Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Facultad de Ciencias Metemáticas

Escuela Profesional de Computación Científica

Métodos Numéricos y Programación III

Examen Parcial

1. Sea la ecuación en derivadas parciales hiperbólica

$$u_{tt}(x,t) - \alpha^2 u_{xx}(x,t) + a(x)u_t(x,t) + b(t)u(x,t) = m(x,t),$$

donde $x \in [0, L]$ y $t \geq 0$, con las condiciones iniciales

$$u(x,0) = f(x), u_t(x,0) = g(x),$$

y con las condiciones de contorno

$$u(0,t) = u(L,t) = 0.$$

Resolver la ecuación en derivadas parciales de forma numérica,

a) Obtener la expresión general en diferencias divididas utilizando el método explícito. Utiliza la notación $u(x,t) = u_{i,j}, a(x) = a_i, b(t) = b_j, m(x,t) = m_{i,j}$. Toma h como paso de la variable x y k como paso de la variable t. Indica sobre qué valores de i y j se aplica esta expresión.

b) Aplica el desarrollo de Taylor hasta orden 2 sobre la condición de contorno $u_t(x,0)$, teniendo en cuenta que $m(x,0) = a(x)g(x) + b(0)u(x,0)$.

c) Particulariza la expresión general obtenida en a) en los nodos $i \in \{1, nx-1\}$, teniendo en cuenta los datos obtenidos en el apartado b).

d) Obtener la solución de la ecuación en derivadas parciales, tomando $a(x) = b(t) = m(x,t) = 0$, $a^2 = 4\pi^2$, $L = \pi$, $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = 0$, $h = \pi/10$, $k = 0.05$. Representa gráficamente la solución $u(x,t)$ en el instante $T = 1$. Escribe en una tabla los valores de $u(x,t)$ en el instante $T = 1$ con seis decimales.

2. El método Dufort-Frankel para resolver la ecuación del calor es

$$\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1} + u_{i-1,j}}{h^2} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2k}.$$

a) ¿Cuál es la gráfica de los puntos en la malla y cuáles son los límites de i, j para este método?

b) Demuestre que el error de truncamiento es $O(k^2) + O(h^2) + O(k^2/h^2)$. S

c) ¿El método es explícito o implícito?

d) ¿El método es estable?.