Vektoranalysis

Wir betrachten das Skalare Feld $\phi(\vec{r})$ und das Vektorfeld $A(\vec{r})$ im dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$. Die beiden Felder sollen beliebig und differenzierbar sein und sind abhängig vom Ortsvektor $\vec{r}$.

Im kartesischen Koordinatensystem wird ein Vektor durch seine Orthonormalbasis dargestellt:

$$\hat{e}_i \,, \quad i \in \{1, 2, 3\}$$

sind die Einheitsvektoren und es gilt:

$$\hat{e}_i \, \hat{e}_j = \delta_{ij}$$

Damit lässt sich der Vektor $\vec{A}$ darstellen als

$$\vec{A} = \sum_i A_i \, \hat{e}_i = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$$

Der **Nabla**-Operator ist ein Hilfs-Vektor, dessen Einträge aus den Ableitungen nach der jeweiligen Koordinatenachse bestehen:

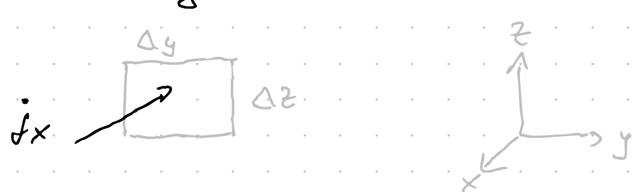
$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Damit lassen sich drei wichtige Differential-Operationen definieren:

1. Divergenz $\qquad \text{div}\,\vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$

   Die Divergenz ist eine skalare Größe und gibt ein Maß für die Quellstärke eines Feldes an.

   <u>Bsp.:</u> Man nehme eine strömende Flüssigkeit mit Dichte ρ und Geschwindigkeit $\vec{v}$. Der Strom lässt sich mittels $\vec{j} = \rho\vec{v}$ charakterisieren. Durch eine in der yz-Ebene liegende Fläche $\Delta s = \Delta y\,\Delta z$

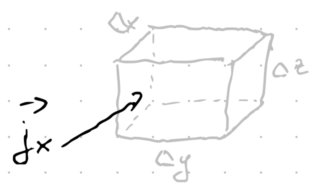


Strömt der Fluss

$$j_x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$$

(x-Komponende des Stroms multipliziert mit der Fläche ΔS).

Bedrachdet man nun einen Quader mit den Seitenlängen Δx Δy und Δz:



so fließt durch die Vorderseite der Strom $j_x(x, y, z)\,\Delta y\,\Delta z$ und durch die Rückseite der Strom $j_x(x+\Delta x, \Delta y, \Delta z)$.

Die Differenz bedrägt

$$\Delta \Phi_x = \left[j_x(x+\Delta x, y, z) - j_x(x, y, z) \right] \Delta y\, \Delta z$$

$$= \frac{\partial j_x}{\partial x} \Delta x\, \Delta y\, \Delta z .$$

Wenn man dies auf alle drei Koordinaten-Achsen ausweitet, ergibt sich der Fluss Φ_V durch das Volumen $\Delta V = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$:

$$\Phi_V = \left(\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$= \operatorname{div} \vec{j} \cdot \Delta V$$

Die Divergenz ist somit ein Maß für die Quellstärke eines Feldes. Falls der Zustrom und der Abstrom in einem Volumen ΔV identisch sind (z.B. homogenes Feld) gilt: $\operatorname{div} \vec{j} = 0$.

② Gradient $\quad \operatorname{grad} \phi = \vec{\nabla} \cdot \phi$

Der Gradient wird als Richtungsableitung bezeichnet. Dabei handelt es sich wieder um eine vektorielle Größe die in die Richtung der größten Änderung zeigt.

Betrachdet man die Änderung eines Feldes durch Verschieben des Punktes $\vec{r}$ um $\Delta \vec{r} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}$ dann beträgt diese:

$$\Delta \phi = \phi(\vec{r} + \Delta \vec{r}) - \phi(\vec{r})$$

$$= \frac{\partial \phi}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \phi}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial \phi}{\partial z} \Delta z + \mathcal{O}(|\Delta \vec{r}|^2)$$

$$= \text{grad } \phi \cdot \Delta \vec{r} + \mathcal{O}(|\Delta \vec{r}|^2)$$

Für ein infinitessimal kleines $d\vec{r}$ beträgt die Feldänderung:

$$d\phi = \text{grad } \phi \, d\vec{r}$$

Diese Gleichung ist eine allgemeine, vom Koordinatensystem unabhängige Definition des Gradienten und entspricht der totalen Ableitung von $\phi(\vec{r})$. Der Gradientenvektor zeigt in die Richtung des stärksten Anstiegs und steht auf der Fläche $\phi = \text{const.}$ senkrecht zur Fläche.

Die Änderung des Feldes entlang einer durch den Einheitsvektor $\vec{u}$ gegebenen Richtung beträgt:

$$d\vec{r} = \vec{u}\, ds$$

$$\Rightarrow \quad d\phi = \text{grad}\,\phi\ \vec{u}\, ds$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d\phi}{ds} = \text{grad}\,\phi\ \vec{u}$$

(Richtungsableitung von ϕ nach $\vec{u}$).

Ist ein Vektorfeld $\vec{A}$ als Gradient eines Skalarfeldes

$$\vec{A} = \text{grad}\ \phi$$

darstellbar, so handelt es sich dabei um ein konservatives Kraftfeld. Weiterhin gilt:

$$\frac{\partial A_x}{\partial y} = \frac{\partial A_y}{\partial A_x} \qquad \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\partial A_z}{\partial y} \qquad \frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{\partial A_x}{\partial z}$$

Bei einem konservativen Kraftfeld ist das Kurvenintegral

$$\int_{\vec{r_a},\, C}^{\vec{r_b}} \vec{A}(\vec{r})\, d\vec{r} = \phi(\vec{r_b}) - \phi(\vec{r_a})$$

unabhängig vom gewählten Weg C und nur von den Start- & Endpositionen $\vec{r_a}$ und $\vec{r_b}$ abhängig.

③ Rotation $\quad \text{rot}\, \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

Die Rotation erzeugt ein Wirbelfeld (Vektorfeld). Die Rotation ist an einem Punkt definiert, wenn das Vektorfeld dort endlich, eindeutig und differenzierbar ist. Die Rotation eines Geschwindigkeitsfeldes gibt für jeden Punkt das doppelte der Winkelgeschwindigkeit an, mit der ein Körper in diesem Geschwindigkeitsfeld rotiert.

Man nehme einen mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ rotierenden Körper. Jedem Punkt $\vec{r}$ auf dem Körper kann das Geschwindigkeitsfeld $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ zugeordnet werden. Für die Rotation des Geschwindigkeitsfeldes ergibt sich

$$\text{rot}\, \vec{v} = \text{rot}\,(\vec{\omega} \times \vec{r}) = 2\,\vec{\omega}$$

ein konstantes Wirbelfeld. Die Rotation eines Vektorfeldes ist ein Maß für die Wirbelstärke des Feldes.

! Die Divergenz der Rotation eines Vektorfeldes ist Null

$$\text{div}\,(\,\text{rot}\,(\vec{v})\,) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = 0$$

kardesische koordinaden:

Gradient, Rotadion und Divergenz lassen sich in karthesischen koordinaten über den Nabla Operador formulieren:

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix}$$

Gradiend: $\vec{\nabla} \cdot \Phi$ => Vektor

Rotadion: $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ => Vektor

Divergenz: $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ => Skalar

lokale orthogonale koordinaten

$\hat{e}_i \; , \; i \in \{1, 2, 3\}$: lokale orthonormierde Basis

$\hat{e}_i \, \hat{e}_j = \delta_{ij}$

Ortskoordinaden : q_i $\quad d\vec{r}$ von $\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$ nach $\begin{pmatrix} q_1 + dq_1 \\ q_2 + dq_2 \\ q_3 + dq_3 \end{pmatrix}$

$$d\vec{r} = \sum_{i=1}^{3} h_i \, \hat{e}_i \, dq_i \quad \text{mit } h_i = h_i(q_1, q_2, q_3)$$

Dementsprechend lässt sich der Nabla Operator als

$$\vec{\nabla} = \sum_{i=1}^{3} \hat{e}_i \frac{1}{h_i} \frac{\partial}{\partial q_i}$$

schreiben und es gilt weiderhin:

$$\vec{\nabla} \Phi = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{h_i} \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} \hat{e}_i$$

$$\vec{\nabla} \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial (h_2 h_3 A_1)}{\partial q_1} + \frac{\partial (h_1 h_3 A_2)}{\partial q_2} + \frac{\partial (h_1 h_2 A_3)}{\partial q_3} \right]$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial (h_3 A_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial (h_2 A_2)}{\partial q_3} \right] \hat{e}_1 + \text{zyklisch}$$

Zweite Ableidung: Der Laplace Operator

Der Nabla Operator kann auch mehrfach hintereinander angewendet werden:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \vec{\nabla}^2 = \Delta$$

Das Dreieck Δ ist das Symbol des Laplace-Operators.

- Divergenz des Gradienden:

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\phi) = \Delta\phi = (\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2)\,\phi$$

- Rotation des Gradienden:

$$\left[\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\phi)\right]_i = \varepsilon_{ijk}\,\partial_j\,\partial_k\,\phi$$

ist das Feld 2-fach diffbar, so gilt

$\varepsilon_{ijk}\,\partial_j\,\partial_k\,\phi = 0$, da die Ableitungen verdauschen:

$$\varepsilon_{ijk}\,\partial_j\,\partial_k\,\phi + \varepsilon_{ikj}\,\partial_k\,\partial_j\,\phi$$
$$= \varepsilon_{ijk}\,\partial_j\partial_k\,\phi - \varepsilon_{ijk}\,\partial_j\,\partial_k\,\phi = 0$$

- Gradient der Divergenz:

$$\left[\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{A})\right]_i = \partial_i\,\partial_j\,A_j = \left[\begin{pmatrix} \partial_x^2 & \partial_x\partial_y & \partial_x\partial_z \\ \partial_y\partial_x & \partial_y^2 & \partial_y\partial_z \\ \partial_z\partial_x & \partial_z\partial_y & \partial_z^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}\right]_i$$

- Divergenz der Rotation

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \partial_i\,\varepsilon_{ijk}\,\partial_j\,A_k = \overbrace{\varepsilon_{ijk}}^{\text{antisymmetrisch}}\,\underbrace{\partial_i\,\partial_j}_{\text{symmetrisch}}\,A_k = 0$$

- Rotation der Rotation

$$\left[\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})\right]_i = \varepsilon_{ijk}\, \partial_j\, \varepsilon_{klm}\, \partial_l\, A_m$$

$$= \partial_i (\partial_j A_j) - \partial_j^2 A_i$$

mit $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm} = \varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}$