

Prak.: P1 Semester: WS19/20 Wochentag: Di Gruppennr.: 11

Name: Hohenstein Vorname: Michael

Name: Michel Vorname: Alexis

Emailadresse(n): alexis.michel@gmx.de, michael.hohenstein@gmx.de

Versuch: Elastizität (P1-1) Fehlerrech.: Nein

Betreuer: Paul Masuch Durchgeführt am: 22.10.19

Wird vom Betreuer ausgefüllt.

1. Abgabe am: _____

Rückgabe am: _____ Begründung:

2. Abgabe am: _____

Ergebnis: + / 0 / - Fehlerrechnung: Ja / Nein

Datum: _____ Handzeichen: _____

Bemerkungen:

Inhaltsverzeichnis

1 Versuch 1	1
1.1 Versuchsteil 1	1
1.1.1 Aufgabe	1
1.1.2 Durchführung	1
1.1.3 Auswertung	1
1.1.4 Ausblick	3
1.2 Versuchsteil 2	3
1.2.1 Aufgabe	3
1.2.2 Durchführung	3
1.2.3 Auswertung	4
1.2.4 Ausblick	5
1.2.5 Ausblick über den gesamten Versuch	6
2 Versuch 2	7
2.1 Aufgabe	7
2.2 Durchführung	7
2.3 Auswertung	7
2.4 Ausblick	9
3 Versuch 3	11
3.1 Aufgabe	11
3.2 Durchführung	11
3.3 Auswertung	11
3.4 Ausblick	13
Literaturverzeichnis	15

Abbildungsverzeichnis

1.1 Messungen der Auslenkungen und lineare Regression über die Messpunkte .	2
1.2 Prinzipskizze zur Aufgabe, aus der Aufgabenstellung entnommen	3
1.3 Messungen der Auslenkungen des Lichtpunktes und lineare Regression über die Messpunkte	4
2.1 Messwerte des Oszilloskops und Autokorrelation mit markierung der Peaks in der Kurve	9

3.1	Die gemessene Zeit T gegen das jeweils aufgelegte Trägheitsmoment $\theta_{\text{zusätzlich}}$ aufgetragen, mit Fehlerbalken	13
3.2	Die Quadrate der gemessenen Zeiten T^2 gegen das aufgelegte Trägheitsmoment $\theta_{\text{zusätzlich}}$ aufgetragen, mit Regressionsgerade	14

Tabellenverzeichnis

1.1	Auslenkung der Balken in mm für unterschiedliche Gewichte	1
1.2	Kräfte in N die auf den Balken wirken	2
1.3	Elastizitätsmodule aus dem Biegungsversuch für alle Einzelmessungen sowie deren Mittelwert und Standardabweichungen in GPa	3
1.4	Verschiebung des Laserpunktes auf der Wand in mm	4
1.5	Elastizitätsmodule aus dem Spiegelversuch für alle Einzelmessungen sowie deren Mittelwert in GPa	5
1.6	Vergleich der Ergebnisse mit den Literaturwerten, alle Angaben in GPa . .	6
2.1	Die Abmessungen der Metallstangen für Versuch 2	7
2.2	Dichte der Materialien	8
2.3	Mittelwert der Wellenlaufzeit in unterschiedlichen Medien	8
2.4	Schallgeschwindigkeiten in unterschiedlichen Medien	8
2.5	E-Modul durch Schallgeschwindigkeit	9
2.6	Vergleich der Ergebnisse mit den Literaturwerten, alle Angaben in GPa . .	10
3.1	Messwerte der Torsionsschwingung	11
3.2	Mittelwerte und Standardabweichung von 10 Torsionsschwingungen	12
3.3	Mittelwerte und Standardabweichung skaliert auf eine Schwingung	12

1. Versuch 1

1.1 Versuchsteil 1

1.1.1 Aufgabe

Das Ziel des ersten Versuches bestand darin, die Elastizitätsmodule mehrerer Materialien zu bestimmen. Dazu wurden die zu untersuchenden Materialien, die in Form von Balken vorlagen, auf zwei Schneiden platziert und belastet. Die Auslenkung wurde an einer Messuhr abgelesen. Daraus soll das Elastizitätsmodul bestimmt werden.

1.1.2 Durchführung

Alle Balken hatten eine Dicke von $(6,0 \pm 0,5)$ mm und eine Tiefe von $(25,0 \pm 0,5)$ mm, welche mit einem Messschieber bestimmt wurden. Die Länge zwischen den Schneiden, welche auf einer Schiene mit aufgetragener Millimeter-Skala befestigt waren, betrug $(450,0 \pm 0,5)$ mm. Vor Beginn der jeweiligen Belastung der Balken wurde die Messuhr auf eine Auslenkung von 9 mm eingestellt. Gemessen wurden für die verschiedenen Materialien folgende Auslenkungsänderungen:

Tabelle 1.1: Auslenkung der Balken in mm für unterschiedliche Gewichte

Gewicht in g	PVC	Alu	Stahl	Kupfer	Messing
0	0	0	0	0	0
200	0,64	0,16	0,07	0,09	0,1
500	1,74	0,38	0,15	0,21	0,26
1000	3,59	0,75	0,33	0,42	0,52

Die Auslenkung konnte mit der Messuhr sehr Präzise mit einer Unsicherheit von 0,02 mm bestimmt werden. Dabei ist anzumerken, dass für PVC keine guten Messergebnisse ermittelt werden konnten, da das Material sich sprunghaft verhielt. Wurde das Material im ausgelenkten Zustand „agnestippst“, so pendelte es, verglichen mit den anderen Materialien, nicht um die Ruhelage, bis es in an dieser stehen blieb, sondern verfehlte diese und blieb bis zu 0,1 mm davon entfernt stehen. Aus diesem Grund wird für PVC ein deutlich größerer Fehler von 0,1 mm angenommen.

1.1.3 Auswertung

Für die Auswertung ist zu berücksichtigen, dass die Messuhr mit einer Gewichtskraft von $3,6 \frac{\text{g}}{\text{mm}}$ auf den Balken drückt. Die daraus entstehende zusätzliche Gewichtskraft wird von der Gewichtskraft der für den Versuch verwendeten Gewichte abgezogen. Dies liegt daran, dass die Ruhelage (es hängen 0 g am Balken) als Ausgangsposition angenommen werden. Hierbei wird der Balken mit der gespannten Messuhr belastet. Beim zusätzlichen Belasten

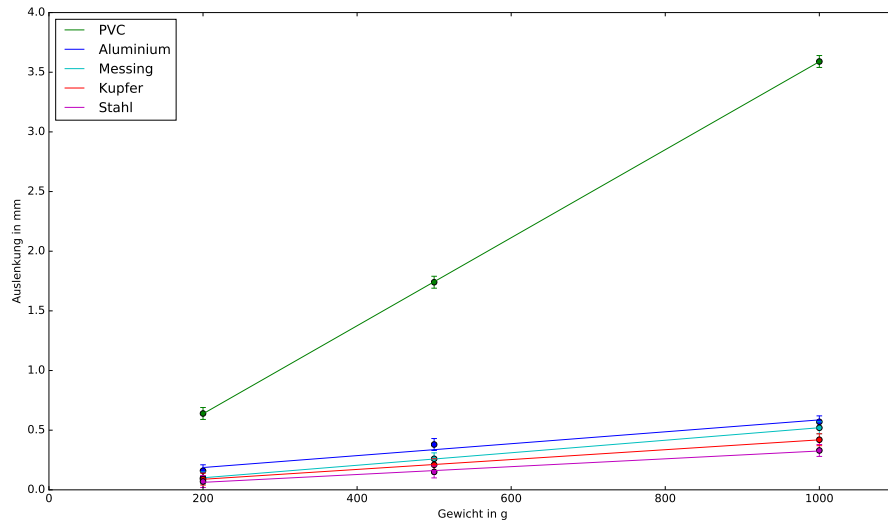


Abbildung 1.1: Messungen der Auslenkungen und lineare Regression über die Messpunkte

des Balkens wird der Bolzen der Messuhr ausgefahren und die von der Messuhr auf den Balken ausgeübte Kraft verringert sich. Für die Berechnung der Kraft, die auf den Balken wirkt, gilt in Abhängigkeit von der Auslenkung s :

$$F = (M_{\text{Gewicht}} - 3,6 \cdot s) \cdot \frac{9,81}{1000} \text{N} \quad (1.1)$$

Tabelle 1.2: Kräfte in N die auf den Balken wirken

Gewicht in g	PVC	Alu	Stahl	Kupfer	Messing
0	0	0	0	0	0
200	1,939	1,956	1,959	1,958	1,958
500	4,843	4,891	4,899	4,897	4,895
1000	9,683	9,783	9,798	9,795	9,791

Für die Bestimmung des Elastizitätsmoduls gilt:

$$s = \frac{L^3 \cdot F}{4 \cdot E \cdot b \cdot d^3} \quad (1.2)$$

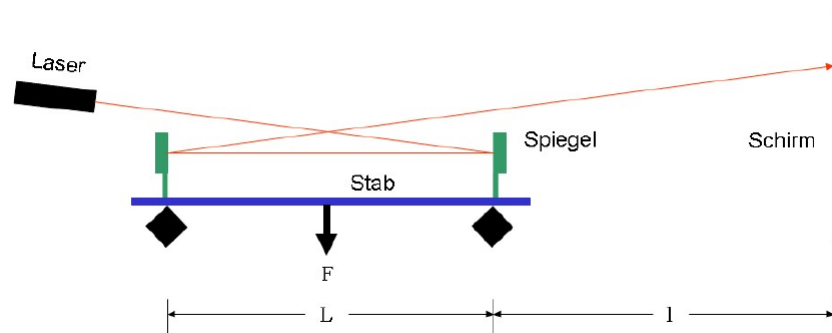
$$E = \frac{L^3 \cdot F}{4 \cdot s \cdot b \cdot d^3} \quad (1.3)$$

Dabei ist $d = (6,0 \pm 0,5) \text{ mm}$ die Dicke des Balkens und $b = (25,0 \pm 0,5) \text{ mm}$ die Tiefe des Balkens. $L = (450,0 \pm 0,5) \text{ mm}$ ist der Abstand zwischen den Schneiden, auf denen der Balken aufliegt und s ist die Auslenkung, die vom Gewicht abhängig ist.

Die Bestimmung des Elastizitätsmoduls wird hier zuerst für alle Einzelmessungen durchgeführt. Aus den daraus resultierenden Ergebnissen werden der Mittelwert und die Standardabweichung bestimmt. Diese Aufgabe wurde mittels eines selbstgeschriebenen Python-Skriptes erledigt. Das Ergebnis ist in 1.3 zu finden.

Tabelle 1.3: Elastizitätsmodule aus dem Biegevorschub für alle Einzelmessungen sowie deren Mittelwert und Standardabweichungen in GPa

	PVC	Alu	Stahl	Kupfer	Messing
1. Messung	12,784	51,583	118,096	91,819	82,622
2. Messung	11,743	54,306	137,804	98,388	79,439
3. Messung	11,379	55,032	125,262	98,388	79,439
Mittelwert	11,968	53,640	127,054	96,199	80,500
Standardabweichung	0,595	1,484	8,144	3,096	1,500

**Abbildung 1.2:** Prinzipskizze zur Aufgabe, aus der Aufgabenstellung entnommen

1.1.4 Ausblick

Bei der Versuchsdurchführung ist aufgefallen, dass die Genauigkeit der von der Messuhr bestimmten Auslenkung davon abhängig ist, wie genau das Gewicht zentriert auf dem Balken aufliegt. Befindet es sich nicht mittig zur Tiefe, so erfährt der Balken neben der Auslenkung nach Unten auch eine Torsion zur Seite. Ist die Messuhr nun ebenso ungenau zentriert, so kann die Auslenkung des Balkens nicht sehr präzise ermittelt werden. Deshalb wurde bei der Durchführung darauf geachtet, dass die Gewichte und die Messuhr möglichst zentriert sind.

1.2 Versuchsteil 2

1.2.1 Aufgabe

In diesem Teil des Praktikums wurde erneut versucht, das Elastizitätsmodul von denselben Materialien wie zuvor zu bestimmen. Dazu wurden die Balken wieder mit denselben Gewichten beschwert. Diesmal befanden sich an den Balkenenden Spiegel, welche einen Laserstrahl reflektierten und diesen an die Wand hinter der Apparatur lenkten. Durch die Biegung des Balkens wurde der Auftreffpunkt des Laserstrahls an der Wand verschoben, woraus wieder das Elastizitätsmodul bestimmt werden soll.

1.2.2 Durchführung

Für diesen Versuch wurden die Schneiden, auf denen der Balken platziert wurde, näher zusammengeschoben, weil an den Rändern noch Platz zur Befestigung der Spiegel benötigt wurde. Der Abstand zwischen den Schneiden betrug nun $L = (400,0 \pm 0,5) \text{ mm}$. Vor Beginn der Messungen wurde noch der Abstand zwischen dem Spiegel in Wandnähe und der Wand selber bestimmt. Dieser betrug $l = (1958 \pm 1) \text{ mm}$. Die Dicke $d = (6,0 \pm 0,5) \text{ mm}$ und Tiefe

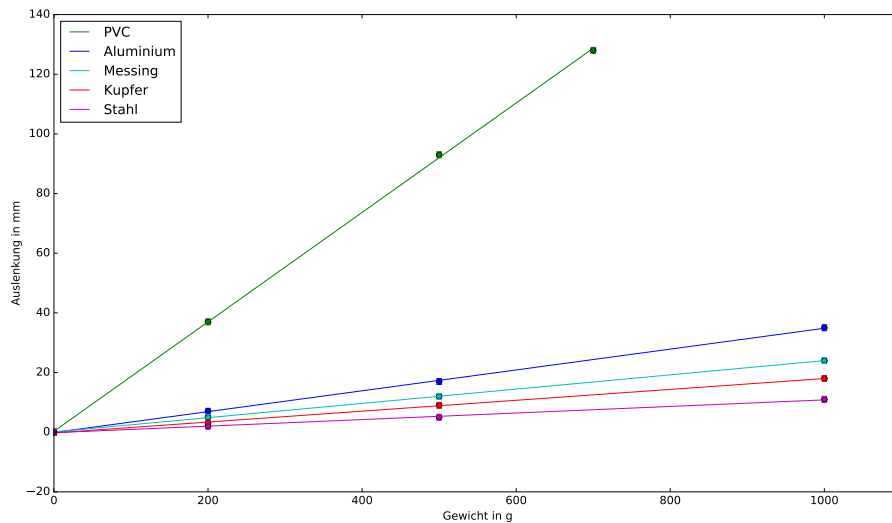


Abbildung 1.3: Messungen der Auslenkungen des Lichtpunktes und lineare Regression über die Messpunkte

$b = (25,0 \pm 0,5)$ mm der Balken ist aus der vorherigen Versuchsreihe bekannt. Die Verschiebung des roten Laserpunktes auf der Wand wurde auf Millimeterpapier aufgetragen und anschließend abgelesen:

Tabelle 1.4: Verschiebung des Laserpunktes auf der Wand in mm

Gewicht in g	PVC	Alu	Stahl	Kupfer	Messing
0	0	0	0	0	0
200	37	7	2	3	5
500	93	17	5	9	12
700	128	-	-	-	-
1000	-	35	11	18	24

Zu 1.4 sei anzumerken, dass der Laserpunkt bei der Verwendung von PVC und einem Gewicht mit einer Masse von 1000g, nicht mehr auf der Wand abzulesen war. Dies liegt daran, dass der PVC-Balken so weit gekrümmt war, dass das Licht nicht mehr vom zweiten Spiegel zur Wand reflektiert wurde. Um dennoch einen dritten Messwert für PVC zu erhalten, wurden das 200g und das 500g Gewicht gemeinsam an dem Balken gehängt, um mit einem Gesamtgewicht von 700g eine Krümmung zu erzeugen, bei der der Auftreffpunkt des Lasers noch an der Wand zu sehen war.

1.2.3 Auswertung

Für die Verschiebung des Laserpunktes um den Winkel α gilt:

$$\alpha = \frac{3 \cdot L^3 \cdot F}{4 \cdot E \cdot b \cdot d^3} \quad (1.4)$$

Weiterhin gilt für den Winkel α in Abhängigkeit von der Verschiebung s :

$$s = 2 \cdot \alpha \cdot L + 4 \cdot \alpha \cdot (L + l) \quad (1.5)$$

$$s = 2 \cdot \alpha \cdot (L + 2 \cdot (L + l)) \quad (1.6)$$

$$s = 2 \cdot \alpha \cdot (3L + 2l) \quad (1.7)$$

$$2 \cdot \alpha = \frac{s}{3L + 2l} \quad (1.8)$$

$$\alpha = \frac{s}{6L + 4l} \quad (1.9)$$

Wird nun 1.4 nach dem Elastizitätsmodul umgestellt, so gilt:

$$E = \frac{3 \cdot L^2 \cdot F}{4 \cdot \alpha \cdot b \cdot d^3} \quad (1.10)$$

$$= \frac{3 \cdot L^2 \cdot F}{4 \cdot \frac{s}{6L+4l} \cdot b \cdot d^3} \quad (1.11)$$

$$= \frac{3 \cdot L^2 \cdot F}{4 \cdot b \cdot d^3} \cdot \frac{6L + 4l}{s} \quad (1.12)$$

$$= \frac{3 \cdot L^2 \cdot F \cdot (6L + 4l)}{4 \cdot s \cdot b \cdot d^3} \quad (1.13)$$

Für weiteres Vorgehen wird die auf den Balken wirkende Kraft benötigt. Diese besteht bei dem Versuchsaufbau nur aus der Gewichtskraft der an dem Balken hängenden Masse.

$$F = m \cdot g = m \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad (1.14)$$

Eingesetzt in 1.13 folgt daraus:

$$E = \frac{3 \cdot L^2 \cdot m \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (6L + 4l)}{4 \cdot s \cdot b \cdot d^3} \quad (1.15)$$

$$E = \frac{3 \cdot L^2 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (6L + 4l)}{4 \cdot b \cdot d^3} \cdot \frac{m}{s} \quad (1.16)$$

Nun können aus den Messergebnissen die Werte für das Elastizitätsmodul berechnet werden. Dies erfolgt der Einfacherheit halber wieder mit einem selbstgeschriebenen Python-Programm. Die Ergebnisse sind in 1.5 zu finden.

Tabelle 1.5: Elastizitätsmodule aus dem Spiegelversuch für alle Einzelmessungen sowie deren Mittelwert in GPa

	PVC	Alu	Stahl	Kupfer	Messing
1. Messreihe	12,035	63,708	222,981	148,654	89,192
2. Messreihe	11,988	65,582	222,981	123,878	74,327
3. Messreihe	12,194	63,708	202,710	123,878	92,908
Mittelwert	12,072	64,332	216,224	132,136	85,475
Standardabweichung	0,0881	0,8834	9,55584	11,6795	8,0279

1.2.4 Ausblick

Aufgefallen ist bei diesem Versuch, dass die Messergebnisse von der genauen Position des Gewichtes beeinflusst wurden. War dieses auf dem zur Aufhängung vorgesehenen Dorn nicht mittig platziert, so konnte eine Torsion des Balkens beobachtet werden, da der

Auftreffpunkt des Lasers neben einer Ablenkung nach unten auch eine Ablenkung zur Seite erfuhr.

Eine weitere Fehlerquelle, die hier anzumerken sei, war die Größe des durch den Lasers erzeugten Auftreffpunktes. Auf dem Millimeterpapier hatte dieser Einen Durchmesser von 4 mm. Zwar war ein deutlich hellerer Mittelpunkt erkennbar, verglichen mit dem Rest des Auftreffpunktes, dennoch wird hier eine Unsicherheit von 2 mm angenommen, was dem Radius des Auftreffpunktes entspricht.

1.2.5 Ausblick über den gesamten Versuch

Vergleicht man die gemessenen Ergebnisse mit den Literaturwerten, so zeigt die Bestimmung des Elastizitätsmodul über die Ablenkung des Laserstrahls eine höhere Genauigkeit als die Bestimmung über die Messung der Auslenkung. Ganz besonders erkennbar war dies bei dem Elastizitätsmodul von Stahl. Dies liegt daran, dass bei dem Versuchsaufbau der Zusammenhang $s \ll (L + l)$ dazu führt, dass ein kleiner Fehler beim Ablesen der Ablenkung des Laserstrahls viel weniger ins Gewicht fällt als ein kleiner Fehler beim Auslesen der Biegung an der Messuhr. Wäre der Abstand zwischen dem Versuchsaufbau und der Wand noch größer, so könnte man das Elastizitätsmodul noch genauer bestimmen. Den Vergleich mit den Literaturwerten zeigt Tabelle 1.6. Der Wert von Messing stammt von [Mes], alle anderen Werte sind aus [Dem06, Seite 172] zitiert.

Dabei seien zwei Dinge für Messing und PVC anzumerken. Bei Messing handelt es sich um eine Legierung aus Kupfer und Zinn. Je nach Gehalt der vermengten Stoffe fällt das Elastizitätsmodul härter oder weicher aus. Aus diesem Grund befindet sich in Tabelle 1.6 ein Wertebereich anstelle eines einzelnen Wertes in der Spalte für Messing. PVC wiederum hat sich schon im Versuch eigenwillig verhalten. So scheint die Tatsache recht nahe zu liegen, dass das Elastizitätsmodul von PVC produktionsbedingt ist. Für die Produktion von PVC werden Weichmacher verwendet, welche das Elastizitätsmodul höher oder niedriger ausfallen lassen. Außerdem wird bei PVC zwischen Hart-PVC und Weich-PVC unterschieden. So wie es scheint, bezieht sich der gefundene Literaturwert auf Weich-PVC. Weil es sich bei PVC um einen synthetischen Stoff handelt, ist nicht auszuschließen, dass das Elastizitätsmodul altersabhängig ist. So könnte das Material mit dem Alter aushärten und spröder werden.

Tabelle 1.6: Vergleich der Ergebnisse mit den Literaturwerten, alle Angaben in GPa

	PVC	Alu	Stahl	Kupfer	Messing
1. Versuch	11,968	53,640	127,054	96,199	80,500
2. Versuch	12,072	64,332	216,224	132,136	85,475
Literaturwert	3	75	215	125	78 - 123

2. Versuch 2

2.1 Aufgabe

Auch bei diesem Versuch soll das Young-Modul E verschiedener Materialien bestimmt werden. Hier wird jedoch eine andere Methode angewendet, die Bestimmung über die Schallgeschwindigkeit v in einem Medium. Aus der Wellengleichung folgt:

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (2.1)$$

Wobei ρ die Dichte des Materials ist.

2.2 Durchführung

Um die Dichte ρ zu bestimmen, müssen die Metallstäbe ausgemessen werden. Dabei wird die Länge l und der Durchmesser d beim Versuch bestimmt, die Masse m der Stäbe war in der Vorbereitung gegeben. In der Folgenden Tabelle 2.1 sind die Messwerte aufgetragen: Um eine Schallwelle in den Stäben auszulösen, werden diese mit einer kleinen Stahlkugel,

Tabelle 2.1: Die Abmessungen der Metallstangen für Versuch 2

Material	Durchmesser in cm	Länge in cm
Messing	1	145,9
Stahl	1	145,9
Aluminium	1	144,7
PVC	1	145,9
Kupfer	1	145,9

die an einem Pendel hängt, angestoßen. Die Schallwelle bewegt sich bis zum anderen Ende, wo ein kleiner Piezo-Sensor sitzt, der dann eine Potentialdifferenz an ein angeschlossenes Oszilloskop überträgt. Um die Piezo-Kristalle nicht zu zerstören, darf die Kugel nur sehr schwach ausgelenkt werden.

Trifft die Schallwelle das Ende der Stange, wird sie reflektiert und wandert wieder zum anderen Ende, wo sich der Vorgang wiederholt, bis die Schwingung wieder abklingt. Während das passiert, zeichnet das Oszilloskop die Schwingungen am Piezo auf. Nach der Durchführung werden die Messwerte in eine CSV-Datei exportiert.

2.3 Auswertung

Zunächst wird die Dichte aller Materialien bestimmt. Für die Dichte ρ gilt:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{l \cdot A} = \frac{m}{l\pi r^2} \quad (2.2)$$

mit der Masse m , dem Volumen V , der Länge l , der Fläche A und dem Radius r , da es sich um Zylinder handelt.

Bei Ausrechnen ist noch zu beachten, dass die Längen um jeweils 1,3 cm verlängert werden müssen, da dieses Stück der Stange vom Gehäuse des Sensors umgeben ist.

Ausrechnen aller Dichten ergibt:

Tabelle 2.2: Dichte der Materialien

Material	Dichte in kg/m^3
Messing	8511,33
Stahl	8009,64
Aluminium	2851,70
PVC	1444,50
Kupfer	8926,51

Der andere Hauptteil dieses Versuches besteht darin, aus den Daten des Oszilloskops die Schallgeschwindigkeit im jeweiligen Medium zu bestimmen. Dafür muss zunächst die Dauer zwischen den Schallimpulsen bestimmt werden. Das wird über eine Autokorrelationsanalyse der CSV-Daten gemacht, die mit dem Oszilloskop aufgezeichnet wurden.

Zunächst werden die Daten mit einem Mittelwertfilter etwas geglättet, danach wird die Autokorrelation auf die geglätteten Daten angewendet. Letztlich werden die Peaks der Autokorrelationsfunktion bestimmt. Die Pausen zwischen diesen sind die gesuchten Zeiten. Mit allen erkannten Werten wird dann ein Mittelwert errechnet, welcher im weiteren Verlauf verwendet wird. Die Auswertung aller Autokorrelationsfunktionen liefert 2.3. Eine Grafische Visualisierung des Autokorrelations-prozesses wird in 2.1 dargestellt.

Tabelle 2.3: Mittelwert der Wellenlaufzeit in unterschiedlichen Medien

Material	Mittlere Wellenlaufzeit in ms
Messing	0,904
Stahl	0,611
Aluminium	0,579
PVC	1,726
Kupfer	0,765

Mit den Werten für die Laufzeit und die Stablänge kann man die gesuchte Schallgeschwindigkeit v über $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ ausrechnen. Δt ist hier die Laufzeit, Δs ist jedoch die doppelte Stablänge, da der Schallimpuls den Stab doppelt durchläuft, bis er wieder am Sensor angekommen ist. Um final das Young-Modul E zu bestimmen, muss die anfängliche Formel

Tabelle 2.4: Schallgeschwindigkeiten in unterschiedlichen Medien

Material	Schallgeschwindigkeit in m/s
Messing	3256,63
Stahl	4818,33
Aluminium	5043,17
PVC	1705,67
Kupfer	3848,36

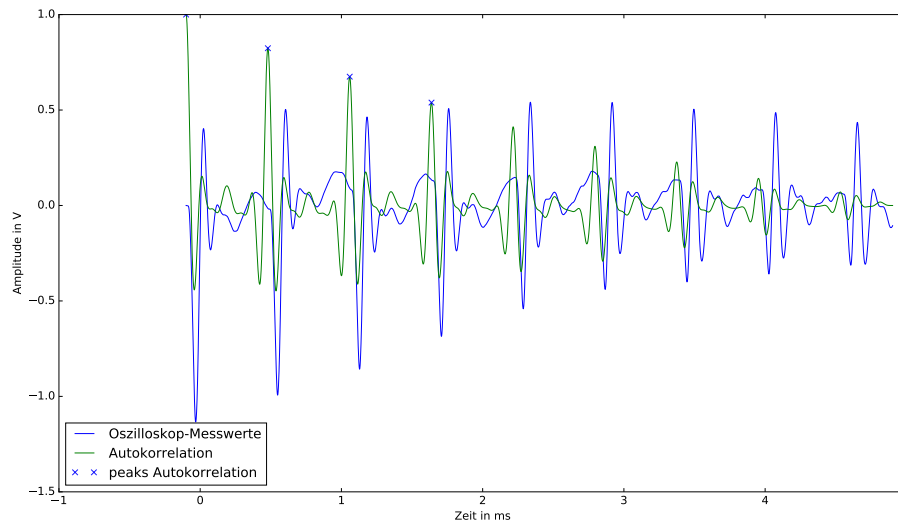


Abbildung 2.1: Messwerte des Oszilloskops und Autokorrelation mit markierung der Peaks in der Kurve

noch danach aufgelöst werden und die Werte eingesetzt werden:

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \implies E = v^2 \cdot \rho \quad (2.3)$$

Tabelle 2.5: E-Modul durch Schallgeschwindigkeit

Material	E-Modul in GPa
Messing	90,27
Stahl	185,95
Aluminium	72,53
PVC	4,20
Kupfer	132,20

2.4 Ausblick

Auch auf diesem Weg ist eine Berechnung der E-Module mit einer anständigen Präzision ebenfalls möglich. Die gemessenen Werte liegen alle sehr nahe bei den Literaturwert. Insbesondere die automatisierte Auswertung über Autokorrelation erleichtert hier das präzise Auswerten. Die vorhanden Fehler stecken vermutlich hauptsächlich in der Bestimmung der Dichte, da hier eine quadratische Abhängigkeit zum Durchmesser besteht, der leider deutlich ungenauer als die Laufzeit der Welle bestimmt wird. Tabelle 2.6 Zeigt den Vergleich mit den Literaturwerten. Der Wert von Messing stammt von [Mes], alle anderen Werte sind aus [Dem06, Seite 172] zitiert.

Hier wurden wieder dieselben Literaturwerte wie in im Ausblick über den gesamten Versuch 1 verwendet. Aus diesem Grund gelten auch dieselben Anmerkungen zu den Materialien PVC und Messing, die im Ausblick über den gesamten Versuch 1 schon erwähnt wurden. Dazu soll trotzdem hinzugefügt werden, dass bei diesem Versuch der Wert von PVC deutlich näher an dem Literaturwert lag. Dies kann daran liegen, dass es sich bei hier der verwendeten PVC-Stange um Weich-PVC gehandelt hat.

Tabelle 2.6: Vergleich der Ergebnisse mit den Literaturwerten, alle Angaben in GPa

Material	Versuchsergebnis	Literaturwert
Messing	90,27	78 - 123
Stahl	185,95	215
Aluminium	72,53	75
PVC	4,20	3
Kupfer	132,20	125

3. Versuch 3

3.1 Aufgabe

Beim dritten Experiment geht es darum, dass das Schubmodul G für ein Material in einer dynamischen Messung bestimmt werden soll. Dazu wird eine zylindrische Stange mit Länge L und Radius R eines Materials, in diesem Fall Aluminium, senkrecht aufgehängt, mit dem oberen Ende fest eingespannt. Eine Scheibe, welche zusätzlich mit 0, 2 und 4 Gewichten belastet wird, ist am unteren Ende montiert. Aus der Periodendauer T der Schwingungen soll nun das Trägheitsmoment θ_{Scheibe} der Scheibe und das Schubmodul G von Aluminium bestimmt werden. Dabei gilt:

$$G = \frac{8\pi L}{R^4} \cdot \frac{\theta}{T^2} \quad (3.1)$$

Wobei θ das gesamte Trägheitsmoment ist. Hier setzt sich θ zusammen als Summe von θ_{Scheibe} und $\theta_{\text{zusätzlich}}$.

3.2 Durchführung

Der Stab, mit dem das Experiment durchgeführt wurde, hat eine Länge L von 80,0 cm, einen Durchmesser von 5,00 mm und besteht aus Aluminium.

Bei der eigentlichen Messung wurde der Teller von Hand ausgelenkt, dann losgelassen und während dem Loslassen die Zeitmessung über eine Stoppuhr gestartet. Um die Genauigkeit der Messung zu erhöhen, wurde immer die Zeit für 10 komplette Schwingungen gestoppt. Die Auslenkung wurde klein gehalten, um die Stange nicht zu zerstören und um nur harmonische Schwingung zu beobachten, da unharmonische Terme für kleine Schwingung klein sind. Da der Mitteldurchgang des Tellers schwer zu erkennen war, wurde immer an einem der Wendepunkte gemessen und mitgezählt.

Diese Messmethode wurde für die Konfigurationen mit 0, 2 und 4 Zusatzgewichten jeweils fünf mal wiederholt, was zu den folgenden 15 Messwerten geführt hat:

Tabelle 3.1: Messwerte der Torsionsschwingung

Anz. Zusatzmassen	T_1 in s	T_2 in s	T_3 in s	T_4 in s	T_5 in s
0	5,39	5,18	5,62	5,56	5,57
2	10,90	10,84	10,96	10,99	11,02
4	14,49	14,32	14,44	14,46	14,43

3.3 Auswertung

Um mit den in Tabelle 3.1 festgehaltenen 15 Messwerte weiterzurechnen, werden aus diesen zunächst Mittelwerte \bar{T} über alle 5 Messungen gebildet und anschließend eine

Standardabweichung σ für jede der Periodendauern bestimmt.

Der Mittelwert \bar{T} ist das arithmetische Mittel und gegeben durch:

$$\bar{T} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_n \quad (3.2)$$

Die Varianz σ der Messreihe ist gegeben durch:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (T_n - \bar{T})^2} \quad (3.3)$$

Ausrechnen für alle 3 Konfigurationen liefert den Mittelwert und die jeweilige Standardabweichung:

Tabelle 3.2: Mittelwerte und Standardabweichung von 10 Torsionsschwingungen

Anz. Zusatzmassen	\bar{T} in s	σ in s
0	5,464	0,1809
2	10,942	0,0723
4	14,428	0,0646

Um die Werte für eine einzelne Periodendauer und deren Standardabweichung zu erhalten, werden die Werte in Tabelle 3.2 noch durch 10 geteilt, da immer 10 Perioden gemessen wurden. Es ergibt sich:

Tabelle 3.3: Mittelwerte und Standardabweichung skaliert auf eine Schwingung

Anz. Zusatzmassen	\bar{T} in s	σ in s
0	0,5464	0,01809
2	1,0942	0,00723
4	1,4428	0,00646

Ebenfalls wichtig zu wissen ist, welches zusätzliche Trägheitsmoment durch das Auflegen der Zylindergewichte hinzugefügt wird. Dieses setzt sich aus dem Trägheitsmoment um die Symmetrieachse und einem zusätzlichen Anteil, der sich mit dem Satz von Steiner berechnen lässt, zusammen:

$$\theta = \theta_{\text{Zylinder}} + \theta_{\text{Steiner}} = \frac{1}{2}mr^2 + md^2 = m \left(\frac{1}{2}r^2 + d^2 \right) \quad (3.4)$$

Wobei m die Masse des Zylinders ist, r der Durchmesser und d der Abstand zur Symmetrieachse ist. m war in der Versuchsbeschreibung mit $m = 837 \text{ g} = 0,837 \text{ kg}$ gegeben und d war mit $d = 110 \text{ mm} = 0,11 \text{ m}$ gegeben. Mit dem Messschieber wurde der Durchmesser des Zylinder zu $69,8 \text{ mm}$ bestimmt. Der Radius beträgt die Hälfte des Durchmessers, also folglich $r = 34,9 \text{ mm} = 0,0349 \text{ m}$.

Mit diesen Informationen lässt sich das Trägheitsmoment eines einzelnen Zylinders ausrechnen. Es ergibt sich:

$$\theta = m \left(\frac{1}{2}r^2 + d^2 \right) = 0,837 \text{ kg} \left(\frac{1}{2}0,0349^2 \text{ m}^2 + 0,11^2 \text{ m}^2 \right) \approx 0,01064 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad (3.5)$$

Da die in der Versuchsbeschreibung gegebenen Werte ohne Ungenauigkeit gegeben waren, wird an dieser Stelle auf eine weitere Fehlerbetrachtung in Form von Fehlerbalken für θ

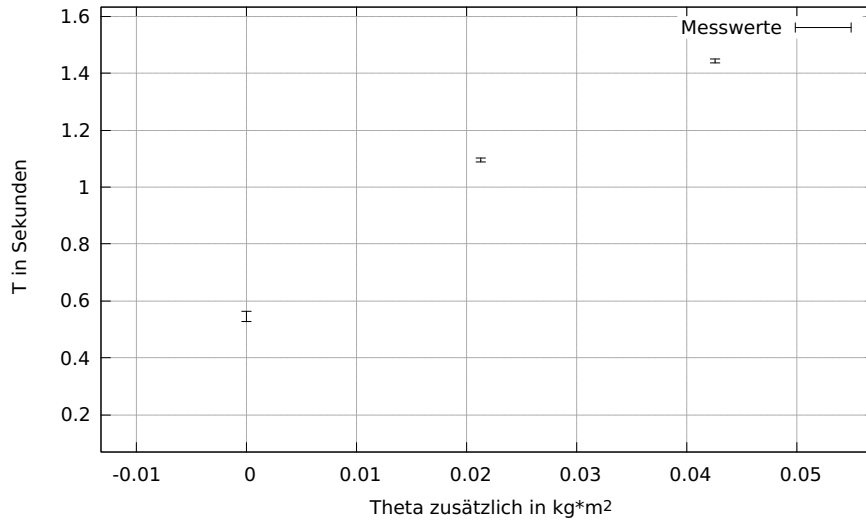


Abbildung 3.1: Die gemessene Zeit T gegen das jeweils aufgelegte Trägheitsmoment $\theta_{\text{zusätzlich}}$ aufgetragen, mit Fehlerbalken

verzichtet.

Da nun sowohl die Periodendauer T als auch das Trägheitsmoment $\theta_{\text{zusätzlich}}$, welches durch die Massestücke hinzugefügt wird, bekannt sind, können wir T gegen $\theta_{\text{zusätzlich}}$ auftragen. Das ist in Abbildung 3.1 zu sehen. Die Abbildung 3.1, welche zusätzlich die Fehlerbalken einer Standardabweichung enthält, ist zwar anschaulich, aber nicht wirklich brauchbar. Bei Blick auf die Formel, mit der das Schubmodul G bestimmt werden kann, fällt auf, dass T^2 linear von θ abhängt:

$$G = \frac{8\pi L}{R^4} \cdot \frac{\theta}{T^2} \implies T^2 = \theta \cdot \frac{8\pi L}{GR^4} \quad (3.6)$$

Um das zu nutzen, müssen die Messwerte linearisiert werden. Dafür wird zu jedem Wert für T ein Wert T^2 berechnet. In diesem Fall wird der Abbildung 3.2 durch Einzeichnen einer Regressionsgeraden noch viel weiter hilfreich. Der Fit der Regression für Abbildung 3.2 gibt auch die Parameter der Regressionsgeraden f an. Die Geradengleichung aus dem Fit lautet:

$$f(\theta) = 0,30094 \text{ s}^2 + 41,8966 \frac{\text{s}^2}{\text{kg} \cdot \text{m}^2} \cdot \theta \quad (3.7)$$

Die Steigung der Regressionsgeraden entspricht dem Wert des Quotienten $\frac{T^2}{\theta}$, da die Gerade, auf der die Werte von $\theta_{\text{zusätzlich}}$ liegen parallel zu der Geraden von θ verläuft, also haben beide dieselbe Steigung und sind nur verschoben. Damit lässt sich final G bestimmen:

$$G = \frac{8\pi L}{R^4} \cdot \frac{\theta}{T^2} = \frac{8\pi L}{R^4 \cdot \frac{T^2}{\theta}} = \frac{8\pi 0,8 \text{ m}}{0,0025^4 \text{ m}^4 \cdot 41,8966 \frac{\text{s}^2}{\text{kg} \cdot \text{m}^2}} \approx 12,29 \text{ GPa} \quad (3.8)$$

Auch wenn es auf diesem Weg nicht mehr notwendig ist, lässt sich trotzdem noch relativ einfach das Trägheitsmoment der Scheibe bestimmen. Es entspricht einfach der negativen Nullstelle der Regressionsgeraden, da an dieser Stelle gerade das Trägheitsmoment der Scheibe wieder abgezogen wird, sodass das gesamte Trägheitsmoment 0 ist. Grob kann man aus Abbildung 3.2 ablesen, dass $\theta_{\text{Scheibe}} \approx 0,007 \text{ kgm}^2$ beträgt, für den genauen Wert kann man die Regressionsgerade mit 0 gleichsetzen und nach $-\theta$ auflösen.

3.4 Ausblick

Der Literaturwert für das Schubmodul G von Aluminium liegt bei rund 26 GPa, laut [Dem06, Seite 172]. Das bedeutet, dass der hier gemessene Wert um ca. einen Faktor 2

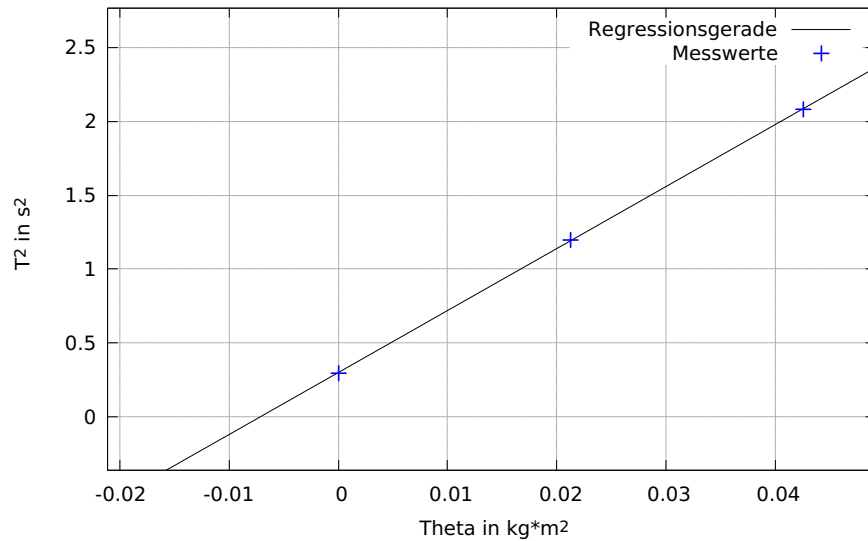


Abbildung 3.2: Die Quadrate der gemessenen Zeiten T^2 gegen das aufgelegte Trägheitsmoment $\theta_{\text{zusätzlich}}$ aufgetragen, mit Regressionsgerade

vom Literaturwert abweicht. Genaue Ursachen für diese Diskrepanz sind nicht bekannt, vermutlich ist irgendwo ein systematischer Fehler unterlaufen.

Eine alternative Formel, mit der G nur aus den letzten beiden Messungen bestimmt wird, liefert ungefähr denselben Wert, was für eine korrekte Auswertung und Regressionsmethode spricht:

$$G = \frac{8\pi L}{R^4} \cdot \frac{\theta_4 - \theta_2}{T_4^2 - T_2^2} = \frac{8\pi 0,8 \text{ m}}{0,0025^4 \text{ m}^4} \cdot \frac{0,02128 \text{ kg} \cdot \text{m}^2}{1,4428^2 \text{ s}^2 - 1,0942^2 \text{ s}^2} \approx 12,38 \text{ GPa} \quad (3.9)$$

Wobei der Index n dem Wert bei n Massen referenziert.

Mögliche andere Ursachen für Diskrepanz bei dieser Aufgabe sind das Material und der Radius.

Das genaue Material der Stange war leider nicht bekannt, da keine der Stangen beschriftet war. Das Material hatte subjektiv eine Haptik, die an Aluminium erinnert, jedoch gab es nichts, um die gemessene Legierung objektiv zu klassifizieren.

Auch die Abhängigkeit in der 4. Potenz vom Radius R der Stange trägt sicherlich zur Ungenauigkeit bei. Bereits ein systematischer Fehler in der Größenordnung von 0,4 mm beim Radius würde reichen, um den fehlenden Faktor von 2 zu erklären und zu übertreffen. Durch anlegen einer bekannten Kraft / eines bekannten Drehmoments ließe sich diese Messung auch statisch machen.

Literaturverzeichnis

- [Dem06] Demtröder, Wolfgang: *Experimentalphysik 1 - Mechanik und Wärme*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 4. Aufl. Auflage, 2006, ISBN 978-3-540-29934-9.
- [Mes] *Messing Wikipedia-Eintrag*. <https://de.wikipedia.org/wiki/Messing>. letzter Zugriff: 04.10.2019.