Mechanik: Beschreibung der Bewegung von Objekten

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

Zweites Newtonsches Gesetz:

$$m \frac{d^2}{dt^2} \vec{r} = \vec{F}$$

$\Rightarrow$ $\vec{r}(t)$ ist die Lösung dieser Gleichung (DGL 2. Ordnung)

Zum Lösen dieser DGL brauchen wir 2 Randbedingungen.

Wir brauchen ein Verfahren zum Lösen dieser DGL.

Idee: Lösung existiert in der Lagrange-Funktion

$$L = L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$$

Wirkung S:
$$S[\vec{r}(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt \; L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$$

$\Rightarrow$ Die Bewegungsgleichung verläuft so, dass die Wirkung S minimal ist.

Euler - Lagrange - Gleichung:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i}$$

Lagrange - Funktion:

$$L = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{kinetische Energie}}}{T} - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Potentielle Energie}}}{U(\vec{r})}$$

$$T = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2$$

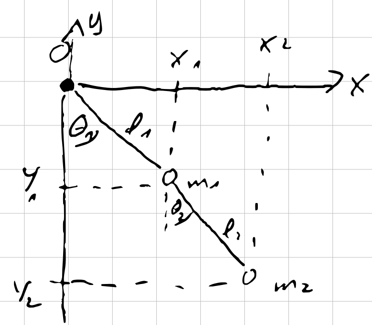
Vorteile:

- einfaches Herleiten d. Bewegungsgleichung
- beliebige Koordinatenwahl
- Erhaltungsgrößen können einfacher erkannt werden

Bei N Teilchen:

$$L = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{m \dot{\vec{r}}_\alpha^2}{2} - U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$$

Bsp.: Doppelpendel



$$L = \frac{m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2)}{2} + \frac{m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)}{2} - U(y_1, y_2)$$

$$= \frac{m_1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{m_2}{2}(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) - m_1 g y_1 - m_2 g y_2$$

Wähle generalisierte Koordinaten: $l_1, l_2, \theta_1, \theta_2$

$$x_1 = l_1 \sin\theta_1 \qquad x_2 = x_1 + l_2 \sin\theta_2$$

$$y_1 = -l_1 \cos\theta_1 \qquad y_2 = y_1 - l_2 \cos\theta_2$$

Zeit-Ableitung:

$$\dot{x}_1 = l_1 \cos\theta_1 \, \dot{\theta}_1 \qquad \dot{x}_2 = \dot{x}_1 + l_2 \cos\theta_2 \, \dot{\theta}_2$$

$$\dot{y}_1 = l_1 \sin\theta_1 \, \dot{\theta}_1 \qquad \dot{y}_2 = \dot{y}_1 + l_2 \sin\theta_2 \, \dot{\theta}_2$$

Einsetzen:

$$L = \frac{(m_1+m_2)}{2} l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\theta}_2^2$$

$$+ m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2$$

$$+ (m_1+m_2) g l_1 \cos\theta_1 + m_2 g l_2 \cos\theta_2$$

Euler-Lagrange-Gleichungen:

$\underset{\sim}{\theta_1}$ $$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \qquad q \in \{\theta_1, \theta_2\}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = \frac{d}{dt}\left[(m_1+m_2) l_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1-\theta_2)\dot{\theta}_2\right]$$

$$= (m_1+m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \Big(\cos(\theta_1-\theta_2)\ddot{\theta}_2 - \sin(\theta_1-\theta_2)\dot{\theta}_2(\dot{\theta}_1-\dot{\theta}_2)\Big)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -m_2 l_1 l_2 \sin(\theta_1-\theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2$$

$$-(m_1+m_2) g l_1 \sin\theta_1$$

$\Rightarrow$ analog für Θ_2

Daraus lassen sich die Bewegungsgleichungen aufstellen:

$$\text{I}: l_1^2 (m_1 + m_2) \ddot{\Theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \big(\cos(\Theta_1 - \Theta_2) \ddot{\Theta}_2 - \sin(\Theta_1 - \Theta_2)(\dot{\Theta}_1 - \dot{\Theta}_2) \dot{\Theta}_2 \big)$$

$$= -m_2 l_1 l_2 \sin(\Theta_1 - \Theta_2) \dot{\Theta}_1 \dot{\Theta}_2 - (m_1 + m_2) g l_1 \sin \Theta_1$$

$$\text{II}: m_2 l_2^2 \ddot{\Theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \big(\cos(\Theta_1 - \Theta_2) \ddot{\Theta}_1 - \sin(\Theta_1 - \Theta_2) (\dot{\Theta}_1 - \dot{\Theta}_2) \dot{\Theta}_1 \big)$$

$$= m_2 l_1 l_2 \sin(\Theta_1 - \Theta_2) \dot{\Theta}_1 \dot{\Theta}_2 - m_2 g l_2 \sin \Theta_2$$

$\Rightarrow$ Die Anzahl der koordinaden wird durch Zwangsbedingungen verringerd

$\Rightarrow$ Die Einführung von generalisierten koordinaden vereinfacht das Problem

Alternativ: Zwangsbedingungen als Gleichung der Form

$$f(q_1, q_2, \dots, q_N) = 0$$

Bsp.: Koordinaten einer Kugeloberfläche

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

Lösung des Problems durch Einführen von Lagrange Multiplikatoren

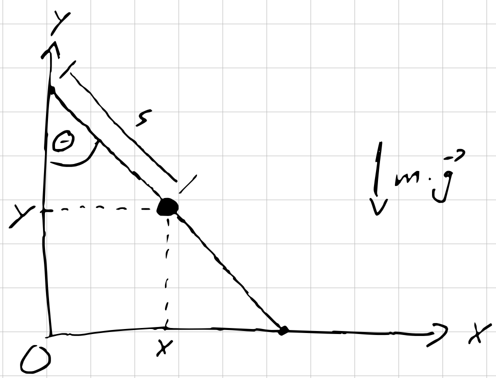
$$L \to L' = L + \underbrace{\lambda}_{\text{Lagrange-Multiplikator}} f(q_1, \dots, q_N, t)$$

Behandle den Lagrange-Multiplikator wie eine weitere Koordinate

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}} = \frac{\partial L}{\partial \lambda}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} + \lambda \frac{\partial f}{\partial q_i}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow f(q_1, \dots, q_n, t) = 0$$



$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - m \cdot g \cdot y$$

$$x = s \sin\Theta$$

$$y = (L - s)\cos\Theta$$

Zwangsbedingung:

$$y \sin\Theta + x\cos\Theta - L\sin\Theta\cos\Theta = 0$$

$$L' = L + \lambda(y\sin\Theta + x\cos\Theta - L\sin\Theta\cos\Theta)$$

Euler-Lagrange-Gleichungen:

I $\quad m\ddot{x} = \lambda\cos\Theta$

II $\quad m\ddot{y} = \lambda\sin\Theta - mg$

III $\quad y\sin\Theta + x\cos\Theta - L\sin\Theta\cos\Theta = 0$

III 2 mal nach t ableiden:

$$\frac{d}{dt}\left[y \sin\Theta + x\cos\Theta - L\sin\Theta\cos\Theta\right]$$

$$= \ddot{y}\sin\Theta + \ddot{x}\cos\Theta = 0$$

$(I \cdot \cos\Theta + II \cdot \sin\Theta)$

$$m(\cos\Theta\,\ddot{x}) + \sin\Theta\,\ddot{y}) = \cos\Theta\, m\ddot{x} + \sin\Theta\, m\ddot{y}$$

$$= \lambda\cos^2\Theta - mg\sin\Theta + \lambda\sin^2\Theta = \lambda - mg\sin\Theta = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = mg\sin\Theta$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} = mg\cos\Theta\sin\Theta$$

$$m\ddot{y} = -mg + mg\sin^2\Theta = -mg\cos^2\Theta$$

=> Lösen durch Integrieren und Einsetzen der Randbedingungen

Weitere Möglichkeit zur Problemlösung:

verwende s aus

$x = s\sin\Theta$ $\qquad$ $y = L\cos\Theta - s\cos\Theta$

als Koordinate

$$\Rightarrow L = \frac{m\dot{s}^2}{2} - mg(L\cos\Theta - s\cos\Theta)$$

$$\Rightarrow m\ddot{s} = mg\cos\Theta$$

Wichtig:

Lagrange-Multiplikatoren können nicht verwendet werden, wenn die Zwangsbedingungen von der Geschwindigkeit abhängig sind. (≙ holonom-skleronome Zwangsbedingungen)

=> Zwangsbedingungen müssen explizit eliminiert werden

Bewegungsintegrale / Erhaltungsgrößen:

Zeitunabhängige Kombinationen von Geschwindigkeiten / Koordinaten

$$I = F(q_1(t), \ldots, q_N(t), \dot{q}_1(t), \ldots, \dot{q}_N(t), \underline{t})$$

$$\frac{dI}{dt} = 0 \Rightarrow \text{Erhaltungsgröße}$$

$$L = L(q_1, \dot{q}_1, \ldots, q_N, \dot{q}_N) \quad \text{(keine Zeitabhängigkeit)}$$

$$\Rightarrow \frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d^2 q_i}{dt^2} \right)$$

$$\text{Da } \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad \text{und } \frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right] \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d^2 q_i}{dt^2} \right) = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i$$

$E(\{q_i(t)\}, \{\dot{q}_i(t)\})$:

$$E = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L$$ ist eine Erhaltungsgröße

$$\frac{d}{dt} E(\{q_i(t)\}, \{\dot{q}_i(t)\}) = 0$$

Erhaltungsgrößen:

- Energie $E = T + U = \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} + U(\vec{r})$

  $\Rightarrow$ Lagrange-Funktion ist von der Zeit unabhängig

  $q_i' = q_i$ $\qquad$ $t' = t + \tau$

$\Rightarrow dt' = dt$

$\Rightarrow \dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt} = \frac{dq_i}{dt'} = \frac{dq_i'}{dt'}$

$L = L(\{q_i\}, \dot{q}_i) = L(\{q_i'\}, \frac{dq_i'}{dt'})$

Infinitessimale Transformation:

$\Psi_i = 0 \qquad X = 1 \quad (\text{eigtl. } \tau)$

$$I = L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = \underbrace{-E}_{\text{Energie}}$$

- Unabhängigkeit von einer Koordinate

$\underset{\sim}{q_1}$ („zyklische Koordinate")

$$q_1' = q_1 + \varepsilon \qquad \Psi_1 = 1$$

$$q_{i\neq 1}' = q_i \qquad \Psi_{i\neq 1} = 0$$

$$t' = t \qquad X = 0$$

$$I = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \Rightarrow \text{kanonischer Impuls}$$

- Lagrange im Schwerpunktsystem

$$L = \sum_{\alpha}^{N} \frac{m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha^{\,2}}{2} - \sum_{\alpha,\beta} U(\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta)$$

$$\vec{r}_\alpha = \vec{r}_\alpha + \vec{\varepsilon} \qquad \vec{\varphi}_\alpha = \vec{1}$$

$$\vec{I} = \sum_{\alpha}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_\alpha} = \sum_{\alpha}^{N} m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha$$

$\Rightarrow$ $\vec{P}_{tot}$, Gesamtimpuls des Systems

$$\vec{R} = \frac{\sum m_\alpha \vec{r}_\alpha}{\sum m_\alpha} \quad \Rightarrow \vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{\vec{P}_{tot}}{\vec{M}_{tot}} = const.$$

$\Rightarrow$ Hieraus folgt, dass sich der Schwerpunkt mit einer konstanten Geschwindigkeit bewegt

- Lagrange im Zentralfeld

$$L = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 - U(|\vec{r}|)$$

$\Rightarrow$ invariant unter Drehung

$$\vec{r}\,' = \vec{r} + \varepsilon(\vec{n} \times \vec{r}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

(Betrag bleibt bei Drehung invariant)

$$[\vec{n} \times \vec{r}]_i = \varepsilon_{ijk} n_j r_k$$

$$\Rightarrow \psi_i = \varepsilon_{ijk} n_j r_k$$

$$I = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \psi_i = \vec{n} \cdot [\vec{r} \times \vec{p}]$$

$$\vec{p} = m \cdot \dot{\vec{r}}$$

Erhaltungsgröße: $\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{p}]$

Drehimpuls

Eigenschaften einer Erhaltungsgröße:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \, L(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}, t)$$

$$q_i = f_i(\{q_i'\}, t') \qquad t = f_t(\{q_i'\}, t')$$

$$\Rightarrow S = \int_{t_1'}^{t_2'} dt' \, L'(\{q_i'\}, \{\dot{q}_i'\}, t')$$

Bei Erhaltungsgrößen: $L = L'$

Transformationen werden als <u>infinitessimale Transformationen</u> durchgeführt:

$$q_i' = q_i + \varepsilon \Psi_i(\{q_j\}, t) + O(\varepsilon^2)$$

$$t' = t + \varepsilon X(\{q_j\}, t) + O(\varepsilon^2)$$

- $\varepsilon = 0 \Rightarrow$ Identitätstransformation
- $\varepsilon \ll 1 \Rightarrow$ infinitessimale Transformation

$$I(t) = L X + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} (\Psi_i - X \dot{q}_i)$$

Virialtheorem

Betrachte Bewegung eines Teilchens in einem Potential, das eine homogene Funktion ist:

$$U(\lambda \vec{r}) = \lambda^n U(\vec{r})$$

Transformation:

$$\vec{r}\,' = \lambda \vec{r} \qquad t' = \beta t$$

$$L' = \frac{m}{2} \left(\frac{d\vec{r}\,'}{dt'} \right)^2 - U(\vec{r}\,')$$

$$= \frac{\lambda^2}{\beta^2} \frac{m}{2} \frac{d\vec{r}^2}{dt^2} - \lambda^n U(\vec{r})$$

Wähle $\beta = \lambda^{1-\frac{n}{2}}$

$$\Rightarrow L\left(\vec{r}, \frac{d\vec{r}\,'}{dt'}\right) = \lambda^n L\left(\vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}\right)$$

$$S' = \int dt'\, L\left(\vec{r}\,', \frac{d\vec{r}\,'}{dt'}\right) = \lambda^{1-\frac{n}{2}} \lambda^n \int dt\, L\left(\vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \lambda^{1+\frac{n}{2}} S$$

Führe infinidessimale Transformation

$\lambda = 1 + \varepsilon$ durch

$$\vec{r}\,' = (1+\varepsilon)\,\vec{r} \qquad t' = \left(1 + \left(1 - \tfrac{n}{2}\right)\varepsilon\right) t$$

$$\psi_i = r_i \qquad \chi = \left(1 - \tfrac{n}{2}\right) t$$

Noether - Theorem:

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\left(1 + \tfrac{n}{2}\right) L + \frac{d}{dt}\left[E\chi - m \dot{r}_i \psi_i \right] \right)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left(1 + \tfrac{n}{2}\right) L + \frac{d}{dt}\left[E \left(1 - \tfrac{n}{2}\right) t - m \dot{r}_i \psi_i \right] \Big)$$

Middelwert v. Funktion auf Intervall $t \in [0, T]$

$$\langle f(t) \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T dt\, f(t)$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \left(1 + \tfrac{n}{2}\right) \langle L \rangle_T + \left(1 - \tfrac{n}{2}\right) \langle E \rangle_T - \underbrace{\left\langle \frac{d}{dt}\, m \dot{\vec{r}} \cdot \vec{r} \right\rangle_T}_{\approx 0}$$

$$\Rightarrow \quad \langle T \rangle_\infty = \frac{n}{2} \langle U \rangle_\infty \quad \text{„Virialtheorem"}$$

Das Virialtheorem $\langle T \rangle_\infty = \frac{n}{2} \langle U \rangle_\infty$

beschreibt den Zusammenhang zw. Mittelwert der kinetischen und der potentiellen Energie im Falle einer endlichen Bewegung eines Teilchens.

Ähnlichkeitssatz

$$U(\lambda \vec{r}) = \lambda^n U(\vec{r})$$

$$\Rightarrow L(\vec{r}\,', \dot{\vec{r}}\,') = \lambda^n L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) \quad \hat{=} \text{ Proportionalität}$$

$$\vec{r}(t) = \lambda^{-1} \vec{r}\,'(\beta t)$$

↳ Beide lösen Euler-Lagrange

$\Rightarrow$ aus einer Lösung $\vec{r}(t)$ lässt sich eine weitere Lösung $\lambda^{-1} \vec{r}(\beta t)$ konstruieren

- 2 Bahnen $L_{1,2}$ mit Umlaufzeit $T_{1,2}$

$$\Rightarrow \frac{L_1}{L_2} = \lambda \qquad \frac{T_1}{T_2} = \beta = \lambda^{1-n/2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{L_1}{L_2}\right)^{1-\frac{n}{2}} = \frac{T_1}{T_2}$$

Bsp.:

3. Keppler-Gesetz: $U(r) = G\frac{mM}{r} \Rightarrow n = -1$

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{3/2}$$

Pendel: $U = \frac{k}{2}\vec{r}^{\,2}$ $n = 2$

$\Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = 1$

$\Rightarrow$ Umlaufzeit unabhängig von Amplitude

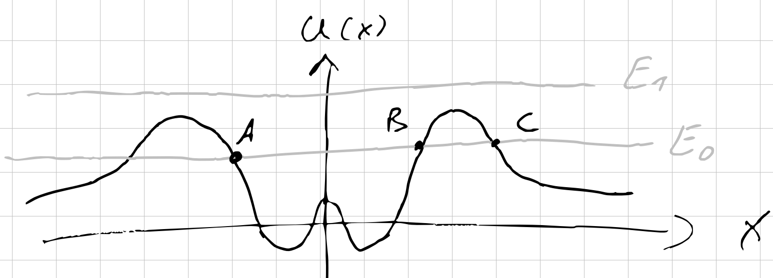
Eindimensionale Bewegung

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - U(x)$$

$$E = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + U(x)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(x)\right)}$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{t - t_0}_{= T \text{ (Umlaufzeit)}} = \pm\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{\underbrace{x_0}_{x_0 = x(t_0)}}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}$$



$E = E_0$ und Teilchen zw. A und B:

Umlaufzeid $\quad T = \sqrt{2m} \int_{x=x_A}^{x=x_B} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}$

$E(x = x_{A,B}) = U(x = x_{A,B})$ da kin. Energie $= 0$

Teilchen mit Masse m im Gravitationsfeld:

$$L = \frac{m}{2}\dot{z}^2 - mgz$$

$t_0 = 0 \Rightarrow z = h$, Teilchen in Ruhe

$$E(t_0) = mg \underset{(=z(t_0))}{h}$$

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{z(t)}^{h} \frac{dz}{\sqrt{E - mgz}}$$

← Vorzeichen umgedreht, da Teilchen nach unten fällt, Lösung aber positiv sein soll

Randbedingung: $E = mgh$

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{z(t)}^{h} \frac{dz}{\sqrt{mgh - mgz}} = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{z(t)}^{h} \frac{1}{\sqrt{mg}} \frac{dz}{\sqrt{h-z}}$$

$$\frac{d}{dz}(h-z)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}(h-z)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\int dz\,(h-z)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{m}{2}}\left(\frac{-2}{\sqrt{mg}}\right)\left[\sqrt{h-z}\right]_{z=z(t)}^{z=h}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{g}}\left(h - z(t)\right) \Rightarrow z(t) = h - \frac{g}{2}t^2$$

Umlaufbahn eines Pendels:

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{m}{2}\omega^2 x^2$$

$$T(E) = \sqrt{2m}\int_{x_A(E)}^{x_B(E)} \frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}}$$

$$= \sqrt{2m}\int_{x_A}^{x_B} \frac{dx}{\sqrt{E-\frac{m\omega^2x^2}{2}}}$$

Umkehrpunkte x_A, x_B:

$$E = U(x_A, x_B) = \frac{m\omega^2 x_{A,B}^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad x_{A,B} = \pm\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} = \pm x_0$$

$$\Rightarrow T = \sqrt{2m}\int_{-x_0}^{x_0}\frac{dx}{\sqrt{E-\frac{m\omega^2x^2}{2}}} = \sqrt{\frac{2m}{E}}\int_{-x_0}^{x_0}\frac{dx}{\sqrt{1-\frac{x^2}{x_0^2}}}$$

$$= (x \to x_0\xi) = \sqrt{\frac{2m}{E}}\, x_0 \int_{-1}^{1}\frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = (\xi \to \cos\phi)$$

$$= \int_0^{\pi} d\phi = \frac{2\pi}{\omega} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$ (unabhängig von E :))

Dreidimensionale Bewegung

① Zwei-Körper-Problem

$$L = \frac{m_1}{2}\dot{\vec{r}}_1^{\,2} + \frac{m_2}{2}\dot{\vec{r}}_2^{\,2} - U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

Potentielle Energie hängt nur von $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ ab

$\Rightarrow$ Schwerpunktskoordinaten

Schwerpunkt: $$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r}$$

Einsetzen in L:

$$L = \frac{m_1+m_2}{2}\dot{\vec{R}}^2 + \frac{m_1 m_2}{2(m_1+m_2)}\dot{\vec{r}}^2 - U(\vec{r})$$

$$= \frac{M}{2}\dot{\vec{R}}^2 + \frac{\mu}{2}\dot{\vec{r}}^2 - U(\vec{r})$$

$M = m_1 + m_2 \qquad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$

Lagrange kann in zwei unabhängige Lagrange-Funktionen aufgespalten werden:

$$L_1 = \frac{M}{2}\dot{\vec{R}}^2 \qquad\qquad L_2 = \frac{\mu}{2}\dot{\vec{r}}^2 - U(\vec{r})$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{R}(t) = \vec{R}_0 + \vec{V}_0 t$$

② Bewegung im Zentralpotential

$$U(\vec{r}) = U(|\vec{r}|) = U(r)$$

$\Rightarrow$ Drehimpuls ist erhalten, da

$\frac{dL}{dt} = [\vec{r} \times \vec{F}] = 0$ erhalten ist

Drehimpuls:

M ist zeitunabhängig $\qquad M = \vec{r} \times \vec{p}$

$\Rightarrow \vec{r} \cdot \vec{M} = 0 \qquad \vec{p} \cdot \vec{M} = 0$

$\Rightarrow$ Bewegung findet in einer Ebene statt

$$L = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 - U(r)$$

Da Bewegung in Ebene <> Polarkoordinaten

$x = r \cos\phi$ $\qquad$ $y = r \sin\phi$

$$L = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{m}{2} r^2 \dot{\varphi}^2 - U(r)$$

Unabhängig von der Zeit und von φ

=> Energie und Drehimpuls sind erhalten

$$E = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{m}{2} r^2 \dot{\varphi}^2 + U(r)$$

$$M = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \dot{\varphi} \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\varphi} = \frac{M}{m r^2}$$

$$\Rightarrow E = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{M^2}{2 m r^2} + U(r)$$

$$= \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \underbrace{U_{eff}(r)}_{\text{neues effektives Potential}}$$

=> Bewegung wie ein eindimmensionales Teilchen im Potential $U_{eff}(r)$

Falls $U(r) = 0$ dann $U_{eff}(r) > 0 \quad \forall r \neq 0$

$U_{eff} = \infty$ bei $r = 0$

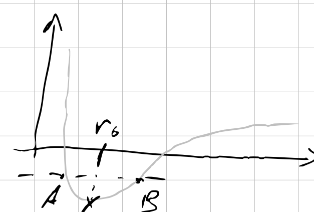
$\Rightarrow$ Teilchen immer zw. $r = r_{min}$ und $r = \infty$

Falls $U(r) < 0$: $\quad U(r)\big|_{r \to 0} \sim -\alpha r^{-n}$

- $n < 2$: Teilchen kann das Kraftzentrum nicht erreichen

- $n > 2$: Teilchen kann das Kraftzentrum erreichen

Falls $U(r)$ ein Minimum hat:



Teilchen kann um das Minimum herum pendeln

Lösen der Bewegungsgleichung von

$$r = r(\varphi) = r(\varphi(t))$$

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U_{eff}(r)\right)} \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{M}{mr^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{d\varphi} = \frac{m r^2}{\mu} \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U_{eff}(r)\right)}$$

$$\Rightarrow \varphi - \varphi_0 = \frac{\mu}{\sqrt{2m}} \int^{r} \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{E - U_{eff}(r)}} = \Delta\varphi$$

Falls $\Delta\varphi = 2\pi \frac{n_1}{n_2}$: Trajektorie geschlossen

$\uparrow$

2 ganze Zahlen $\in \mathbb{N}$

Offene Trajektorie: Teilchen wird nach unendlicher Zeit jeden Punkt auf der r-φ-Ebene mit $r_A \leq r \leq r_B$ mind. einmal besuchen.

Nur in den Potentialen

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r}$$

$$U(r) = k r^2$$

Sind <u>alle</u> endlichen Trajektorien geschlossen.

③ Keppler - Problem

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r}$$

α positiv $\rightarrow$ anziehend

α negativ $\rightarrow$ abstoßend

α positiv $\Rightarrow$ Potential hat ein Minimum

$$U_{eff}(r) = \frac{M^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r}$$

$$\frac{dU_{eff}}{dr} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_0 = \frac{M^2}{m\alpha}$$

$$U_{eff}(r_0) = U_{min} = -\frac{\alpha}{r_0} = -\frac{m\alpha^2}{2M^2}$$

ist die minimale potentielle Energie

- $E = U_{eff}(r_0) \Rightarrow$ Trajektorie ist ein Kreis

$$\dot{\varphi} = \frac{M}{mr_0^2} = \frac{m\alpha^2}{M^3} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\dot{\varphi}} = \frac{2\pi m r_0^2}{M} = \frac{2\pi M^3}{m\alpha^2} = \pi\alpha\sqrt{\frac{m}{2|E|}}$$

$\omega \Rightarrow \dot{\varphi}$

- $U_{min} < E < 0$: Teilchen dreht sich um das Kraftzentrum und pendelt zwischen den Radien r_A, r_B

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{M}{\sqrt{2m}} \int^{r} \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{E - U_{eff}(r)}}$$

... viel rechnen ...

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi} \qquad p = \frac{M^2}{m\alpha}$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}}$$

$e < 1$, weil Energie E für endliche Bewegungen negativ ist.

Umlaufzeit: $T = \frac{p^2 m}{M} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(1 + e\cos\varphi)^2}$

$$T = \frac{2\pi p^2 m}{M(1 - e^2)^{3/2}} = \pi \alpha \sqrt{\frac{m}{2|E|^3}}$$

- $E > 0$: Teilchen kommt aus dem Unendlichen an und verschwindet im Unendlichen

$r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}$ ist mit $e > 1$ eine Hyperbel

Runge - Lenz - Vektor:

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{A} = [\vec{p} \times \vec{M}] - m\alpha \frac{\vec{r}}{r}$$

ist eine Erhaltungsgröße

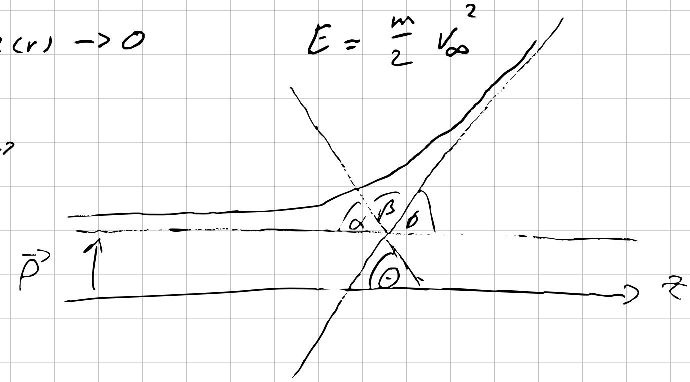
Streuung von Teilchen

Zentralpotential $\Rightarrow$ Energie & Drehimpuls erhalten

$$\lim_{r \to \infty} U(r) \to 0 \qquad E = \frac{m}{2} v_\infty^2$$

$$\vec{r} = z\vec{e}_z + \vec{\rho}$$

$$\vec{e}_z \cdot \vec{\rho} = 0$$



Kleine Schwingungen:

① Freie Schwingung

$\Rightarrow$ treten fast überall in der Nähe von Gleichgewichten auf

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - U(x)$$

$U(x)$ hat ein Minimum bei $x = x_0$

$$x = x_0 + \xi$$

$$\Rightarrow L = \frac{m}{2}\dot{\xi}^2 - U(\underbrace{x_0+\xi}_{})$$

Taylor-Entwicklung

$$U(x_0+\xi) \approx U(x_0) + \underbrace{\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=x_0}}_{=0 \text{ da Minimum bei } x_0} \xi + \frac{1}{2!}\left.\frac{d^2U(x)}{dx^2}\right|_{x=x_0}\xi^2 + O(\xi^3)$$

$$\Rightarrow L = \frac{m}{2}\dot{\xi}^2 - \frac{k}{2}\xi^2 \qquad k = \left.\frac{d^2U(x)}{dx^2}\right|_{x=x_0}$$

$k > 0$, da bei x_0 ein Minimum vorliegt

Physik des starren Körpers

Rotation: $\vec{\Omega} = \frac{d\vec{\phi}}{dt}$

Bei einer Drehung: $d\vec{r} = d\vec{\phi} \times \vec{r}$

$d\vec{\phi} = d\phi \, \vec{n}$ mit Drehachse $\vec{n}$

kinetische Energie:

$$T = T_1 + T_2 + T_3$$

$$T_1 = \sum_i^N \frac{m_i}{2} \vec{V}_c^2 = \frac{M}{2} \vec{V}_c^2$$

$$T_2 = \sum_{i=1}^N m_i \vec{V}_c \cdot \left[\vec{\Omega} \times \vec{r}_i\right] = \vec{V}_c \cdot \left[\vec{\Omega} \times \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i\right] = 0$$

$$T_3 = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \left[\vec{\Omega} \times \vec{r}_i\right] = \frac{I_{\alpha\beta} \Omega_\alpha \Omega_\beta}{2}$$

$$I_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^N m_i \left(\delta_{\alpha\beta} \vec{r}_i - \vec{r}_{i,\alpha} \vec{r}_{i,\beta} \right)$$