Ecuación Hiperbólica

Curso: Métodos Numéricos y Programacion III

Prof. Rosa Luz Medina Aguilar
Facultad de Ciencias Matemáticas.

Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América

Introducción

- Las ecuaciones en derivadas parciales hiperbólicas son aquellas que, dada la expresión general:

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu + G = 0$$

  cumplen $\Delta = B^2 - AC > 0$.
- El ejemplo característico de un problema hiperbólico es la ecuación de ondas.
- Describe la propagación de una variedad de ondas, como las ondas sonoras, las ondas de luz y las ondas en el agua.
- Es importante en varios campos como la acústica, el electromagnetismo, la mecánica cuántica y la dinámica de fluidos. con numerosas aplicaciones en Física e Ingeniería.

Introducción

- Una de las descripciones más simples es la dada por

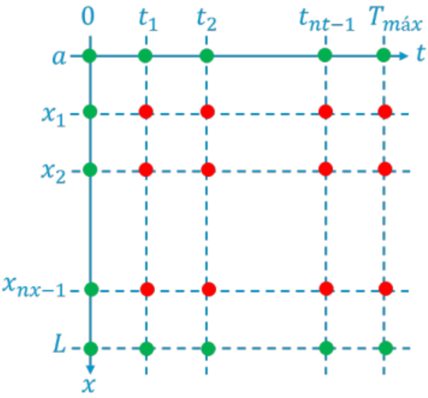
$$\begin{aligned} &u_{tt}(x,t) = \alpha^2 u_{xx}(x,t), \quad 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0 \\ &u(0,t) = u(L,t) = 0, t > 0; \\ &u(x,0) = f(x), u_t(x,0) = g(x), x \in [0,L] \end{aligned}$$

  donde α es un número real en el que intervienen constantes físicas, $f(x)$ y $g(x)$ son funciones reales.

- Dependiendo del tipo de diferencias finitas que utilicemos para aproximar las parciales segundas de la ecuación, obtendremos dos tipos de métodos numéricos:
  Métodos explícitos
  Métodos implícitos

Introducción

La información que tenemos disponible



Método explícito

Aplicamos diferencias centrales sobre u_{tt} y u_{xx}.

$$\frac{u(x,t+k)-2u(x,t)+u(x,t-k)}{k^2}-\alpha^2\frac{u(x+h,t)-2u(x,t)+u(x-h,t)}{h^2}=0$$

Evaluando la expresión anterior en los puntos (x_i, t_j), $i = 1, 2, ..., nx - 1$, $j = 1, ..., nt - 1$,

$$\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} - \alpha^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} = 0$$

Luego

$$u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1} - \frac{k^2\alpha^2}{h^2}\left(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}\right) = 0$$

Método explícito

Si llamamos $\lambda = \frac{k\alpha}{h}$, y llevamos los términos del instante temporal superior a la izquierda:

$$u_{i,j+1} = \left(2 - 2\lambda^2\right) u_{i,j} + \lambda^2 \left(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}\right) - u_{i,j-1}$$

Fijando el índice j y variando el índice $i, i = 1, \ldots, nx - 1$, obtenemos la expresión matricial del método

$$u^{(j+1)} = Au^{(j)} - u^{(j-1)}, \quad j = 1, \ldots, nt - 1$$

Método explícito

donde

$$A = \begin{pmatrix} 2\left(1-\lambda^2\right) & \lambda^2 & \cdots & 0 \\ \lambda^2 & 2\left(1-\lambda^2\right) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2\left(1-\lambda^2\right) \end{pmatrix},$$

$$u^{(j+1)} = \begin{pmatrix} u_{1,j+1} \\ u_{2,j+1} \\ \vdots \\ u_{nx-1,j+1} \end{pmatrix}, u^{(j)} = \begin{pmatrix} u_{1,j} \\ u_{2,j} \\ \vdots \\ u_{nx-1,j} \end{pmatrix}, u^{(j-1)} = \begin{pmatrix} u_{1,j-1} \\ u_{2,j-1} \\ \vdots \\ u_{nx-1,j-1} \end{pmatrix}$$

Método explícito

¿Cómo calculamos $\boldsymbol{u^{(1)}}$, es decir, $\boldsymbol{u_{i,1}, i = 1, 2, \ldots, nx - 1}$?

Método explícito

¿Cómo calculamos $u^{(1)}$, es decir, $u_{i,1}, i = 1, 2, \ldots, nx - 1$?
Utilizando el desarrollo de Taylor hasta orden 2

$$u(x, 0 + k) \approx u(x, 0) + u_t(x, 0)k + u_{tt}(x, 0)\frac{k^2}{2}$$

$$u(x, 0 + k) \approx f(x) + kg(x) + \frac{k^2}{2}\alpha^2 u_{xx}(x, 0)$$

$$f(x) + kg(x) + \frac{k^2}{2}\alpha^2 f''(x),$$

Método explícito

si $f''(x) \approx \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}$, evaluando en x_i, resulta

$$u_{i,1} = \left(1 - \lambda^2\right) f\left(x_i\right) + \frac{\lambda^2}{2}\left(f\left(x_{i+1}\right) + f\left(x_{i-1}\right)\right) + kg\left(x_i\right),$$

$i = 1, 2, \ldots, nx - 1$
aproximación de orden 2, $O\left(k^2 + h^2\right)$.

Método explícito

Calculamos la solución en el instante t_{j+1} a partir de las soluciones en los instantes t_j y t_{j1}, directamente, sin resolver ningún sistema.

Caracteristicas

- El orden de convergencia es $O\left(k^2 + h^2\right)$(depende de como calculamos $u^{(1)}$
- El esquema es consistente
- Es estable cuando $\lambda \leq 1$,

Método explícito

Ejemplo

$$u_{tt}(x,t) - 4u_{xx}(x,t) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0$$
$$u(0,t) = u(1,t) = 0, t > 0;$$
$$u(x,0) = \sin \pi x, u_t(x,0) = 0;\ x \in [0,1]$$

Solución exacta: $u(x,t) = \sin \pi x \cos 2\pi t$

Buscamos la solución aproximada en $T_{\text{máx}} = 0{,}5$ mediante el método explícito con:
(a) $h = 0{,}1, k = 0{,}05$
(b) $h = 0{,}1, k = 0{,}1$.

Método Implícito

$$u_{tt}(x,t) = \alpha^2 u_{xx}(x,t), \quad 0 \le x \le L, t \ge 0,$$
$$u(0,t) = u(L,t) = 0, t > 0;$$
$$u(x,0) = f(x), u_t(x,0) = g(x),\ x \in [0,L]$$

- Aproximamos u_{tt} mediante una diferencia central

$$u_{tt}(x_i, t_j) \to \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2}.$$

Método Implícito

- Aproximamos u_{xx} mediante la media entre la diferencia central en t_{j+1}

$$\frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h^2}$$

- y la diferencia central en t_{j-1}

$$\frac{u_{i+1,j-1} - 2u_{i,j-1} + u_{i-1,j-1}}{h^2}.$$

Método Implícito

- El esquema en diferencias que se obtiene es el siguiente:

$$\begin{aligned} u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1} = & \frac{\lambda^2}{2}\left[(u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1})\right. \\ & \left. + (u_{i+1,j-1} - 2u_{i,j-1} + u_{i-1,j-1})\right], \end{aligned}$$

para $i = 1, 2, \ldots, nx - 1, j = 1, 2, \ldots, nt - 1$,
con $\lambda = \frac{\alpha k}{h}$

Método Implícito

- Llevando a la izquierda las variables correspondientes al instante más alto

$$\left(1+\lambda^2\right) u_{i,j+1} - \frac{\lambda^2}{2}\left(u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j+1}\right) =$$
$$2u_{i,j} + \frac{\lambda^2}{2}\left(u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}\right) - \left(1+\lambda^2\right) u_{i,j-1},$$

para $i = 1, 2, \ldots, nx-1, j = 1, 2, \ldots, nt-1$,

Método Implícito

Fijando j y escribiendo todas las ecuaciones para $i = 1, 2, \ldots, nx - 1$, obtenemos la expresión matricial del método

$$Au^{(j+1)} = 2u^{(j)} + Bu^{(j-1)}, \quad j = 1, 2, \ldots, nt - 1$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 1+\lambda^2 & -\lambda^2/2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\lambda^2/2 & 1+\lambda^2 & -\lambda^2/2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda^2/2 & 1+\lambda^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+\lambda^2 & -\lambda^2/2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda^2/2 & 1+\lambda^2 \end{pmatrix}$$

Método Implícito

$$\boldsymbol{u^{(j)}} = \begin{pmatrix} u_{1,j} \\ u_{2,j} \\ \vdots \\ u_{nx-1,j} \end{pmatrix}, \boldsymbol{u^{(0)}} = \begin{pmatrix} u_{1,0} \\ u_{2,0} \\ \vdots \\ u_{nx-1,0} \end{pmatrix}, \boldsymbol{u^{(1)}} = \begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ \vdots \\ u_{nx-1,1} \end{pmatrix}$$

Método Implícito

$$B=\begin{pmatrix} -(1+\lambda^2) & \lambda^2/2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda^2/2 & -(1+\lambda^2) & \lambda^2/2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2/2 & -(1+\lambda^2) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -(1+\lambda^2) & \lambda^2/2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda^2/2 & -(1+\lambda^2) \end{pmatrix}$$

Método Implícito

Caracteristicas

- El orden de convergencia es $\boldsymbol{O}\left(\boldsymbol{k^2}+\boldsymbol{h^2}\right)$,(depende de como calculamos $\boldsymbol{u^{(1)}}$.
- No necesita condiciones de convergencia

Método Implícito

Ejemplo

$$u_{tt}(x,t) - 4u_{xx}(x,t) = 0, \quad 0 \le x \le 1, \quad t \ge 0$$
$$u(0,t) = u(1,t) = 0, t > 0;$$
$$u(x,0) = \sin \pi x,\ u_t(x,0) = 0\, x \in [0,1]$$

Solución exacta: $u(x,t) = \sin \pi x \cos 2\pi t$

Buscamos la solución aproximada en $T_{\text{máx}} = 0{,}5$ mediante el método implícito con:
$h = 0{,}1, k = 0{,}01$.