

Prak.: P1 Semester: WS19/20 Wochentag: Di Gruppennr.: 11

Name: Hohenstein Vorname: Michael

Name: Michel Vorname: Alexis

Emailadresse(n): alexis.michel@gmx.de, michael.hohenstein@gmx.de

Versuch: Kreisel (P1-5) Fehlerrech.: Nein

Betreuer: Julian Schaber Durchgeführt am: 19.11.19

Wird vom Betreuer ausgefüllt.

1. Abgabe am: _____

Rückgabe am: _____ Begründung:

2. Abgabe am: _____

Ergebnis: + / 0 / - Fehlerrechnung: Ja / Nein

Datum: _____ Handzeichen: _____

Bemerkungen:

Inhaltsverzeichnis

1 Aufgabe: Drehimpulserhaltung	1
1.1 Versuchsüberlegung	1
1.2 Versuchsdurchführung	1
2 Aufgabe: Freie Achsen	3
2.1 Aufbau	3
2.2 Beobachtung	3
2.3 Deutung	3
3 Aufgabe: Der kräftefreie Kreisel	4
3.1 Aufnahme der Messwerte	4
3.2 Analyse der Messwerte	6
3.3 Ausblick	7
4 Aufgabe: Die Dämpfung des Kreisels	8
4.1 Durchführung	8
4.2 Auswertung	8
5 Aufgabe: Der Kreisel unter dem Einfluss äußerer Drehmomente	13
5.1 Aufnahme der Messwerte	13
5.2 Analyse der Messwerte	13
6 Aufgabe: Die Hauptträgheitsmomente	16
6.1 Bestimmung von C	16
6.2 Bestimmung der Masse	16
6.3 Bestimmung von A und B	17
7 Aufgabe: Der Kreisel im beschleunigten Bezugssystem	18
Literaturverzeichnis	19

Abbildungsverzeichnis

3.1 Plots der gemessenen Rotations- und Nutationsfrequenzen, mit und ohne Zusatzgewichte	5
3.2 lineare Regression der Messwerte	7

4.1	Plots der gemessenen Rotationsfrequenzen (Kreisfrequenz) in Abhängigkeit von der Zeit	9
4.2	Regression der Messwerte	10
5.1	Plots der gemessenen Umlaufzeiten für die Präzessionsbewegungen in Abhängigkeit von den Rotationsfrequenzen	13
5.2	Regression der Messwerte	15

Tabellenverzeichnis

3.1	Messwerte für die Nutationsfrequenz in Abhängigkeit von der Rotationsfrequenz ohne Zusatzgewichte. Alle Messwerte in Hz	5
3.2	Messwerte für die Nutationsfrequenz in Abhängigkeit von der Rotationsfrequenz mit Zusatzgewichten. Alle Messwerte in Hz	6
3.3	aus der Regression bestimmte Parameter	7
4.3	aus der Regression bestimmte Parameter	10
4.1	Teil 1: Messwerte für die Rotationsfrequenz in Abhängigkeit von der Zeit bis zum Stillstand. Alle Messwerte in Hz	11
4.2	Teil 2: Messwerte für die Rotationsfrequenz in Abhängigkeit von der Zeit bis zum Stillstand. Alle Messwerte in Hz	12
5.1	Messwerte für die Umlaufdauer einer Präzessionsbewegung in Abhängigkeit von der Rotationsfrequenz.	14
5.2	aus der Regression bestimmte Parameter	14

1. Aufgabe: Drehimpulserhaltung

1.1 Versuchsüberlegung

Die hier durchgeführten Versuch eignen sich, um die Erhaltung des Drehimpulses nachzuweisen: Man setze ein Person auf einen Drehstuhl und gebe ihr einen rotierenden Fahrradkreisel. Die Rotationsachse des Fahrradkreisels sei während der Übergabe senkrecht zu der des Stuhls. Wird der Fahrradkreisel nun in so gedreht, dass sich seine Rotationsachse parallel zu der des Stuhls befindet, so beginnt die Person, sich in die entgegengesetzte Richtung zu drehen, da das Drehmoment erhalten sein muss.

Ein anderer Versuch, der die Existenz der Drehimpulserhaltung belegen kann, besteht darin, dass eine Person mit ausgestreckten Armen auf dem Drehstuhl sitzt. Zieht die Person ihre Arme an ihren Körper heran, so sollte sich die Rotationsfrequenz erhöhen. Werden die angezogenen Arme wiederum ausgestreckt, so sollte das Gegenteil eintreten: Die Rotationsfrequenz verringert sich.

1.2 Versuchsdurchführung

Die Durchführung des ersten Versuches zeigt das erwartete Verhalten. Wenn der Fahrradkreisel in die Position gebracht wird, in der seine Rotationsachse parallel zu der des Stuhls ist, dreht sich die Person auf dem Stuhl in die entgegengesetzte Richtung. Wird der Fahrradkreisel nun wieder in seine vorherige Position zurückbewegt, so hört der Stuhl auf, sich zu drehen, und bleibt stehen. Unabhängig davon, in welche Richtung der Fahrradkreisel sich dreht, wenn die Drehachsen von Stuhl und Fahrradkreisel parallel zueinander sind, dreht sich der Stuhl immer in die entgegengesetzte Richtung zu der der Fahrradkreisels.

Mathematisch lässt sich dieses Verhalten mit dem Drehmoment erklären. Der Kreisel übt ein Drehmoment

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} \quad (1.1)$$

aus. Auf der Drehachse des Stuhls ist das Drehmoment direkt nach der Übergabe des Fahrradkreisels identisch 0. Sind die Achsen nun parallel, wirkt auf dieser das Drehmoment des Fahrradkreisels. Das Drehmoment ist größer geworden. Da die Summe aber erhalten sein muss, beginnt der Stuhl, sich in die entgegengesetzte Richtung zu drehen. Dabei dreht er sich mit einer Geschwindigkeit, bei der sein eigenes Drehmoment betragsgleich mit dem Drehmoment des Fahrradkreisels ist.

$$\begin{aligned} |\vec{M}_{\text{Stuhl}}| &= |\vec{M}_{\text{Fahrradkreisel}}| \\ \vec{M}_{\text{Stuhl}} &= -\vec{M}_{\text{Fahrradkreisel}} \end{aligned}$$

Die Vorzeichen der Drehmomente sind verschieden, da die Drehrichtungen entgegengesetzt sind. Die Summe dieser Drehmomente ist erhalten.

$$\vec{M}_{\Sigma} = \vec{M}_{\text{Stuhl}} + \vec{M}_{\text{Fahrradkreisel}} = 0 \quad (1.2)$$

Der andere Versuch mit dem Ausstrecken und einziehen der Arme einer Person auf dem sich drehenden Stuhl, lässt sich über die Definition des Drehimpulses mit dem Trägheitsmoment Θ erklären:

$$\vec{L} = \Theta \cdot \vec{\omega} \quad (1.3)$$

Werden die Arme angezogen, so wird der Trägheitstensor Θ der Person kleiner. Demzufolge muss die Rotationsfrequenz $\omega = |\vec{\omega}|$ größer werden, damit das Drehmoment erhalten bleibt. Auch die Durchführung des zweiten Versuches lieferte das zu erwartende Verhalten: Beim Einziehen der Arme drehte sich die Person schneller und beim Ausstrecken der Arme drehte sich die Person langsamer. Falls bei der Durchführung des Versuches der gewünschte Effekt zu schwach ausfällt, um bemerkbar zu sein, kann dieser verstärkt werden, indem man der Person Gewicht gibt, welche sie in der Hand hält. Dadurch wird die Änderung des Trägheitstensors bei Ein- und Ausstrecken der Arme größer.

2. Aufgabe: Freie Achsen

2.1 Aufbau

An einem Elektromotor, welcher an einer Halterung aufgehängt ist, war eine rund 1 m lange, biegsame Metallstange mit Haken befestigt. An diesem Haken wurde eine quaderförmige Zigarrenkiste aus Holz, mit Ösen auf der Mitte jeder unterschiedlichen Seitenfläche, eingehängt. Für die Durchführung wurde der Motor dann eingeschaltet.

2.2 Beobachtung

Beim Aktivieren des Motors beginnt die Zigarrenkiste am anderen Ende des Stabes sich zu drehen. Wird nun die Kiste an der Öse am Mittelpunkt der größten Fläche aufgehängt, so dreht sich die Kiste um die Achse, normal zu der aufgehängten Fläche an der Stelle der Öse, welche durch den Stab, verlängert, identisch zu der Drehachse des Elektromotors ist. Die Rotation verhält sich relativ stabil.

Ein ähnliches Verhalten tritt ebenso bei der Wahl der Öse an der kleinsten Fläche der Schachtel auf, jedoch dreht diese in diesem Fall etwas instabiler als zuvor. Auffällig ist auch, dass die Schachtel so etwas schneller dreht, da das Hauptträgheitsmoment um diese Achse kleiner ist und deshalb die Last am Motor geringer ist.

Wird stattdessen die Öse an der dritten Fläche gewählt, welche größer als die kleinste, aber kleiner als die größte Fläche ist, so verhält sich die Rotation anders als zuvor. Beim langsamen Andrehen fängt die Schachtel an, zur Seite auszuschwenken und zu taumeln. Die Rotation erfolgt nicht durch die Achse senkrecht zur Fläche.

Bei weiterem Erhöhen der Spannung an dem Elektromotor und somit der Rotationsfrequenz, beginnt die Schachtel, sich so aufzustellen, dass die große Fläche danach parallel zum Boden ist. Bis zum Stehenbleiben der Drehbewegung bleibt die Schachtel in dieser Position. Die Rotation verhält sich zu diesem Zeitpunkt auch größtenteils stabil, jedoch eiert die Schachtel etwas, da sie nun nicht mehr über ihrem Schwerpunkt angedreht wird. Durch den elastischen Stab wird dies jedoch teilweise kompensiert, sodass die neue Drehachse fast mit der Drehachse um die größte Fläche übereinstimmt.

2.3 Deutung

In allen dreien Fällen wird um eine der drei Hauptträgheitsachsen der Zigarrenkiste gedreht. Bei der Rotation um die größte und um die kleinste Fläche wird um die stabilen Hauptträgheitsachsen der Kiste rotiert. Deshalb dreht sich die Kiste auch relativ stabil um diese Achsen, ohne zu taumeln oder sich aufzustellen.

Die Rotation um die große Fläche ist hier insbesondere stabil, da dieses Hauptträgheitsmoment am größten ist. Bei der Rotation um die kleinste Fläche ist das Trägheitsmoment minimal. Beide Fälle sind extremal, weshalb die Bewegung der Kiste stabil ist.

Die Bewegung um die mittlere Seitenfläche ist nicht extremal. Hier ist es für die Kiste energetisch günstiger, sich aufzustellen.

3. Aufgabe: Der kräftefreie Kreisel

3.1 Aufnahme der Messwerte

In diesem Versuchsteil wurde der Kreisel in Drehung versetzt. Mit einem Schlag auf den Kardanrahmen wurde eine Nutationsbewegung des Kreisels hervorgerufen. Dies wurde bei unterschiedlichen Rotationsfrequenzen durchgeführt. Gemessen wurden dabei die Rotationsfrequenz und die Nutationsfrequenz.

Die Rotationsfrequenz wurde durch einen Photosensor mit Schwanenhals gemessen, welcher auf den Kreisel gerichtet wurde und dort bei jeder Umdrehung, wenn das reflektierende Klebeband erkannt wurde, ausgelöst hat. Die Nutationsfrequenz wurde durch einen zweiten Photosensor gemessen, welcher auf reflektierende Folie auf dem äußeren Kardanrahmen ausgerichtet war. Beide Photosensoren wurden an den Frequenzzähler (Hameg HM8021-4) angeschlossen. Dieser hat bei jedem neuen Puls die Zeitdauer zum letzten Puls bestimmt und dessen Kehrwert, die Rotationsfrequenz, angezeigt. Mit einem Schalter konnte man kurzfristig beide Sensoren trennen, um die Werte zum Dokumentieren konstant zu halten.

Nach der ersten Durchführung wurde der Versuch ein weiteres mal durchgeführt, mit dem Unterschied, dass an dem Rahmen des Kreisels zwei Gewichte befestigt wurden.

Die Nutationsfrequenz über die Rotationsfrequenz aufgetragen ist für beide Messungen in Abbildung 3.1 zu sehen. Die Messwerte für beide Messreihen befinden sich in Tabelle 3.1 und Tabelle 3.2.

Die schwächer ansteigenden Messwerte (grün) sind aus der Messung mit Zusatzgewichten, während die stärker ansteigenden Messwerte (blau) aus der ersten Messung ohne Zusatzgewichte sind. Bei beiden Messreihen wurde für beide Frequenzen ein Fehler für die Messungen der Rotations- und Nutationsfrequenz von $\Delta f = 0,05 \text{ Hz}$ angenommen. Obwohl der Frequenzzähler laut Anleitung über eine deutlich höhere Präzision verfügt, wurde der Fehler so groß gewählt, weil bei der Durchführung der Messmethode deutliche Schwankungen in dem gewählten Toleranzbereich bei den Messwerten auf der Digitalanzeige des Messinstrumentes zu erkennen waren.

Tabelle 3.1: Messwerte für die Nutationsfrequenz in Abhängigkeit von der Rotationsfrequenz ohne Zusatzgewichte. Alle Messwerte in Hz

Rotationsfrequenz	Nutationsfrequenz
16.943	8.691
16.556	8.530
15.866	7.856
15.495	7.316
15.170	7.839
15.573	7.600
14.103	7.271
13.445	6.944
12.983	6.708
12.574	6.240
12.118	6.169
11.551	5.953
11.069	5.699
10.526	5.418
9.920	5.263
9.604	4.722
8.950	4.624
8.846	4.408
7.895	4.161
7.459	4.003
6.914	3.557
6.595	3.429
6.116	3.143
5.435	2.884
5.032	2.490

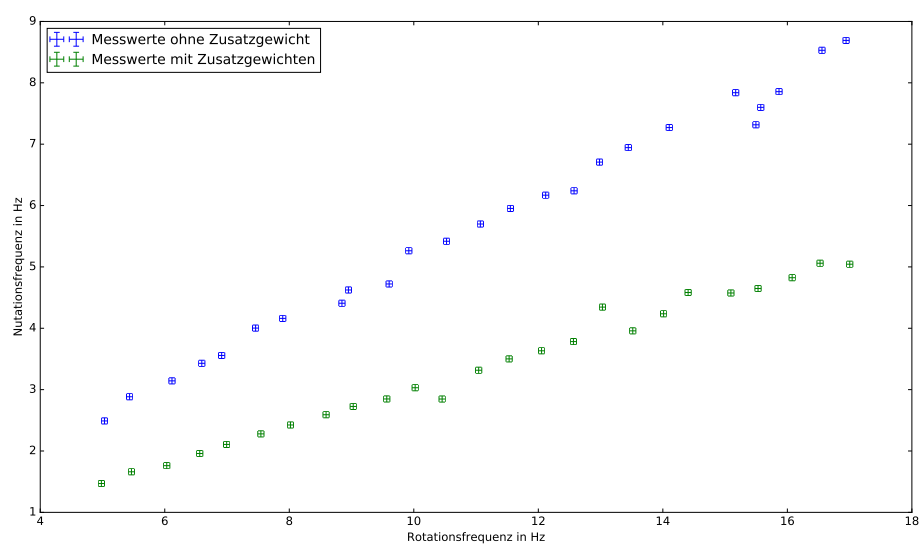


Abbildung 3.1: Plots der gemessenen Rotations- und Nutationsfrequenzen, mit und ohne Zusatzgewichte

Tabelle 3.2: Messwerte für die Nutationsfrequenz in Abhängigkeit von der Rotationsfrequenz mit Zusatzgewichten. Alle Messwerte in Hz

Rotationsfrequenz	Nutationsfrequenz
17.002	5.044
16.525	5.060
16.077	4.824
15.529	4.648
15.093	4.575
14.406	4.583
14.012	4.236
13.517	3.958
13.030	4.345
12.564	3.783
12.052	3.633
11.531	3.501
11.042	3.316
10.455	2.847
10.022	3.031
9.566	2.848
9.027	2.726
8.591	2.591
8.019	2.424
7.544	2.279
6.994	2.107
6.562	1.959
6.032	1.761
5.465	1.661
4.982	1.470

3.2 Analyse der Messwerte

Im Plot der Messwerte, Abbildung 3.1 ist gut zu sehen, dass die Messwerte aus beiden Messreihen jeweils ungefähr auf einer Geraden liegen. Allerdings lässt sich auch gut erkennen, dass es viele Ausreißer gibt, insbesondere in der ersten Messreihe ohne Zusatzgewichte. Das liegt vermutlich daran, dass es mit der verwendeten Methodik nicht wirklich einfach ist, den Wert zu bestimmen, da das Positionieren des Sensors auch teils relativ schwierig ist und etwas Übung erfordert. Nach dem Entfernen des ein- oder anderen Ausreißers ist es möglich, auf diese messwerte eine lineare Regression anzuwenden. Dabei wurden beide Messreihen mit einer Funktion der Form

$$f(x) = m \cdot x + c \quad (3.1)$$

angenähert. Ausserdem wurden einige Ausreißer unter den Messwerten, welche signifikant daneben lagen, bei der Regression nicht berücksichtigt. Die Ergebnisse der Regression sind in Abbildung 3.2 zu sehen. Die Messwerte, die in Abbildung 3.1 vertreten sind, aber bei der Regression fehlen, sind die Ausreißer, welche von der Regression ausgenommen wurden.

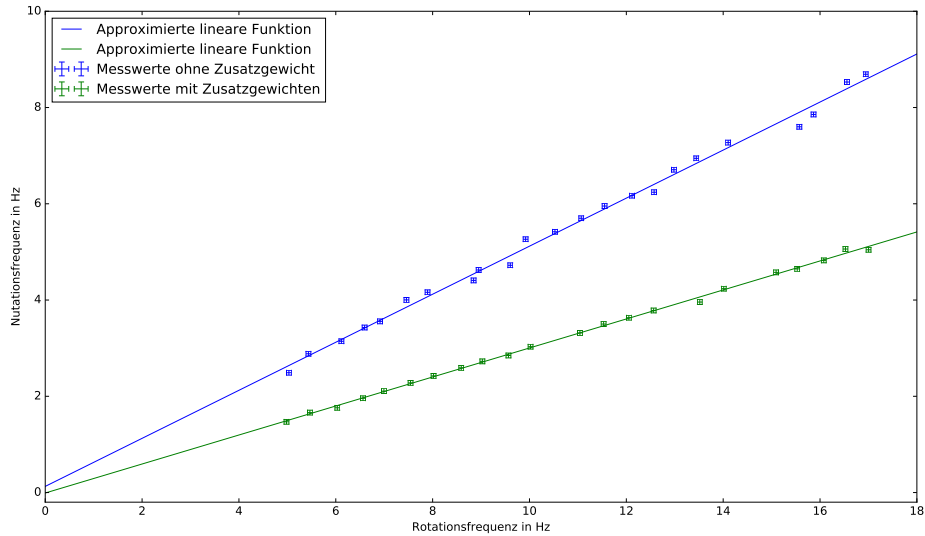


Abbildung 3.2: lineare Regression der Messwerte

Die aus der Regression bestimmten Parameter für die Regressionsfunktion sind Tabelle 3.3 zu entnehmen.

Tabelle 3.3: aus der Regression bestimmte Parameter

Parameter	m	c
Messreihe ohne Gewichte	$0,499 \pm 0,003$	$0,12 \pm 0,03$
Messreihe mit Gewichten	$0,301 \pm 0,002$	$-0,009 \pm 0,030$

3.3 Ausblick

Bei dieser Messung war es insbesondere schwer, den Sensor so aufzustellen, dass die Nutationsfrequenz zuverlässig gemessen werden kann. Oftmals wurde vom Frequenzzähler die doppelte Frequenz angezeigt, wenn der Sensor doppelt auf einem Durchgang ausgelöst hat. Teilweise war es auch schwer, den Sensor so zu positionieren, dass überhaupt etwas gemessen werden konnte. Aus diesem Grund sind auch einige Ausreißer unter den Messwerten entstanden.

4. Aufgabe: Die Dämpfung des Kreisels

4.1 Durchführung

In diesem Versuch wurde der Kreisel auf eine Frequenz von ungefähr 34 Hz beschleunigt. Durch Reibungsverluste rotiert der Kreisel nach einer Weile etwas langsamer. Deshalb wurde in einer weiteren Messreihe jede halbe Minute die Rotationsfrequenz bestimmt, bis der Kreisel stehen blieb, was nach 50 Minuten und 24 Sekunden der Fall war.

Die Zeitmessung wurde anfangs mit der Stoppuhr durchgeführt, später wurde dieser Teil des Experiments mit einem Bash-Skript automatisiert, welches alle 30 s ein akustisches Signal für das Umlegen des Schalters erzeugt hat. Alle Messwerte sind in den Tabellen ?? und 4.2 zu finden (Eine einzelne Tabelle wäre zu lang geworden für eine Seite).

Die Rotationsfrequenz wurde auf demselben Weg wie in Aufgabe 3 bestimmt. Auf den zweiten Sensor für die Bestimmung der Nutationsfrequenz konnte bei diesem Versuch jedoch verzichtet werden.

4.2 Auswertung

Die gemessenen Werte werden in Abbildung 4.1 graphisch dargestellt. Dabei wurde die Rotationsgeschwindigkeit in die zugehörige Kreisfrequenz mithilfe des Sachverhalts

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f \tag{4.1}$$

umgerechnet. Die Fehlerbalken auf der X-Achse setzen sind identisch zu denen in Abbildung 3.1, während bei der Messung der Zeit mit der Stoppuhr ein Fehler von $\pm 0,1$ min angenommen wird, welche ungefähr der Reaktionszeit der Person, welche die Messung durchgeführt hat, entspricht.

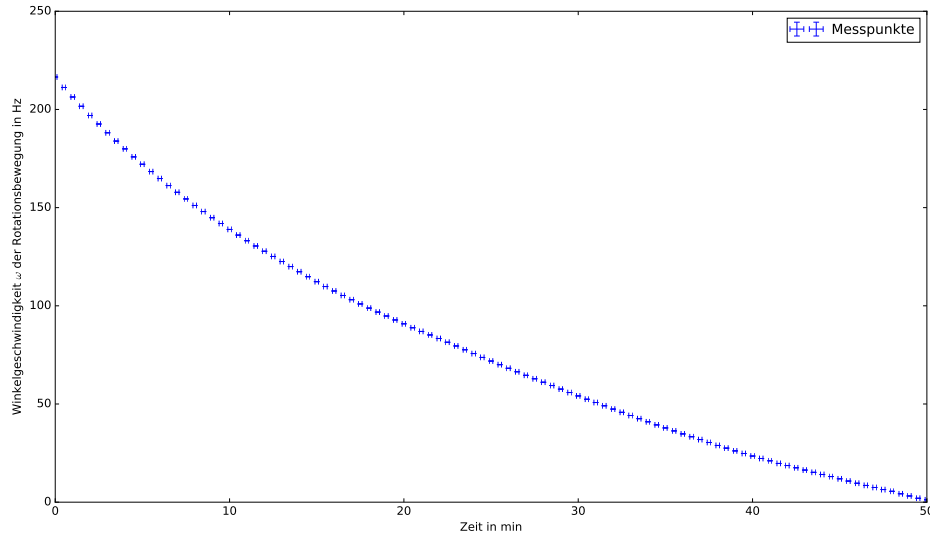


Abbildung 4.1: Plots der gemessenen Rotationsfrequenzen (Kreisfrequenz) in Abhängigkeit von der Zeit

Interessant an dieser Darstellung zu beobachten ist, dass der Verlauf weder exponentiell abfällt, noch sich durch eine lineare Funktion beschreiben lässt. In gewissen Bereichen lässt sich beides beobachten.

Bei hohen Geschwindigkeiten, am Anfang der Messung bis rund Minute 40, lässt sich ein sehr exponentieller Verlauf der Reibung beobachten. Nach Minute 40, bei niedrigeren Drehgeschwindigkeiten (ab ungefähr 5 Hz) lässt sich ein nahezu vollständig geradliniges Abnehmen der Drehgeschwindigkeit beobachten, weshalb der Kiesel dann auch relativ schnell zum stehen kommt; würde man den exponentiellen Verlauf vom Anfang fortsetzen, würde der Kiesel vermutlich noch deutlich länger drehen.

Ein möglicher Erklärungsversuch dafür, dass sich das Verhalten in zwei Bereiche zerlegen lässt, ist, dass unterschiedliche Arten von Reibung vorliegen.

Eine Reibung, die einen exponentiellen Verlauf verursacht, ist die beispielsweise die Stokes'sche Luftreibung. In diesem Fall ist das am Kiesel angreifende Reibungsmoment proportional zur Rotationsfrequenz; Es handelt sich um eine Differentialgleichung 1. Ordnung, die mit einer Exponentialfunktion gelöst wird. So könnte man den Exponentiellen Verlauf erklären.

Ein linearer Verlauf wird über eine konstante Reibung verursacht. In diesem Fall ist das angreifende Drehmoment konstant, also ist die Änderung (Ableitung) der Drehfrequenz konstant. Eine konstante Reibung könnte beispielsweise in den Kugellagern der Aufhängung auftreten.

Im jeweils anderen Verlauf sind die entsprechenden Reibungen dann so klein, dass diese vernachlässigt werden können und nicht weiter auffallen.

Die Messwerte in Abbildung 4.1 werden mit einer Funktion der Form

$$f(t) = A \cdot e^{B \cdot t} + C \cdot t + D \quad (4.2)$$

approximiert. Das Ergebnis der Regression ist in Abbildung 4.2 zu sehen.

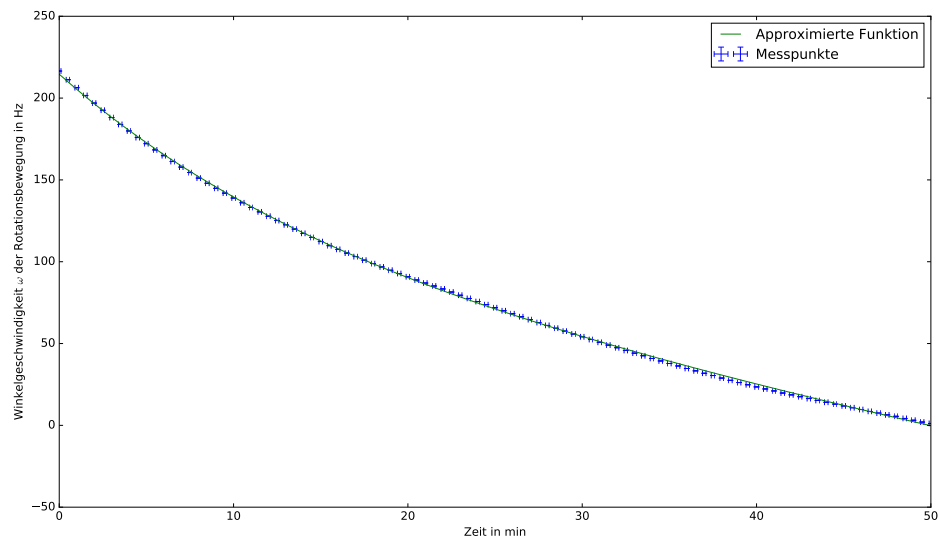


Abbildung 4.2: Regression der Messwerte

Die aus der Regression gewonnenen Parameter für die Regressionsfunktion sind in Tabelle 4.3 zu finden.

Tabelle 4.3: aus der Regression bestimmte Parameter

Parameter	Messreihe ohne Gewichte
A	$(110,6 \pm 2,8) \frac{1}{60 \cdot s^2}$
B	$(-0,066 \pm 0,002) \frac{1}{\min}$
C	$(-2,17 \pm 0,05) \frac{1}{60 \cdot s^2}$
D	$(104,2 \pm 3,0) \frac{1}{60 \cdot s^2}$

Tabelle 4.1: Teil 1: Messwerte für die Rotationsfrequenz in Abhängigkeit von der Zeit bis zum Stillstand. Alle Messwerte in Hz

Zeit in $n \cdot 30$ s	Rotationsfrequenz
0	34.461
1	33.616
2	32.841
3	32.091
4	31.342
5	30.651
6	29.936
7	29.268
8	28.637
9	27.987
10	27.395
11	26.790
12	26.228
13	25.657
14	25.118
15	24.579
16	24.049
17	23.551
18	23.056
19	22.587
20	22.111
21	21.647
22	21.189
23	20.765
24	20.343
25	19.917
26	19.503
27	19.090
28	18.677
29	18.275
30	17.871
31	17.473
32	17.117
33	16.755
34	16.409
35	16.067
36	15.730
37	15.407
38	15.089
39	14.769
40	14.453
41	14.135
42	13.843
43	13.555
44	13.267
45	12.967
46	12.661
47	12.349
48	12.041
49	11.738
50	11.439

Tabelle 4.2: Teil 2: Messwerte für die Rotationsfrequenz in Abhängigkeit von der Zeit bis zum Stillstand. Alle Messwerte in Hz

Zeit in $n \cdot 30$ s	Rotationsfrequenz
51	11.145
52	10.856
53	10.566
54	10.284
55	9.999
56	9.726
57	9.451
58	9.164
59	8.885
60	8.613
61	8.348
62	8.077
63	7.809
64	7.545
65	7.283
66	7.023
67	6.767
68	6.512
69	6.265
70	6.018
71	5.777
72	5.534
73	5.302
74	5.071
75	4.840
76	4.600
77	4.381
78	4.157
79	3.946
80	3.740
81	3.541
82	3.349
83	3.145
84	2.967
85	2.785
86	2.602
87	2.419
88	2.245
89	2.069
90	1.891
91	1.712
92	1.537
93	1.362
94	1.192
95	1.018
96	0.8848
97	0.6773
98	0.5031
99	0.3199
100	0.1902

5. Aufgabe: Der Kreisel unter dem Einfluss äußerer Drehmomente

5.1 Aufnahme der Messwerte

Bei diesem Versuch wurde an den Rahmen des Kreisels ein Stab angeschraubt, sodass der Kreisel neben seiner Rotationsbewegung eine Präzessionsbewegung vollführt. Dafür wurde in einer weiteren Messreihe die Umlaufdauer für die Präzessionsbewegung in Abhängigkeit von der Rotationsgeschwindigkeit gemessen. Die Messergebnisse sind in Abbildung 5.1 sowie in Tabelle 5.1 zu sehen.

Weil sich die Rotationsfrequenz während der Messung verringert, wurde diese einmal zu Beginn und einmal zum Ende einer Umdrehung der Präzessionsbewegung gemessen. Deshalb sind die Angaben im Plot in Abbildung 5.1 für die Rotationsfrequenz auch in Form von Balken dargestellt. Die rechte Kante des Balkens repräsentiert die Rotationsfrequenz zu Beginn und die linke Kante die Rotationsfrequenz zum Ende der Messung einer Umdrehung. Die Größe der Fehlerbalken auf der Y-Achse wurde identisch zu den Fehlerbalken in Abbildung 3.1 gewählt.

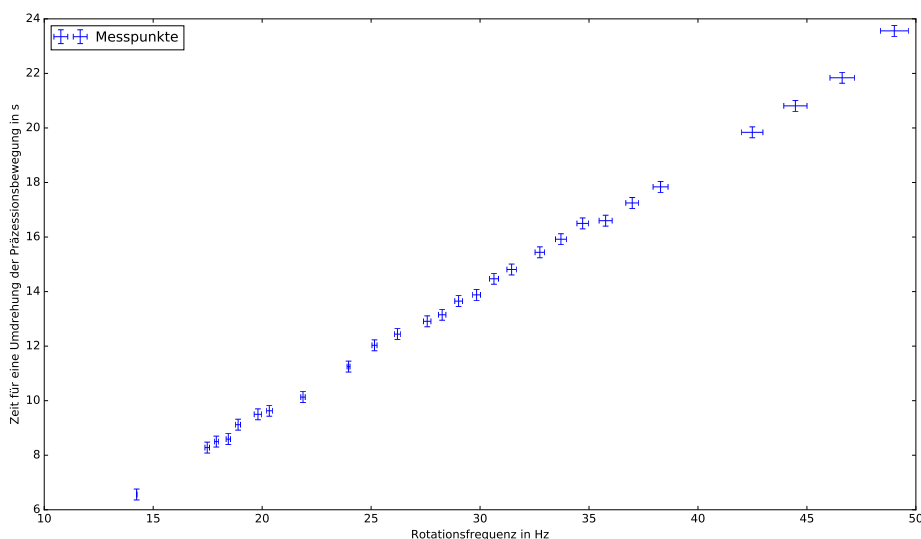


Abbildung 5.1: Plots der gemessenen Umlaufzeiten für die Präzessionsbewegungen in Abhängigkeit von den Rotationsfrequenzen

5.2 Analyse der Messwerte

In Abbildung 5.1 ist ein linearer Zusammenhang zwischen der Umlaufzeit der Präzessionsbewegung und der Rotationsfrequenz zu erkennen. Durch eine lineare Regression der

Tabelle 5.1: Messwerte für die Umlaufdauer einer Präzessionsbewegung in Abhängigkeit von der Rotationsfrequenz.

Startfrequenz in Hz	Endfrequenz in Hz	Umlaufdauer in s
49.651	48.370	23.560
47.176	46.058	21.840
45.004	43.938	20.810
42.980	42.007	19.840
38.627	37.940	17.840
37.280	36.688	17.250
36.062	35.463	16.600
34.969	34.446	16.500
33.959	33.463	15.920
32.964	32.524	15.440
31.662	31.233	14.810
30.846	30.430	14.470
30.018	29.663	13.880
29.191	28.839	13.650
28.432	28.090	13.150
27.745	27.407	12.910
26.338	26.080	12.440
25.272	25.040	12.030
24.033	23.898	11.250
21.977	21.772	10.130
20.467	20.189	9.630
19.979	19.636	9.500
19.008	18.784	9.120
18.548	18.348	8.590
17.989	17.805	8.500
17.584	17.375	8.280
14.257	14.223	6.560

Messwerte kann der Quotient $\frac{\text{Umdrehungsdauer der Präzessionsbewegung}}{\text{Rotationsfrequenz}}$ bestimmt werden. Dies wird mithilfe eines selbstgeschriebenen Python-Programms erledigt. Das Ergebnis der Regression ist in Abbildung 5.2 zu sehen.

Die Regression wurde mit einer Funktion der Form

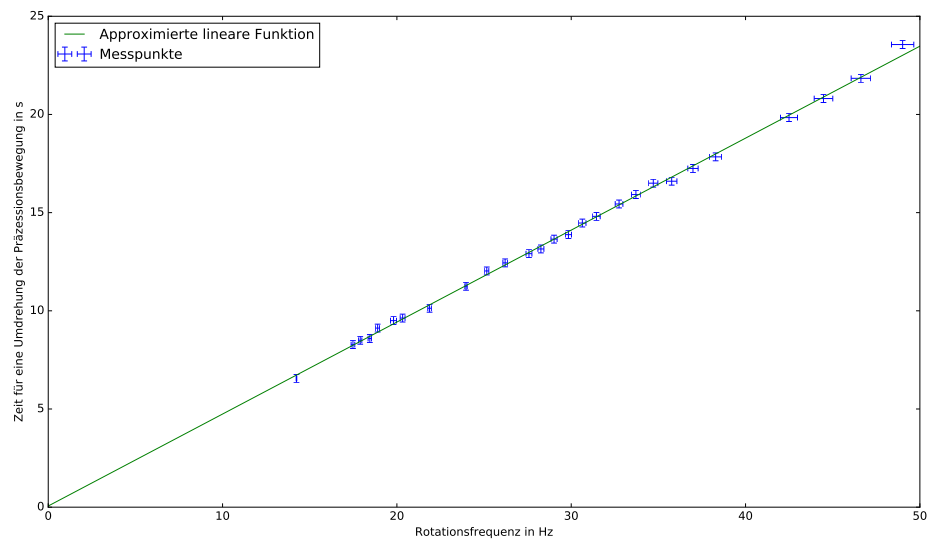
$$f(x) = m \cdot x + c \quad (5.1)$$

durchgeführt. Die aus der Regression bestimmten Parameter sind Tabelle 5.2 zu entnehmen.

Tabelle 5.2: aus der Regression bestimmte Parameter

Parameter	m	c
Wert	$(0,468 \pm 0,005) \text{ s}^2$	$(0,05 \pm 0,01) \text{ s}^2$

Der Wert für den Y-Achsen-Abschnitt der Funktion ist um Faktor kleiner als der Wert der Steigung. Aus diesem Grund wird bei einer weiteren Analyse der Messwerte nur der Wert

**Abbildung 5.2:** Regression der Messwerte

der Steigung berücksichtigt.

6. Aufgabe: Die Hauptträgheitsmomente

6.1 Bestimmung von C

C ist das Trägheitsmoment, welches am einfachsten zu bestimmen ist. C lässt sich aus der Präzessionsbewegung bestimmen. Es gilt für die Präzession:

$$\omega_p = \frac{rmg}{C\omega} \implies \omega_p \cdot \omega = \frac{rmg}{C} \quad (6.1)$$

Wobei ω_p die Präzessionswinkelgeschwindigkeit ist, r der Abstand des Schwerpunkts der Stange, g der Ortsfaktor und ω die Winkelgeschwindigkeit des Kreisels. C ist das gesuchte Trägheitsmoment um die Figurenachse. Mit der Formel $\omega = 2\pi f$ lassen sich die Winkelgeschwindigkeiten in Rotationsfrequenzen umrechnen. Die Rotationsfrequenz ist der Kehrwert der Periodendauer ($f = T^{-1}$). Mit diesem Wissen lässt sich die Formel für die Präzessionswinkelgeschwindigkeit umschreiben:

$$\implies \omega_p \cdot \omega = \frac{rmg}{C} = 4\pi^2 \cdot f_p \cdot f = 4\pi^2 \frac{f}{T_p} \quad (6.2)$$

Diese Formel lässt sich nach dem gesuchten C umstellen:

$$\implies C = \frac{rmg T_p}{4\pi^2 f} \quad (6.3)$$

Die Größen $r = 0,2891 \text{ m}$, $m = 0,33 \text{ kg}$ und $g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$ sind alle bekannt. Der Faktor $4\pi^2$ ist konstant. Der Quotient $T_p/f \approx 0,468 \text{ s}^2$ ist ebenfalls bekannt, denn er entspricht gerade der Steigung der Regressionsgeraden aus Aufgabe 5. Mit diesen Informationen lässt sich C final bestimmen:

$$\implies C = \frac{0,2891 \text{ m} \cdot 0,33 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ ms}^{-2}}{4\pi^2} \cdot 0,468 \text{ s}^2 \approx 0,0111 \text{ kgm}^2 \quad (6.4)$$

6.2 Bestimmung der Masse

Aus dem nun bekannten Trägheitsmoment C lässt sich die Masse m des Kreisels bestimmen. Es gilt:

$$C = \frac{1}{2}mR^2 \quad (6.5)$$

Wobei R der Radius des Rotors ist, der gegeben war als $R = \frac{1}{2}13,5 \text{ cm}$. Daraus lässt sich m berechnen:

$$\implies m = \frac{2C}{R^2} = \frac{8 \cdot 0,0111 \text{ kgm}^2}{0,135^2 \text{ m}^2} = 4,872 \text{ kg} \quad (6.6)$$

6.3 Bestimmung von A und B

Die Hauptträgheitsmomente A und B sind etwas schwieriger zu bestimmen. Für diese werden die Messungen der Nutationsbewegung benötigt. Für die Kreisfrequenz der Nutation ω_n gilt:

$$\omega_n = \frac{C\omega}{\sqrt{A \cdot B}} \implies \frac{\omega_n}{\omega} = \frac{C}{\sqrt{A \cdot B}} \quad (6.7)$$

Der Quotient ω_n/ω lässt sich nach $\omega = 2\pi f$ umschreiben zu $\omega_n/\omega = f_n/f$. Dieser Quotient entspricht der Steigung der Regressionsgeraden aus Aufgabe 3.

Problematisch ist allerdings noch, dass A und B gleichzeitig bestimmt werden sollen. Mit nur einer Messung ließe sich das nicht realisieren. Deshalb wurde Aufgabe 3 nochmals durchgeführt, mit zwei Zusatzgewichten, die das Trägheitsmoment A um ΔA vergrößern. Da die Zusatzgewichte am äußeren Kardanrahmen befestigt wurden, wird nur das Trägheitsmoment A verändert. ΔA lässt sich berechnen als das Trägheitsmoment eines Zylinders, der durch die Verschiebung der Drehachse noch einen Anteil nach Steiner erhält. Da zwei Zylinder verwendet wurden, muss mit dem doppelten Wert eines Zylinders gerechnet werden.

$$\Delta A = 2(\theta_{\text{Zylinder}} + m_{\text{Zylinder}}d^2) = m_{\text{Zylinder}}r^2 + 2m_{\text{Zylinder}}d^2 \quad (6.8)$$

Die Masse m_{Zylinder} war mit $m_{\text{Zylinder}} = 1 \text{ kg}$ gegeben, der Zylinderradius r war mit $r = 2 \text{ cm}$ gegeben und der Abstand d war mit $d = 14,9 \text{ cm} + r = 16,9 \text{ cm}$ gegeben, da der Abstand der Symmetrieachse von der Drehachse betrachtet wird.

$$\implies \Delta A = 0,0575 \text{ kgm}^2 \quad (6.9)$$

Aus der Regression sind zwei Geradensteigungen bekannt, einmal ohne Zusatzgewichten, einmal mit Zusatzgewichten. Die Geradensteigung ohne Zusatzgewichte α_1 hat den Wert $\alpha_1 = 0,499$, die Geradensteigung α_2 mit den Zusatzgewichten beträgt $\alpha_2 = 0,301$. Beide Werte sind dimensionslos, da sie dem Quotienten f_n/f entsprechen, und f und f_n haben dieselbe Einheit.

Mit diesen neuen Informationen lassen sich zwei Gleichungen für 2 Variablen aufstellen:

$$\alpha_1 = \frac{C}{\sqrt{A \cdot B}} \quad (6.10)$$

$$\alpha_2 = \frac{C}{\sqrt{(A + \Delta A) \cdot B}} \quad (6.11)$$

Die erste Gleichung lässt sich quadrieren und nach A umstellen:

$$A = \frac{C^2}{\alpha_1^2 \cdot B} \quad (6.12)$$

In die umgeformte zweite Gleichung eingesetzt ergibt sich:

$$\frac{C^2}{\alpha_2^2} = (A + \Delta A) \cdot B = \frac{C^2}{\alpha_1^2} + \Delta A \cdot B \quad (6.13)$$

Diese lässt sich nun nach B umstellen:

$$B = \frac{\frac{C^2}{\alpha_2^2} - \frac{C^2}{\alpha_1^2}}{\Delta A} = 0,0150 \text{ kgm}^2 \quad (6.14)$$

Damit lässt sich jetzt auch A ausrechnen:

$$A = \frac{C^2}{\alpha_1^2 \cdot B} = 0,0328 \text{ kgm}^2 \quad (6.15)$$

Final berechnen wir die Werte $A = 0,0328 \text{ kgm}^2$, $B = 0,0150 \text{ kgm}^2$ und $C = 0,0111 \text{ kgm}^2$. Theoretisch sollten A und B nahezu identisch sein. Vermutlich wurde bei der Auswertung ein Fehler gemacht.

7. Aufgabe: Der Kreisel im beschleunigten Bezugssystem

Eine der technischen Anwendungen ist der Magnuskreisel. Normalerweise würde ein Kreisel, auf den keine äußeren Kräfte wirken, die Lage seiner Drehimpulsachse beibehalten. Bei dem Magnuskreisel aber wurde dem inneren Kardanrahmen die Möglichkeit zur Rotation genommen. Er wurde also gegenüber der horizontalen fixiert und um einen Winkel von 30° geneigt. Der äußere Kardanrahmen kann sich weiterhin frei drehen.

Durch die Rotation der Erde erhält der Kreisel ein Drehmoment der Form:

$$\vec{M} = \vec{L} \times \vec{\omega} \quad (7.1)$$

Demzufolge wird erwartet, dass sich der Kreisel nach Norden ausrichtet, da er an der Horizontalen fixiert wurde. Der im Versuch verwendete Kreisel wurde auf einer Drehplatte aufgebaut, da diese sich deutlich schneller dreht als die Erdoberfläche. Demzufolge ist das Drehmoment stärker. Dies wird benötigt, um die Lagerreibung des Kreisels auszugleichen.

Wird die Neigung des Kreisels entfernt, sodass er auf der rotierenden Platte liegt und senkrecht nach oben zeigt, so richtet er sich bei diesem Versuch nicht aus. Dies liegt daran, dass unabhängig von der Drehung des Kreisels die Vektoren \vec{L} und $\vec{\omega}$ parallel zueinander stehen. Das Drehmoment ist überall identisch. Demzufolge richtet sich der Kreisel nicht aus.

Literaturverzeichnis