Ecuación Parabólica

Curso: Métodos Numéricos y Programación III

Prof. Rosa Luz Medina Aguilar
Facultad de Ciencias Matemáticas.

Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América

Contenido

Introducción

En términos físicos estos son problemas que implican movimiento o transporte de partículas (iones, moléculas, etc.) desde áreas de mayor concentración a áreas de menor concentración.
Ejemplos simples son:
la propagación de una gota de tinta caída en agua y el derretimiento de un hielo cubo.
Otras aplicaciones interesantes de la difusión surgen en la estudio de los activos financieros expresado por la teoría de Black-Scholes sobre la fijación de precios de opciones y la propagación de enfermedades infecciosas.

Para abordar las EDP parabólicas, vamos a trabajar con una expresión sencilla y general, que es:

$$u_t(x,t) - \alpha^2 u_{xx}(x,t) = 0, x \in [0,L], t \geq 0 \tag{1}$$

A las condiciones sobre la variable x las denominaremos condiciones de contorno,

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, t > 0$$

A la condición sobre la variable t la denominaremos condición inicial

$$u(x,0) = g(x), x \in [0,L]$$

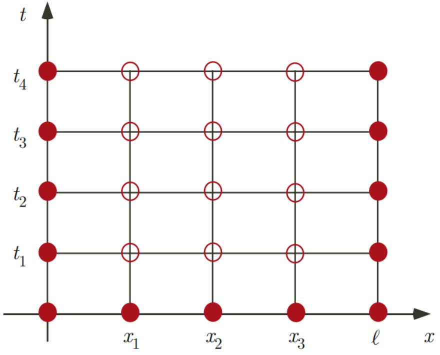
Considerando $\alpha = 1$ y $L = 1$. Usando el método de separación de variables obtenemos

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\lambda_n^2 t} \sin\left(\lambda_n x\right),$$

where $\lambda_n = n\pi$ and

$$A_n = 2\int_0^1 g(x)\sin\left(\lambda_n x\right) dx$$

La solución numérica de estos problemas consiste en transformarlos, mediante diferencias finitas, en sistemas de ecuaciones lineales o no lineales, cuyas incógnitas son valores aproximados de la solución en los puntos elegidos en el dominio espacial y temporal.



Método Explícito

Para realizar la transformación en una ecuación en diferencias que dé como resultado un método explícito, tenemos que aplicar diferencias progresivas sobre u_t y diferencias centrales sobre u_{xx}.

$$u_t = \frac{u(x,t+k)-u(x,t)}{k} + O(k)$$

$$u_{xx} = \frac{u(x+h,t)-2u(x,t)+u(x-h,t)}{h^2} + O(h^2)$$

Método Explícito

Discretización del problema: Evaluando la expresión anterior en los puntos (x_i, t_j), $i = 1, 2, \ldots, n_x - 1, j = 1, \ldots, n_t - 1$,

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} - \alpha^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} = 0$$

$i = 1, 2, \ldots, n_x - 1, j = 1, 2, \ldots, nt - 1$.
El error de truncamiento local para esta ecuación de diferencias es

$$\tau_{ij} = \frac{k}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \mu_j) - \alpha^2 \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, t_j)$$

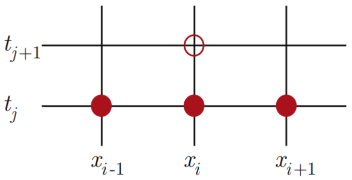
donde $\mu_j \in (t_j, x_{j+1})$, $\xi_i \in (x_{i-1}, x_{i+1})$

Método explícito

Llamando $\lambda = \frac{k\alpha^2}{h^2}$ y llevando a la izquierda las incógnitas del instante mayor

$$u_{i,j+1} = (1 - 2\lambda)u_{i,j} + \lambda(u_{i+1,j} + u_{i-1,j})$$

$$i = 1, 2, \ldots, n_x - 1, j = 1, 2, \ldots, n_t - 1.$$



Método explícito

- Para $j = 0$

$$u_{i,1} = (1-2\lambda)u_{i,0}+\lambda\left(u_{i+1,0} + u_{i-1,0}\right), \quad i = 1, 2, \ldots, n_x-1,$$

$$\begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ \vdots \\ u_{n_x-1,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2\lambda & \lambda & \cdots & 0 \\ \lambda & 1-2\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1-2\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,0} \\ u_{2,0} \\ \vdots \\ u_{n_x-1,0} \end{pmatrix}$$

Método explícito

- Para $j = 1$

$$u_{i,2} = (1-2\lambda)u_{i,1} + \lambda\left(u_{i+1,1} + u_{i-1,1}\right), \quad i = 1, 2, \ldots, n_x - 1$$

$$\begin{pmatrix} u_{1,2} \\ u_{2,2} \\ \vdots \\ u_{n_x-1,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2\lambda & \lambda & \cdots & 0 \\ \lambda & 1-2\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1-2\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ \vdots \\ u_{n_x-1,1} \end{pmatrix}$$

Método explícito

- En general:

$$\boldsymbol{u^{(j+1)} = Au^{(j)}, \quad j = 0, 1, \ldots, nt - 1}$$

donde

$$\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 1-2\lambda & \lambda & \cdots & 0 \\ \lambda & 1-2\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1-2\lambda \end{pmatrix}, \quad u^{(j)} = \begin{pmatrix} u_{1,j} \\ u_{2,j} \\ \vdots \\ u_{nx-1,j} \end{pmatrix}}$$

Observe que en el Método explícito ya que calculamos la solución en el instante $\boldsymbol{t_{j+1}}$ a partir de la solución en el instante $\boldsymbol{t_j}$, directamente, sin resolver ningún sistema

Algoritmo del método explícito

Los parámetros de entrada serán aquellos que nos permitan utilizar la implementación para cualquier EDP con la estructura:

$$u_t(x,t) - \alpha^2 u_{xx}(x,t) = 0$$

en el que podemos generalizar el rango de la variable $x \in [a,b]$, y las condiciones de contorno como $u(a,t) = p(t), u(b,t) = q(t)$.
La condición inicial ya se encontraba generalizada, de forma que mantendremos $u(x,0) = g(x)$.
Además, deberemos indicar el paso espacial h y el paso temporal k o, sus equivalentes en número de puntos, n_x y n_t, respectivamente.

Algoritmo del método explícito

Entrada: extremos a y b; tiempo máximo T; n_x,n_t.

Salida: solución aproximada $u_{i,j}$ para cada $u(x_i, t_j)$.

Paso 1: Determine $h = (b-a)/n_x$, $k = T/n_t$ $\lambda = k\alpha^2/h^2$

Paso 2: Inicializar la matriz U de soluciones

$U = (n_x + 1, n_t + 1)$

$U(:, 1) = g(x)$ condición inicial

$U(1, :) = p(t)$ condición de contorno en $x = a$

$U(n_x + 1, :) = q(t)$ condición de contorno en $x = b$

Paso 3: Generemos la matriz A y B.

Paso 4: calculamos

$$u^{(j+1)} = Au^{(j)} + B^{(j)}$$

Ejemplo

$$u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, \quad 0 \le x \le 1, \quad t \ge 0$$
$$u(0,t) = u(1,t) = 0, t > 0; \quad u(x,0) = \sin \pi x, x \in [0,1]$$

Solución exacta: $u(x,t) = e^{-\pi^2 t} \sin \pi x$

Buscamos la solución aproximada en $T_{\text{máx}} = 0.5$ mediante el método explícito con:

(a) $h = 0.1, k = 0.0005$

(b) $h = 0.1, k = 0.01$.

Método explícito

x_i	$u_{i,1000}$	$\lvert u(x_i,0.5)-u_{i,1000}\rvert$	$u_{i,50}$	$\lvert u(x_i,0.5)-u_{i,50}\rvert$
0.0	0	–	0	–
0.1	0.002287	6.41e − 5	8.20e + 7	8.20e + 7
0.2	0.004349	1.22e − 4	−1.56e + 8	1.56e + 8
0.3	0.005986	1.68e − 4	2.14e + 8	2.14e + 8
0.4	0.007037	1.97e − 4	−2.51e + 8	2.51e + 8
0.5	0.007399	2.08e − 4	2.63e + 8	2.63e + 8
0.6	0.007037	1.97e − 4	−2.49e + 8	2.49e + 8
0.7	0.005986	1.68e − 4	2.11e + 8	2.11e + 8
0.8	0.004349	1.22e − 4	−1.53e + 8	1.53e + 8
0.9	0.002287	6.51e − 5	8.04e + 7	8.04e + 7
1.0	0	–	0	–

Observación

- A priori, no sabemos si la estabilidad está garantizada. Recordemos que hay tres conceptos clave en los métodos de diferencias finitas:
  - Convergencia

$$\tilde{u}_{h,k}\left(x_i, y_j\right) \to u\left(x_i, y_j\right), \text{ cuando } h, k \to 0$$

  - Consistencia: El error de truncamiento local tiende a cero cuando h y k tienden a cero
  - Estabilidad: Control del error de redondeo
    CONSISTENCIA + ESTABILIDAD $\Rightarrow$ CONVERGENCIA