# Präsenzaufgabe

## Blatt 2, Aufgabe 4 B

Michael Hohenstein

13. Mai 2020

# Aufgabenstellung

Wiederholen Sie den Begriff des Vektorraums. Dazu gehört der zugrunde liegende Körper als auch die relevanten Verknüpfungen. Diskutieren Sie neben den Standardbeispielen $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ auch einen Funktionenraum als Beispiel für einen Vektorraum. Bringen Sie Licht ins Dunkel des Begriffs Skalarprodukt.

# Aufgabenstellung

Wiederholen Sie den Begriff des Vektorraums. Dazu gehört der zugrunde liegende Körper als auch die relevanten Verknüpfungen. Diskutieren Sie neben den Standardbeispielen $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ auch einen Funktionenraum als Beispiel für einen Vektorraum. Bringen Sie Licht ins Dunkel des Begriffs Skalarprodukt.

# Vektorraum

## Definition

Ein Vektorraum, bzw. ein K-Vektorraum über einen Körper K ist ein Tripel $(V, \oplus, \odot)$ mit dem Körper $(K, +, \cdot)$.

$\oplus$ ist hierbei die Vektoraddition
$\odot$ ist hierbei die Skalarmultiplikation

$(V, \oplus)$ muss eine Abelsche Gruppe bilden
$\odot$ muss Eigenschaften erfüllen

# $(V, \oplus)$

### Definition

Gruppe:

- Abgeschlossenheit: $u, v \in V \Rightarrow u \oplus v \in V$
- Assoziativität: $(u \oplus v) \oplus w = u \oplus (v \oplus w)$
- neutrales Element: $v \in V : v \oplus \vec{0} = \vec{0} \oplus v = v$
- Inverses Element: $\forall v \in V \exists (-v) \in V : v \oplus (-v) = \vec{0}$

Abelsche Gruppe:

- Kommutativ: $v \oplus w = w \oplus v$

# $\bigodot$ Skalarmultiplikation

Eigenschaften:

- Abgeschlossenheit: $\forall a \in K, v \in V : a \bigodot v \in V$
- Distributivität im Vektorraum:
  $a \in K, v, w \in V : a \bigodot (v \bigoplus w) = a \bigodot v \bigoplus a \bigodot w$
- Distributivität im Körper:
  $a, b \in K, v \in V : (a + b) \bigodot v = a \bigodot v \bigoplus b \bigodot v$
- Assoziativität / Verträglichkeit mit der Körpermultiplikation:
  $a, b \in K, v \in V : (a \cdot b) \bigodot v = a \bigodot (b \bigodot v)$
- Sei $1_k$ das neutrale Element bezüglich der Multiplikation im Körper und somit auch bzgl. der Skalarmultiplikation:
  $\forall v \in V 1_k \bigodot v = v$

# Körper K

### Definition

Körper: $(K, +, \cdot)$

- $K$ ist eine Menge
- $+$ und $\cdot$ sind distributive Verknüpfungen auf dieser Menge
- $(K, +)$ bilden eine abelsche Gruppe
- $(K \backslash \{0\}, \cdot)$ bilden eine abelsche Gruppe

# $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$

$$\mathbb{R}^n : \{(x_1, ..., x_n)\,|x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathbb{C}^n : \{(z_1, ..., z_n)\,|z_1, ..., z_n \in \mathbb{C}\}$$

$\bigoplus : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$(v_1, ..., v_n) \bigodot (w_1, ..., w_n) = (v_1 + w_1, ..., v_n + w_n)$$

$\bigodot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$\alpha \bigodot (v_1, ..., v_n) = (\alpha \cdot v_1, ..., \alpha \cdot v_n)$$

$\Rightarrow$ für $\mathbb{C}^n$ analog, nur mit $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{Q}$ als zugrundeliegender Körper

# Funktionenraum

$\Rightarrow$ Vektoren sind Funktionen aus dem Funktionenraum (Ganzer Vektor, nicht Komponentenweise)

Menge der stetigen Funktionen:

$$C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} | f \text{stetig}\}$$

Auf Vektorraum bezogen:

$$C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) =: C$$

# Funktionenraum: Beispiel

Example

- Körper: $\mathbb{R}$
- Verknüpfungen: $\bigoplus, \bigodot$

$\bigoplus : C \times C \to C$

$$(f, g) \mapsto (f \bigoplus g)(x) := f(x) + g(x)$$

$\bigodot : \mathbb{R} \times C \to C$

$$(\alpha, f) \mapsto (\alpha \bigodot f)(x) := \alpha \cdot f(x)$$

# Skalarprodukt

## Definition

Ein Skalarprodukt ist eine positiv definite, symmetrische Bilinearform

# Linearform

## Definition

Abbildung von $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, linear und bildet in einen Körper ab

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$$

$f : V \to W$ ist linear $:\Leftrightarrow$

$$f(v+w) = f(v) + f(w) \forall v, w \in V$$

$$f(\alpha \cdot v) = \alpha \cdot f(v) \forall \alpha \in K, v \in V$$

# Bilinearform

## Definition

$f : V \times V \mapsto W$

Eine Komponente wird festgehalten $\Rightarrow$ Abbildung auf die andere Komponente bezogen linear

Sei $u$ fest:

$$f(u, v + w) = f(u, v) + f(u, w) \forall v, w \in V$$

$$f(v + w, u) = f(v, u) + f(w, u) \forall v, w \in V$$

Sei $u$ fest:

$$f(u, \alpha \cdot v) = \alpha \cdot f(u, v) \forall \alpha \in K, v \in V$$

# symmetrisch | positiv definit

## Definition

Bilinearform: $b : V \times V \mapsto K$

Symmetrisch:

$$b(x, y) = b(y, x)$$

Positiv definit:

$$b(x, x) > 0 \forall x \in V \setminus \left\{ \vec{0} \right\}$$

$$b(0, 0) = 0$$

## $< \cdot, \cdot >$

$< \cdot, \cdot >: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$

$$(x_1, ..., x_n), (v_1, ..., v_n) \mapsto < x, y > := \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i$$

**Beweis.**
Sei $x$ fest:

$$< x, v + w > = < x, v > + < x, w >$$

zweite Komponente analog

sei $\alpha \in \mathbb{R}$ :

$$< x, \alpha \cdot v > = \alpha < x, v >$$

$$< \alpha \cdot v, x > = \alpha < v, x >$$

$\square$