# Geometrische Algebra

„Clifford Algebra" (mathematischer Begriff

Idee: Unterschiedliche mathematische Ausdrücke in die Form $\vec{u} \cdot \vec{v}$ überführen.

## Einführung

Skalare: Skalare sind Größen ohne zugehörige Dimmension. Wir können mathematische Operationen mit ihnen ausführen

$$-2 + 6,283 = 4,283$$

$$-2 \cdot 2,5 = -5$$

Vektoren: Vektoren sind Größen mit zugehöriger Richtung. („orientierte Länge")

↳ Eigenschaften: Länge $\|\vec{a}\|$

Richtungsanteil : $\vec{a} = x \cdot \hat{e}_x + y \hat{e}_y + z \cdot \hat{e}_z$

Alle Vektoren die gleich lang sind und in die selbe Richtung zeigen sind gleich.

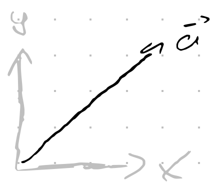
↳ Mathematische Operationen:

Multiplikation mit Skalar: $a \cdot \vec{r}$

Addition: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$

$\boxed{\text{Skalarprodukt: } \vec{a} \cdot \vec{b} = \text{? ...}}$

Jeder Vektor kann als Zusammensetzung der Richtungsanteile bezüglich einer festgelegten Basis betrachtet werden:

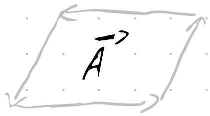


$$\vec{a} = 1 \cdot \hat{e}_x + 2 \cdot \hat{e}_y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Skalare sind Tensoren 0. Stufe (0 Dimmensionen), Vektoren sind Tensoren 1. Stufe (1 Dimmension). Gibt es Tensoren 2. Stufe?

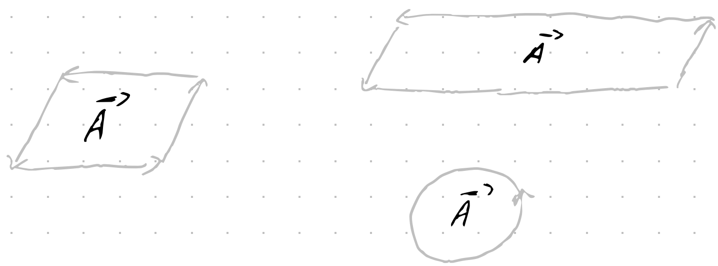
Ein Vektor ist eine orientierte Länge. Ein Tensor 2. Stufe müsste also eine orientierte Fläche sein.

__Bivektor__ : ein 2D-Vektor




$\|\vec{A}\| \mathrel{\hat{=}}$ Fläche von $\vec{A}$

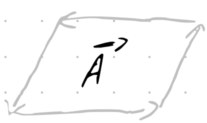
Alle Bivektoren mit derselben Fläche und Orientierung sind identisch.



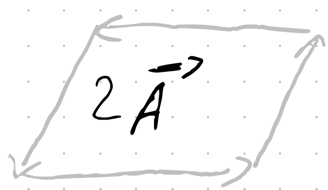

$\Rightarrow$ diese Bivektoren sind identisch.

Multiplikation mit einem Skalar:

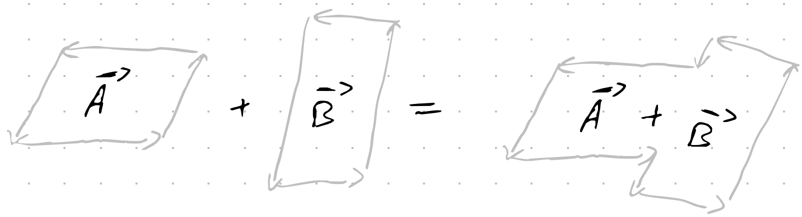
2 ·




=



Addition zweier Bivektoren:

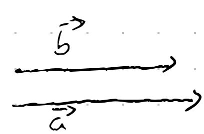



Zusammenhängen, wie bei Vektoren

Wenn die Ausrichtung einen Bivektor nicht verändert und nur die Fläche ein relevantes Maß ist, lässt sich ein Bivektor dann nicht auf den Skalar $\|\vec{A}\|$ reduzieren?

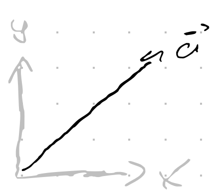
Vgl. Vektoren:

1 Dimmension



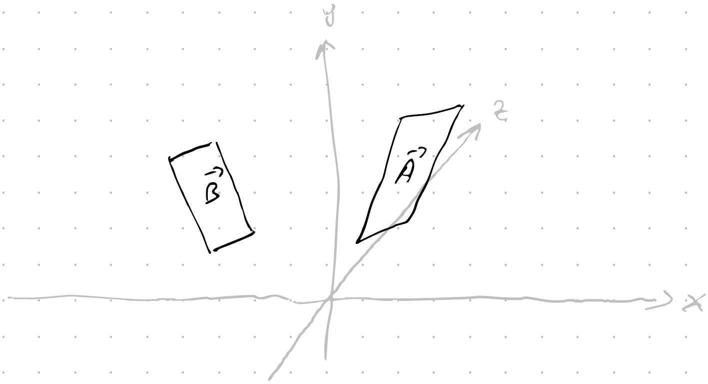

=> hier ist die Richtung vorgegeben und der Vektor lässt sich als Skalar $\|\vec{a}\|$ ausdrücken.

Mehrere Dimmensionen:



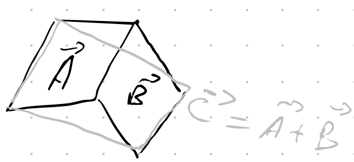

Der Richtungsanteil verschwindet nicht, der Vektor lässt sich nicht verlustfrei als $\|\vec{a}\|$ ausdrücken.

Durch die Einführung von mehr als 2 Dimmensionen underscheiden sich Bivektoren in mehr als nur ihrer Fläche voneinander:

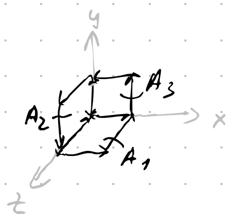


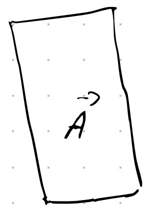

ähnlich wie 2 Vektoren dieselbe Länge aber eine unterschiedliche Richtung haben, können Bivektoren dieselbe Fläche aber eine underschiedliche Orientierung haben.

Addition zweier Bivektoren:



Vektoren werden über eine Basis ausgedrückt.
Die Basis der Bivektoren sind orthogonale Basis-flächen:



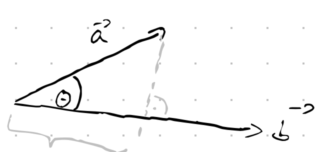




$$\vec{A} = 6\hat{A}_1 + 2\hat{A}_2 + 3\hat{A}_3$$

Durch hinzufügen weiterer Dimmensionen lassen sich orientierte Volumen (Trivektoren) bilden. 4- und 5- bzw. n-dimmensionale Vektoren lassen sich durch eine n-dimmensionale orthogonale Basis darstellen.

Welche mathematische Operationen lassen sich damit durchführen?

vgl.: Vektor-produkt



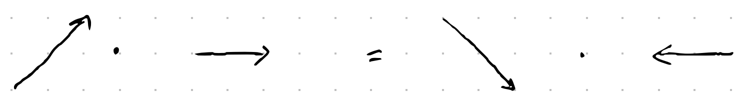

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ = Länge der Projektion $= \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos\Theta$

Kommutativität: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

Distributivität: $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

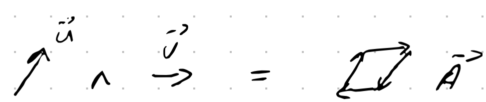
Linearität: $(a \cdot \vec{u}) \cdot (\vec{b} \cdot \vec{v}) = ab\,(\vec{u} \cdot \vec{v})$

Das Produkt zweier Vektoren ist ein Skalar. Dabei geht die Orientierungs-Information von den Vektoren zum Skalarprodukt verloren:
(engl.: „inner product")



Gibt es eine Operation, die in die andere Richtung verläuft, sodass aus 2 Vektoren ein Bivektor entsteht?

$\vec{u} \wedge \vec{v}$ :

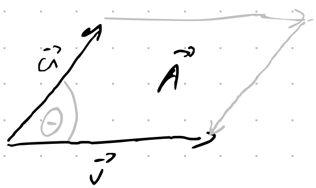



engl.: „outer product"

Die Orientierung dieser Fläche wird entlang des 1. Vektors festgelegt.

Wenn die Bivektoren vertauscht werden, ändert sich die Orientierung: $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$

Distributivität und Linearität sind weiterhin gewährleistet.




$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{A}$

$\| \vec{u} \wedge \vec{v} \| = \| \vec{u} \| \| \vec{v} \| \sin \Theta$

Was ist das Produkt ($\wedge$) aus zwei parallelen Vektoren?

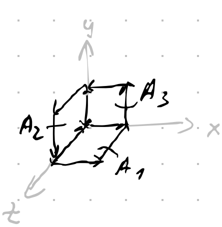

$\vec{u} \wedge \vec{v} = 0$

Es lässt sich keine Fläche aufspannen.

$\Rightarrow \quad \vec{a} \wedge \vec{a} = 0$

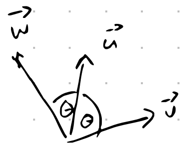
Das Produkt ($\wedge$) eines Bivektors mit einem Vektor ergibt einen Trivektor.

Mit diesem Produkt lässt sich die Bivektor-Basis durch Vektoren ausdrücken:




$A_1 = \hat{x} \wedge \hat{y} \quad , \quad A_2 = \ldots$

Das Problem mit dem Informationsverlust des Skalarprodukts wurde aber nicht gelöst.




$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{w}$$

__Idee:__ Kombination von beidem

**Geometrisches Produkt:**

$$\vec{u}\,\vec{v} = \underbrace{\vec{u} \cdot \vec{v}}_{\text{Skalar}} + \underbrace{\vec{u} \wedge \vec{v}}_{\text{Bivektor}}$$

Wie addiert man sowas?

↳ keine Ahnung, aber wir machen das einfach mal.

__Beispiele:__ $\vec{u}\,\vec{u} = \vec{u}^{\,2} = \|\vec{u}\|^2 + \underbrace{\vec{u} \wedge \vec{u}}_{=0}$

$$\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}\,\vec{u} = \frac{\|\vec{u}\|^2}{\|\vec{u}\|^2} = 1 \Rightarrow \vec{u}^{\,-1} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$$

Argumente vertauschen:

(1) $\vec{u}\,\vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{v}$

(2) $\vec{v}\,\vec{u} = \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \wedge \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u} \wedge \vec{v}$

$$(1) + (2) \qquad \vec{u}\vec{v} + \vec{v}\vec{u} = 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} \iff \vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{\vec{u}\vec{v} + \vec{v}\vec{u}}{2}$$

$$(1) - (2) \qquad \vec{u}\vec{v} - \vec{v}\vec{u} = 2\,\vec{u}\wedge\vec{v} \iff \vec{u}\wedge\vec{v} = \frac{\vec{u}\vec{v} - \vec{v}\vec{u}}{2}$$

kartesische Basisvektoren: $\hat{e}_i$

$$\hat{e}_i^{\,2} = \|e_i\|^2 = 1$$

$$\hat{e}_i\hat{e}_j = \underbrace{\hat{e}_i\cdot\hat{e}_j}_{=0} + \hat{e}_i\wedge\hat{e}_j = -\hat{e}_j\hat{e}_i$$

Wichtig!

⇒ Beschreibung der Bivektor-Basis über das geometrische Produkt:

$$\{\hat{x}\hat{y},\ \hat{y}\hat{z},\ \hat{z}\hat{x}\}$$

$$\vec{u} = a_1\hat{x} + b_1\hat{y} + c_1\hat{z}$$

$$\vec{v} = a_2\hat{x} + b_2\hat{y} + c_2\hat{z}$$

$$\vec{u}\vec{v} = (a_1\hat{x} + b_1\hat{y} + c_1\hat{z})(a_2\hat{x} + b_2\hat{y} + c_2\hat{z})$$

$$= a_1\hat{x}(a_2\hat{x} + b_2\hat{y} + c_2\hat{z})$$

$$+ b_1\hat{y}(a_2\hat{x} + b_2\hat{y} + c_2\hat{z})$$

$$+ c_1\hat{z}(a_2\hat{x} + b_2\hat{y} + c_2\hat{z})$$

$$= a_1a_2\underbrace{\hat{x}\hat{x}}_{1} + a_1b_2\hat{x}\hat{y} + a_1c_2\hat{x}\hat{z}$$

$$+ b_1a_2\hat{y}\hat{x} + b_1b_2\underbrace{\hat{y}\hat{y}}_{1} + b_1c_2\hat{y}\hat{z}$$

$$+ c_1a_2\hat{z}\hat{x} + c_1b_2\hat{z}\hat{y} + c_1c_2\underbrace{\hat{z}\hat{z}}_{1}$$

$$= a_1 a_2 + a_1 b_2 \hat{x}\hat{y} + a_1 c_2 \hat{x}\hat{z}$$
$$- b_1 a_2 \hat{x}\hat{y} + b_1 b_2 + b_1 c_2 \hat{y}\hat{z}$$
$$- c_1 a_2 \hat{x}\hat{z} - c_1 b_2 \hat{y}\hat{z} + c_1 c_2$$

$$= a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2$$
$$+ (a_1 b_2 - b_1 a_2)\hat{x}\hat{y} + (b_1 c_2 - c_1 b_2)\hat{y}\hat{z}$$
$$+ (a_1 c_2 - c_1 a_2)\hat{x}\hat{z}$$

$\Rightarrow$ Geometrisches Produkt zweier 3D-Vektoren

$$\Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2$$
$$\vec{u}\wedge\vec{v} = (a_1 b_2 - b_1 a_2)\hat{x}\hat{y}$$
$$+ (b_1 c_2 - c_1 b_2)\hat{y}\hat{z}$$
$$+ (a_1 c_2 - c_1 a_2)\hat{x}\hat{z}$$

Vgl.: Kreuzprodukt

$$(\vec{u}\times\vec{v}) = (a_1 b_2 - b_1 a_2)\hat{z} + (b_1 c_2 - c_1 b_2)\hat{x}$$
$$+ (a_1 c_2 - c_1 a_2)\hat{y}$$

Produkt (1) höherdimensionaler Größen:

$$(3+5\hat{x}\hat{y}-\hat{x}\hat{z})(4\hat{x}\hat{y}\hat{z})$$

$$=12\hat{x}\hat{y}\hat{z}+20\hat{x}\hat{y}\hat{x}\hat{y}\hat{z}-4\hat{x}\hat{z}\hat{x}\hat{y}\hat{z}$$

$$=12\hat{x}\hat{y}\hat{z}-20\hat{z}-4\hat{y}$$

## Geometric Algebra in 2D

Multivektor: Summe von Vektoren unterschiedlicher Dimensionen

Bsp.: $V = a + b\hat{x} + c\hat{y} + d\hat{x}\hat{y}$

$d\hat{x}\hat{y}$ ist in 2D eine Größe die sich wie ein Skalar verhält $\Rightarrow$ „Pseudo-Skalar"

$\Rightarrow$ Umbenennung in $d\hat{x}\hat{y} \to di$ mit $i = \hat{x}\hat{y}$

$\Rightarrow$ $\vec{v} = 2\hat{x} + 3\hat{y}$

$$\vec{v}i = (2\hat{x} + 3\hat{y})\hat{x}\hat{y} = 2\hat{x}\hat{x}\hat{y} + 3\hat{y}\hat{x}\hat{y}$$

$$= 2\hat{y} - 3\hat{x}$$

Multiplikation mit $i$ $\to$ Rotation um $90°$

Das Geometrische Produkt ist nicht kommutativ:

$$i\vec{v} = i(2\hat{x} + 3\hat{y}) = 2\hat{x}\hat{y}\hat{x} + 3\hat{x}\hat{y}\hat{y} = -2\hat{y} + 3\hat{x}$$

$$= -\vec{v}i$$

$\Rightarrow$ ebenfalls Rotation aber andere Richtung

$$i^2 = (\hat{x}\hat{y})^2 = \hat{x}\hat{y}\hat{x}\hat{y} = -\hat{x}\hat{y}\hat{y}\hat{x} = -1$$

$\Rightarrow$ Imaginäre Einheit ist Pseudo-Skalar

Komplexe Zahlen sind 2D Multivektoren!

Geometrisches Produkt zweier Multivektoren ist das Produkt komplexer Zahlen:

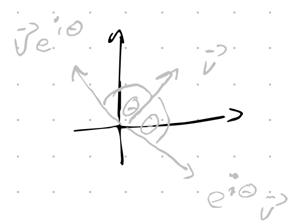
$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$$\Rightarrow (a\hat{x} + b\hat{y})(c + di) = (ac - bd)\hat{x} + (ad + bc)\hat{y}$$

mit $i$ multiplizieren $\Rightarrow$ Rotation um 90°

Rotation eines Vektors:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$



$$\Rightarrow \quad \vec{v}\, z = z^* \vec{v}$$

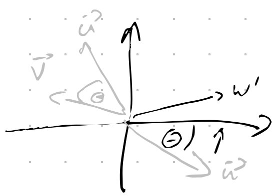
Multiplikation Vektor mit $z \in \mathbb{C}$

$$\vec{u}\,\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\wedge\vec{v}$$

$$= \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\Theta + \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\sin\Theta\, i$$

$$= \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|(\cos\Theta + i\sin\Theta) = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\, e^{i\Theta}$$

Bsp.: Rotation eines Vektors um den Winkel zwischen 2 Vektoren




$$\vec{u}\,\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\, e^{i\Theta}$$

$$\frac{\vec{u}\,\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = e^{i\Theta}$$

$$w' = \vec{w}\,\frac{\vec{u}\,\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = \vec{w}\;\hat{u}\;\hat{v}$$

$$\vec{u}\,\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\wedge\vec{v} = \vec{v}\,\vec{u} - \vec{v}\wedge\vec{u} = (\vec{v}\,\vec{u})^*$$

komplex konjugieren

$$\Rightarrow \vec{w}\, z = z^* \vec{w}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{w}\;\vec{u}\;\vec{v} = \vec{v}\;\vec{u}\;\vec{w}$$ $\Rightarrow$ Richtung vertauscht, Ergebnis gleich

# Geometrische Algebra in 3D

2D Multivektor: $a + \vec{u} + \vec{V} = a + b\hat{x} + c\hat{y} + d\hat{x}\hat{y}$

$\Rightarrow 2^2$ komponenden

3D Multivektor: $a + \vec{u} + \underbrace{\vec{V}}_{\text{Bivektor}} + \underbrace{w}_{\text{Trivektor}}$

$= a + b\hat{x} + c\hat{y} + d\hat{z} + e\hat{x}\hat{y} + f\hat{y}\hat{z} + g\hat{x}\hat{z} + h\hat{x}\hat{y}\hat{z}$

$\Rightarrow$ $2^3 = 8$ komponenden

$h\hat{x}\hat{y}\hat{z}$ ist ein Pseudo-Skalar in 3D

$= h\,i$

Diese 2D Rechenregel bleibt erhalten.

$i^2 = -1$

Neue Regeln:

$A i = i A \quad \forall A = h \cdot \hat{x}\hat{y}\hat{z}$

$\hat{x} i = \hat{x}\hat{x}\hat{y}\hat{z} = \underbrace{\hat{y}\hat{z}}_{\perp \text{ zu } \hat{x}} \Rightarrow$ Bivektor

$\perp$ zu $\hat{x}$ nach der rechten-Hand-Regel

$$\underbrace{\vec{u}}_{\text{Bivektor}}\, i = \underbrace{\vec{v}}_{\text{vektor}}$$

Schreibweise 3D Multivektor:

$$a + \vec{u} + \vec{v} i + b i$$

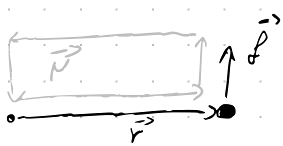
Im 2D:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (a_1 b_2 - a_2 b_1)\,\hat{x}\hat{y} + (b_1 c_2 - c_1 b_2)\,\hat{y}\hat{z} + (a_1 c_2 - c_1 a_2)\,\hat{x}\hat{y}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (a_1 b_2 - a_2 b_1)\,\hat{z} + (b_1 c_2 - c_1 b_2)\,\hat{x} + (a_1 c_2 - c_1 a_2)\,\hat{y}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{u} \wedge \vec{v} = i\,(\vec{u} \times \vec{v})$$

## Physikalisches Beispiel: Drehmoment




$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$ (blöde Darstellung)

(Ergebnis zeigt in willkürliche Richtung)

$\rightarrow \quad \vec{N} = \vec{r} \wedge \vec{F}$ (besser)

Pseudovektoren: $i\,\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \wedge \vec{b}$

$$i\,\vec{\nabla} \times \vec{f} = \vec{\nabla} \wedge \vec{f}$$

Pseudoskalar: $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = i\,\vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c}$

$\vec{L}$ (Drehmoment), $\vec{B}$ (Magnetisches Feld)

sind Bivektoren

$\Phi_B$ (Magnetische Flussdichte) ist Trivektor

<u>Bivektor - Basis:</u>

$$\hat{x}\hat{y} = \hat{x}\hat{y}\hat{z}\hat{z} = i\hat{z} \Rightarrow \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{y}\hat{z} = \hat{x}\hat{x}\hat{y}\hat{z} = i\hat{x} \Rightarrow \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{z}\hat{x} = \hat{x}\hat{y}\hat{z}\hat{y} = i\hat{y} \Rightarrow \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Pauli-Matrizen

$$(\hat{x}\hat{y})^2 = (\hat{y}\hat{z})^2 = (\hat{x}\hat{z})^2 = = \hat{x}\hat{y}\hat{y}\hat{z}\hat{x}\hat{z} = -1$$

$$\Rightarrow i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

(Multiplikation von Quaternionen)

# Rotation in 3D

$\vec{u} = 3\hat{x} + 2\hat{y} + \hat{z}$

$\downarrow$ Rotation um 90° entlang z-Achse

$\vec{u}' = 3\hat{y} - 2\hat{x} + \hat{z}$

Rotation um z-Achse $\Leftrightarrow$ Rotation in xy Ebene

$$\vec{u}\,\hat{x}\hat{y} = (3\hat{x} + 2\hat{y} + \hat{z})\,\hat{x}\hat{y}$$
$$= 3\hat{y} - 2\hat{x} + \underbrace{\hat{x}\hat{y}\hat{z}}$$

upps, hat wohl nicht funktioniert

Wir wissen, dass in 2D:

$$\vec{u}\,z = z^*\vec{u}$$

$\downarrow$

komplex konjugiert $\Leftrightarrow$ Vektoren vertauschen

$$(\hat{x}\hat{y})^* = \hat{y}\hat{x}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{y}\hat{x}\vec{v} = \hat{y}\hat{x}(3\hat{x} + 2\hat{y} + \hat{z}) = 3\hat{y} - 2\hat{x} - \underbrace{\hat{x}\hat{y}\hat{z}}$$

hm, ...

selbes Problem, aber der Trivektor zeigt in andere Richtung

=> Beides kombinieren

$$\hat{y}\hat{x}\ \vec{v}\ \hat{x}\hat{y} = \hat{y}\hat{x}\,(3x+2y+z)\,\hat{x}\hat{y}$$
$$= -3\hat{x} - 2\hat{y} + \hat{z}$$

z-komponende stimmt aber Vorzeichen bei x und y ist nicht unbedingt richtig

=> wir haben 2 mal rotiert, daher stimmen die Vorzeichen nicht. Besser, aber immer noch nicht perfekt.

$$\hat{x}\hat{y} = e^{\hat{x}\hat{y}\frac{\pi}{4}} \quad \rightarrow \quad e^{\hat{x}\hat{y}\frac{\pi}{4}}e^{\hat{x}\hat{y}\frac{\pi}{4}} = e^{\hat{x}\hat{y}\frac{\pi}{2}}$$
$$\rightarrow \quad e^{\hat{x}\hat{y}\frac{\pi}{8}}e^{\hat{x}\hat{y}\frac{\pi}{8}} = e^{\hat{x}\hat{y}\frac{\pi}{4}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{e^{-\hat{x}\hat{y}\frac{\pi}{8}}\ \vec{v}\ e^{\hat{x}\hat{y}\frac{\pi}{8}} = \vec{v}\,'}_{\text{Diese Lösung funktioniert}}$$

Vektor $\vec{v}$ um Winkel $\Theta$ in $\hat{I}$ Ebene rotieren:

$$e^{-I\frac{\Theta}{2}}\,\vec{v}\,\underbrace{e^{I\frac{\Theta}{2}}}_{\text{„Rotor"}}$$

Rotor dreht sich halb so schnell wie Winkel

## Maxwell-Gleichungen:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\left(\vec{J} + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$$

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z} \qquad \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \quad \nabla = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \vec{\nabla}$$

($\frac{1}{c}$ fixt das Einheiten-Problem)

generaler Gradient

Quellen der Felder: $\rho, \vec{J}$

$$\Rightarrow \quad J = c\rho - \vec{J} \qquad (c \text{ für Einheit})$$

„generalisierter Strom"

$F = \vec{E} + \vec{B}$ ! funktioniert eigentlich nicht

↳ $F = \vec{E} + ic\vec{B}$ => funktioniert, da $\vec{B}$ Bivektor ist

=> Alle Maxwell-Gleichungen:

$$\nabla F = J \cdot \frac{1}{c\varepsilon_0}$$ „Maxwells Equation"

Beweis:

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \vec{\nabla}\right)(\vec{E} + ic\vec{B}) = \frac{c\rho - \vec{J}}{c\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{\nabla}\vec{E} + i\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + ic\vec{\nabla}\vec{B} = \frac{c\rho - \vec{J}}{c\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{E} + \vec{\nabla}\wedge\vec{E} + i\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + ic\,\vec{\nabla}\cdot\vec{B} + ic\,\vec{\nabla}\wedge\vec{B} = \frac{c\rho - \vec{J}}{c\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{E}}_{\text{Skalar}} + \underbrace{\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + ic\,\vec{\nabla}\wedge\vec{B}}_{\text{Vektor}} + \underbrace{\vec{\nabla}\wedge\vec{E} + i\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}_{\text{Bivektor}} + \underbrace{ic\,\vec{\nabla}\cdot\vec{B}}_{\text{Trivektor}} = \underbrace{\frac{\rho}{\varepsilon_0}}_{\text{Skalar}} \underbrace{- \frac{\vec{J}}{c\varepsilon_0}}_{\text{Vektor}} + 0 + 0$$

Skalare: $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ (1) (✓)

Vektoren: $\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + i c \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = - \frac{\vec{j}}{c \varepsilon_0}$ (2)

Bivektoren: $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} + i \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$ (3)

Trivektoren: $i c \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ (4)

(2) $\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + i \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = - \frac{\vec{j}}{c^2 \varepsilon_0}$

$$\Leftrightarrow \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \underbrace{i \vec{\nabla} \wedge \vec{B}}_{= - \vec{\nabla} \times \vec{B}} = \mu_0 \vec{j}$$

$$\Leftrightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$ (✓)

(3) $\underbrace{\vec{\nabla} \wedge \vec{E}}_{= i (\vec{\nabla} \times \vec{E})} + i \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$

$$\Leftrightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial B}{\partial t}$$ (✓)

(4) $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ (✓)

$$\boxed{\nabla F = \frac{J}{c \varepsilon_0}}$$

Bsp.: Elektrostatik, keine Ladungsquellen in einer Region R

$$\Rightarrow \quad \nabla F_{(R)} = 0$$

$$\Rightarrow \quad F(\vec{x}) = \frac{1}{\tau i} \int_{\partial R} \frac{F(\vec{x}')}{\vec{x}' - \vec{x}} \, d\vec{x}'$$

(Greensche Funktion)

$\Rightarrow$ idendisch zum Cauchy Integral