión de aproximaciones

$$x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(k)}, \dots$$

- Es tal que,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = \alpha,$$

entonces $\alpha = T\alpha + c$, y α es solución del sistema lineal $Ax = b$.

- El vector error**, en cada iteración, se define como

$$e_k = \alpha - x^{(k)}$$

- El vector residuo**, en cada iteración, se define como

$$r_k = b - Ax^{(k)}$$

Se cumple el siguiente resultado

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = \alpha \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \|e^{(k)}\| = 0 \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \|r_k\| = 0$$

Normas vectoriales

La norma de un vector debe satisfacer estas condiciones:

- $\|x\| \geq 0$ Para cualquier vector no nulo x
- $\|x\| = 0$ si y solo si x es un vector nulo
- $|\alpha x| = |\alpha| \|x\|$ Para un escalar α
-

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Las normas vectoriales pueden ser definidas de diferentes formas en tanto que la definición de norma sea satisfecha.

Normas vectoriales

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad \text{Norma de la suma } (l_1)$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \quad \text{Norma del máximo } (l_\infty)$$

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2} \quad \text{Norma euclidiana } (l_2)$$

Normas matriciales

La norma de una matriz debe satisfacer estas condiciones:

- $\|A\| \geq 0$
- $\|A\| = 0$ si y solo si A es una matriz nula
- $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$ para α escalar
- $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

Importante identidad $\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$ x es un vector

Normas matriciales

Normas matriciales

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \left\{ \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right\} \quad \text{Norma del máximo de las columnas}$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right\} \quad \text{Norma del máximo de las filas}$$

$$\|A\|_2 = (\rho(A^t A))^{1/2} \quad \text{Norma } l_2$$

Criterio de convergencia

Sea \bar{x} la solución del sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, entonces \bar{x} satisface

$$\bar{x} = T\bar{x} + c$$

tenemos que

$$x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + c$$

Luego

$$x^{(k+1)} - \bar{x} = T(x^{(k)} - \bar{x})$$

donde el error en cada iteración es dado por $e^{k+1} = x^{(k+1)} - \bar{x}$

$$e^{k+1} = Te^k = TTe^{k-1} = \dots = T^{k+1}e^0$$

usando las propiedades de la norma se sigue que

$$\|e^{k+1}\| \leq \|T\|^{k+1} \|e^0\|$$

Criterio de convergencia

Luego la sucesión $\{x^{(k)}\}$ converge para \bar{x} , la solución del sistema si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|e^k\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|T\|^k \|e^0\| = 0$$

y esto ocurre si y solamente si la matriz \mathbf{T} satisface la condición

$$\|T\| < 1$$

.

Criterios de parada

Dada una tolerancia TOL , el vector $x^{(k)}$ será escogido como la solución aproximada de la solución exacta si



$$||e^k|| < TOL$$

- Podemos usar también el error relativo

$$||e^k||/||x^k|| < TOL$$

- o el residuo

$$||r^k|| < TOL$$

Computacionalmente se usa también un número máximo de iteraciones.

Contenido

- 1 Introducción
 - Normas de vectores y matrices
 - Criterio de convergencia
 - Criterios de parada
- 2 El método de Jacobi
- 3 El método de Gauss-Seidel
- 4 Método de Sobrerrelajación

El método de Jacobi

La forma como el método de Jacobi transforma el sistema lineal $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ en $\mathbf{x}=\mathbf{Tx}+\mathbf{c}$ es la siguiente:

Tomamos el sistema original

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \quad \quad \ddots \quad \quad \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

El método de Jacobi

Suponiendo $a_{ii} \neq 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$ aislamos el vector \mathbf{x}

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \dots - a_{1n}x_n) \\ x_2 = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \dots - a_{2n}x_n) \\ \vdots \\ x_n = \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \dots - a_{nn-1}x_{n-1}) \end{cases}$$

El método de Jacobi

Tenemos

$$x = Tx + c$$

donde

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & -\frac{a_{23}}{a_{22}} & \dots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ -\frac{a_{31}}{a_{33}} & -\frac{a_{32}}{a_{33}} & 0 & \dots & -\frac{a_{3n}}{a_{33}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n3}}{a_{nn}} & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \frac{b_3}{a_{33}} \\ \vdots \\ \frac{b_b}{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

El método de Jacobi

El método de Jacobi consiste en, dado $x^{(0)}$ aproximación inicial obtener $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}$ a través de la relación

$$x^{(k)} = T x^{(k-1)} + c$$

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = \frac{1}{a_{11}} \left(b_1 - a_{12}x_2^{(k-1)} - a_{13}x_3^{(k-1)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k-1)} \right) \\ x_2^{(k)} = \frac{1}{a_{22}} \left(b_2 - a_{21}x_1^{(k-1)} - a_{23}x_3^{(k-1)} - \dots - a_{2n}x_n^{(k-1)} \right) \\ \vdots \\ x_n^{(k)} = \frac{1}{a_{nn}} \left(b_n - a_{n1}x_1^{(k-1)} - a_{n2}x_2^{(k-1)} - \dots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k-1)} \right) \end{cases}$$

El método de Jacobi

Ejemplo:

Resolver el sistema

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 6 \end{cases}$$

con

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.7 \\ -1.6 \\ 0.6 \end{pmatrix} \quad TOL = 0.05$$

El método de Jacobi

El proceso iterativo es:

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = \frac{1}{10} (7 - 2x_2^{(k-1)} - x_3^{(k-1)}) & = -\frac{2}{10}x_2^{(k-1)} - \frac{1}{10}x_3^{(k-1)} + \frac{7}{10} \\ x_2^{(k)} = \frac{1}{5} (-8 - 2x_1^{(k-1)} - x_3^{(k-1)}) & = -\frac{1}{5}x_1^{(k-1)} - \frac{1}{5}x_3^{(k-1)} - \frac{8}{5} \\ x_3^{(k)} = \frac{1}{2} (6 - 2x_1^{(k-1)} - 3x_2^{(k-1)}) & = -\frac{2}{10}x_1^{(k-1)} - \frac{3}{10}x_2^{(k-1)} + \frac{3}{5} \end{cases}$$

El método de Jacobi

En la forma matricial es $x^{(k)} = Tx^{(k-1)} + c$

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -2/10 & -1/10 \\ -1/5 & 0 & -1/5 \\ -1/5 & -3/10 & 0 \end{pmatrix} \quad x^{(0)} = \begin{pmatrix} 7/10 \\ -8/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}$$

El método de Jacobi

En la forma matricial es $x^{(k)} = Tx^{(k-1)} + c$

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -2/10 & -1/10 \\ -1/5 & 0 & -1/5 \\ -1/5 & -3/10 & 0 \end{pmatrix} \quad x^{(0)} = \begin{pmatrix} 7/10 \\ -8/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}$$

La solución aproximada es $x^{(3)} = (0.9994, -1.9888, 0.9984)^t$.

Observación

La convergencia del método iterativo no depende de la condición inicial.

El método de Jacobi

Si escribimos $A = D - L - U$ donde

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & 0 \end{pmatrix}$$
$$U = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces tenemos que

$$Ax = b \Leftrightarrow (D - L - U)x = b \Leftrightarrow Dx = (L + U)x + b$$

Luego, si D^{-1} existe, es decir $a_{ii} \neq 0$

$$x = D^{-1}(L + U)x + D^{-1}b$$

El método de Jacobi

Esto da origen a la forma matricial del método de Jacobi

$$x^{(k)} = \underbrace{D^{-1}(L + U)}_{T_j} x^{(k-1)} + \underbrace{D^{-1}b}_{c_j} \quad \text{para } k = 1, 2, 3 \dots$$

Así

$$x^{(k)} = T_j x^{(k-1)} + c_j$$

El método converge si $\|T_j\| < 1$

El método de Jacobi - Criterios de Convergencia

El método de Jacobi aplicado a este sistema converge si satisface:

a) el **criterio de las filas**, es decir, si:

$$\max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \left(\sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}| \right) / |a_{ii}| \right\} < 1,$$

b) el **criterio de las columnas**, es decir, si:

$$\max_{1 \leq j \leq n} \left\{ \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}| \right) / |a_{jj}| \right\} < 1,$$

El método de Jacobi - Criterios de Convergencia

- **Definición:** Una matriz **A** es estrictamente diagonal dominante si:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}| < |a_{ii}|, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n$$

- **Observación :** Con esta definición es fácil ver que, si la matriz de los coeficientes es estrictamente diagonal dominante entonces el criterio de las filas es satisfecho.

Algoritmo del método de Jacobi

Entrada Tamaño n , matriz A , términos independientes b , aproximación inicial X_0 , tolerancia Tol , número máximo de iteraciones $maxiter$

Salida Solución aproximada o mensaje de fracaso

Paso 1 Tomar $iter = 1$

Paso 2 Mientras $iter \leq maxiter$

Paso 3 Tomar $x = -D^{-1}(L + U)X_0 + D^{-1}b$

Paso 4 Si $\|x - X_0\| < Tol$ entonces **Salida** x . Parar.

Paso 5 Tomar $iter = iter + 1$

Paso 6 $X_0 = x$

Paso 7 Salida ('Se necesitan más iteraciones'). Parar

Contenido

- 1 Introducción
 - Normas de vectores y matrices
 - Criterio de convergencia
 - Criterios de parada
- 2 El método de Jacobi
- 3 El método de Gauss-Seidel
- 4 Método de Sobrerrelajación

El método de Gauss-Seidel

El método de Gauss-Seidel consiste en, dado $x^{(0)}$ aproximación inicial obtener $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}$ a través de la relación

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^{(k)} = \frac{1}{a_{11}} \left(b_1 - a_{12}x_2^{(k-1)} - a_{13}x_3^{(k-1)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k-1)} \right) \\ x_2^{(k)} = \frac{1}{a_{22}} \left(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k-1)} - \dots - a_{2n}x_n^{(k-1)} \right) \\ x_3^{(k)} = \frac{1}{a_{33}} \left(b_3 - a_{31}x_1^{(k)} - a_{32}x_2^{(k)} - \dots - a_{3n}x_n^{(k-1)} \right) \\ \vdots \\ x_n^{(k)} = \frac{1}{a_{nn}} \left(b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - \dots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k)} \right) \end{array} \right.$$

El método de Gauss-Seidel

Ejercicio:

Resolver el sistema

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y } TOL = 0.05$$

El método de Gauss-Seidel

El proceso iterativo es dado por:

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = \frac{1}{2} \left(5 - x_2^{(k-1)} - x_3^{(k-1)} \right) = 1 - 0.2x_2^{(k-1)} - 0.2x_3^{(k-1)} \\ x_2^{(k)} = \frac{1}{4} \left(6 - 3x_1^{(k)} - x_3^{(k-1)} \right) = 1.5 - 0.75x_1^{(k)} - 0.25x_3^{(k-1)} \\ x_3^{(k)} = \frac{1}{6} \left(0 - 3x_1^{(k)} - 3x_2^{(k)} \right) = -0.5x_1^{(k)} - 0.5x_2^{(k)} \end{cases}$$

El método de Gauss-Seidel

El proceso iterativo es dado por:

$$\begin{cases} x_1^{(k)} &= \frac{1}{2} \left(5 - x_2^{(k-1)} - x_3^{(k-1)} \right) &= 1 - 0.2x_2^{(k-1)} - 0.2x_3^{(k-1)} \\ x_2^{(k)} &= \frac{1}{4} \left(6 - 3x_1^{(k)} - x_3^{(k-1)} \right) &= 1.5 - 0.75x_1^{(k)} - 0.25x_3^{(k-1)} \\ x_3^{(k)} &= \frac{1}{6} \left(0 - 3x_1^{(k)} - 3x_2^{(k)} \right) &= -0.5x_1^{(k)} - 0.5x_2^{(k)} \end{cases}$$

La solución aproximada es $x^{(3)} = (1.0075, 0.9912, -0.9993)^t$.

El método de Gauss-Seidel

El esquema iterativo del método de Gauss-Seidel puede ser escrito en forma matricial de la siguiente manera. Escribimos

$$A = D - L - U$$

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

El método de Gauss-Seidel

Entonces tenemos que

$$Ax = b \Leftrightarrow (D - L - U)x = b \Leftrightarrow Dx = Lx + Ux + b$$

Para calcular el vector x^k

$$(D - L)x^{(k)} = Ux^{(k-1)} + b$$

Si $(D - L)$ es no singular ($a_{ii} \neq 0$)

$$x^{(k)} = \underbrace{(D - L)^{-1}(U)}_{T_g} x^{(k-1)} + \underbrace{(D - L)^{-1}b}_{c_g}$$

Así

$$x^{(k)} = T_g x^{(k-1)} + c_g$$

El método converge si $\|T_g\| < 1$

El método de Gauss-Seidel Criterios de Convergencia

El método de Gauss-Seidel converge si satisface:

a) el **criterio de Sassenfeld**, es decir, si:

$$\max_{1 \leq i \leq n} \beta_i < 1$$

donde os β_i son calculados por recurrencia através de:

$$\beta_i = \left(\sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| \beta_j + \sum_{j=i+1}^n |a_{ij}| \right) / |a_{ii}|$$

b) el **criterio de las filas**, (es diagonalmente dominante)

c) Si la matriz es simétrica, positiva definida

Algoritmo del método de Seidel

Entrada Tamaño n , matriz A , términos independientes b , aproximación inicial $X0$
tolerancia Tol , número máximo de iteraciones $maxiter$

Salida Solución aproximada o mensaje de fracaso

Paso 1 Tomar $iter = 1$

Paso 2 Mientras $iter \leq maxiter$

Paso 3 Tomar x solución del sistema $(D + L)x = b - UX0$

Paso 4 Si $\|x - X0\| < Tol$ entonces **Salida** x . Parar.

Paso 5 Tomar $iter = iter + 1$

Paso 6 $X0 = x$

Paso 7 Salida ('Se necesitan más iteraciones'). Parar

Observaciones

- Dado un sistema lineal $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ puede pasar que el método de Jacobi resulte convergente mientras que el de Gauss-Seidel resulte divergente y vice-versa.
- Una permutación conveniente de las filas o columnas de \mathbf{A} antes de dividir cada ecuación por el coeficiente de la diagonal principal puede reducir el valor de $\|T\|$.
- La convergencia para los métodos: Jacobi y Gauss-Seidel no depende del vector inicial $x^{(0)}$.

Teorema

Si Sea A una matriz invertible. El método iterativo de Jacobi y Gauss Seidel converge, para cualquier aproximación inicial $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, a la solución exacta del sistema lineal, si y sólo si,

$$\rho(T) < 1;$$

es decir, el mayor valor propio en valor absoluto de la matriz de iteración es menor que la unidad.

Corolario

Si $\|T\| < 1$ para cualquier norma matricial normal y c es un vector determinado, entonces la sucesión $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ definida por $x^{(k)} = Tx^{(k-1)} + c$ converge, para cualquier $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ para un vector $x \in \mathbb{R}^n$, con $x = Tx + c$, y las siguientes cotas de error se mantienen:

- 1 $\|x - x^{(k)}\| \leq \|T\|^k \|x^{(0)} - x\|$
- 2 $\|x - x^{(k)}\| \leq \frac{\|T\|^k}{1 - \|T\|} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|$

Contenido

- 1 Introducción
 - Normas de vectores y matrices
 - Criterio de convergencia
 - Criterios de parada
- 2 El método de Jacobi
- 3 El método de Gauss-Seidel
- 4 Método de Sobrerrelajación

Método de SOR

Este método se diferencia por usar una escala para reducir el error de aproximación.

Partimos de la expresión iterativa del método de Gauss-Seidel,

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k-1)} \right)$$

Usando la expresión

$$x_i^{(k)} = w x_i^{(k)} + (1 - w) x_i^{(k-1)}$$

conduce al siguiente método

$$x_i^{(k)} = (1 - w) x_i^{(k-1)} + \frac{w}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k-1)} \right)$$

Método de SOR

Ejemplo:

Resolver el sistema

$$\begin{cases} -5x_1 & & + & 12x_3 & = & 80 \\ 4x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & -2 \\ 6x_1 & + & 8x_2 & & & = & 45 \end{cases}$$

con $x^{(0)} = 0$ $w = 0.8$ y $TOL = 0.05$

Método de SOR

Ejemplo:

Resolver el sistema

$$\begin{cases} -5x_1 & & + & 12x_3 & = & 80 \\ 4x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & -2 \\ 6x_1 & + & 8x_2 & & & = & 45 \end{cases}$$

con $x^{(0)} = 0$ $w = 0.8$ $TOL = 0.05$ Observe que es necesario reordenar las filas para asegurar la convergencia.

$$\begin{cases} 4x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & -2 \\ 6x_1 & + & 8x_2 & & & = & 45 \\ -5x_1 & & & + & 12x_3 & = & 80 \end{cases}$$

Método de SOR

El proceso iterativo es:

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = (1-w)x_1^{(k-1)} + \frac{w}{4}(-2 + x_2^{(k-1)} + x_3^{(k-1)}) \\ x_2^{(k)} = (1-w)x_2^{(k-1)} + \frac{w}{8}(45 - 6x_1^{(k)}) \\ x_3^{(k)} = (1-w)x_3^{(k-1)} + \frac{w}{12}(80 + 5x_1^{(k)}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = 0.2x_1^{(k-1)} + 0.2x_2^{(k-1)} + 0.2x_3^{(k-1)} - 0.4 \\ x_2^{(k)} = 0.2x_2^{(k-1)} - 0.6x_1^{(k)} + 4.5 \\ x_3^{(k)} = 0.2x_3^{(k-1)} + \frac{1}{3}x_1^{(k)} + \frac{16}{3} \end{cases}$$

Método de SOR

Este método se escribe en forma matricial como

$$Dx^{(k)} = (1 - w)Dx^{(k-1)} + w \left(b - Lx^{(k)} - Ux^{(k-1)} \right)$$

$$(D + wL)x^{(k)} = (1 - w)Dx^{(k-1)} + w \left(b - Ux^{(k-1)} \right)$$

$$x^{(k)} = \underbrace{(D + wL)^{-1}((1 - w)D - wU)}_{T_w} x^{(k-1)} + \underbrace{(D + wL)^{-1}wb}_{c_w}$$

Así

$$x^{(k)} = T_w x^{(k-1)} + c_w$$

El método converge si $\|T_w\| < 1$

Método Gauss-Seidel con relajación

El método de SOR puede converger si $0 < w < 2$

- $w = 1$ Gauss-Siedel
- $w < 1$ Se conoce como sub-relajación Para hacer que un sistema no convergente converja o apresure la convergencia al amortiguar las oscilaciones.
- $w > 1$ Se conoce como sobre-relajación Se usa cuando la convergencia va en la dirección correcta hacia la solución verdadera, pero con una velocidad demasiado lenta. Para llevarla más cerca de la verdadera.

Comparación de Gauss- Seidel y SOR

Dado el sistema lineal $Ax = b$

$$4x_1 + 3x_2 = 24$$

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 = 30$$

$$-x_2 + 4x_3 = -24$$

Usando Gauss-Seidel

$$x_1^{(k)} = -0.75x_2^{(k-1)} + 6$$

$$x_2^{(k)} = -0.75x_1^{(k)} + 0.25x_3^{(k-1)} + 7.5$$

$$x_3^{(k)} = 0.25x_2^{(k)} - 6$$

Usando SOR con $\omega = 1.25$

$$x_1^{(k)} = -0.25x_1^{(k-1)} - 0.9375x_2^{(k-1)} + 7.5$$

$$x_2^{(k)} = -0.9375x_1^{(k)} - 0.25x_2^{(k-1)} + 0.3125x_3^{(k-1)} + 9.375$$

$$x_3^{(k)} = 0.3125x_2^{(k)} - 0.25x_3^{(k-1)} - 7.5$$

Comparación de Gauss- Seidel y SOR

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$x_1^{(k)}$	1	5.250000	3.1406250	3.0878906	3.0549316	3.0343323	3.0214577	3.0134110
$x_2^{(k)}$	1	3.812500	3.8828125	3.9267578	3.9542236	3.9713898	3.9821186	3.9888241
$x_3^{(k)}$	1	-5.046875	-5.0292969	-5.0183105	-5.0114441	-5.0071526	-5.0044703	-5.0027940

Gauss_seidel

SOR

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$x_1^{(k)}$	1	6.3125000	2.6223145	3.1333027	2.9570512	3.0037211	2.9963276	3.0000498
$x_2^{(k)}$	1	3.5195313	3.9585266	4.0102646	4.0074838	4.0029250	4.0009262	4.0002586
$x_3^{(k)}$	1	-6.6501465	-4.6004238	-5.0966863	-4.9734897	-5.0057135	-4.9982822	-5.0003486

Resumen

- Los métodos directos, resultan caros para resolver grandes sistemas de ecuaciones.
- Los métodos iterativos que hemos visto (Jacobi, Gauss-Seidel, SOR)
- Condiciones de convergencia de cada uno de ellos.

Bibliografía



J. H. Mathews y K.D. Fink,(2000)
Métodos Numéricos con Matlab (3a ed.)
Madrid Editorial Prentice Hall.



Burden, L R., Faires J D. and Burden A. M. (2017)
Análisis Numérico. (10ma Ed)
México D.F. México: Cengage Learning.



Chapra S C. Canale R P. (2010)
Métodos Numéricos para ingenieros. (6a ed.).
México D.F. México: Mc Graw Hill.