Ecuación Parabólica

Matemática Computacional II

Prof. Rosa Luz Medina Aguilar
Facultad de Ciencias Matemáticas.

Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América

Contenido

Método Implícito

$$u_t(x,t) = \alpha^2 u_{xx}(x,t), \quad 0 \leq x \leq L, t \geq 0,$$
$$u(0,t) = u(L,t) = 0, t > 0; \quad u(x,0) = f(x), x \in [0,L]$$

- Resolveremos por Diferencias regresivas en u_t y centrales en u_{xx}
- Transformación del problema

$$\frac{u(x,t)-u(x,t-k)}{k} = \alpha^2 \frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2}$$

Método Implícito

- Discretización del problema Evaluando la expresión anterior en los puntos (x_i, t_j), $i = 1, 2, \ldots, nx - 1, j = 1, \ldots, nt,$ $u(x_i, t_j) = u_{i,j}$

$$\frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{k} = \alpha^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2},$$

  $i = 1, 2, \ldots, nx - 1, j = 1, \ldots, nt$

- Llamando $\lambda = \frac{k\alpha^2}{h^2}$ y despejando las incógnitas del instante mayor

$$(1 + 2\lambda)u_{i,j} - \lambda (u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) = u_{i,j-1}$$

  $i = 1, 2, \ldots, nx - 1, j = 1, \ldots, nt$

Método Implícito

- Para $j = 1$

$$(1+2\lambda)u_{i,1}+\lambda\left(u_{i+1,1}+u_{i-1,1}\right)=u_{i,0}, \quad i=1,2,\ldots,nx-1,$$

$$\begin{pmatrix} 1+2\lambda & -\lambda & \cdots & 0 \\ -\lambda & 1+2\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1+2\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ \vdots \\ u_{nx-1,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{1,0} \\ u_{2,0} \\ \vdots \\ u_{nx-1,0} \end{pmatrix}$$

Método Implícito

- En general:

$$Au^{(j)} = u^{(j-1)} \quad j = 1, \ldots, nt$$

donde los términos independientes son la solución en el instante anterior y la matriz de coeficientes es

$$A = \begin{pmatrix} 1+2\lambda & -\lambda & \cdots & 0 \\ -\lambda & 1+2\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1+2\lambda \end{pmatrix}, \quad u^{(j)} = \begin{pmatrix} u_{1,j} \\ u_{2,j} \\ \vdots \\ u_{nx-1,j} \end{pmatrix}$$

Método Implícito

Caracteristicas

- El orden de convergencia es $\boldsymbol{O\left(k + h^2\right)}$,
- No necesita condiciones de convergencia

Método Implícito

Ejemplo

$$u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0$$
$$u(0,t) = u(1,t) = 0, t > 0; \quad u(x,0) = \sin \pi x, x \in [0,1]$$

Solución exacta: $u(x,t) = e^{-\pi^2 t} \sin \pi x$

Buscamos la solución aproximada en $T_{\text{máx}} = 0{,}5$ mediante el método implícito con:
$h = 0{,}1, k = 0{,}01$.

Método Implícito

x_i	$u_{i,50}$	$u(x_i, 0{,}5)$	$\lvert u(x_i, 0{,}5) - u_{i,50}\rvert$
0,0	0	0	−
0,1	0,002898	0,002222	6,76e − 4
0,2	0,005512	0,004227	1,29e − 3
0,3	0,007587	0,005818	1,77e − 3
0,4	0,008919	0,006840	2,10e − 3
0,5	0,009378	0,007192	2,19e − 3
0,6	0,008919	0,006840	2,10e − 3
0,7	0,007587	0,005818	1,77e − 3
0,8	0,005512	0,004227	1,29e − 3
0,9	0,002898	0,002222	6,76e − 4
1,0	0	0	−

Método Crank-Nicholson

$$u_t(x,t) = \alpha^2 u_{xx}(x,t), \quad 0 \leq x \leq L, t \geq 0,$$
$$u(0,t) = u(L,t) = 0, t > 0; \quad u(x,0) = f(x), x \in [0,L]$$

- Resolveremos por Diferencias centrales u_t y u_{xx}
- Transformación del problema

$$\frac{u(x,t+k)-u(x,t-k)}{2k} = \alpha^2 \frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h}{h^2}$$

Método Crank-Nicholson

- El método de Crank-Nicholson es un método en diferencias implícito que se obtiene al hacer la media aritmética entre el método de diferencia progresiva en el instante t_j

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} - \alpha^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} = 0$$

y el método de diferencia regresiva en el instante t_{j+1}

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} - \alpha^2 \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h^2} = 0$$

Método Crank-Nicholson

obteniendo la expresión en diferencias

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} =$$

$$\frac{\alpha^2}{2}\left[\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h^2}\right]$$

para $i = 1, 2, \ldots, nx - 1$ y $j = 0, 1, \ldots, nt - 1$

Método Crank-Nicholson

Llamando $\lambda = \frac{k\alpha^2}{h^2}$ y llevando las variables correspondientes a instantes más altos a la izquierda, obtenemos el método implícito

$$(1+\lambda)u_{i,j+1} - \frac{\lambda}{2}\left(u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j+1}\right) =$$

$$(1-\lambda)u_{i,j} + \frac{\lambda}{2}\left(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}\right)$$

para $i = 1, 2, \ldots, nx-1$ y $j = 0, 1, \ldots, nt-1$
Fijando el índice j y escribiendo todas las ecuaciones para $i = 1, 2, \ldots, nx-1$ obtenemos la expresión matricial del método

$$Au^{(j+1)} = Bu^{(j)}, \quad j = 0, 1, \ldots, nt-1$$

Método Crank-Nicholson

donde

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1+\lambda & -\lambda/2 & 0 & \cdots & 0 \\ -\lambda/2 & 1+\lambda & -\lambda/2 & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda/2 & 1+\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda/2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+\lambda \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{u}^{(j)} = \begin{pmatrix} u_{1,j} \\ u_{2,j} \\ \vdots \\ u_{nx-1,j} \end{pmatrix},$$

Método Crank-Nicholson

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}-\boldsymbol{\lambda} & \boldsymbol{\lambda}/\mathbf{2} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\lambda}/\mathbf{2} & \mathbf{1}-\boldsymbol{\lambda} & \boldsymbol{\lambda}/\mathbf{2} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\lambda}/\mathbf{2} & \mathbf{1}-\boldsymbol{\lambda} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{1}-\boldsymbol{\lambda} & \boldsymbol{\lambda}/\mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \boldsymbol{\lambda}/\mathbf{2} & \mathbf{1}-\boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{u}^{(\mathbf{0})} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}_{\mathbf{1}}\right) \\ \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}_{\mathbf{2}}\right) \\ \vdots \\ \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{nx}-\mathbf{1}}\right) \end{pmatrix}$$

siendo tanto la matriz $\boldsymbol{A}$ como $\boldsymbol{B}$ tridiagonales.

Método Crank-Nicholson

Para encontrar la solución en el instante t_{j+1} resuelvo el sistema lineal en el que A es la matriz de coeficientes y $Bu^{(j)}$ los términos independientes.

Caracteristicas

- No necesita condiciones de convergencia
- El orden de convergencia es $O\left(k^2 + h^2\right)$

Método Crank-Nicholson

Ejemplo

$$\boldsymbol{u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0}$$
$$\boldsymbol{u(0,t) = u(1,t) = 0, t > 0; \quad u(x,0) = \sin \pi x, x \in [0,1]}$$

Solución exacta: $\boldsymbol{u(x,t) = e^{-\pi^2 t} \sin \pi x}$

Buscamos la solución aproximada en $\boldsymbol{T_{\text{máx}} = 0{,}5}$ mediante el método implícito con:
$\boldsymbol{h = 0{,}1, k = 0{,}01}$.

Método Crank-Nicholson

x_i	$u_{i,50}$	$u(x_i, 0{,}5)$	$\lvert u(x_i, 0{,}5) - u_{i,50}\rvert$
0,0	0	0	–
0,1	0,002305	0,002222	8,27e − 5
0,2	0,004385	0,004227	1,57e − 4
0,3	0,006035	0,005818	2,17e − 4
0,4	0,007094	0,006840	2,55e − 4
0,5	0,007495	0,007192	2,68e − 4
0,6	0,007094	0,006840	2,55e − 4
0,7	0,006035	0,005818	2,17e − 4
0,8	0,004385	0,004227	1,57e − 4
0,9	0,002305	0,002222	8,27e − 5
1,0	0	0	–