Lagrange 1. Art:

1.) Zwangsbedingungen aufstellen $g_i(\vec r, t) = 0$

2.) Lagrange-Funktion mit λ aufstellen

3.) Lagrange-DGL lösen mit $\frac{d^2}{dt^2} g_i$, λ bestimmen

4.) Zwangskräfte: $\lambda_i \vec\nabla g_i(\vec r, t)$

Lagrange 2. Art:

1.) Zwangsbedingungen aufstellen

2.) generalisierte koordinaten wählen

3.) kardesis nach generalisierd transformieren

4.) Lagrange in generalisierden koord. aufstellen

5.) DGLs bilden und lösen

Hamilton: $H = \sum_{i=1}^N p_i \dot q_i - L = \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\dot q_i - L$

$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$ $\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}$ $\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$

Poisson-klammern $\{F,G\} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q_i} - \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i}\right)$

Erhaltungsgröße: $\frac{\partial I}{\partial t} = -\{H, I\} = 0$

Poisson-klammer von Erhaltungsgröße $\{I_1, I_2\} = I_3$

$\{F_1, F_2\} = -\{F_2, F_1\}$ $\{F, c\} = 0$ (c konstant)

$\{F_1 + F_2, F_3\} = \{F_1, F_3\} + \{F_2, F_3\}$

$\{F_1 \cdot F_2, F_3\} = F_1\{F_2, F_3\} + F_2\{F_1, F_3\}$

$\{F_1, \{F_2, F_3\}\} + \{F_2, \{F_3, F_1\}\} + \{F_3, \{F_1, F_2\}\} = 0$ (Jacobi)

$\frac{d}{dt}\{F_1, F_2\} = \{\frac{dF_1}{dt}, F_2\} + \{F_1, \frac{dF_2}{dt}\}$

$\{p_i, F\} = \frac{\partial F}{\partial q_i}$ $\{q_i, F\} = -\frac{\partial F}{\partial p_i}$

Kleine Schwingungen mit vielen Freiheitsgraden

$U(q_1, \dots, q_n)$ mit Minimum bei $\vec q_0$

$L = \sum_{ij} \alpha_{ij}(q_1, \dots, q_n)\dot q_i \dot q_j - U(q_{01}, \dots, q_{0n})$

$\vec q \to \vec q_0 + \vec\xi$ $\dot{\vec q} = \dot{\vec\xi}$ Taylor von T und U bei $\vec q_0$

$L = \frac12 \sum_{ij}(\hat m_{ij}\dot\xi_i\dot\xi_j - \hat k_{ij}\xi_i\xi_j)$

$\hat m$ und $\hat k$ sind symmetrisch

DGL: $\sum_{j=1}^N [m_{ij}\ddot\xi_j + k_{ij}\xi_j] = 0 \Rightarrow \hat m \ddot{\vec\xi} - \hat k \vec\xi = 0$

Ansatz: $\vec\xi = \mathrm{Re}[\vec a e^{i\omega t + \varphi}] \Rightarrow [-\omega^2 \hat m + \hat k]\vec a \overset{!}{=} 0$

1.) $\det[-\omega^2 \hat m + \hat k] = 0 \Rightarrow$ Werte für ω $\Rightarrow$ 2.) $\vec a_\omega$

Normierung: $\vec a^T \hat m \vec a = 1$ $\vec a$ sind Schwingungsmoden

Lösung aus Superposition von $\vec a$ und ω

Runge-Lenz-Vektor: $V = -\frac{k}{r} \Rightarrow \vec A = [\vec p \times \vec M] - m\alpha \frac{\vec r}{|\vec r|}$

$\sin(2x) = \sin(x)\cos(x)$ $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1$

$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$

$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$

$\sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$ $\cos(x) = \frac12(e^{ix} + e^{-ix})$

$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x)$ $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x)$

$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \mathrm{arcsinh}(x)$ $\int \frac{dx}{1-x^2} = \mathrm{arctanh}(x)$

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \mathrm{arccosh}(x)$ $\int \sin^2(x)\,dx = \frac12(x - \sin x \cos x)$

$\int \cos^2(x)\,dx = \frac12(x + \sin x \cos x)$ $\int \frac{dx}{\sqrt x} = 2\sqrt x$

Zwangskräfte: $\vec Z_i = \sum_{k=1} \lambda_k \vec\nabla_i f_k$ 2. Newton: $m\ddot{\vec r} = -\nabla V + \vec Z$

Zwangsbedingungen: ① holonom ($f(q_1, \dots, q_n) = 0$) ①a skleronom ($\frac{\partial f}{\partial t} = 0$) ①b rheonom ($\frac{\partial f}{\partial t} \neq 0$)

② unholonom ($f \neq 0$)

Taylor: $f(x)|_{x=x_0} \approx \sum \frac{1}{n!}\frac{d^n f}{dx^n}\Big|_{x=x_0}(x-x_0)^n + O(x^{n+1})$ $e^x = \sum \frac{x^n}{n!}$

$\sin(x) \approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ $\cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ $\tan(x) \approx x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15}$

Wirkung: $S = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q(t), \dot q(t), t)$

Herleitung Lagrange: $\delta q = \varepsilon\eta(t)$ $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$ (Start- & Zielpunkt)

$\Rightarrow S[q + \varepsilon\eta] = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(\dots) = \int_{t_1}^{t_2} dt\left(L + \varepsilon\frac{\partial L}{\partial q}\eta + \varepsilon\frac{\partial L}{\partial \dot q}\dot\eta\right)$ (Taylor)

$\Rightarrow$ Minimum: $\frac{dS}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\int_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} dt\left(\frac{\partial L}{\partial q}\eta + \frac{\partial L}{\partial \dot q}\dot\eta\right) = \int_{t_1}^{t_2} dt\left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right) \overset{!}{=} 0$

Noether Theorem: $\frac{\partial L}{\partial q} = 0 \Rightarrow I = \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\dot q_i - L \Rightarrow \frac{dI}{dt} = 0$

$-I = L\chi + \sum \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}(\psi_i - \chi\dot q_i)$

Erweiterung: $\frac{d}{d\varepsilon} L(\vec q(t,\varepsilon), \dot{\vec q}(t,\varepsilon), t)\Big|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{dt} f(\vec q(t), \dot{\vec q}(t), t) \Rightarrow I = \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot q_j}\frac{\partial q_j}{\partial \varepsilon} - f$

Noether-Ladung: $Q = \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\psi_k + \left(L - \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\dot q_k\right)\psi_0 - F$, $L' = L + \frac{d}{dt}F$

Energieerhaltung: $q_i' = q_i$ $t' = t + \tau$ $I = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\dot q_i - L \Rightarrow$ Energie

Impulserhaltung: $q_1' = q_1 + \varepsilon$ $q_{i\neq 1}' = q_i$ $t' = t$ $I = \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} - L \Rightarrow$ kanonischer Impuls

Schwerpunkt: $L = \sum_\alpha^N \frac{m_\alpha \dot{\vec r}_\alpha^2}{2} - \sum_{\alpha,\beta} U(\vec r_\alpha - \vec r_\beta)$ $\vec r_\alpha' = \vec r_\alpha + \vec\varepsilon$ $I = \sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec r}_\alpha} = \sum_\alpha m_\alpha \dot{\vec r}_\alpha = P_{tot}$

Drehung: $L = \frac{m}{2}\dot r^2 - U(r)$; $r' = r + \varepsilon(\vec n \times \vec r) + O(\varepsilon^2)$ $I = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot r_i}\varepsilon_{ijk}n_j r_k = \vec n[\vec r \times \vec p]$

$\Rightarrow$ Erhaltungsgröße: $\vec M = \vec r \times \vec p$ (Drehmoment)

Virialtheorem: $U(\lambda x) = \lambda^n U(x) \Rightarrow \langle T\rangle_\infty = \frac{n}{2}\langle U\rangle_\infty$

Ähnlichkeitssatz: $L' = \lambda^n L$ $\vec r' = \lambda^{-1}\vec r(\lambda^{1-\frac{n}{2}}t)$ r' erfüllt L'

Polarkoordinaten: $x = r\cos\varphi$ $y = r\sin\varphi$ $d\vec r = r\,dr\,d\varphi$

Zylinderkoordinaten: $x = \rho\cos\varphi$ $y = \rho\sin\varphi$ $z = z$ $d\vec r = \rho\,d\rho\,d\varphi\,dz$

Kugelkoordinaten: $x = r\sin\theta\sin\varphi$ $y = r\sin\theta\cos\varphi$ $z = r\cos\theta$ $d\vec r = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$

Hesse-Matrix: $\hat H_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j}$ Funktionaldeterminante: $d\vec r = \det(H)\,d\vec q$

Kleine Schwingungen in 1 Dimension

① Freie Schwingung $L = \frac{m}{2}\dot x^2 - U(x)$ $x \to x_0 + \xi$ Taylor von U

$L = \frac{m}{2}\dot\xi^2 - \frac{k}{2}\xi^2$ $k = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$

$\Rightarrow m\ddot\xi - k\xi = 0$

Ansatz: $\xi(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

② Antreibende Kraft: $L = \frac{m}{2}\dot\xi^2 - \frac{k}{2}\xi^2 + \xi F(t)$

$\Rightarrow \ddot\xi + \omega\xi = \frac{F(t)}{m}$ $F(t) = F_0\cos(\gamma t + \beta)$

Ansatz: $\xi(t) = A\cos(\omega t + \varphi) + A_f\cos(\gamma t + \beta)$

$\Rightarrow A_f = \frac{F_0}{m(\omega^2 - \gamma^2)}$ Falls $\omega = \gamma$: Resonanz

↳ $\xi(t) = \tilde A\cos(\omega t + \tilde\varphi) + \frac{F_0 t}{2m\omega}\sin(\omega t + \beta)$

Allgemein: $F(t)$ ist beliebig

$\ddot\xi + \omega^2\xi = [\frac{d}{dt} + i\omega][\frac{d}{dt} - i\omega]\xi = [\frac{d}{dt} + i\omega]p(t) = \frac{F(t)}{m}$

Ansatz: $p(t) = C(t)e^{-i\omega t}$

$\Rightarrow C(t) = \int_0^t d\tau \frac{F(\tau)}{m}e^{i\omega\tau} = \int_0^t d\tau \frac{F(\tau)}{m}\sin(\omega(t - \tau))$

③ Reibung

$F_R = 2k\omega\dot\xi \Rightarrow \ddot\xi + 2k\dot\xi + \omega^2\xi = 0$ Ansatz: $\xi(t) = Ae^{i\lambda t}$

$\Rightarrow \lambda_\pm = ik \pm \sqrt{\omega^2 - k^2}$ $\Rightarrow \xi(t) = \mathrm{Re}[A_1 e^{i\lambda_+ t} + A_2 e^{i\lambda_- t}]$

schwache Reibung $\omega > k$ $\xi(t) = Ae^{-kt}\cos(\omega t\sqrt{1 - \frac{k^2}{\omega^2}} + \varphi)$

starke Reibung: $k > \omega \Rightarrow \lambda_\pm$ ist imaginär

$\Rightarrow \xi(t) = A_1 e^{-t(k + \sqrt{k^2 - \omega^2})} + A_2 e^{-t(k - \sqrt{k^2 - \omega^2})}$

④ Antrieb + Reibung $\ddot\xi + 2k\dot\xi + \omega^2\xi = \frac{F_0}{m}\cos(\gamma t + \beta) = \frac{F_0}{2m}(e^{i(\gamma t + \beta)} + e^{-i(\gamma t + \beta)})$

Ansatz: $\xi(t) = Ae^{i(\gamma t + \beta)} + A^* e^{-i(\gamma t + \beta)}$

$\Rightarrow A = \frac{F_0}{2m}\frac{1}{\omega^2 - \gamma^2 - 2ik\omega} = \frac{F_0}{2m}\frac{e^{i\phi}}{\sqrt{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4k^2\gamma^2}}$ mit $\phi = \arctan\left(\frac{2k\gamma}{\gamma^2 - \omega^2}\right)$

$\Rightarrow \xi(t) = \frac{F_0}{m}\cos(\gamma t + \beta + \phi)\cdot((\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4k^2\gamma^2)^{-1}$ Resonanz: Amplitude $= \frac{F_0}{2mk\omega}$

Drehmatrizen $R_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ $R_y(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}$ $R_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\det(R) = 1$

Trägheitstensor ϕ: Drehwinkel $\vec{n}$: Drehachse

Körperschwerpunkt: $\vec{R}_c = \Sigma_i m_i \vec{R}_i / \Sigma_i m_i$

$\Rightarrow \vec{R}_i = \vec{R}_c + \vec{r}_i$ $\quad \frac{d}{dt}|\vec{r}_i| = 0$, Körper starr

$$\frac{d\vec{R}_i}{dt} = \vec{V}_i = \vec{V}_c + \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{V}_c + \vec{\Omega} \times \vec{r}_i \qquad \vec{\Omega} = \frac{d\phi}{dt} \cdot \vec{n}$$

$$T = \frac{M}{2} \vec{V}_c^{\,2} + \frac{1}{2} I_{\alpha\beta} \Omega_\alpha \Omega_\beta \qquad M = \Sigma_i m_i$$

$$I_{\alpha\beta} = \Sigma_{i=1}^{N} m_i (\delta_{\alpha\beta} \vec{r}_i^{\,2} - \vec{r}_{i\alpha} \vec{r}_{i\beta})$$

1.) Symmetrie: $I_{\alpha\beta} = I_{\beta\alpha}$

2.) Dichte $\rho(\vec{r})$

$\Rightarrow M = \int_V d^3\vec{r} \rho(\vec{r})$

$$I_{\alpha\beta} = \int_V d^3\vec{r} \, \rho(\vec{r}) (\vec{r}^{\,2} \delta_{\alpha\beta} - \vec{r}_\alpha \vec{r}_\beta)$$

3.) Diagonalisierung $\Rightarrow \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$ „Hauptträgheitsmomente"

$I_i \to$ Eigenwerte von $\hat{I}$ $\quad (\hat{I} - \lambda \mathbb{1} = 0)$

4.) $I_1 = I_2 = I_3 \Rightarrow$ „Kugelkreisel"

$I_1 = I_2 \neq I_3 \Rightarrow$ „Symmetrischer Kreisel"

alle I verschieden $\Rightarrow$ „unsymmetrischer Kreisel"

5.) $I_{neu} = \int_V d^3\vec{r} (\vec{P}_{neu}^{\,2} \delta_{\alpha\beta} - \vec{P}_{i\alpha} \vec{P}_{i\beta}) = I_{\alpha\beta} + M(\vec{a}^{\,2} \delta_{\alpha\beta} - a_\alpha a_\beta)$

Satz von Steiner: $I_{neu} = I_{alt} + m d^2$

Drehimpuls

$\vec{L} = I \vec{\Omega}$

Kanonische Transformation: Impulse & Koord. mischen

$$\left.\begin{array}{l} q \to Q(q, p, t) \\ p \to P(q, p, t) \end{array}\right\} H \to K$$

Bedingung: $\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial K}{\partial P}$ $\quad \frac{dH}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial Q}$

Wirkung: $S_A = \int (p\,dq - H\,dt) \to S_N = \int (P\,dQ - K\,dt)$

$$0 = \delta(S_A - S_N) = \delta \int \underbrace{(p\,dq - H\,dt - P\,dQ + K\,dt)}_{=: dF(q, Q, t)}$$ „Erzeugende Funktion"

$$\frac{\partial F}{\partial q} = p \quad \frac{\partial F}{\partial Q} = -P \quad \frac{\partial F}{\partial t} = K - H \qquad \{Q, P\} = \mathbb{1}$$

Poisson-Klammern bleiben invariant: $\{F_1, F_2\}_{p,q} = \{F_1, F_2\}_{P,Q}$

Phasenraum:

Impulse p_i, Koordinaten q_i $\quad i = 1, \dots, N$

Phasenraum-Vektor: $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ $2N$ Dimensionen

Zeitentwicklung des Systems $\to$ Kurve im Phasenraum

Volumen der Kurve im Phasenraum: $V = \int_S dp\,dq$

Bsp: Harmonischer Oszillator $\to$ Ellipse

kanonische Transformation: $V = \int_S dp\,dq = \int_{S'} \frac{\partial(p,q)}{\partial(P,Q)} dP\,dQ = \int_{S'} dP\,dQ$

Funktionaldeterminante $= \{P, Q\} = 1$

$\Rightarrow$ Phasenraumvolumen ist unter einer kanonischen Transformation invariant

Extremalprinzip: $\delta S = S[\vec{r}_a(t) - \vec{r}_b(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt \underbrace{L(\vec{r} + \delta\vec{r}, \dot{\vec{r}} + \delta\dot{\vec{r}}, t) - L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)}_{\text{taylor}}$ $\quad$ Taylor $= L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) + \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q}$

virtuelle Arbeit: $\delta W_Z = \vec{Z} d\vec{r} = 0$ da $\vec{Z} \perp \vec{r}$

taylor $\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} dt (\dots \delta\vec{r} + \dots \delta\dot{\vec{r}}) \Rightarrow$ Klammer ohne $\delta s \stackrel{!}{=} 0$