

Prak.: P1 Semester: WS19/20 Wochentag: Di Gruppennr.: 11

Name: Hohenstein Vorname: Michael

Name: Michel Vorname: Alexis

Emailadresse(n): alexis.michel@gmx.de, michael.hohenstein@gmx.de

Versuch: Pendel (P1-9) Fehlerrech.: Ja

Betreuer: Adrian Reich Durchgeführt am: 17.12.19

Wird vom Betreuer ausgefüllt.

1. Abgabe am: _____

Rückgabe am: _____ Begründung:

2. Abgabe am: _____

Ergebnis: + / 0 / -

Fehlerrechnung: Ja / Nein

Datum: _____

Handzeichen: _____

Bemerkungen:

Inhaltsverzeichnis

1 Aufgabe	1
1.1 reduzierte Pendellänge	1
1.2 Bestimmen der Fallbeschleunigung mithilfe des Reversionspendels	3
1.2.1 Kalibrierung des Reversionspendels	3
1.2.2 Bestimmung der reduzierten Pendellänge des Reversionspendels . . .	4
1.2.2.1 Fehler der reduzierten Pendellänge	7
1.2.2.2 Fehler der Periodendauer	8
1.2.3 Bestimmen der Erdbeschleunigung	9
1.2.4 Ausblick	9
2 Aufgabe	10
2.1 Bestimmen der Fallbeschleunigung mithilfe eines Fadenpendels	10
2.2 Untersuchen der Abhängigkeit der Schwingungsdauer eines Fadenpendels von der Schwingungsweite	13
3 Aufgabe	15
3.1 Einrichten zweier identischer Oszillatoren	15
3.2 Untersuchen der Fundamentalschwingungen zweier gekoppelter Oszillatoren	17
3.2.1 Analyse der Fundamentalschwingungen	17
3.2.2 Anderweitige Bestimmung der Federkonstante	18
3.3 Messen der Schwingungs- und Schwebungsdauer zweier gekoppelter Oszillatoren	21
3.3.1 Ausblick	21
Literaturverzeichnis	22

Abbildungsverzeichnis

1.1 Skizze des Metallstabes des Reversionspendels	3
1.2 Messwerte zur Kalibrierung des Reversionspendels und deren lineare Regression	4
1.3 Messwerte bei der Durchführung des Versuches mit dem Reversionspendels, alle Messreihen	6
1.4 Analyse der am Reversionspendel aufgenommenen Messwerte	7
2.1 Plot der Rohdaten von Aufgabe 2.1	11
2.2 Plot der Mittelwerte mit Regression für die Periodendauer	11
2.3 Plot der Rohdaten von Aufgabe 2.2 mit Fehlerkreuzen	13

2.4	Plot der Periodendauern mit Vorhersage	14
3.1	Skizze des Aufbaus der beiden Oszillatoren	15
3.2	Plot der Messwerte der einzelnen Pendel und lineare Regression	16
3.3	Skizze der gekoppelten Oszillatoren	17
3.4	Plot und Regression der Schwingungsdauern der gekoppelten Oszillatoren .	18
3.5	Plot und Regression der statischen Bestimmung der Federkonstante	19
3.6	Plot und Regression der dynamischen Bestimmung der Federkonstante . . .	20

Tabellenverzeichnis

1.1	Zeiten für unterschiedliche Periodendauern beim Reversionspendel zur Kalibrierung	3
1.2	Zeiten für unterschiedliche Schneidenabstände beim Reversionspendel . . .	5
1.3	Mittelwerte für die Schwingungsdauern in Abhängigkeit vom Schneidenabstand aus den drei Messwerten, alle Werte in s	6
1.4	Ergebnisse der Regression	7
2.1	Messwerte von Versuch 2.1	10
2.2	Messwerte von Versuch 2.2	13
3.1	Zeiten für unterschiedliche Periodendauern beider Pendel	16
3.2	Parameter lineare Regression	16
3.3	Schwingungsdauern in s	17
3.4	Schwingungsdauern in s	18
3.5	statische Bestimmung der Federkonstante	19
3.6	dynamische Bestimmung der Federkonstante	20
3.7	Schwingungs- und Schwebungsdauer	21

1. Aufgabe

1.1 reduzierte Pendellänge

Bei Pendelbewegungen wird generell zwischen einem mathematischen und einem physikalischen Pendel unterschieden. Das mathematische Pendel nimmt die Näherung der Massen als Punktmassen an und geht davon aus, dass die Masse des Fadens bei einem Fadenpendel vernachlässigt werden kann. Ein physikalisches Pendel wiederum berücksichtigt auch die Trägheitsmomente aller vorhandener Massen.

Die Differentialgleichung des harmonischen Oszillators,

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \cdot x = 0 \quad (1.1)$$

mit

$$\omega_0^2 = \frac{g}{L} \quad (1.2)$$

für ein Fadenpendel ist nur für ein mathematisches Pendel anwendbar. Um diese Gleichungen auch auf ein physikalisches Pendel anwenden zu können, muss die Pendellänge L durch die "reduzierte Pendellänge," ersetzt werden.

Vor der Durchführung des Versuches mit dem Reversionspendel in Abschnitt 1.2 sollte die reduzierte Pendellänge theoretisch bestimmt werden. Bei dem Reversionspendel handelt es sich um einen Metallstab, der an einem Ende um eine Querachse schwingt. Das Reversionspendel wird in Abschnitt 1.2 genauer erklärt und erläutert.

Die Periodendauer eines physikalischen Pendels lässt sich laut [Wik20b] über den Zusammenhang

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{I}{m \cdot g \cdot d}} \quad (1.3)$$

mit den Trägheitsmoment I ermitteln. Aus Gleichung 1.6 lässt sich die Pendellänge in Gleichung 1.3 ersetzen und durch entfernen des Vorfaktors von $2 \cdot \pi$ kann folgendes Ergebnis erhalten werden:

$$\sqrt{\frac{l}{g}} = \sqrt{\frac{I}{m \cdot g \cdot d}} \quad (1.4)$$

$$\frac{l}{g} = \frac{I}{m \cdot g \cdot d} \quad (1.5)$$

Die reduzierte Pendellänge berechnet sich somit mittels

$$l_0 = \frac{I}{m \cdot d} \quad (1.6)$$

Dabei ist I das Trägheitsmoment des Pendels, welches bei einem dünnen Stab mit vernachlässigbarer Dicke, der an einem Ende um eine Querachse rotiert, durch

$$I = \frac{1}{3} \cdot m \cdot L^2 \quad (1.7)$$

beschrieben wird. In d soll die Position des Massenschwerpunktes eingesetzt werden. Wird von einer homogenen Massenverteilung ausgegangen, so kann

$$d = \frac{L}{2} \quad (1.8)$$

dafür verwendet werden. Eingesetzt in Gleichung 1.6 erhält man:

$$l_r = \frac{2}{3} \cdot L \quad (1.9)$$

Bei einer gegebenen Stablänge für das Reversionspendel in Abschnitt 1.2 von $L = 96,2 \text{ cm}$ beträgt die errechnete reduzierte Pendellänge:

$$l_r = 64,13 \text{ cm} . \quad (1.10)$$

Die Periodendauer des Pendels lässt sich aus dem Zusammenhang

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} \quad (1.11)$$

nun mittels

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{I}{m \cdot g \cdot d}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{\frac{1}{3} \cdot m \cdot L^2}{m \cdot g \cdot \frac{L}{2}}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{\frac{2}{3} \cdot L}{g}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_r}{g}} \quad (1.12)$$

berechnen.

Nun soll gezeigt werden, dass eine Massenänderung im Abstand von der reduzierten Pendellänge keine Auswirkungen auf die Periodendauer des Pendels hat. Durch hinzufügen einer Masse an dieser Stelle, kommt das Trägheitsmoment von eben dieser Masse dazu. Diese Masse wird in den folgenden Formeln mit dem Index „2“ gekennzeichnet. Das Trägheitsmoment dieser Masse beträgt:

$$I_2 = m_2 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot L \right)^2 . \quad (1.13)$$

Die Periodendauer berechnet sich nun wie folgt:

$$T_{\text{neu}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{I + I_2}{m \cdot g \cdot \frac{L}{2} + m_2 \cdot g \cdot l_r}} \quad (1.14)$$

$$= 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{\frac{1}{3} \cdot m \cdot L^2 + m_2 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot L \right)^2}{m \cdot g \cdot \frac{L}{2} + m_2 \cdot g \cdot \frac{2}{3} \cdot L}} \quad (1.15)$$

$$= 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{\left(\frac{m}{2} + \frac{2}{3} \cdot m_2 \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot L^2}{\left(\frac{m}{2} + \frac{2}{3} \cdot m_2 \right) \cdot g \cdot L}} \quad (1.16)$$

$$= 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{\frac{2}{3} \cdot L}{g}} \quad (1.17)$$

$$= 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_r}{g}} \quad (1.18)$$

$$= T \quad (1.19)$$

Daraus folgt, dass eine Massenänderung im Abstand der reduzierten Pendellänge keine Auswirkung auf die Schwingungsdauer des Pendels hat.

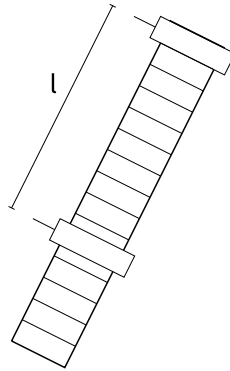


Abbildung 1.1: Skizze des Metallstabes des Reversionspendels

1.2 Bestimmen der Fallbeschleunigung mithilfe des Reversionspendels

Bei einem Reversionspendel handelt es sich um eine Metallstange an der zwei Schneiden positioniert sind. Eine der Schneiden befindet sich am Ende der Stange, während die Position der anderen verstellbar ist. An diesen Schneiden kann das Pendel aufgehängt und in Schwingung versetzt werden. Abbildung 1.1 skizziert den Aufbau des an den Schneiden aufgehängten und in Schwingung versetzten Metallstabes.

1.2.1 Kalibrierung des Reversionspendels

Bevor der Versuch zur Bestimmung der reduzierten Pendellänge durchgeführt werden kann, muss das Messgerät, welches zur Messung der Schwingungsdauern des Pendels verwendet wird, kalibriert werden. Daraus lässt sich auf Messfehler bei der Messung der Schwingungsdauern schließen. Dazu wurde die bewegliche Schneide entfernt und das Pendel an der festen Schneide schwingen lassen. Für unterschiedliche Periodenanzahlen wurde die Zeit gemessen. Die Messwerte sind in Tabelle 1.1 zu sehen.

Tabelle 1.1: Zeiten für unterschiedliche Periodendauern beim Reversionspendel zur Kalibrierung

Anzahl Perioden	Zeit in s
2	3.175
4	6.383
6	9.586
8	12.784
10	15.986
12	19.184
14	22.383
16	25.579

Die Messwerte in Tabelle 1.1 wurden geplottet und mit einer linearen Funktion approximiert. Das Ergebnis dieser Arbeit ist in Abbildung 1.2 zu sehen.

Bei den Messwerten mussten die für die Regression benötigten Fehler abgeschätzt werden. Dafür wurden die aus Tabelle 1.1 benutzt um für alle Messwerte den Quotienten aus der Schwingungsdauer und der Periodenanzahl zu bilden. Der daraus bestimmte Mittelwert für diesen Quotienten betrug $1,596\text{ s}$ und eine Standardabweichung von $0,0038\text{ s} \approx 0,004\text{ s}$

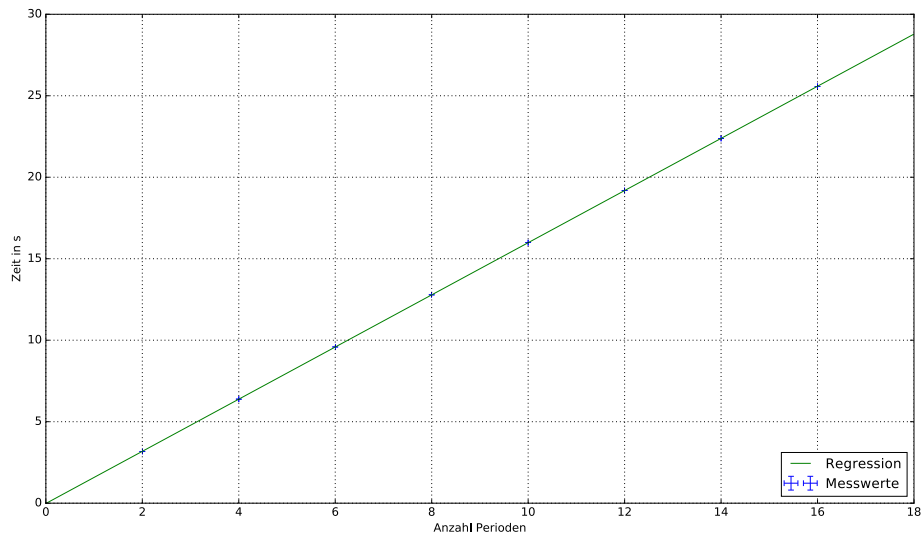


Abbildung 1.2: Messwerte zur Kalibrierung des Reversionspendels und deren lineare Regression

berechnet werden. Somit wird für die Zeitmessung ein Fehler von 0,004 s angenommen. Für die Periodenanzahlen wird kein Fehler angenommen. Dies liegt daran, dass angenommen wird, dass sich das elektronische Gerät nicht verzählt. Diese Werte werden auch für die in Abbildung 1.2 für die Fehlerbalken verwendet. Aufgrund der sehr gering ausfallenden Größe der Fehler fallen die Fehlerbalken so winzig aus, dass diese in Abbildung 1.2 nicht mehr sichtbar abgebildet werden können.

Die Regression wurde mit einer linearen Funktion der Form

$$f(x) = m \cdot x + c \quad (1.20)$$

durchgeführt. Aus der Regression konnten die Parameter für die Funktion ermittelt werden:

$$m = (1,6000 \pm 0,0003) \text{ s} \quad (1.21)$$

$$c = (-0,0187 \pm 0,0031) \text{ s} \approx -0,02 \text{ s}. \quad (1.22)$$

Die Regression weist einen Y-Achsen-Abschnitt von $c = -0,02 \text{ s}$ auf. Dieser wird nun als systematischer Messfehler bei allen Zeitmessungen mit einberechnet. Zu den Messwerten wird daher ein Wert von 0,02 s dazu addiert.

1.2.2 Bestimmung der reduzierten Pendellänge des Reversionspendels

Bei diesem Versuch sollte die reduzierte Pendellänge experimentell ermittelt werden, indem die positionierbare Schneide verschoben wurde. Danach wurde das Pendel an beiden Schneiden jeweils nacheinander aufgehängt und in Schwingung versetzt. Mit einem elektronischen Messgerät wurde die Zeit gemessen, die das Pendel für fünf Perioden benötigt. Mit diesem Verfahren wurden drei Messreihen aufgestellt. Die Messwerte sind Tabelle 1.2 zu entnehmen. Die sich in der Tabelle befindenden Messwerte sind die aufgenommenen messwerte ohne weiterverarbeitung. Die Korrektur durch den in Abschnitt 1.2.1 ermittelten Offset von $c = 0,02 \text{ s}$ wird ein wenig später in den Python-Skripten automatisch durchgeführt, weil dies mit weniger Arbeitsaufwand verbunden ist. Dabei ist l der Abstand der Schneiden und t die Zeit, die das Pendel für 5 Perioden benötigt hat, an der jeweils festen oder beweglichen Schneide.

Tabelle 1.2: Zeiten für unterschiedliche Schneidenabstände beim Reversionspendel

Messreihe	l in cm	t fest in s	t beweglich in s
1	61	7,968	8,136
	62	7,960	8,071
	63	7,981	8,026
	63,5	7,987	7,992
	64	7,994	7,972
	64,5	8,005	7,956
	65	8,009	7,937
	66	8,018	7,909
2	61	7,593	8,134
	62	7,965	8,081
	63	7,982	8,026
	63,5	7,994	8,003
	64	7,992	7,970
	64,5	7,996	7,960
	65	8,005	7,935
	66	8,017	7,911
3	61	7,958	8,132
	62	7,969	8,072
	63	7,980	8,024
	63,5	7,990	7,995
	64	7,999	7,980
	64,5	8,005	7,962
	65	8,006	7,935
	66	8,020	7,913

Alle ermittelten Messwerte wurden nun in einem Plot abgebildet. Das Ergebnis dessen ist in Abbildung 1.3 zu sehen. Die abgebildeten Messwerte wurden nicht mit Fehlerbalken versehen, weil aus diesem Plot keine weiterführende Analyse der Messwerte durchgeführt wird, für die die Fehler relevant wären. Weiterhin wurde bei den im Plot abgebildeten Werten eine Korrektur durch den in Abschnitt 1.2.1 ermittelten Offset durchgeführt.

In dem in Abbildung 1.3 dargestellten Chaos ist zu erkennen, dass ein Messwert unten links sehr stark von den anderen abweicht. Dieser Messwert stammt aus der zweiten Messreihe aus den Zeiten der Schwingungen bei einer Aufhängung an der festen Schneide. Es scheint sich hierbei um einen Ausreißer zu handeln. Zu einer besseren Erkennung wurde dieser Messwert mit einem roten Kreis hervorgehoben. Bei der weiterführenden Auswertung wird dieser Ausreißer außen vor gelassen.

Des weiteren ist in Abbildung 1.3 zu erkennen, dass die Kurven der Messwerte sich zwischen dem dritten und dem fünften Messwert schneiden. Aus diesem Grund werden für die weiterführende Analyse nur noch die Messwerte mit den Schneidenabständen von 63 cm bis 64 cm verwendet. Weil der in Abbildung 1.3 hervorgehobene und in diesem Abschnitt diskutierte Ausreißer nicht unter die Messwerte fällt, die für die Analyse des Schnittpunktes weiterverwendet werden, wird dieses Problem auch nicht weiter behandelt. Aus den für diesen Schneidenabstand ermittelten Messwerten für alle drei Messreihen wurden der Mittelwert und die Standardabweichung gebildet. Die dabei ermittelten Mittelwerte und Standardabweichungen sind in Tabelle 1.3 zu finden. Der in Abschnitt 1.2.1 ermittelte Offset des Zeitmessgerätes für die Schwingungsdauern wurde hierbei mit eingerechnet. Bei

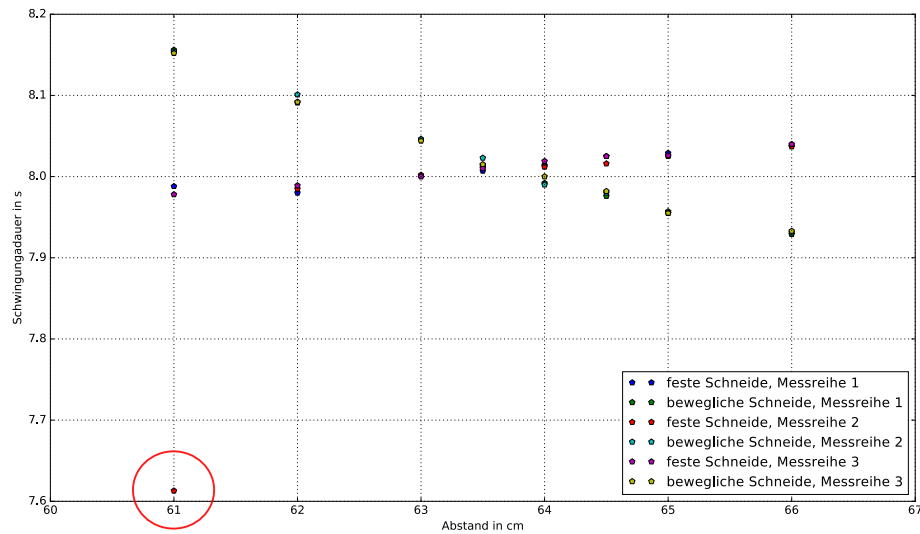


Abbildung 1.3: Messwerte bei der Durchführung des Versuches mit dem Reversionspendels, alle Messreihen

der Standardabweichung der Messwerte handelt es sich um die statistischen Fehler der Messung.

Tabelle 1.3: Mittelwerte für die Schwingungsdauern in Abhängigkeit vom Schneidenabstand aus den drei Messwerten, alle Werte in s

l in cm	Schneide	Mittelwert	Standardabweichung
63	fest	7,983	0,001
	beweglich	8,027	0,0012
63,5	fest	7,992	0,0035
	beweglich	7,998	0,0057
64	fest	7,997	0,0036
	beweglich	7,976	0,0053

Die gemittelten Werte aus Tabelle 1.3 werden nun mit einem selbstgeschriebenen Python-Skript geplottet. Dabei werden die Schwingungsdauern aus Tabelle 1.3 durch die Anzahl an Perioden, nämlich 5, geteilt. Für die in dem Plot abgebildeten Fehlerbalken, die den Fehler der Zeitmessung darstellen, wird der statistische Fehler für den jeweiligen gemittelten Messwert verwendet. Dieser entspricht der Standardabweichung aus Tabelle 1.3. Für das Einstellen des Schneidenabstandes wird ein Fehler von 0,05 cm angenommen. Dies entspricht einem halben skalenabschnitt des zur Überprüfung des Abstandes verwendeten Meterstabes. Des weiteren werden die Werte einer linearen Regression unterzogen. Diese Regression kann durchgeführt werden, weil die Messwerte in diesem Bereich als proportional zur Pendellänge angenommen werden. Im Anschluss wird der Schnittpunkt der beiden Regressionsgeraden ermittelt. Das Ergebnis dessen ist in Abbildung 1.4 zu sehen.

Die Regressionen wurden mit einer linearen Funktion der Form

$$f(x) = m \cdot x + c \quad (1.23)$$

durchgeführt. Die aus der Regression ermittelten Parameter für diese Funktion sind Tabelle 1.4 zu entnehmen. Der Schnittpunkt der Regressionsgeraden lässt sich dadurch bestimmen,

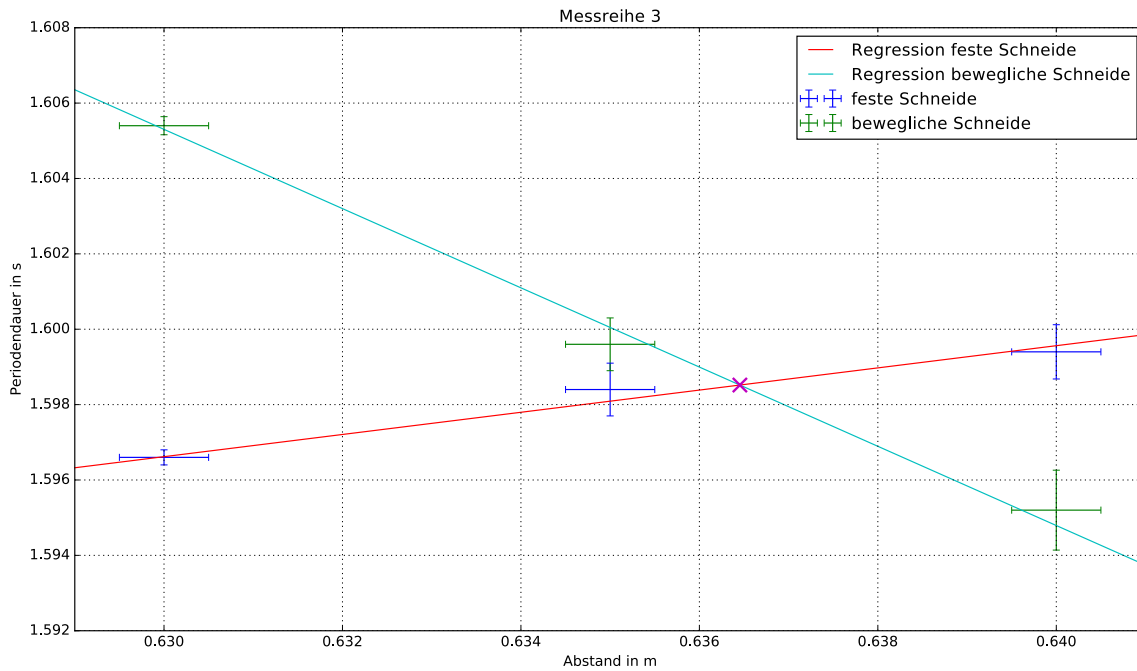


Abbildung 1.4: Analyse der am Reversionspendel aufgenommenen Messwerte

dass für die Regressionsgerade der Messwerte an dem festen Ende, f_1 , und die Regressionsgerade für die Messwerte an dem beweglichen Ende, f_2 , folgenden Zusammenhang annehmen:

$$f_1 = f_2 \quad (1.24)$$

$$m_1 \cdot x + c_1 = m_2 \cdot x + c_2 \quad (1.25)$$

$$x = \frac{c_1 - c_2}{m_2 - m_1} . \quad (1.26)$$

Der hieraus resultierende Wert ist der Wert für x entspricht der reduzierten Pendellänge l_r . Durch einsetzen in eine der beiden Regressionsgeraden erhält man die dazugehörige Periodendauer T bei der reduzierten Pendellänge. Das bestimmen des Schnittpunktes wurde ebenfalls mit dem Python-Skript durchgeführt. Dieses Ergebnis ist auch in Tabelle 1.4 zu finden.

Tabelle 1.4: Ergebnisse der Regression

Schneide		Wert
fest	m	$(0,29 \pm 0,07) \frac{\text{s}}{\text{m}}$
	c	$(1,41 \pm 0,04) \text{s}$
beweglich	m	$(-1,05 \pm 0,12) \frac{\text{s}}{\text{m}}$
	c	$(2,26 \pm 0,07) \text{s}$
Schnittpunkt	l_r	0,636 m
	T	1,598 s

1.2.2.1 Fehler der reduzierten Pendellänge

Für den systematischen Fehler zur bestimmung der reduzierten Pendellänge wird die Abweichung der Messung des Schneidenabstandes verwendet. Somit liegt der systematische Fehler bei $\Delta l_r = 0,0005 \text{ m}$.

Die Berechnung der reduzierten Pendellänge aus den Parametern der Regressionsgeraden lief über den Zusammenhang in Gleichung 1.26. Dementsprechend lässt sich ein statistischer Fehler für die reduzierte Pendellänge ermitteln. Weil die Fehler für den Y-Achsen-Abschnitt der Regressionsgeraden mit dem Fehler der Steigung derselben Regressionsgerade korrelieren, kann man nicht die Gaußsche Fehlerfortpflanzung anwenden, um den statistischen Fehler zu bestimmen.

Um die Fehlerrechnung durchführen zu können, wird noch einmal Gleichungen 1.26 angeschaut, mit welcher die reduzierte Pendellänge ermittelt wurde. Diese lautet:

$$l_r = \frac{c_1 - c_2}{m_2 - m_1}. \quad (1.27)$$

Hierbei könne die Fehler für die nicht korrelierenden Anteile mit der Gaußschen Fehlerfortpflanzung ermittelt werden. Diese Ergebnisse werden über die Größtfehlerabschätzung zusammengeführt. Der Fehler für die reduzierte Pendellänge berechnet sich also folgendermaßen:

$$\sigma_{l_r} = \left| \frac{\partial l_r}{\partial (c_1 - c_2)} \cdot \sigma_{(c_1 - c_2)} \right| + \left| \frac{\partial l_r}{\partial (m_2 - m_1)} \cdot \sigma_{(m_2 - m_1)} \right|. \quad (1.28)$$

Die Fehler $\sigma_{(c_1 - c_2)}$ und $\sigma_{(m_2 - m_1)}$ korrelieren nicht und lassen sich über die Gaußsche Fehlerfortpflanzung ermitteln:

$$\sigma_{(c_1 - c_2)} = \sqrt{\left(\frac{\partial (c_1 - c_2)}{\partial c_1} \cdot \sigma_{c_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial (c_1 - c_2)}{\partial c_2} \cdot \sigma_{c_2} \right)^2} \quad (1.29)$$

$$= \sqrt{\sigma_{c_1}^2 - \sigma_{c_2}^2} \quad (1.30)$$

$$\sigma_{(m_2 - m_1)} = \sqrt{\left(\frac{\partial (m_2 - m_1)}{\partial m_1} \cdot \sigma_{m_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial (m_2 - m_1)}{\partial m_2} \cdot \sigma_{m_2} \right)^2} \quad (1.31)$$

$$= \sqrt{\sigma_{m_2}^2 + \sigma_{m_1}^2}. \quad (1.32)$$

Somit berechnet sich der Fehler für die reduzierte Pendellänge folgendermaßen:

$$\sigma_{l_r} = \left| \frac{1}{(m_2 - m_1)} \cdot \sqrt{\sigma_{c_1}^2 - \sigma_{c_2}^2} \right| + \left| \frac{(c_1 - c_2)}{(m_2 - m_1)^2} \cdot \sqrt{\sigma_{m_2}^2 - \sigma_{m_1}^2} \right|. \quad (1.33)$$

Der endgültige Wert für den statistischen Fehler, welcher durch Einsetzen der Zahlenwerte erhalten wird, lautet: $\sigma_{l_r} = 0,106 \text{ m}$.

1.2.2.2 Fehler der Periodendauer

Für den systematischen Fehler zur Bestimmung der Periodendauer wird der auf dem Blatt angegebene Fehler für die Zeitmessung von 0,2 % verwendet. Der systematische Fehler beträgt somit: $\Delta T = T \cdot 0,0002 = 1,598 \text{ s} \cdot 0,0002 = 0,00031 \text{ s}$.

Nachdem ein Wert für die reduzierte Pendelermittelt wurde, kann die Schwingungsdauer bestimmt werden, indem der Wert für die reduzierte Pendellänge in eine der Regressionsgeraden eingesetzt wird. Dafür wird der Einfachheit halber die erste Regressionsgerade verwendet. Die Schwingungsdauer berechnet sich nun folgendermaßen:

$$T = \frac{c_1 \cdot m_2 - c_2 \cdot m_1}{m_2} = c_1 - c_2 \cdot \frac{m_1}{m_2}. \quad (1.34)$$

Weil die Fehler für den Y-Achsen-Abschnitt der Regressionsgeraden mit dem Fehler der Steigung derselben Regressionsgerade korrelieren, kann man nicht die Gaußsche Fehlerfortpflanzung anwenden, um den statistischen Fehler zu bestimmen. Stattdessen muss dies mit der Größtfehlerabschätzung durchgeführt werden:

$$\sigma_T = \left| \frac{\partial T}{\partial c_1} \cdot \sigma_{c_1} \right| + \left| \frac{\partial T}{\partial (c_2 \cdot m_1)} \cdot \sigma_{(c_2 \cdot m_1)} \right| + \left| \frac{\partial T}{\partial m_2} \cdot \sigma_{m_2} \right|. \quad (1.35)$$

Der Fehler $\sigma_{(c_2 \cdot m_1)}$ wieder um lässt sich über die Gaußsche Fehlerfortpflanzung ermitteln:

$$\sigma_{(c_2 \cdot m_1)} = \sqrt{\left(\frac{\partial(c_2 \cdot m_1)}{\partial c_2} \cdot \sigma_{c_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial(c_2 \cdot m_1)}{\partial m_1} \cdot \sigma_{m_1}\right)^2} \quad (1.36)$$

$$= \sqrt{m_1^2 \cdot \sigma_{c_2}^2 + c_2^2 \cdot \sigma_{m_1}^2} \quad (1.37)$$

Somit berechnet sich der Fehler für die Periodendauer folgendermaßen:

$$\sigma_T = |\sigma_{c_1}| + \left| \frac{1}{m_2} \cdot \sqrt{m_1^2 \cdot \sigma_{c_2}^2 + c_2^2 \cdot \sigma_{m_1}^2} \right| + \left| \frac{c_2 \cdot m_1}{m_2^2} \cdot \sigma_{m_2} \right| \quad (1.38)$$

Der endgültige Wert für den statistischen Fehler, welcher durch Einsetzen der Zahlenwerte erhalten wird, lautet: $\sigma_T = 0,263 \text{ s}$.

1.2.3 Bestimmen der Erdbeschleunigung

Die Bestimmung der Erdbeschleunigung lässt sich nun mit der vorher bestimmten reduzierten Pendellänge und der Periodendauer beim Anbringen der beweglichen Schneide im Abstand der reduzierten Pendellänge im Abstand vom Drehpunkt bestimmen:

$$g = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot l_r}{T^2}. \quad (1.39)$$

Die Fehler für die Erdbeschleunigung lassen sich nicht mit der Gaußschen Fehlerfortpflanzung bestimmen, da diese von den Fehlern von l_r und T abhängig ist und deren Fehlergrößen korrelieren. Stattdessen müssen diese über die Größtfehlerabschätzung ermittelt werden. Somit berechnet sich der Fehler folgendermaßen:

$$\sigma g = \left| \frac{\partial g}{\partial l_r} \cdot \sigma l_r \right| + \left| \frac{\partial g}{\partial T} \cdot \sigma T \right| \quad (1.40)$$

$$= \left| \frac{4 \cdot \pi^2}{T^2} \cdot \sigma l_r \right| + \left| \frac{8 \cdot \pi^2 \cdot l_r}{T^3} \cdot \sigma T \right|. \quad (1.41)$$

Dieses Verfahren wird nacheinander für die statistischen und die systematischen Fehler ausgeführt. Dabei ergibt sich ein statistischer Fehler von $\sigma_g = 1,551 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ und ein systematischer Fehler von $\Delta g = 0,00036 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Der berechnete Wert für den Ortsfaktor inklusive Fehler lautet somit:

$$g = (9,832 \pm 1,511 \pm 0,00036) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}. \quad (1.42)$$

1.2.4 Ausblick

Verglichen mit dem Literaturwert von $9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ ergibt sich eine Abweichung von $0,022\%$, was auf eine sehr genaue Messung hindeutet. Dennoch fallen die aus der Fehlerrechnung anfallenden Tolleranzbereiche sehr groß aus. Dies scheint hauptsächlich an den über die Regression ermittelten Fehler für die Geradensteigungen und die Y-Achsen Abschnitte zustande zu kommen. Weiterhin fällt auf, dass die experimentell ermittelte reduzierte Pendellänge nicht ganz mit der theoretisch ermittelten pendellänge aus der Vorbereitung übereinstimmt. Dies könnte durch eine Annäherung der Massen der Schneiden als als Punktmassen zustandekommen. Die Ausdehnung und somit die Existenz eines Trägheitstensors bei der Schwingung wurden vernachlässigt.

2. Aufgabe

Bei diesem Versuch werden mehrere Messungen mit einer Eisenkugel, die an einem Stahldraht befestigt ist, durchgeführt. Die Masse des Stahldrahts sowie mögliche Reibung wie z.B. Luftwiderstand werden durchgehend nicht beachtet.

2.1 Bestimmen der Fallbeschleunigung mithilfe eines Fadenpendels

In diesem Versuchsteil soll die Fallbeschleunigung g auf der Erdoberfläche bestimmt werden. Dafür musste zunächst die Periodendauer der Schwingung bestimmt werden. Hierfür wurde der Aufbau mit Lichtschranken und Zeiterfassungsgerät genutzt. Mit diesem Gerät wurde jeweils die Zeitdauer für 2 bis 16 Schwingungen gemessen, in Schritten von jeweils 2 Schwingungen. Die Messung wurde insgesamt dreifach wiederholt, um eine Betrachtung der statistischen Fehler zu ermöglichen. Zudem wurde darauf geachtet, das Pendel nur um kleine Winkel auszulenken (kleiner als 5°), um eine Kleinwinkelnäherung zu verwenden.

Die Messwerte der Durchführung dieses Versuches sind in Tabelle 2.1 zu sehen und zusätzlich in Abbildung 2.1 dargestellt. Es fällt auf, dass die drei Messreihen kaum auseinander gehalten werden können, da die Werte sehr ähnlich sind. Auch der lineare Zusammenhang ist sehr klar ersichtlich. Insbesondere dank der elektronischen Messeinrichtung ist die Zeitmessung sehr präzise.

Tabelle 2.1: Messwerte von Versuch 2.1

Perioden	T_1 in s	T_2 in s	T_3 in s
2	6,126	6,127	6,126
4	12,280	12,279	12,281
6	18,433	18,433	18,429
8	24,585	24,579	24,584
10	30,729	30,736	30,728
12	36,888	36,878	36,887
14	43,039	43,026	43,039
16	49,175	49,190	49,189

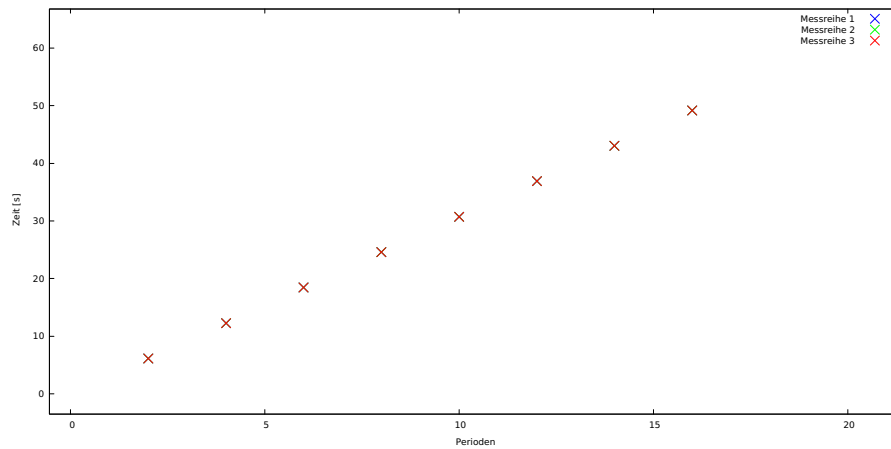


Abbildung 2.1: Plot der Rohdaten von Aufgabe 2.1

Um die Periodendauer zu ermitteln, werden die Mittelwerte der jeweils drei Messwerte verwendet. Der Mittelwert wird als Wert in einer Regression verwendet, als Fehlerbalken wird jeweils die Standardabweichung verwendet. Die Regression liefert die Steigung der Geraden 'Zeit pro Periode', was gerade der Periodendauer entspricht. Die so bearbeiteten Daten mit linearer Regression sind in Abbildung 2.2 zu sehen. Da die Standardabweichungen extrem klein sind, sind die Fehlerbalken, die den Fehler der Zeitwerte anzeigen sollen, sehr flach. Die Standardabweichungen der Zeiten wurden als Fehler für die Regression berücksichtigt.

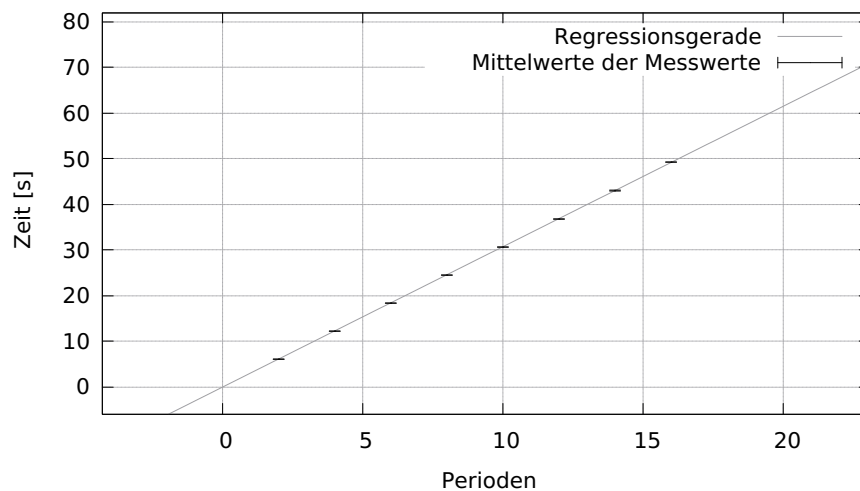


Abbildung 2.2: Plot der Mittelwerte mit Regression für die Periodendauer

Die Regression liefert einen Wert für die Periodendauer von 3,075 s, zudem noch einen statistischen Fehler von 0,19 ms. Der systematische Fehler der Periodendauer wird auf 0,5 ms abgeschätzt, was der Hälfte der letzten Anzeigestelle entspricht.

Das für die Auswertung gewählte Modell in dieser Aufgabe ist das Modell des physikalischen Pendels. Das bedeutet, dass das Trägheitsmoment des Pendels berücksichtigt wird, und das Pendel nicht als Punktmasse angenommen wird, wie beim mathematischen Pendel.

Für das physikalische Pendel gilt als Kleinwinkelnäherung:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\theta}{mgd}} \implies T^2 = 4\pi^2 \frac{\theta}{mgd} \implies g = \frac{4\pi^2\theta}{m d T^2}. \quad (2.1)$$

θ ist hier das Trägheitsmoment des Pendels, m die Masse, g der gesuchte Ortsfaktor und d die Pendellänge (Abstand Aufhängung - Schwerpunkt).

Das Trägheitsmoment θ des Pendels berechnet sich aus dem Trägheitsmoment der Kugel und einem Anteil nach dem Satz von Steiner, da das Pendel um eine Achse schwingt, die parallel zur Schwerpunktachse verläuft. Da es sich bei der Kugel um einen Kugelmoment handelt (Trägheitsmoment in alle Raumrichtungen identisch), ist die Berechnung relative einfach:

$$\theta = \theta_{\text{Kugel}} + \theta_{\text{Steiner}} = \frac{2}{5}mr^2 + md^2. \quad (2.2)$$

Eingesetzt in Gleichung 2.1 ergibt sich:

$$g = \frac{4\pi^2 m (\frac{2}{5}r^2 + d^2)}{m d T^2} = 4\pi^2 \frac{\frac{2}{5}r^2 + d^2}{d T^2} \quad (2.3)$$

Der Wert für T mit statistischem und systematischem Fehler ist aus der vorherigen Regression bekannt.

Der Wert für d ist als 2,355 m bekannt, mit einem systematischen Fehler von 3 mm. Für d ist kein statistischer Fehler bekannt. Die Werte waren beim Versuch hinterlegt und wurden nicht selbst bestimmt.

Um final g ausrechnen zu können, muss folglich noch der Radius r der Stahlkugel bestimmt werden.

Dafür wurde die Kugel mit einem Messschieber ausgemessen. Dieser wurde dreimal an der Kugel angesetzt, um den Durchmesser D zu bestimmen. Da der Messschieber extrem wackelig und locker war und relativ viel Spiel hatte, wird der systematische Fehler von D als 5 mm angenommen. Durch einen besseren Messschieber hätte man diesen Teil der Messung signifikant genauer messen können.

Die drei Messungen lieferten die Werte 60 mm, 61 mm und 63 mm. Der Mittelwert für den Durchmesser D beträgt folglich 61,33 mm, und die Standardabweichung, die als statistischer Fehler angenommen wird, beträgt 1,53 mm.

Durch halbieren dieser Werte ergeben sich die Werte für den Radius r der Kugel. Dieser beträgt folglich $r = 30,665$ mm. Der systematische Fehler von r ist dann 2,5 mm und der statistische Fehler beträgt 0,765 mm.

Mit diesen Informationen lässt sich g final nach 2.3 ausrechnen. Es ergibt sich:

$$g = 9,8273 \text{ ms}^{-2} \quad (2.4)$$

Der statistische Fehler von g wird mittels Gaußscher Fehlerfortpflanzung bestimmt. Das ist möglich, da die Fehler alle unkorreliert sind. Der Radius r ist zwar in der Pendellänge enthalten, allerdings macht es bei der verwendeten, unpräzisen Messmethode von r keinen Sinn davon auszugehen, dass die Fehler korreliert sind. Als statistischer Fehler ergibt sich:

$$\Delta g_{\text{statistisch}} = 0,0353 \text{ ms}^{-2} \quad (2.5)$$

Auch der systematische Fehler von g lässt sich so ausrechnen, da die Fehler unkorreliert sind. Es ergibt sich:

$$\Delta g_{\text{systematisch}} = 0,0574 \text{ ms}^{-2} \quad (2.6)$$

Schlussendlich ergibt sich ein Wert für g von

$$g = (9,8273 \pm 0,0353 \pm 0,0574) \text{ ms}^{-2} \quad (2.7)$$

Der so mit Ungenauigkeit berechnete Wert ist in Übereinstimmung mit dem bekannten Literaturwerte von $9,81 \text{ ms}^{-2}$.

2.2 Untersuchen der Abhängigkeit der Schwingungsdauer eines Fadenpendels von der Schwingungsweite

Bei diesem Versuchsteil werden nun auch große Auslenkungen betrachtet, um zu schauen, wie sich das Fadenpendel verhält, wenn keine Kleinwinkelnäherung mehr gemacht werden kann.

Dafür wurde das Pendel von Hand an ausgelenkt und losgelassen. Die Winkel, bei denen gemessen wurde, waren von 5° bis 60° in Schritten von 5° . Zur Winkelmessung wurde die große Skala an der Wand verwendet.

Um einen Paralaxenfehler an der weit entfernten Skala zu vermeiden, wurde das Pendel von einer Person ausgelenkt, während eine zweite Person aus größerem Abstand den Winkel gut ablesen konnte und so der ersten Person Anweisungen geben konnte. Nach dem Loslassen wurden, wieder über die elektronische Messvorrichtung, 5 Perioden gemessen. Die gemessenen Daten sind in 2.2.

Tabelle 2.2: Messwerte von Versuch 2.2

Auslenkwinkel in $^\circ$	T in s
5	15,358
10	15,384
15	15,423
20	15,461
25	15,524
30	15,628
35	15,722
40	15,828
45	15,951
50	16,072
55	16,255
60	16,416

Da an der groben Skala abgelesen wurde, wird ein Fehler von $0,5^\circ$ angenommen, was dem 0,1-fachen eines Messintervalls entspricht. Für die Zeitdauer wird wieder ein systematischer Fehler von 0,5 ms angenommen, welcher jedoch auch vernachlässigbar ist. Die Rohdaten mit Fehlerkreuzen skaliert auf eine Periode sind in Abbildung 2.3 zu sehen.

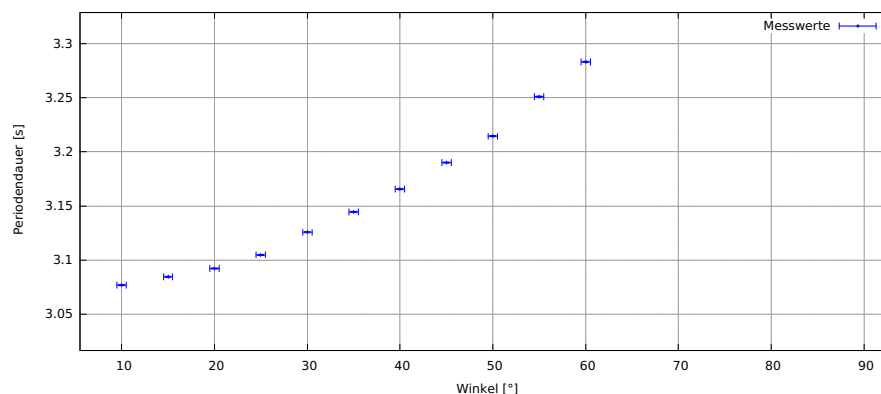


Abbildung 2.3: Plot der Rohdaten von Aufgabe 2.2 mit Fehlerkreuzen

Zudem soll eine theoretische Vorhersage des Pendels für große Auslenkungen getroffen werden. Dafür wird ab hier zur Vereinfachung das Modell des mathematischen Pendels verwendet. Die Differentialgleichung dafür lautet:

$$\ddot{\phi}(t) + \frac{g}{l} \cdot \sin(\phi(t)) = 0 \quad (2.8)$$

Diese nichtlineare Differentialgleichung ist nicht analytisch lösbar. Für kleine Winkel lässt sich der Term $\sin(\phi(t))$ als Taylorpolynom bis zur zweiten Ordnung entwickeln, was der üblichen Kleinwinkelnäherung $\sin(x) = x$ entspricht, mit der diese Differentialgleichung zur Differentialgleichung eines harmonischen Oszillators wird und sich damit einfach analytisch lässt.

Größere Winkel lassen sich genauso berücksichtigen, wenn man bei der Taylor-Entwicklung mehr Terme mitnimmt. Die Lösung der Differentialgleichung lässt sich dann auch als Reihe darstellen nach [Wik20a]:

$$T(\phi) = T_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \right)^2 \sin^{2n}(\phi/2) \quad (2.9)$$

$$= T_0 \cdot \left(1 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \cdot \sin^2 \left(\frac{\phi}{2} \right) + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 \cdot \sin^4 \left(\frac{\phi}{2} \right) + \dots \right) \quad (2.10)$$

Die Zeit T_0 entspricht der Periodendauer für kleine Auslenkungen, die im ersten Teil der Aufgabe bereits ermittelt wurde. Setzt man diese ein, lässt sich zusätzlich zu den Messwerten eine Vorhersage einzeichnen. Das ist in Abbildung 2.4 zu sehen, wobei die ersten drei Terme der Entwicklung mitgenommen wurden.

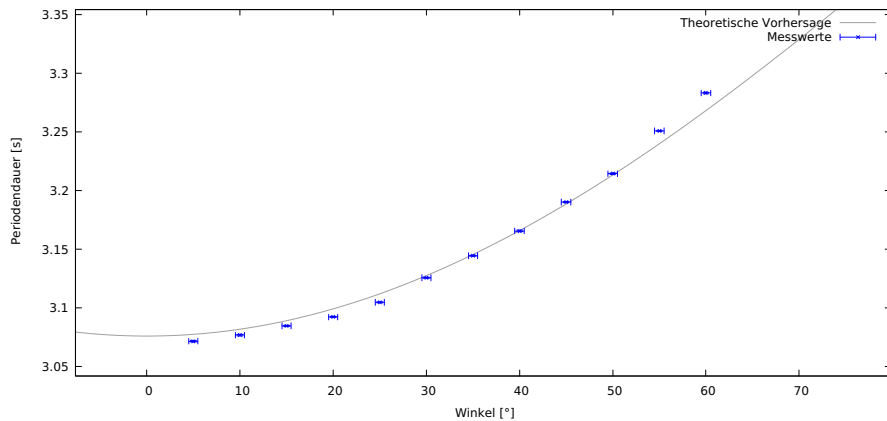


Abbildung 2.4: Plot der Periodendauern mit Vorhersage

Wie zu sehen ist, beschreibt die Vorhersage bis auf einige Stellen den Sachverhalt korrekt. Weit am Ende, bei sehr großen Winkeln, entsteht eine größere Differenz zwischen der Vorhersage und den gemessenen Werten, was vermutlich am Luftwiderstand liegt, der bei den großen Geschwindigkeiten, die bei den größeren Auslenkungen auftreten, nicht mehr zu vernachlässigen ist. Ansonsten liefert die Berechnung über eine Reihe eine erfolgreiche Vorhersage.

3. Aufgabe

3.1 Einrichten zweier identischer Oszillatoren

In diesem und den weiteren Versuchen wurden gekoppelte Oszillatoren untersucht. Dazu wurden zuerst zwei Oszillatoren wie in Abbildung 3.1 aufgebaut und so eingestellt, dass die Periodendauer der Schwingungen möglichst identisch sind.

Bei diesem Aufbau konnte die Position der Stäbe und der Massen variiert werden. Dabei wurde für die Versuche folgende Konfiguration verwendet

$$l = 99,7 \text{ cm} \quad (3.1)$$

$$L = 109,7 \text{ cm} \quad (3.2)$$

$$a = 2,8 \text{ cm} \quad (3.3)$$

$$m_{\text{Massescheibe}} = 1221 \text{ g} \quad (3.4)$$

Um nachzuweisen, dass die Periodendauern der Schwingungen beider Oszillatoren möglichst identisch sind, wurde bei diesen Pendeln die Schwingungsdauer für eine vorgegebene Anzahl an Perioden mit einer Stoppuhr gemessen. Die Messwerte befinden sich in Tabelle 3.1.

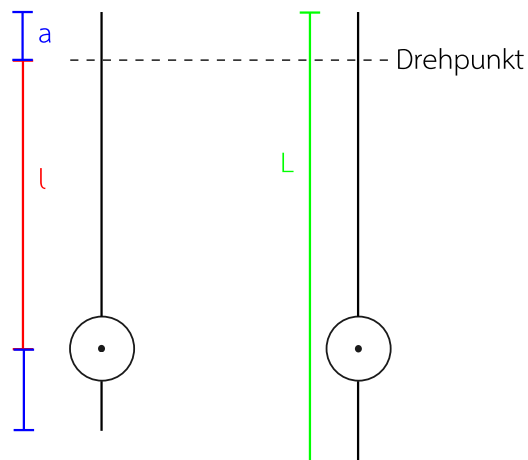


Abbildung 3.1: Skizze des Aufbaus der beiden Oszillatoren

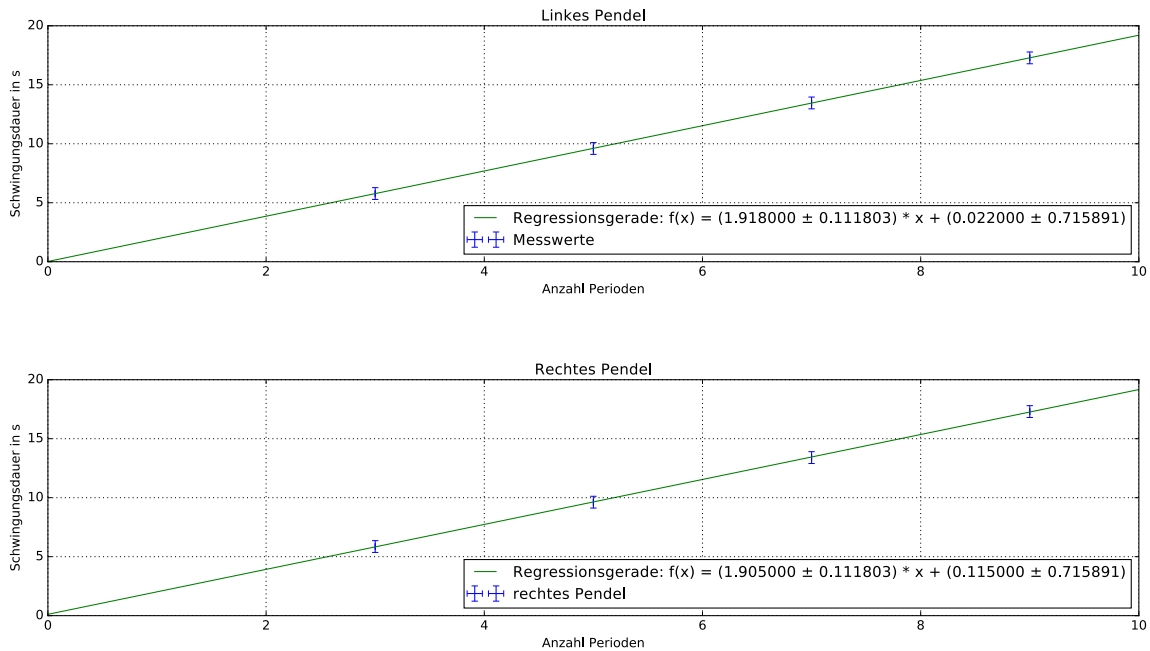


Abbildung 3.2: Plot der Messwerte der einzelnen Pendel und lineare Regression

Tabelle 3.1: Zeiten für unterschiedliche Periodendauern beider Pendel

Anzahl Perioden	Zeit linkes Pendel in s	Zeit rechtes Pendel in s
3	5,78	5,86
5	9,60	9,62
7	13,40	13,40
9	17,28	17,30

Die Messwerte aus Tabelle 3.1 werden mithilfe eines Python-Skripts geplottet. Weiterhin wird mit diesen Messwerten eine lineare Regression durchgeführt. Die Plots sind in Abbildung 3.2 zu sehen.

Die lineare Regression wurde mit einer Funktion der Form

$$f(x) = m \cdot x + c \quad (3.5)$$

durchgeführt. Die aus der Regression gewonnenen Werte für die Parameter dieser Funktion sind Tabelle 3.2 zu entnehmen.

Tabelle 3.2: Parameter lineare Regression

Pendel	m in s	c in s
links	$1,91 \pm 0,11$	$0,01 \pm 0,71$
rechts	$1,90 \pm 0,11$	$0,11 \pm 0,71$
Mittelwert	$1,91 \pm 0,11$	$0,0671$
Standardabweichung	0,005	0,05

In Tabelle 3.2 ist zu erkennen, dass die Parameter nahezu identisch sind. Somit kann man

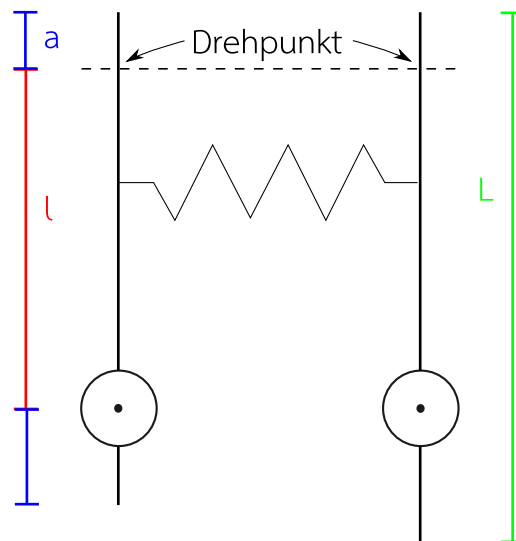


Abbildung 3.3: Skizze der gekoppelten Oszillatoren

davon ausgehen, dass das linke Pendel und das rechte Pendel identische Periodendauern aufweisen.

3.2 Untersuchen der Fundamentalschwingungen zweier gekoppelter Oszillatoren

Die zwei einzelnen Pendel wurden in diesem Versuch mit einer Feder gekoppelt. Somit handelt es sich um zwei gekoppelte Oszillatoren. In dieser Versuchsreihe wurden die Oszillatoren in unterschiedlichen Phasen angeregt. Dabei wurden für unterschiedliche Phasen, Koppellängen und Periodenanzahlen die Schwingungsdauern gemessen. Abbildung 3.3 skizziert den Versuchsaufbau.

3.2.1 Analyse der Fundamentalschwingungen

Unter der Koppellänge wird der Abstand zwischen Drehpunkt und Befestigung mit der Feder bezeichnet. Dieser war bei diesem Versuch bei beiden Oszillatoren identisch und betrug einmal 31 cm und ein weiteres mal 23 cm. Die Messwerte für die Schwingungsdauern der Oszillatoren bei den Fundamentalschwingungen, die Schwingungsformen, bei denen keine Schwebung eintritt, sind in Tabelle 3.3 zu finden.

Tabelle 3.3: Schwingungsdauern in s

Koppellänge in cm	Periodenanzahl	gleichphasig	gegenphasig
31	3	5,85	4,87
	5	9,62	8,05
	7	13,47	11,12
	9	17,31	14,27
23	3	5,75	5,17
	5	9,60	8,52
	7	13,50	12,16
	9	17,24	15,47

Ein Plot der Messwerte aus Tabelle 3.3 ist in Abbildung 3.4 zu sehen.

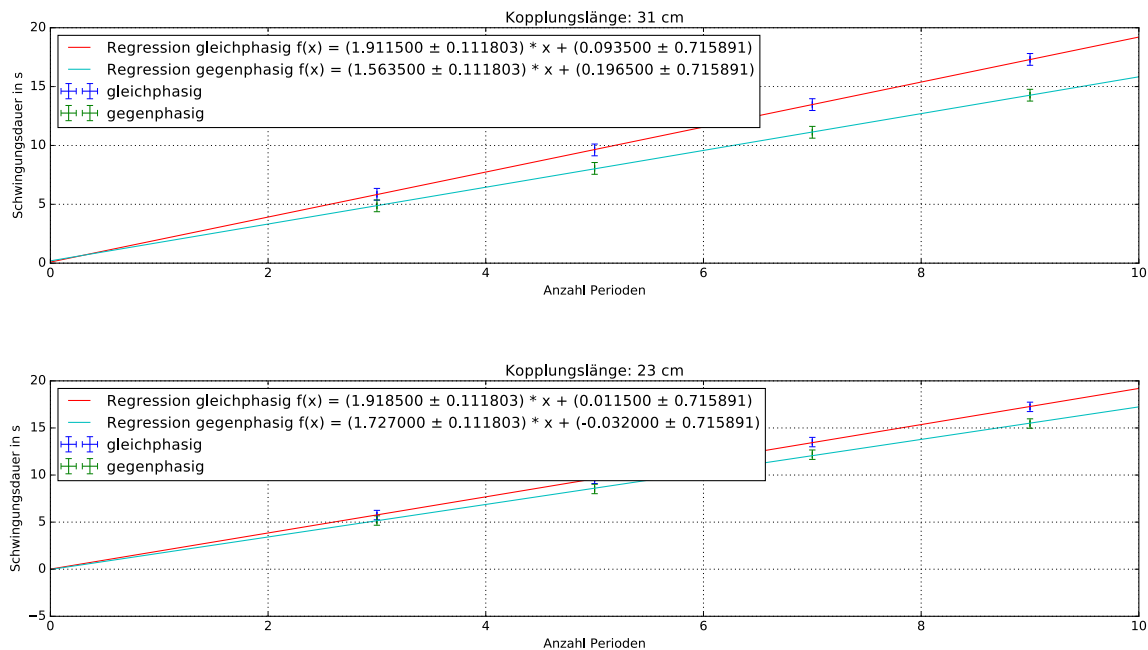


Abbildung 3.4: Plot und Regression der Schwingungsdauern der gekoppelten Oszillatoren

Weiterhin wurde mit den Messwerten in Abbildung 3.4 eine lineare Regression durchgeführt. Die Funktion, mit der approximiert wurde, trug dabei die Form:

$$f(x) = m \cdot x + c. \quad (3.6)$$

Die aus der Regression ermittelten Parameter können Tabelle 3.4 entnommen werden. Die Geradensteigung entspricht der Periodendauer der Schwingung.

Tabelle 3.4: Schwingungsdauern in s

Koppellänge in cm	Schwingungsform	m in s	c in s
31	gleichphasig	$1,91 \pm 0,11$	$0,09 \pm 0,71$
	gegenphasig	$1,56 \pm 0,11$	$0,19 \pm 0,71$
23	gleichphasig	$1,91 \pm 0,11$	$0,01 \pm 0,71$
	gegenphasig	$1,72 \pm 0,11$	$-0,03 \pm 0,71$

Ein Vergleich der Geradensteigungen aus Tabelle 3.4 mit dem Verhalten eines einzelnen Oszillators aus Tabelle 3.2 zeigt, dass die Periodendauer bei einer gleichphasigen Schwingung identisch zu der eines einzelnen Oszillators ist. Dies lässt sich dadurch erklären, dass die Feder aufgrund der parallelen Bewegung der Pendel nicht gespannt wird. Anders sieht es bei den gegenphasigen Schwingungen aus. Hierbei wird die Feder während der Schwingung ge- und wieder entspannt. Dies hat eine messbare Auswirkung auf die Periodendauer. In Tabelle 3.4 ist zu erkennen, dass die Periodendauer bei größerer Kopplungslänge kleiner wird.

3.2.2 Anderweitige Bestimmung der Federkonstante

Weiterhin soll die Federkonstante über eine statische und eine dynamische Methode bestimmt werden. Bei der statischen Methode wurden an die Feder Gewichte gehängt. Dazu wurde die Auslenkung der Feder gemessen. Die Messwerte dazu befinden sich in Tabelle 3.5.

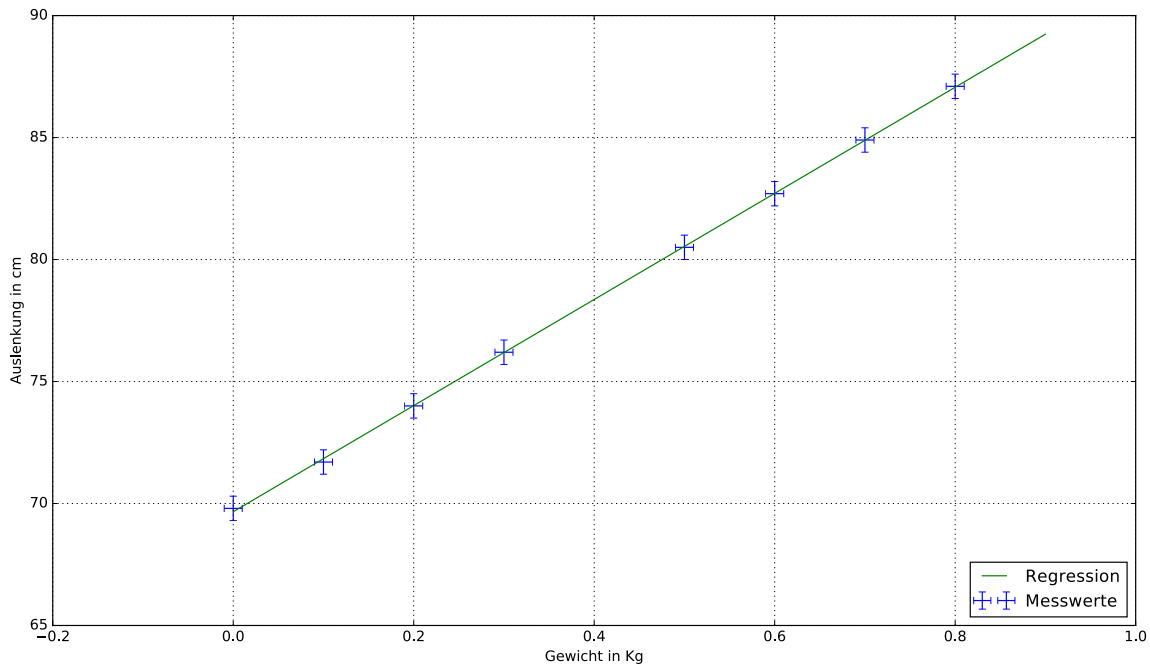


Abbildung 3.5: Plot und Regression der statischen Bestimmung der Federkonstante

Tabelle 3.5: statische Bestimmung der Federkonstante

Gewicht in g	Auslenkung in cm
0	69,8
100	71,7
200	74,0
300	76,2
500	80,5
600	82,7
700	84,9
800	87,1

Diese Messwerte wurden mit einem Python-Skript geplottet. Weiterhin wurde eine lineare Regression mit den Messwerten durchgeführt. Der Plot ist in Abbildung 3.5 zu sehen. Das Ergebnis der Regression war folgende Funktion:

$$f(x) = (0,217 \pm 0,003) \frac{\text{m}}{\text{Kg}} \cdot x + (0,696 \pm 0,001) \text{ m} \quad (3.7)$$

Über die Definition der Federkonstante

$$D = \frac{m \cdot g}{x} \quad (3.8)$$

lässt sich mithilfe der Steigung der Regressionsgerade eine Federkonstante von

$$D = (46,9 \pm 0,3) \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad (3.9)$$

ermitteln.

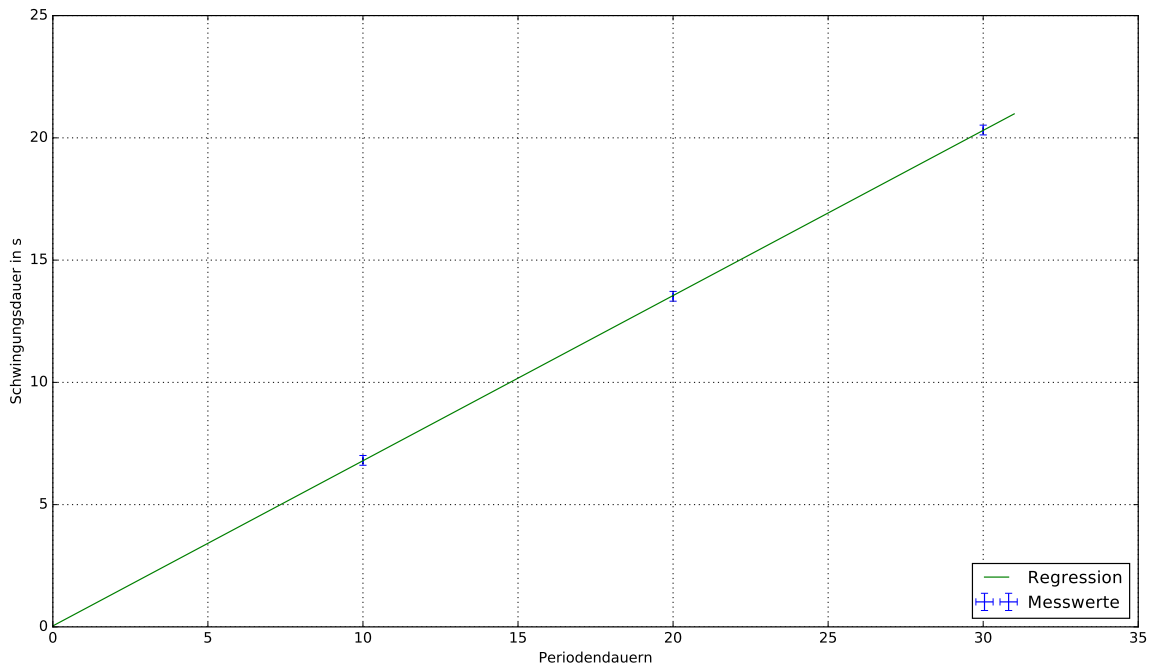


Abbildung 3.6: Plot und Regression der dynamischen Bestimmung der Federkonstante

Für die dynamische Bestimmung der Federkonstante wurde ein Gewicht von 500 g an die Feder gehängt. Diese wurde daraufhin in Schwingung versetzt. Für unterschiedliche Periodenanzahlen wurde die Schwingungsdauer gemessen. Die Messwerte sind Tabelle 3.7 zu entnehmen.

Tabelle 3.6: dynamische Bestimmung der Federkonstante

Periodenanzahl	Schwingungsdauer in s
10	6,81
20	13,52
30	20,32

Die Messwerte in Tabelle 3.7 wurden ebenfalls geplottet und mit einer linearen Regression approximiert. Das Ergebnis dessen ist in Abbildung 3.6 zu sehen. Die Regressionsfunktion lautet:

$$f(x) = (0,67 \pm 0,01) \text{ s} \cdot x + (0,04 \pm 0,30) \text{ s}. \quad (3.10)$$

Hierbei ist die Federkonstante durch

$$D = 4 \cdot \pi^2 \frac{m}{T^2} \quad (3.11)$$

definiert. Für T wird die Steigung der Regressionsgerade verwendet und für m die Masse des Gesichts von 500 g. Durch Einsetzen der Zahlenwerte ergibt sich eine Federkonstante von

$$D = (43,97 \pm 1,31) \frac{\text{N}}{\text{m}}. \quad (3.12)$$

Hierbei wurde der Fehler der Federkonstante über die Gaußsche Fehlerfortpflanzung bestimmt.

3.3 Messen der Schwingungs- und Schwebungsdauer zweier gekoppelter Oszillatoren

Zu guter letzt wurde eine Schwebung der gekoppelten Oszillatoren beobachtet. Dabei wurde einer der Oszillatoren ausgelenkt, während sich der andere in Ruheposition befand. Für unterschiedliche Schwingungsperioden- und Schwebungsperiodenanzahlen wurde die Schwingungs- und Schwebungsdauer gemessen. Die Messwerte befinden sich in Tabelle 3.7.

Tabelle 3.7: Schwingungs- und Schwebungsdauer

Periodenanzahl	Schwingungsdauer in s	Schwebungsdauer in s
3	5,42	45,97
5	8,98	115,55
7	12,38	144,72
9	16,15	

Aud diesen Messreihen wurde eine Schwingungs- und Schwebungsdauer von $(1,79 \pm 0,03)$ s bzw. $(18,27 \pm 5,09)$ s ermittelt, indem mit den Messwerten eine lineare Regression durchgeführt wurde.

3.3.1 Ausblick

Da die Zeitmessungen mit einer Stoppuhr ausgeführt wurde, lassen sich hier große Fehlerquellen vermuten. Die Abstandsmessungen mit dem Meterstab hingegen konnten ziemlich ausführlich durchgeführt werden.

Literaturverzeichnis

- [Wik20a] Wikipedia: *Mathematisches Pendel* — *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. http://https://de.wikipedia.org/wiki/Mathematisches_Pendel, 2020. [Online; accessed 13-Januar-2020].
- [Wik20b] Wikipedia: *Physikalisches Pendel* — *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. <http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Physikalisches%20Pendel&oldid=195199234>, 2020. [Online; accessed 27-January-2020].