Ecuaciones Elípticas

Curso: Métodos Numéricos y Programación III

Prof. Rosa Luz Medina Aguilar
Facultad de Ciencias Matemáticas.

Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América

Ecuaciones Elípticas

- El problema que estamos considerando es tan fundamental que surge en la mayoría de las áreas de la ciencia y la ingeniería. Por ejemplo, desempeña un papel central en la electrostática, donde u representa el potencial electrostático. Una aplicación interesante de esto surge en la tomografía, cuando se utiliza corriente eléctrica para determinar información de ubicación y forma dentro de un objeto, como en el cuerpo humano.

Ecuaciones Elípticas

- La ecuación es

$$\nabla^2 u(x,y) = \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = f(x,y),$$

  llamada ecuación de POISSON (llamada también ecuación de LAPLACE cuando f es idénticamente nula)

- Con dominio $R = [a,b] \times [c,d]$ rectangular. Llamaremos S a la línea rectangular frontera de R. Añadiremos una condición sobre el contorno S de la forma

$$u(x,y) = g(x,y) \text{ si } (x,y) \in S = \partial R$$

Diferencias Finitas

- Mediante diferencias finitas transformamos el problema en un sistema de ecuaciones lineales (ya que la edp es lineal) cuya solución nos dará valores aproximados del problema de contorno en los puntos elegidos.
- Para realizar la transformación en una ecuación en diferencias vamos a aplicar diferencias centrales sobre u_{xx} y u_{yy}.

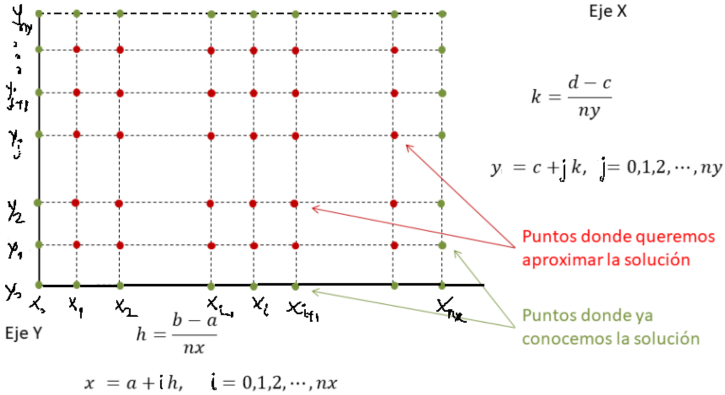
Consideramos

$$h = \frac{b-a}{nx}, \quad k = \frac{d-c}{ny},$$

con

$$x_i = a + ih, i = 0, 1, \ldots, nx; \quad y_j = c + jk, j = 0, 1, \ldots, ny$$

Diferencias Finitas



Diferencias Finitas

$$\frac{u\left(x_{i+1}, y_j\right) - 2u\left(x_i, y_j\right) + u\left(x_{i-1}, y_j\right)}{h^2} + \frac{u\left(x_i, y_{j+1}\right) - 2u\left(x_i, y_j\right) + u\left(x_i, y_{j-1}\right)}{k^2} + \tau_{ij} = f(x_i, y_j)$$

donde $\tau_{ij} = O\left(h^2\right) + O\left(k^2\right)$ es el error de truncamiento.
Podemos escribir

$$u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1} + k^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + k^2 \tau_{ij} = k^2 f_{ij}$$

eliminando el error de truncamiento y llamando $\lambda = \frac{k}{h}$, tenemos la aproximación

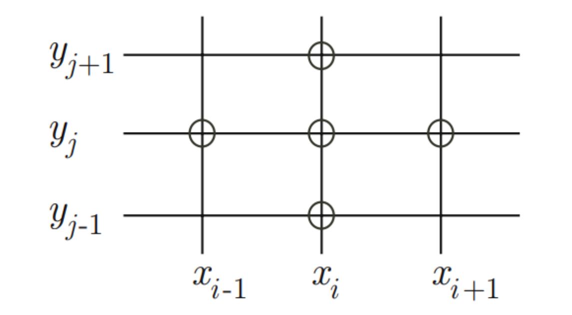
Diferencias Finitas

$$2\left(\lambda^2+1\right)u_{i,j}-\left(u_{i,j+1}+u_{i,j-1}\right)-\lambda^2\left(u_{i+1,j}+u_{i-1,j}\right)$$
$$=-k^2 f\left(x_i,y_j\right),$$

con $i=1,2,\ldots,nx-1$ y $j=1,2,\ldots,ny-1$.
Con las condiciones de contorno
$x=a:\ u_{0,j}=g\left(a,y_j\right)=g_L(y_j),$
$x=b:\ u_{nx,j}=g\left(b,y_j\right)=g_R(y_j)\quad j=0,1,\ldots,ny$
$y=c:\ u_{i,0}=g\left(x_i,c\right)=g_B(x_i)$
$y=d:\ u_{i,ny}=g\left(x_i,d\right)=g_T(x_i),\quad i=0,1,\ldots,nx$

Diferencias Finitas

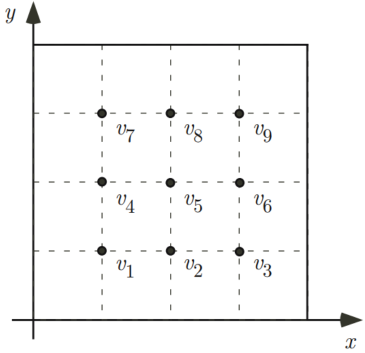
La ecuación de diferencia finita se conoce como el esquema de cinco puntos.



Observa que hay tantas ecuaciones como puntos (x_i, y_j) dentro de $\boldsymbol{R}$.

Diferencias Finitas

Consideremos que $n_x = 4, n_y = 4$, entonces tendremos 9 puntos interiores



Ensamblando la matriz

El siguiente paso es ensamblar todas las ecuaciones en una ecuación matricial $\mathbf{Av} = \mathbf{b}$, donde $\mathbf{A}$ es una matriz $n \times n$. El vector $\mathbf{v}$ contiene las incógnitas, y necesitamos ordenar linealmente los u_{ij} para construir este vector.

$$\begin{aligned} v_1 &= u_{11}, & v_2 &= u_{21}, & v_3 &= u_{31}, \\ v_4 &= u_{12}, & v_5 &= u_{22}, & v_6 &= u_{32}, \\ v_7 &= u_{13}, & v_8 &= u_{23}, & v_9 &= u_{33}. \end{aligned}$$

En general la fórmula de conección de v_ℓ con u_{ij} es

$$v_\ell = u_{ij}, \text{ for } \ell = (j-1)N + i.$$

Se debe recordar que esta fórmula se aplica a los puntos de la cuadrícula en R y no a los de la frontera.

Ensamblando la matriz

Con el orden dado de los puntos de la cuadrícula, la ecuación de diferencia finita se convierte en:

$$-\lambda^2 v_{\ell+1} + 2\left(1+\lambda^2\right) v_\ell - \lambda^2 v_{\ell-1} - v_{\ell+N} - v_{\ell-N} = 0,$$

la cual puede escribirse en forma matricial como

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{b}.$$

Ensamblando la matriz

$$\begin{pmatrix}
\beta & -\lambda^2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\lambda^2 & \beta & -\lambda^2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\lambda^2 & \beta & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & \beta & -\lambda^2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & -\lambda^2 & \beta & -\lambda^2 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & -\lambda^2 & \beta & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \beta & -\lambda^2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -\lambda^2 & \beta & -\lambda^2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -\lambda^2 & \beta
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \\ v_9 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix}
g_B(x_1) + \lambda^2 g_L(y_1) - k^2 f(x_1, y_1) \\
g_B(x_2) - k^2 f(x_1, y_2) \\
g_B(x_3) + \lambda^2 g_R(y_1) - k^2 f(x_1, y_3) \\
\lambda^2 g_L(y_2) - k^2 f(x_2, y_1) \\
-k^2 f(x_2, y_2) \\
\lambda^2 g_R(y_2) - k^2 f(x_2, y_3) \\
g_T(x_1) + \lambda^2 g_L(y_3) - k^2 f(x_3, y_1) \\
g_T(x_2) - k^2 f(x_3, y_2) \\
g_T(x_3) + \lambda^2 g_R(y_3) - k^2 f(x_3, y_3)
\end{pmatrix}$$

donde $\beta = 2(\lambda^2 + 1)$

Ensamblando la matriz

La matriz A juega un papel tan importante en la resolucion del sistema, algunas de sus propiedades que tendrán un impacto en cómo resolvemos la ecuación matricial:

- Es simétrica y definida positiva.
- Es banda. Esto significa que las entradas de la matriz son cero fuera de una banda a lo largo de la diagonal.
- Es dispersa. Esto significa que el número de entradas no nulas es mucho menor que el número de entradas nulas.
- Tiene el potencial de ser bastante grande.

La alternativa pasa por el uso de métodos iterativos, para los cuales el sistema sí es estable.

EDP elípticas: Métodos iterativos

Para resolver la EDP elíptica vamos a utilizar métodos iterativos, pues garantizan la estabilidad de la solución. Partimos de la ecuación:

$$2\left(\lambda^2+1\right) u_{i,j} - \left(u_{i,j+1}+u_{i,j-1}\right) - \lambda^2 \left(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}\right) = -k^2 f\left(x_i, y_j\right),$$

Escribimos el sistema a resolver de la forma:

$$u_{i,j} = \frac{1}{2\left(\lambda^2+1\right)}\left[\lambda^2 \left(u_{i+1,j}+u_{i-1,j}\right) + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - k^2 f_{ij}\right]$$
$$i = 1, 2, \ldots, nx-1, j = 1, 2, \ldots, ny-1.$$

EDP elípticas: Métodos iterativo

Algoritmo

- Parámetros de entrada: Funciones f, g; valores a, b, c, d; enteros nx, ny; tolerancia tol; número máximo de iteraciones maxiter.
- Salida Aproximaciones $u_{i,j}$ de $u\left(x_i, y_j\right), i = 1, 2, \ldots, nx - 1, j = 1, 2, \ldots, ny - 1$, o un mensaje de fracaso.
- Paso 1. Tomar $h = (b - a)/nx, k = (d - c)/ny$.
- Paso 2. Elegir los nodos del método: $x = a : h : b, y = c : k : d$
- Paso 3. Inicializar con ceros la matriz U de tamaño $nx + 1 \times ny + 1$

EDP elípticas: Métodos iterativo

- Paso 4. Rellenar con las condiciones de contorno las filas y columnas correspondientes de $\boldsymbol{U}$
- Paso 5. Tomar $\boldsymbol{\lambda = k/h}$, iter $= \mathbf{1}$ y error $=$ tol $+\mathbf{1}$, $\boldsymbol{U^{(0)}} =$ zeros
- Paso 6. Mientras iter $\leq$ maxiter y error $>$ tol
  Método iterativo para resolver el sistema lineal
  error $= \boldsymbol{norm}\left(\boldsymbol{U} - \boldsymbol{U^{(0)}}\right)$
  $\boldsymbol{U^{(0)}} = \boldsymbol{U}$, iter $=$ iter $+\mathbf{1}$
- Paso 7. Analizar porqué el ordenador se ha salido del bucle.

EDP elípticas: Métodos iterativo

La expresión iterativa del método de Jacobi es:

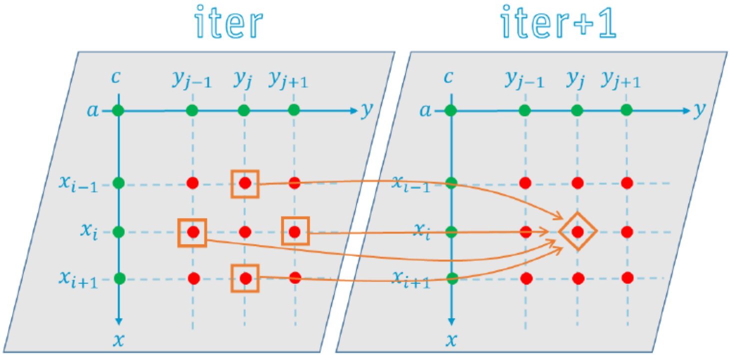
Método de Jacobi

Para $i = 2 : nx$
Para $j = 2 : ny$
$u_{i,j}^{(iter+1)} =$

$$\frac{1}{2(\lambda^2+1)}\left[\lambda^2\left(u_{i+1,j}^{(iter)}+u_{i-1,j}^{(iter)}\right)+u_{i,j+1}^{(iter)}+u_{i,j-1}^{(iter)}-k^2 f_{ij}\right]$$

Fin para j
Fin para i

EDP elípticas: Métodos iterativo



EDP elípticas: Métodos iterativo

El método de Gauss-Seidel se basa en la idea de que los valores que vamos obteniendo en una iteración deben estar más próximos a la solución que los de la iteración anterior, por lo que pueden usarse a medida que se van obteniendo para calcular el resto de valores.

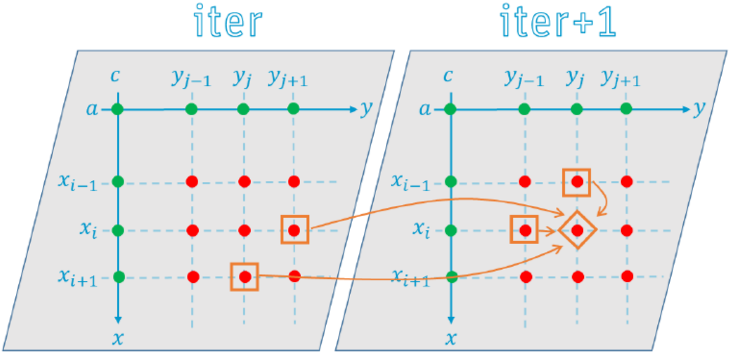
Método de Gauss-Seidel

Para $i = 2 : nx$
Para $j = 2 : ny$

$$u_{i,j}^{(iter+1)} = \frac{1}{2\left(\lambda^2+1\right)}\left[\lambda^2\left(u_{i+1,j}^{(iter)}+u_{i-1,j}^{(iter+1)}\right)+u_{i,j+1}^{(iter)}+u_{i,j-1}^{(iter+1)}-k^2 f_{ij}\right],$$

Fin para j
Fin para i

EDP elípticas: Métodos iterativo



EDP elípticas: Métodos iterativo

Si en cada una de las iteraciones de Gauss-Seidel nos estamos acercando a la solución, podemos potenciar este acercamiento multiplicando el desplazamiento realizado por un factor ω Este factor toma el nombre de factor de relajación, y debe estar contenido en el intervalo [0,2]. En función del valor de ω tendremos un método convergente o no convergente.

EDP elípticas: Métodos iterativo

Método de Sobrerelajación (SOR)

Para $i = 2 : nx$
Para $j = 2 : ny$

$$\bar{u}_{i,j}^{(iter+1)} = \frac{1}{2\left(\lambda^2+1\right)}\left[\lambda^2\left(u_{i+1,j}^{(iter)}+u_{i-1,j}^{(iter+1)}\right)+u_{i,j+1}^{(iter)}+u_{i,j-1}^{(iter+1)}-k^2 f_{ij}\right]$$

$$u_{i,j}^{(iter+1)} = (1-w)u_{i,j}^{(iter)} + w\bar{u}_{i,j}^{(iter+1)}$$

Fin para i
Fin para j

Ejemplo 1

$$u_{xx}+u_{yy} = 0, (x, y) \in R = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$$

con las condiciones de contorno dadas por:

$$u(x, 0) = u(y, 0) = 0, u(x, 1) = 100x, u(1, y) = 100y$$

Tomando $h = k = 0{,}25$, obtén la solución por el método de Jacobi,Gauss-Seidel y SOR con $\omega = 1{,}2$ hasta que los valores varíen menos de $0{,}01$.

Ejemplo 2

Sea la EDP:

$$\boldsymbol{u_{xx} + u_{yy} = -(\cos(x+y) + \cos(x-y)), x \in (0, \pi), y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$\boldsymbol{u(0, y) = \cos(y), u(\pi, y) = -\cos(y), y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]}$$

$$\boldsymbol{u(x, 0) = \cos(x), u\left(x, \frac{\pi}{2}\right) = 0, x \in [0, \pi]}$$

Tomando $\boldsymbol{h = \pi/10 \mathrm{y} k = \pi/20}$, y utilizando una tolerancia de $\boldsymbol{10^{-10}}$, obtén la solución $\boldsymbol{u\left(\frac{3\pi}{10}, y\right)}$ a partir de los métodos de Jacobi, Gauss-Seidel y SOR ($\boldsymbol{\omega = 1{,}2}$), indicando el número de iteraciones.