Kleine Schwingung:

① Freie Schwingung

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - U(x)$$

Potential $U(x)$ hat ein Minimum bei x_0

Transformiere $x \to x_0 + \xi$

$$U(x_0+\xi) = U(x_0) + \underbrace{\frac{dU}{dx}\bigg|_{x=x_0}}_{=0 \text{ da Minimum}}\xi + \frac{d^2U}{dx^2}\bigg|_{x=x_0}\xi^2 + \mathcal{O}(\xi^3)$$

$$L = \frac{m}{2}\dot{\xi}^2 - \frac{k}{2}\xi^2 \qquad k = \frac{d^2U}{dx^2}\bigg|_{x=x_0}$$

Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} = \frac{\partial L}{\partial \xi}$$

$$\Leftrightarrow \quad m\ddot{\xi} + k\xi = 0$$

Ansatz: $\xi(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

② Schwingung mit antreibender Kraft

$$L = \frac{m}{2}\dot{\xi}^2 - \frac{k}{2}\xi + \xi F(t)$$

$$= \frac{m}{2}\dot{\xi}^2 - \underbrace{\frac{m\omega^2}{2}\xi}_{k \text{ schon eingesetzt}} + \xi F(t)$$

Euler-Lagrange: $\ddot{\xi} + \omega^2 \xi = \frac{F(t)}{m}$

- Harmonische Kraft: $F(t) = F_0 \cos(\gamma t + \beta)$

Ansatz: $\xi(t) = A\cos(\omega t + \varphi) + A_f \cos(\gamma t + \beta)$

$\Rightarrow A_f = \frac{F_0}{m(\omega^2 - \gamma^2)}$ (Einsetzen in ξ für allg. Lösung)

Falls $\gamma \to \omega$: Funktion hat Definitionslücke (Resonanz)

$\hookrightarrow \xi\big|_{\gamma=\omega} = \tilde{A}\cos(\omega t + \tilde{\varphi}) + \frac{F_0 t}{2m\omega}\sin(\omega t + \beta)$

- Allgemeine Kraft $F(t)$:

$$\ddot{\xi} + \omega^2\xi = \left[\frac{d}{dt} + i\omega\right]\underbrace{\left[\frac{d}{dt} - i\omega\right]\xi}_{=:\rho} = \frac{F(t)}{m} \quad \Rightarrow \left[\frac{d}{dt} + i\omega\right]\rho(t) = \frac{F(t)}{m}$$

Ansatz: $\rho(t) = c(t)\, e^{-i\omega t}$

$$\Rightarrow c(t) = \int_0^t d\tau\, \frac{F(\tau)}{m} e^{i\omega\tau} = \int_0^t d\tau\, \frac{F(\tau)}{\omega}\sin(\omega(t-\tau))$$

③ Schwingung mit Reibung

$F_r = -2k\omega\dot{\xi}$ (Reibung proportional zur Geschwindigkeit)

$$\ddot{\xi} + 2k\dot{\xi} + \omega^2\xi = 0$$

Ansatz: $\xi(t) = Ae^{i\lambda t}$

$$\Rightarrow \lambda_\pm = ik \pm \sqrt{\omega^2 - k^2}$$

$$\Rightarrow \xi(t) = \mathrm{Re}\left[A_1 e^{i\lambda_+ t} + A_2 e^{i\lambda_- t}\right]$$

Schwache Reibung: $\omega > k$ $\quad \xi(t) = Ae^{-kt}\cos\left(\omega t\sqrt{1-\frac{k^2}{\omega^2}} + \varphi\right)$

Starke Reibung: $k > \omega \Rightarrow \lambda_\pm$ ist imaginär

$$\Rightarrow \xi(t) = A_1 e^{-t\left(k+\sqrt{k^2-\omega^2}\right)} + A_2 e^{-t\left(k-\sqrt{k^2-\omega^2}\right)}$$

④ Antreibende Kraft + Reibung

$$\ddot{\xi} + 2k\dot{\xi} + \omega^2\xi = \underbrace{\frac{F_0}{m}\cos(\gamma t + \beta)}$$

$$= \frac{F_0}{2m}\left(e^{i(\gamma t+\beta)} + e^{-i(\gamma t+\beta)}\right)$$

Ansatz: $\xi(t) = Ae^{i(\gamma t+\beta)} + A^* e^{-i(\gamma t+\beta)}$

$$\Rightarrow A = \frac{F_0}{2m}\frac{1}{\omega^2-\gamma^2-2ik\omega} = \frac{F_0}{2m}\frac{e^{i\phi}}{\sqrt{(\omega^2-\gamma^2)^2+4k^2\gamma^2}}$$

mit $\phi = \arctan\left(\frac{2k\gamma}{\gamma^2-\omega^2}\right)$

$$\Rightarrow \xi(t) = Ae^{i(\gamma t+\beta)} + A^* e^{-i(\gamma t+\beta)} = \frac{F_0}{m}\frac{\cos(\gamma t+\beta+\phi)}{\sqrt{(\omega^2-\gamma^2)^2+4k^2\gamma^2}}$$

Resonanz: Amplitude $= \frac{F_0}{2mk\omega}$

Kleine Schwingungen mit vielen Freiheitsgraden

Potentielle Energie: $U = U(q_1, \dots, q_n)$

U hat ein Minimum bei $\vec{q_0} = (q_{01}, \dots, q_{0n})^T$

Die Bewegung bei $\vec{q_0}$ ist eine Schwingung.

$$L = \sum_{i,j} a_{ij}(q_1, \dots, q_n)\, \dot{q}_i \dot{q}_j - U(q_1, \dots, q_n)$$

$$\vec{q} = \vec{q_0} + \vec{\xi} \quad \Rightarrow \quad \vec{\xi} = \vec{q} - \vec{q_0} \qquad \dot{\vec{q}} = \dot{\vec{\xi}}$$

wir entwickeln die Lagrange-Funktion an der Stelle ξ:

$$T = \sum_{i,j} a_{ij}(q_1, \dots, q_n)\, \dot{q}_i \dot{q}_j = \sum_{i,j} a_{ij}(q_{01}, \dots, q_{0n})\, \dot{q}_i \dot{q}_j$$

$$= \sum_{i,j} \frac{m_{ij}}{2} \dot{\xi}_i \dot{\xi}_j$$

$$U(q_1, \dots, q_n) = \underbrace{U_0}_{\text{wähle } U_0 = 0} + \frac{1}{2} k_{ij} \xi_i \xi_j$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left(\hat{m}_{ij} \dot{\xi}_i \dot{\xi}_j - \hat{k}_{ij} \xi_i \xi_j \right)$$

Universelle Lagrange Funktion für kleine Schwingungen mit vielen Freiheitsgraden.

Die Matritzen $\hat{m}$ und $\hat{k}$ sind symmetrisch:

$$m_{ij} = m_{ji} \qquad k_{ij} = k_{ji}$$

Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_i} = \frac{\partial L}{\partial \xi_i} \quad \Rightarrow \sum_{j=1}^{N} \left[m_{ij} \ddot{\xi}_j + k_{ij} \xi_j \right] = 0$$

Diese Gleichung lässt sich als Matrix-Gleichung schreiben:

$$\hat{m} \ddot{\vec{\xi}} - \hat{k} \vec{\xi} = 0$$

Lösungsansatz: Das System schwingt mit der Frequenz ω.

$$\vec{\xi}(t) = \mathrm{Re}\left[\vec{a}\, e^{i\omega t + \varphi} \right]$$

Einsetzen von $\vec{\xi}$: $\left[-\omega^2 \hat{m} + \hat{k} \right] \vec{a} \overset{!}{=} 0$

Diese Gleichung kann nun verwendet werden, um ω und $\vec{a}$ zu bestimmen.

$\det\left[-\omega^2 \hat{m} + \hat{k} \right] \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow$ Bestimmung von ω