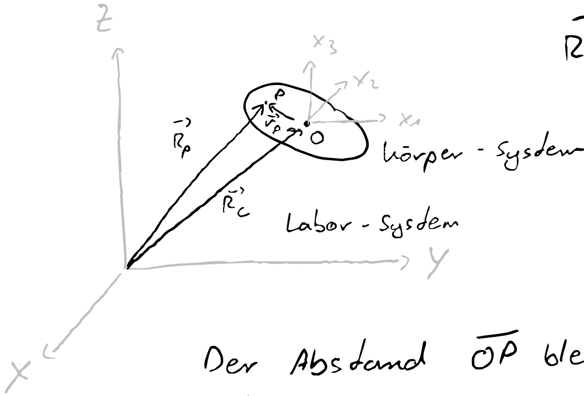
Starre Körper



$$\vec{R}_p = \vec{R}_c + \vec{r}_p$$

Der Abstand $\overline{OP}$ bleibt konstant (starrer Körper) $\Rightarrow$ $|r| = \text{const.}$

Falls sich $\vec{r} \longrightarrow \vec{r} + d\vec{r}$ ändert, muss $d\vec{r}$ also orthogonal zu $\vec{r}$ sein: $\vec{r} \cdot d\vec{r} = 0$

Der Körper kann gedreht werden:

$$d\vec{r} = d\vec{\phi} \times \vec{r} \qquad d\vec{\phi} = d\phi \cdot \vec{n}$$

ϕ: Drehwinkel $\qquad \vec{n}$: Drehachse (Einheitsvektor)

Geschwindigkeit des Punktes P bei Drehung:

$$\frac{d\vec{R}_p}{dt} = \vec{V} = \underbrace{\vec{V}_c}_{= \frac{d\vec{R}_c}{dt}} + \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V}_c + \underbrace{\vec{\Omega}}_{= \frac{d\vec{\phi}}{dt} = \omega \cdot \vec{n}} \times \vec{r}$$

Ω: Winkelgeschwindigkeit des Körpers im K-System

$\vec{V}_c$: Geschwindigkeit des K-System-Ursprungs im L-System

Kinetische Energie, Trägheitstensor

Körper ist eine Menge von N Punktteilchen.

Gesamtmasse: $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$

Kinetische Energie: Summe der kinetischen Energien aller Teilchen

Wir wählen den Schwerpunkt $\vec{R} = \frac{\sum_i m_i \vec{R}_i}{\sum_i m_i}$ als Ursprung für das K-System

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i = 0, \text{ da Schwerpunkt im Ursprung } (\vec{0})$$

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{R}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i (\vec{R}_c + \vec{r}_i) = M \vec{R}_c$$

Kinetische Energie: $T = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \vec{v}_i^{\,2}}{2}$

$$\vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{\Omega} \times \vec{r}_i$$

$$\vec{v}_i^{\,2} = \vec{v}_c^{\,2} + 2 \vec{v}_c [\vec{\Omega} \times \vec{r}_i] + [\vec{\Omega} + \vec{r}_i]^2$$

Demendsprechend lässt sich T in 3 Terme zerlegen:

$$T_1 = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \vec{v}_c^{\,2} = \frac{M}{2} \vec{v}_c^{\,2} \quad \text{(Energie der Translation)}$$

$$T_2 = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_c [\vec{\Omega} \times \vec{r}] = v_c \Big[\vec{\Omega} \times \underbrace{\Big(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i\Big)}_{=0}\Big] = 0$$

$$T_3 = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} [\vec{\Omega} \times \vec{r}_i]^2 = \frac{\Omega_\alpha \Omega_\beta}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \varepsilon_{\rho\alpha\alpha'} \varepsilon_{\rho\beta\beta'} \vec{r}_{i,\alpha'} \vec{r}_{i,\beta'}$$

Da $\varepsilon_{\rho\alpha\alpha'} \varepsilon_{\rho\beta\beta'} = \delta_{\alpha\beta} \delta_{\alpha'\beta'} - \delta_{\alpha\beta'} \delta_{\alpha'\beta}$:

$$T_3 = \frac{1}{2} I_{\alpha\beta} \Omega_\alpha \Omega_\beta \quad \text{mit } I_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\delta_{\alpha\beta} \vec{r}_i^{\,2} - \vec{r}_{i,\alpha} \vec{r}_{i,\beta}\right)$$

Die gesamte kinetische Energie berechnet sich zu:

$$T = \underbrace{\frac{M}{2}\vec{V}_c^{\,2}}_{\text{kinetische Energie des Körpers}} + \underbrace{\frac{I_{\alpha\beta}\Omega_\alpha\Omega_\beta}{2}}_{\text{Rotationsenergie der Drehung um den Schwerpunkt.}}$$

Die Rotationsenergie wird mithilfe des Trägheitstensors $I_{\alpha\beta}$ berechnet.

1.) Der Trägheitstensor ist symmetrisch: $I_{\alpha\beta} = I_{\beta\alpha}$

2.) Falls eine Dichteverteilung des Körpers bekannt ist, berechnen sich I und M folgendermaßen:

$$M = \int d^3\vec{r}\, \rho(\vec{r})$$

$$I_{\alpha\beta} = \int d^3\vec{r}\, \rho(\vec{r})\, (\vec{r}^{\,2}\delta_{\alpha\beta} - \vec{r}_\alpha \vec{r}_\beta)$$

3.) Die $I_{\alpha,\beta}$ Matrix kann diagonalisiert werden indem ein passendes k-System gewählt wird.

$$I_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

Die Achsen dieses k-Systems heißen „Hauptträgheits-Achsen“, I_{123} sind die „Hauptträgheitsmomente“

4.) Ein Körper bei dem I_1, I_2 und I_3 verschieden voneinander sind heißt „Unsymmetrischer Kreisel"

Ein Körper bei dem zwei Hauptträgheitsmomente idendisch sind heißt „Symmetrischer Kreisel"
(Körper ist um Drehung um 90° invariant)

Ein Körper mit $I_1 = I_2 = I_3$ heißt „Kugelkreisel"

5.) Wenn die Rotation des Körpers nicht um den Schwerpunkt herum stattfinded, muss der Trägheitstensor anders berechnet werden:
Das Körpersystem wird verschoben, sodass die Rotation um den Ursprung stattfindet und sich der Schwerpunkt im Ort $\vec{a}$ befindet:

$$\vec{\rho}_i = \vec{a} + \vec{r}_i$$

$$I_{\alpha\beta}^{neu} = \sum_{i=1}^{N} m_i (\vec{\rho}_i^{\,2} \delta_{\alpha\beta} - \vec{\rho}_{i,\alpha} \vec{\rho}_{i,\beta})$$

$$= I_{\alpha\beta} + M (\vec{a}^{\,2} \delta_{\alpha\beta} - a_\alpha a_\beta)$$

Diagonal-Einträge:

$I_{xx} = \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2)$ => analog I_{yy} und I_{zz}

Drehimpuls: $\vec{L} = \hat{I} \vec{\Omega}$

$T = \frac{I_{\alpha\alpha} \Omega_\alpha^2}{2}$