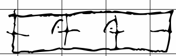
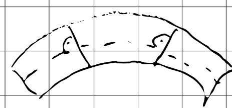
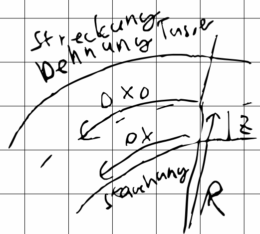
1.1 Gerade Balkenbiegung

Bernoulli-Hypothese:
Der Balkenquerschnitte bleiben wärend der Deformation eben und Senkreht auf der Balkenachse





R: Krümmungradius



Stauchungsatz $\dfrac{\Delta x_0}{R} = \dfrac{\Delta x}{R-z}$

$$\frac{\Delta x_{(z)}}{\Delta x_0} = \frac{R-z}{R} = 1 - \frac{z}{R}$$

$\Rightarrow$ Dehnung Faser: $\underline{\varepsilon(x,z)} = \dfrac{\Delta l}{l} = \underline{-\dfrac{z}{R(x)}}$

Spannung: $\sigma(x,z) = E(x)\,\varepsilon(x,z) = -\dfrac{E(x)}{R(x)}\,z$

$N(x) = \int_A \sigma(x,y,z)\,dA \rightarrow$ Neutrale Faser durch Flächenmittelpunkt

$$\left.\begin{aligned} M_y(x) &= \int_A \sigma(x,y,z)\,z\,dA \\ M_z(x) &= -\int \sigma(x,y,z)\,y\,dA \end{aligned}\right\} \quad M_y(x) = -\frac{E(x)}{R(x)}\int_A z^2\,dA$$

$$= -\frac{E(x)}{R(x)}\,I_y(x)$$

Flächenträgheitsmoment: $I_y = \int z^2 \, dA = I_y(x)$
(2. Grades, auch axialer Flächenträgheitsmoment

$\Rightarrow M_y(x) = -\frac{E(x) \, I_y(x)}{R(x)}$ $\sigma(x,z) = \frac{M_y(x)}{I_y(x)} z$

$\Rightarrow$ Deviationsmoment $I_{yz} = -\int_A x y \, dA$

Hauptachsensystem: Koordinaten System in dem Defiationsmoment verschwindet

→ für gerade Biegung $M(x)$ in richtung Hauptträgheitsachse(z)

Biegeliniendiffentialgleichung: $w''(x) = -\frac{M_y(x)}{E(x) \, I_y(x)}$

1.2 statisch unbestimmte Balken

Lagerreaktionen anhand einer unbekannten Berechen
($A_v(B_v)$, $M_A(B_v)$)
Mit Biegelinie 3. Unbekannte bestimmen

1.3 Superpositionsprinzip
Die Verschiebungen infolge einer Kombination von Lasten sind gleich der Summe der Verschiebungen (S. 18)

1.4 Kerbwirkung

Kerbspannungsfaktor $K = \frac{\sigma_{max,K}}{\sigma_{max}}$ $\Rightarrow \sigma_{max,K} = K \cdot \sigma_{max}$
$\Rightarrow$ Diagramm K ablesen

1.5 Flächenträgheitsmoment

$$\underbrace{S_z = y_A A = \int y\,dA\,,\quad S_y = z_A A \int z\,dA}$$

Flächenträgheitsmoment 1. Grades
(statisches Moment)

Hauptträgheitsachsen: $I_{yz} = 0$

Rechteck: $I_z = \frac{B^3 H}{12}\,,\quad I_y = \frac{B H^3}{12}$

Kreis: $I_y = \frac{\pi R^4}{4}\,,\quad I_z = \frac{\pi R^4}{4}$

$I_{\bar{y}} = I_y + z_0^2 A\,,\quad I_{\bar{z}} = I_z + y_0^2 A$
$I_{\bar{y}\bar{z}} = I_{yz} - y_0 z_0 A$ } Satz von Steiner

$\boxed{\text{S. 24}}$ → ähnlich wie Hauptspannungen $\boxed{\text{S. 25 Bsp}}$

$I_{\bar{y}} = \int_A \bar{z}^2\,dA\,,\quad I_{\bar{z}} = \int_A \bar{y}^2\,dA\,,\quad I_{\bar{y}\bar{z}} = -\int_A \bar{y}\bar{z}\,dA$

⇒ Grenzen manchmal als Funktion,

1.6 Schiefe Biegung

$$\boxed{\begin{aligned} M_y &= E I_{yz} v'' - E I_y w'' \\ M_z &= E I_z v'' - E I_{yz} w'' \end{aligned}}$$

$v''(x) = \frac{M_z(x)}{E(x)\, I_z(x)}$

$w''(x) = -\frac{M_y(x)}{E(x)\, I_y(x)}$

$$\sigma(x,y,z) = -\frac{M_z(x)\, y}{I_z(x)} + \frac{M_y(x)\, z}{I_y(x)} + \frac{N(x)}{}$$

S. 37?

Tosion

2.1 Grundlagen

S. 34 – 37 Genau anschauen

2.2 torsion von kreis querschnitten

Drillung: $\vartheta'(x) = \frac{M_T(x)}{G I_p}$

Hookelsches Gesetz

$\varepsilon_{xy} = -\frac{1}{2}\vartheta'(x)\, z \Rightarrow \sigma_{xy} = 2G\varepsilon_{xy} = -G\vartheta'(x)\, z = \sigma_{yx}$

$\varepsilon_{xz} = +\frac{1}{2}\vartheta'(x)\, y \Rightarrow \sigma_{xz} = 2G\varepsilon_{xz} + G\vartheta'(x)\, y = \sigma_{zx}$

Torsonsmoment: $M_T(x) = G\vartheta'(x) I_p$

Spannungverteilung $\underline{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_{yx} \\ \sigma_{zx} \end{pmatrix}$

Verschiebungsvektor: $\underline{u} = \vartheta(x)(y\,\underset{\sim}{e_z} - z\,\underset{\sim}{e_y})$

$\underline{u} = \vartheta(x)\begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ +y \end{pmatrix} = \underline{u}_p$

Verzerungen: Längsverzehrung: $\varepsilon_{xx} = \frac{du}{dx} = 0 \quad \varepsilon_{yy} = 0 \quad \varepsilon_{zz} = 0$

Schubverzerungen: $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}\vartheta'(x)\, z$

$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = +\frac{1}{2}\vartheta'(x)\, y$

$\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}(-\vartheta + \vartheta) = 0$

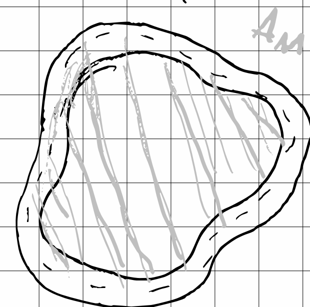
$\tau_{xy} = 2G\varepsilon_{xy}$ $\quad \tau_{xz} = 2G\varepsilon_{xz}$, $\tau_{yz} = 0$

$$I_p = \int (y^2 + z^2)\, dA = I_y + I_z = \frac{\pi R^4}{2}$$

Bsp. S. 42/43

2.3 Torsion dünnwandiger geschlossener Querschnitte

Schubfluss: $\xi = \underbrace{\tau(s,x)\, b(s)}_{2,57}\, e_t(s)$



$$\tau(s) = \frac{M_T}{2 b(s) A_m} = \frac{M_T}{W_T(s)}$$

Drillung: Gleich

Trägheitsmoment:

$$I_T = \frac{4 A_m^2}{\int_{s=0}^{u} \frac{ds}{b(s)}}$$

Verwölbung: 2.72 (S. 47) (S. 48)

2.4 Torsion dünnwandiger offener Querschnitte

$\tau = \frac{M_T}{I_T} b$ mit $I_T = \frac{1}{3} L b^3$

L ↓ Länge

$\boxed{\text{Tabelle S. 52}}$

üben S. 53–55

Querkraftschub

3.1 Symetrische Profile

Schubspannung $\tau(x,z) = \tau_{xz}(x,z) = \dfrac{Q_z(x)\, S_y(x)}{I_y\, b(z)}$

Statische Momente $S_y(z) = \int_z^{z_0} \int_{y_1(\tilde z)}^{y_2} \tilde z \, dy \, d\tilde z$

$= \int_z^{z_0} \int_{y_1(\tilde z)}^{y_2(\tilde z)} \tilde z \, d\tilde z = \underline{\underline{\int_z^{z_0} \tilde z \, b(\tilde z)\, d\tilde z}}$

$\boxed{S.\ 60}$ verstehen

3.2 Dünnwandige offene Profile

$\sigma_{xx}(x,y,z) = \dfrac{M_y}{I_y} z - \dfrac{M_z}{I_z} y \qquad M_y' = +Q_z \qquad M_z'(x) = -Q_y(x)$

Schubfluss: $q(s) = \dfrac{Q_y(x)}{I_z} S_z(s) + \dfrac{Q_z(x)}{I_y} S_y(s)$

statische Momente: $S_y(s) = -\int_0^s z(\tilde s)\, b(\tilde s)\, d\tilde s$

$S_z(s) = -\int_0^s y(\tilde s)\, b(\tilde s)\, d\tilde s$

$\tau(s) = \dfrac{q(s)}{b(s)}$ 3.44 S. 65 Bsp ~~~~ $\overset{\nabla}{6}$

Schubmittelpunkt:

$$y_{sm} = + \frac{2}{I_y} \int_0^{s_{max}} z(s)\, b(s)\, A_\tau(s)\, ds$$

$$z_{sm} = - \frac{2}{I_z} \int_0^{s_{max}} y(s)\, b(s)\, A_\tau(s)\, ds$$

SMP vs. FMT

$\downarrow$

liegt an der Verzweigung, wenn nur eine Verzweigung

S. 69 Anschauen

Elastizitätstheorie

4.1 Der dreidimensionale Spannungsvektor

Gleicher Indizes = Normalspannungen

Unterschiedlichem Indizes = Schubspannungen

σ_{ab}

Richtung (a), Ebene (b)

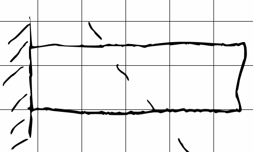
Lemma von Cauchy:

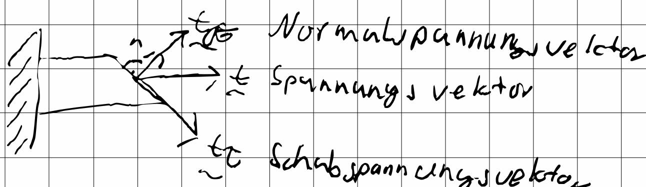
$$\begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \qquad t(n) = \sigma n$$

$$\underset{\sim}{t}(-n) = -\underset{\sim}{t}(\underset{\sim}{n})$$

Spannungsmatrix:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$





S. 74 / 75

Zerlegung der Spannungsmatrix:

$$\underbrace{\underline{\sigma}^0 = \frac{sp(\sigma)}{3} 1}_{\text{stärischer hydrostatischer Spannungsanteil}} \qquad \underbrace{\sigma' = \sigma - \sigma^0}_{\text{Spannungsdeviator}}$$

σ' druckunabhängig $sp(\sigma') = 0$

$$= \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

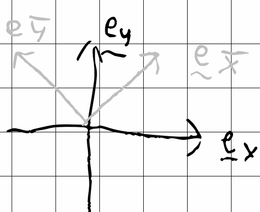
Ü 77

Transformation der Spannungskomponenten:

$$\sigma_{\bar{x}\bar{x}} = e_{\bar{x}} \cdot t(e_{\bar{x}}) = e_{\bar{x}} \cdot (\sigma e_{\bar{x}})$$

$$\sigma_{\bar{y}\bar{y}} = e_{\bar{y}} \cdot t(e_{\bar{y}}) = e_{\bar{y}} \cdot (\sigma e_{\bar{y}}) \qquad \sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{\bar{x}\bar{y}} = e_{\bar{x}} \cdot t(e_{\bar{y}}) = e_{\bar{x}} \cdot (\sigma e_{\bar{y}}$$



$$\underset{\sim}{e_{\bar{x}}} = \cos\varphi \, \underset{\sim}{e_x} + \sin\varphi \, \underset{\sim}{e_y}$$

$$\underset{\sim}{e_{\bar{y}}} = -\sin \, \underset{\sim}{e_x} + \cos\varphi \, \underset{\sim}{e_y}$$

$$\sigma_{\bar{x}\bar{x}} = \frac{1}{2}(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}) + \frac{1}{2}(\sigma_{xx}-\sigma_{yy})\cos(2\varphi) + \sigma_{xy}\sin(2\varphi)$$

$$\sigma_{\bar{y}\bar{y}} = \frac{1}{2}(\sigma_{xx}+\sigma_{yy} - \frac{1}{2}(\sigma_{xx}-\sigma_{yy})\cos(2\varphi) + \sigma_{xy}\sin(2\varphi)$$

$$\sigma_{\bar{x}\bar{y}} = -\frac{1}{2}(\sigma_{xx}-\sigma_{yy})\sin(2\varphi) + \sigma_{xy}\cos(2\varphi)$$

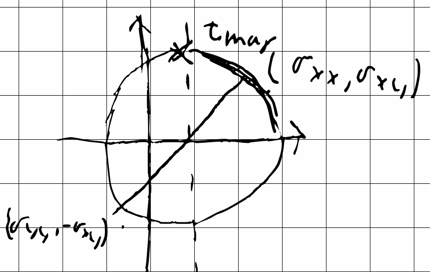
$$\tan(2\varphi_0) = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}$$

Hauptspannungen im $\underline{ESZ}$ (Ebenes Spannungssystem)

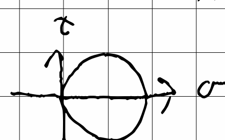
$$sp(\sigma^{ESZ}) = \sigma_{xx}+\sigma_{yy} = \sigma_1^H + \sigma_2^H$$

$$\det(\sigma^{ESZ}) = \sigma_{xx}\sigma_{yy} - \sigma_{xy}^2 = \sigma_1^H \sigma_2^H$$

$$\sigma_{1,2}^{H,ESZ} = \frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}^2}$$

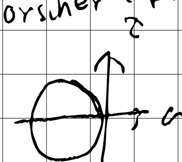


Morscher (Spannungs~~kreis~~) Kreis



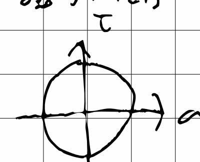
Zug

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Druck

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} -\sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Schub

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{matrix} 0 & \tau_0 \\ \tau_0 & 0 \end{matrix}$$

4.2 Der Verzerrungszustand

$$\varepsilon_{\bar{x}\bar{x}} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}) + \frac{1}{2}(\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy})\cos(2\varphi) + \varepsilon_{xy}\sin(2\varphi)$$

$$\varepsilon_{\bar{y}\bar{y}} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy}) - \frac{1}{2}(\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy})\cos(2\varphi) - \varepsilon_{xy}\sin(2\varphi)$$

$$\varepsilon_{\bar{x}\bar{y}} = -\frac{1}{2}(\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy})\sin(2\varphi) + \varepsilon_{xy}\cos(2\varphi)$$

$$\tan(2\varphi_0) = \frac{2\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}$$

$$\varepsilon_{1,2}^{H,EVZ} = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2}\right)^2 + \varepsilon_{xy}^2}$$

Versetzungstensor

$$\underbrace{u(r + dr)}_{\text{Verschiebungsfeld}} = u(r) + \varepsilon\, dr + \underbrace{d\alpha \times dr}_{\alpha \times dr \text{ Rotationsanteil}}$$

$u(r)$: translationsanteil

$\varepsilon\, dr$: Verzerrungsanteil

Versetzungsmatrix

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$ Längenverzerrungen

Verzerrungen

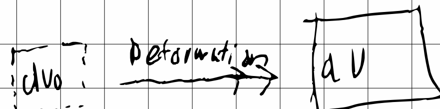
$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

Ü 86

Volumenänderung



$$\frac{dV - dV_0}{dV_0} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = sp(\varepsilon)$$

4.3 Das dreidimensionale Hooke'sche Gesetz

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \text{sym} & & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

Normalspannung

Schubspannung

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \text{sym} & & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}$$

Längsverzerrung

Schubverzerrung

Elastisches Stoffgesetz / elastische Stoffgleichung

$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{f}}(\underline{\underline{\varepsilon}})$ (homogene Materialien) $\underline{\underline{\sigma}} = f(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{r})$ (inhomogen)

ein Material heißt elastisch, wenn die momentane Spannung ~~nur~~ von momentaner Verzerrung abhängt

Formänderungsenergiedichte: $W(\underline{\underline{\varepsilon}})$
(pro Volumeneinheit (elastische Federenergie))

Elastisches Stoffgesetz: $\underline{\underline{\sigma}} = f(\underline{\underline{\varepsilon}})$

Hyperelastisches Stoffgesetz: $\underline{\underline{\sigma}} = f(\underline{\underline{\varepsilon}}) = \frac{\partial W(\underline{\underline{\varepsilon}})}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}$ nicht linear + anisotrope Fkt.

z.B. $\sigma_{xx} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{xx}}$ $\sigma_{xy} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{xy}}$ usw

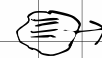
Isotropie: Richtungsunabhängiges Materialverhalten

Anisotropie: richtungsabhängiges Materialverhalten

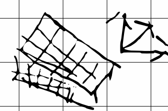
(Invariante einer Matrix : $sp(\underline{\underline{\varepsilon}})$, $sp(\underline{\underline{\sigma}})$)

Spezielle Anisotopien

- Transversalisotrobie : z.B faserverstärkte Werkstoffe, Holz



- Orthotropie : z.B Bleche, Gewebe



Isotropie : keine ausgeprägten Richtungen, richtungsunabhängiges Materialverhalten

Das Hooke'sche „Gesetz" : linearer i.A anisotroper Zusammenhang zwischen $\underline{\underline{\sigma}}$ und $\underline{\underline{\varepsilon}}$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{f}}(\underline{\underline{\varepsilon}}) = \frac{\partial W(\underline{\underline{\varepsilon}})}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} = \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}[\underline{\underline{\varepsilon}}]$$

Sonderfall : homogenes Materialverhalten

$C = \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}$: Steifigkeit (Steifigkeitstensor, Steifigkeitsmatrix)

inverse Reaktion

$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\underline{\underline{S}}}}[\underline{\underline{\sigma}}]$ $\quad \underline{\underline{\underline{\underline{S}}}}$: Nachgibigkeits(-tensor, -matrix)

lineare Reaktion
i. Allg. anisotrop

Formänderungsdichte :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}[\underline{\underline{\varepsilon}}] = \frac{\partial W(\underline{\underline{\varepsilon}})}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}$$

linear elastische Relation — Hyperelastische Stoffgleichung

↓

$$\boxed{W(\underline{\underline{\varepsilon}}) = \frac{1}{2}\,\underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}[\underline{\underline{\varepsilon}}] = \frac{1}{2}\,\varepsilon\sigma = \frac{1}{\sigma} \cdot a}$$

allg. Hookesches Gesetz (i. Allg. anisotrop)

$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}[\underline{\underline{\varepsilon}}]$ $\quad \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}$: Steifigkeit

$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\underline{\underline{S}}}}[\underline{\underline{\sigma}}]$ $\quad \underline{\underline{\underline{\underline{S}}}}$: Nachgiebigkeitsfunktion

Isotropie: $W(\underline{\underline{\varepsilon}}) = W$ (Invariante von $\underline{\underline{\varepsilon}}$)

isotrope Hookesche Gesetz

$$W(\underline{\underline{\varepsilon}}) = \frac{\lambda}{2}\, sp(\underline{\underline{\varepsilon}})^2 - \mu\, sp\, \underline{\underline{\varepsilon}}^2$$

(allg. Form von W in linearen und isotropen Fall

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}} &= \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{\varepsilon}}) = \lambda\, sp(\underline{\underline{\varepsilon}})\, \underline{\underline{1}} + 2\mu\, \underline{\underline{\varepsilon}} \\ \underline{\underline{\varepsilon}} &= \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{\sigma}}) = \frac{1}{2\mu}\left[\underline{\underline{\sigma}} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu}\, sp(\underline{\underline{\sigma}})\, \underline{\underline{1}}\right] \end{aligned}}$$

① Zugversuch $\quad \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\sigma}} \qquad \sigma_{xx} = E\, \varepsilon_{xx}$

② Scherversuch $\quad \sigma_{xy} = 2G\, \varepsilon_{xy} \quad (\tau = G\gamma)$

E : Elastizitätsmodul // $G = \frac{E}{2(1-\nu)}$: Schubmodul

$$\lambda = \frac{2\nu G}{1-2\nu} = \frac{\nu E}{1-2\nu} \qquad \mu = G$$

Alternative Darstellung des Hookeschen Gesetzes, ÜBsp S. 96

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}} &= 2G\left(\underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{\nu}{1-2\nu}\, sp(\underline{\underline{\varepsilon}})\, \underline{\underline{1}}\right) \\ \underline{\underline{\varepsilon}} &= \frac{1}{2G}\left(\underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{1+\nu}\, sp(\underline{\underline{\sigma}})\, \underline{\underline{1}}\right) \end{aligned}}$$

z.B

$\sigma_{xx} = 2G(\varepsilon_{xx} + \frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}))$

$\sigma_{xy} = 2G(\varepsilon_{xy} + 0)$

Alternativ (Hook'sches Gesetz):

$\sigma^0 = 3k\,\varepsilon^0$ $\qquad\qquad$ $\sigma' = 2G\,\underline{\underline{\varepsilon}}'$

isotropie Voraussetzung

$3k = \frac{E}{1-\nu}$ $\qquad\qquad$ $2G = \frac{E}{1+\nu}$

Kompression modul $\qquad\qquad$ Schubmodul

Bei isotropen Materialien: linear elastische Eigenschaft durch Materialkonstanten beschrieben
(E, ν, λ, μ - G ← nur zwei unabhängig

rein Mechanisch (Hookesche Gesetz)

$\underline{\underline{\sigma}} = 2G\left(\underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{\nu}{1+2\nu} sp(\underline{\underline{\varepsilon}})\,\underline{\underline{1}}\right)$

thermomechanisch + isotrop: $\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}_G + \varepsilon_\Theta = \underline{\underline{\varepsilon}}_\sigma + \alpha\Delta\Theta\,\underline{\underline{1}}$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{\underline{\sigma}} = 2G\left(\underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{\nu}{1-2\nu} sp(\underline{\underline{\varepsilon}})\,\underline{\underline{1}} - \frac{1+\nu}{1-2\nu}\alpha\Delta\Theta\,\underline{\underline{1}}\right)}$$ S. 98

$\sigma_{xx} = 2G\left(\varepsilon_{xx} + \frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}+\varepsilon_{zz}) - \frac{1+\nu}{1-2\nu}\alpha\Delta\Theta\right)$

$\sigma_{xy} = 2G(\varepsilon_{xy} + 0)$

$W(\underline{\underline{\varepsilon}}) = \frac{1}{2}\underline{\underline{\sigma}}\cdot\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\sigma^0+\sigma')(\varepsilon^0+\varepsilon')$

$\sigma^0\cdot\varepsilon' = 0 \qquad \sigma' \cdot \varepsilon^0 = 0$

$W(\underline{\underline{\varepsilon}}) = \frac{1}{2}\sigma^0\cdot\varepsilon^0 + \frac{1}{2}\sigma'\cdot\varepsilon' \neq \frac{1}{2}\cdot\sigma'\cdot\varepsilon'$

Volumenänderungsdichte:

$$w^V = \frac{1}{2}\sigma^0 * \varepsilon^0 = \frac{3k}{2}\varepsilon^0 * \varepsilon^0 = \frac{1}{6k}\sigma^0 \cdot \sigma^0$$

Gestaltänderungsdichte

$$w^G = \frac{1}{2}\sigma' \cdot \varepsilon' = G\,\varepsilon' \cdot \varepsilon' = \frac{1}{4G}\sigma' \cdot \sigma'$$

$$\left.\right\} w = w^V + w^G$$

4.4 Festigkeitshypothese

1) Normalspannungshypothese

$$\sigma_1 = \sigma_c \qquad \sigma_3 = -\sigma_c$$

2) Schubspannungshypothese

$$\tau_{max} = \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2} = \tau_c$$

3) Mises - Versagenskriterien

$$\sigma_V = \sqrt{\frac{3}{2}}\,\|\underline{\underline{\sigma}}'\| = \sigma_{Vc}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\sigma_{xx}'^2 + \sigma_{xy}'^2 + \sigma_{xz}'^2 \ldots}$$

4.160

Energiemethoden

5.1 Elastische Energie von Stäben und Balken

W: Formänderungsenergie W^*: Komplimentärenergie

$$\frac{1}{2}\underline{\underline{\sigma}}\cdot\underline{\underline{\varepsilon}} = \underbrace{\frac{1}{2}\underline{\underline{\varepsilon}}\cdot\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}[\underline{\underline{\varepsilon}}]}_{W} = \underbrace{\frac{1}{2}\underline{\underline{\sigma}}\cdot\underline{\underline{\underline{\underline{S}}}}[\underline{\underline{\sigma}}]}_{W^*}$$

Energie pro Volumeneinheit

$$W_{ges} = \int_V W\, dV$$

$$W^*_{ges} = \int_V W^*\, dV$$

Gesamtenergie

Zug-Druck-Stab

$$W_{ges} = \int_V W dV = \int_V \frac{E}{2}\,(u'(x))^2\, dV =$$

$$W_{ges}^* = \int_V W^* dV = \int_V \frac{1}{2E}\left(\frac{N}{A}\right)^2 dV$$

Biegung

$$W_{ges} = W^*_{ges} = \frac{1}{2}\int \sigma\cdot\varepsilon\, dV = \frac{1}{2}\int_0^l EI_y\, w''^2\, dx = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M_y^2}{EI_y}\, dx$$

Torsion

$$W_{ges} = \frac{1}{2}\int_0^l GI_p\, \vartheta'\, dx = W^*_{ges} = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M_T^2}{GI_p}\, dx$$

5.2 PdvV

S. 106 – 115 Abends durchlesen

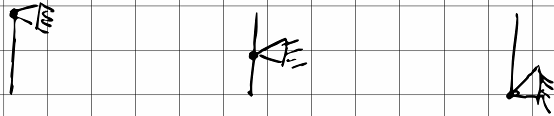
5.3. PdvV (Stäbe + Balken)

5.4 Satz von Maxwell und Betti

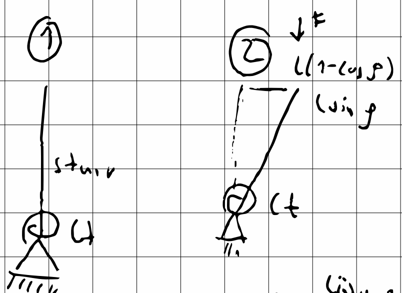
bis S. 125 Anschauen

Stabilität elastischer Stäbe

stabil / metastabiel / instabiel



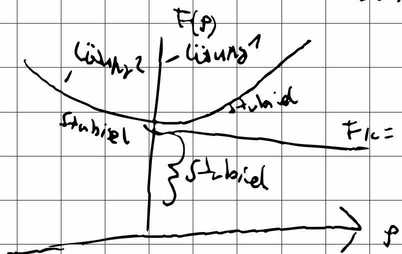
6.1. Gleichgewicht und Stabilität



c_t Druckfedersteifigkeit

$c_t \varphi = F l \sin\varphi$

nicht lineare Relation zwischen F und φ



Lösung 2 Anschauen

6.2 Knicken von Stäben

Rechenwege Anwendung lernen