Wzór Bayesa

Wzór Bayesa

Źródło: Wilhelm Gunkel, domena publiczna, dostępny w internecie: unsplash.com.

W tym materiale poznamy twierdzenie Bayesa, będące jednym z najważniejszych twierdzeń teorii prawdopodobieństwa wykorzystywanych w zastosowaniach praktycznych.

Twierdzenie to opisuje prawdopodobieństwo zajścia danego zdarzenia na podstawie wcześniejszej wiedzy o warunkach, które mogą być związane ze zdarzeniem.

Thomas Bayes
Źródło: domena publiczna, dostępny w internecie: commons.wikimedia.org.

Na przykład wiadomo, że ryzyko nie zdania egzaminu poprawkowego wzrasta wraz z upływem czasu od pierwszego terminu egzaminu. Twierdzenie Bayesa pozwala oszacować to ryzyko bardziej precyzyjnie.

Ważnym zastosowaniem tego twierdzenia jest tzw. wnioskowanie bayesowskie, będące jedną z metod wnioskowania statystycznego. Za jego pomocą można aktualizować prawdopodobieństwo zajścia danego zdarzenia, w miarę pojawiania się nowych informacji. Wnioskowanie bayesowskie ma zastosowanie w medycynie, filozofii, inżynierii, sporcie – w przypadku dynamicznie zmieniających się danych.

Twierdzenie Bayesa zostało tak nazwane na cześć wielebnego Thomasa Bayesa, osiemnastowiecznego angielskiego matematyka i duchownego, którego uważa się też za jednego z twórców wzoru na prawdopodobieństwo warunkowe.

Twoje cele

- Obliczysz prawdopodobieństwo zajścia danego zdarzenia, korzystając ze wzoru Bayesa.

- Opiszesz sytuację probabilistyczną, korzystając z prawdopodobieństwa warunkowego.
- Dobierzesz odpowiedni model matematyczny do rozwiązania problemu probabilistycznego z kontekstem realistycznym.

Przeczytaj

Niech $B_1, B_2, \ldots, B_n$ będzie układem wzajemnie wykluczających się zdarzeń należących do tej samej przestrzeni zdarzeń elementarnych, z których przynajmniej jedno musi zajść. Prawdopodobieństwo zajścia każdego z tych zdarzeń niech będzie dodatnie.

Niech A oznacza zdarzenie o dodatnim prawdopodobieństwie, które może zajść wyłącznie z jednym ze zdarzeń $B_1, B_2, \ldots, B_n$.

Ze wzoru na prawdopodobieństwo warunkowe wynika, że jeśli $A \subset \Omega$ i $B \subset \Omega$ oraz:

- $P(B) > 0$ to $P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B)$,
- $P(A) > 0$ to $P(A \cap B) = P(B/A) \cdot P(A)$.

Korzystając z powyższego dla zdarzeń A i B_i, gdzie $i = 1, 2, \ldots, n$ możemy zapisać równość:

$$P(B_i/A) \cdot P(A) = P(A/B_i) \cdot P(B_i)$$

I przekształcić tę równość równoważnie.

$$P(B_i/A) = \frac{P(A/B_i) \cdot P(B_i)}{P(A)}$$

Do prawej strony równości stosujemy wzór na prawdopodobieństwo całkowite.

$$P(B_i/A) = \frac{P(A/B_i) \cdot P(B_i)}{P(A/B_1) \cdot P(B_1) + \ldots + P(A/B_n) \cdot P(B_n)}$$

Otrzymaną zależność nazywamy **wzorem Bayesa**.

Prawdopodobieństwo $P(B_i)$ nazywane jest czasem prawdopodobieństwem *a priori*, a prawdopodobieństwo $P(B_i/A)$ nazywamy prawdopodobieństwem *a posteriori*, gdyż określa ono szansę zajścia zdarzenia B_i po zaobserwowaniu zajścia zdarzenia A. Wzór Bayesa stosujemy więc głównie wtedy, gdy znamy wynik doświadczenia i pytamy o jego przebieg.

Sformułujemy wzór Bayesa w postaci najczęściej używanej – ograniczymy się tylko do trzech zdarzeń A, B_1, B_2.

> **Twierdzenie: Wzór Bayesa, reguła Bayesa**
>
> Niech Ω będzie zbiorem wszystkich wyników pewnego doświadczenia, a $B_1 \subset \Omega$, $B_2 \subset \Omega$ zdarzeniami o dodatnich prawdopodobieństwach, takimi że $B_1 \cup B_2 = \Omega$ oraz

$B_1 \cap B_2 = \emptyset$. Wówczas dla dowolnego zdarzenia $A \subset \Omega$ o dodatnim prawdopodobieństwie, prawdziwy jest wzór:

$$P(B_1/A) = \frac{P(B_1) \cdot P(A/B_1)}{P(A/B_1) \cdot P(B_1) + P(A/B_2) \cdot P(B_2)}$$

Przykład 1

Niech B będzie zdarzeniem – dana osoba nosi okulary, A niech będzie zdarzeniem – dana osoba ma zielone oczy. Wtedy zdarzenie B/A – osoba nosząca okulary wśród osób mających zielone oczy, zdarzenie A/B – osoba mająca zielone oczy wśród osób noszących okulary.

Po zbadaniu pewnej grupy osób stwierdzono, że dla tej grupy osób $P(A) = 0,1$, $P(B) = 0,2$ i $P(B/A) = 0,6$. Obliczymy $P(A/B)$.

Korzystamy ze wzoru Bayesa.

$P(A/B) = \frac{P(B/A) \cdot P(A)}{P(B)}$

$P(A/B) = \frac{0,6 \cdot 0,1}{0,2} = 0,3$.

Przykład 2

Matematykę lubi co piąty uczeń klasy pierwszej, co czwarty uczeń klasy drugiej i co drugi uczeń klasy trzeciej. Z grupy uczniów składającej się z 10 uczniów klasy pierwszej, 10 uczniów klasy drugiej i 10 uczniów klasy trzeciej wybrano jedną osobę.

Obliczymy prawdopodobieństwo, że wybrana osoba lubi matematykę.

Jakie jest prawdopodobieństwo, że był to uczeń klasy drugiej, jeżeli wiadomo, że wybrana osoba lubi matematykę?

Oznaczmy:
A – zdarzenie polegające na tym, że wybrany uczeń jest z klasy pierwszej,
B – zdarzenia polegające na tym, że wybrany uczeń jest z klasy drugiej,
C – zdarzenie polegające na tym, że wybrany uczeń jest klasy trzeciej,
M – zdarzenie polegające na tym, że wybrany uczeń lubi matematykę.

Zauważmy, że zdarzenia A, B, C tworzą zupełny układ zdarzeń oraz $A \cup B \cup C = \Omega$. Możemy więc zastosować twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym.

$P(M) = P(A) \cdot P(M/A) + P(B) \cdot P(M/B) + P(C) \cdot P(M/C)$

$P(M) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{19}{60}$

Ponieważ $P(M) > 0$, to możemy zastosować twierdzenie Bayesa.

$$P(B/M) = \frac{P(B)\cdot P(M/B)}{P(A)\cdot P(M/A)+P(B)\cdot P(M/B)+P(C)\cdot P(M/C)}$$

$$P(B/M) = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{5}{19}$$

Odpowiedź:

Prawdopodobieństwo, że wybrana osoba lubi matematykę jest równe $\frac{19}{60}$.
Prawdopodobieństwo, że wybrana osoba była uczniem klasy drugiej, jeżeli wiadomo, że wybrana osoba lubi matematykę jest równe $\frac{5}{19}$.

Przykład 3

W biegach przełajowych startują zawodnicy tylko z dwóch klubów. Zawodnicy z klubu *Niezwyciężeni* stanowią 30% wszystkich zawodników, a pozostali zawodnicy są z klubu *Niepokonani*. Wśród *Niezwyciężonych* jest połowa kobiet, a wśród *Niepokonanych* tylko 10% to kobiety. W sposób losowy ze wszystkich zawodników wybrano jedną osobę, okazało się, że jest to kobieta. Obliczymy prawdopodobieństwo, że jest ona zawodniczką z klubu *Niezwyciężeni*.

Oznaczmy:
A – wybrana osoba to kobieta,
B_1 – wybrana osoba jest z klubu *Niezwyciężeni*,
B_2 – wybrana osoba jest z klubu *Niepokonani*.

Na podstawie treści zadania możemy zapisać:

$$P(B_1) = 0,3$$

$$P(B_2) = 1 - 0,3 = 0,7$$

$$P(A/B_1) = 0,5$$

$$P(A/B_2) = 0,1$$

Korzystamy ze wzoru Bayesa.

$$P(B_1/A) = \frac{P(B_1)\cdot P(A/B_1)}{P(A/B_1)\cdot P(B_1)+P(A/B_2)\cdot P(B_2)}$$

$$P(B_1/A) = \frac{0{,}3\cdot 0{,}5}{0{,}5\cdot 0{,}3+0{,}1\cdot 0{,}7} = \frac{0{,}15}{0{,}22} \approx 0,68$$

Odpowiedź:

Prawdopodobieństwo tego, że wylosowana kobieta jest zawodniczką z klubu *Niezwyciężeni* jest równe około $0,68$.

Przykład 4

Na pierwszym klombie rośnie 99 bratków i jedna stokrotka. Na drugim klombie rośnie 99 stokrotek i jeden bratek. Rzucamy kostką do gry. Jeśli wypadnie trójka, Anka zrywa kwiat z pierwszego klombu. W pozostałych przypadkach zrywa kwiat z drugiego klombu. Nie znamy wyniku rzutu kostką, ale wiemy, że Anka zerwała bratek. Wyznaczymy prawdopodobieństwo tego, że Anka zerwała kwiat z pierwszego klombu.

Oznaczmy:
B – zdarzenie polegające na tym, że Anka zerwała bratek,
A – zdarzenie polegające na zerwaniu kwiatu z pierwszego klombu,
C – zdarzenie polegające na zerwaniu kwiatu z drugiego klombu.

Wtedy:

$P(A) = \frac{1}{6}, P(C) = \frac{5}{6}$ – wybór klombu

$P(B/A) = \frac{99}{100}, P(B/C) = \frac{1}{100}$ – wybór bratka

Chcemy obliczyć $P(A/B)$.

Korzystamy ze wzoru Bayesa.

$$P(A/B) = \frac{P(B/A) \cdot P(A)}{P(B/A) \cdot P(A) + P(B/C) \cdot P(C)}$$

$$P(A/B) = \frac{\frac{99}{100} \cdot \frac{1}{6}}{\frac{99}{100} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{100} \cdot \frac{5}{6}} = \frac{\frac{33}{200}}{\frac{104}{600}} = \frac{99}{104}$$

Odpowiedź:

Prawdopodobieństwo tego, że Anka zerwała kwiat z pierwszego klombu jest równe $\frac{99}{104}$.

Przykład 5

Test na obecność pewnego wirusa daje wynik pozytywny z prawdopodobieństwem $0,84$, a negatywny z prawdopodobieństwem $0,16$, jeśli wirus jest w organizmie.

Jeśli wirusa w organizmie nie ma, prawdopodobieństwo wyniku pozytywnego jest równe $0,04$. Zakłada się, że 1% populacji zarażonych jest tym wirusem. Obliczymy prawdopodobieństwo, że losowo wybrana osoba jest istotnie zarażona wirusem, jeżeli wiadomo, że test dał wynik pozytywny.

Oznaczmy:
A – zdarzenie polegające na tym, że test dał wynik pozytywny,
B_1 – zdarzenie polegające na tym, że wirus jest w organizmie,
B_2 – zdarzenie polegające na tym, że wirusa nie ma w organizmie,

Korzystając z treści zadania, zapisujemy odpowiednie prawdopodobieństwa.

$P(B_1) = 0,01$

$P(B_2) = 0,99$

$P(A/B_1) = 0,84$

$P(A/B_2) = 0,04$

Wyznaczone liczby podstawiamy do wzoru Bayesa.

$P(B_1/A) = \frac{P(A/B_1) \cdot P(B_1)}{P(A/B_1) \cdot P(B_1) + P(A/B_2) \cdot P(B_2)}$

$P(B_1/A) = \frac{0,84 \cdot 0,01}{0,84 \cdot 0,01 + 0,99 \cdot 0,04} = 0,175$

Odpowiedź:

Prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana osoba jest istotnie zarażona wirusem, jeżeli test dał wynik pozytywny, jest równe $0,175$.

Słownik

wzór Bayesa

niech Ω będzie zbiorem wszystkich wyników pewnego doświadczenia, a $B_1 \subset \Omega$, $B_2 \subset \Omega$ zdarzeniami o dodatnich prawdopodobieństwach, takimi że $B_1 \cup B_2 = \Omega$ oraz $B_1 \cap B_2 = \emptyset$; wówczas dla dowolnego zdarzenia $A \subset \Omega$ o dodatnim prawdopodobieństwie, prawdziwy jest wzór:

$$P(B_1/A) = \frac{P(B_1) \cdot P(A/B_1)}{P(A/B_1) \cdot P(B_1) + P(A/B_2) \cdot P(B_2)}$$

Animacja

Polecenie 1

Obejrzyj animację, która przybliży Ci zagadnienia związane ze wzorem Bayesa. Postaraj się najpierw samodzielnie rozwiązać prezentowane tam problemy, a następnie porównaj z zamieszczonymi w animacji.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/De9Ed5i02

Film nawiązujący do treści materiału

Polecenie 2

Wśród bliźniąt prawdopodobieństwa urodzenia się dwóch chłopców i dwóch dziewczynek jest odpowiednio równe a i b. Dla bliźniąt różnopłciowych prawdopodobieństwo urodzenia się jako pierwsze dziecko jest dla obu płci jednakowe. Pani Marta będzie miała bliźnięta. Jako pierwsze dziecko urodził się chłopiec. Oblicz prawdopodobieństwo, że drugie dziecko też będzie chłopcem.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Zaznacz poprawną odpowiedź. Łopata do śniegu może być wykonana tylko z metalu lub plastiku. Około 30% łopat jest wykonanych z metalu. Jeżeli łopata jest wykonana z metalu, to jej wytrzymałość czasie t jest równa 95%. Jeżeli jednak jest wykonana z plastiku, to jej wytrzymałość w tym samym czasie wynosi 60%. Z partii wyprodukowanych łopat wylosowano jedną. Wylosowana łopata działała niezawodnie w czasie t. Prawdopodobieństwo p zdarzenia polegającego na tym, że łopata ta została wykonana z metalu jest równe:

- $p = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}95}{0{,}3 \cdot 0{,}6 + 0{,}7 \cdot 0{,}95}$
- $p = \frac{0{,}7 \cdot 0{,}95}{0{,}3 \cdot 0{,}95 + 0{,}7 \cdot 0{,}6}$
- $p = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}95}{0{,}3 \cdot 0{,}95 + 0{,}7 \cdot 0{,}6}$
- $p = \frac{0{,}7 \cdot 0{,}6}{0{,}3 \cdot 0{,}95 + 0{,}7 \cdot 0{,}6}$

Ćwiczenie 2

Zaznacz poprawną odpowiedź. Do szkolnej stołówki przychodzi codziennie 95% dziewcząt i 5% chłopców. Prawdopodobieństwo, że chłopiec, który przyszedł do stołówki zje tylko drugie danie jest równe 2%. Prawdopodobieństwo, że tylko drugie danie zje dziewczyna jest równe 15%. Wynika z tego, że losowo wybrany uczeń, który zjadł drugie danie to dziewczyna jest równe:

- $\frac{285}{287}$
- $\frac{2}{5}$
- $\frac{383}{452}$
- $\frac{3}{19}$

Ćwiczenie 3

W pierwszej torebce są 2 cukierki wiśniowe i 6 czekoladowych. W drugiej torebce jest 6 cukierków wiśniowych i 3 czekoladowe. Rzucamy kostką do gry. Jeśli wypadnie 5 lub 6 oczek to losujemy jeden cukierek z pierwszej torebki. W przeciwnym wypadku losujemy jeden cukierek z drugiej torebki. Zaznacz zdanie prawdziwe.

- Prawdopodobieństwo tego, że otrzymaliśmy 5 lub 6 oczek w rzucie kostką, jeżeli wiadomo, że wylosowaliśmy cukierek wiśniowy jest równe $\frac{3}{19}$.
- Prawdopodobieństwo tego, że wylosujemy cukierek wiśniowy jest równe $\frac{5}{21}$.

Ćwiczenie 4

Na podłodze stoi 10 koszyków, zawierających po a białych kul i b czarnych kul ($a > 0$, $b > 0$). Stoi też 20 pudeł zawierających po c białych kul i po d czarnych kul ($c > 0$, $d > 0$). Z losowo wybranego pojemnika (koszyka lub pudła) wylosowano jedną kulę, która okazała się białą. Należy obliczyć jakie jest prawdopodobieństwo p, że kula została wylosowana z koszyka. Uzupełnij obliczenia, przeciągając odpowiednie wyrażenia.

$\frac{10}{10+20}$, $\frac{a}{a+b}$, $\frac{c}{c+d}$

$$p = \frac{\frac{10}{10+20} \cdot \text{.................}}{\frac{a}{a+b} \cdot \text{.................} + \frac{20}{10+20} \cdot \text{.................}}$$

Ćwiczenie 5

Tylko $0,05$ produkowanych śrub ma wady. Podczas kontroli jakości $0,95$ śrub dobrych klasyfikowano jako śruby dobre, a $0,9$ wadliwych jako wadliwe.
Uzupełnij zdania, wpisując odpowiednie ułamki dziesiętne zaokrąglone do części setnych.

Prawdopodobieństwo tego, że wybrana losowo śruba jest wadliwa, jeżeli została sklasyfikowana jako wadliwa jest równe ______.

Prawdopodobieństwo tego, że wybrana losowo śruba jest dobra, jeżeli została sklasyfikowana jako dobra jest równe ______.

$0,005$ | $0,49$ | $0,90$ | $0,99$

Ćwiczenie 6

Do sklepu przywożone są pewne detale od trzech producentów. Detale mogą być w pierwszym lub drugim gatunku. W tabelce zapisano ile procent detali pochodzi od którego producenta oraz ile procent detali w pierwszym gatunku pochodzi od danego producenta.

Producent	$\%$ detali przywożonych do sklepu	$\%$ detali w pierwszym gatunku
I	52	40
II	13	65
III	35	70

Spośród detali dostarczonych do sklepu wybrano jeden. Połącz w pary opis zdarzenia i jego prawdopodobieństwo.

Prawdopodobieństwo tego, że wybrany detal pochodzi od I producenta.	$0,52$
Prawdopodobieństwo tego, że wybrany detal jest pierwszego gatunku.	$0,5375$
Prawdopodobieństwo tego, że wybrany detal pochodzi od III producenta, jeżeli jest pierwszego gatunku.	$\frac{2450}{5375}$

Ćwiczenie 7

Dwóch łuczników strzela do nadmuchanego balonu. Balon zostaje zniszczony, jeżeli trafi go co najmniej jedna strzała. Pierwszy łucznik oddał dziewięć strzałów, a drugi dziesięć strzałów. Pierwszy łucznik trafia średnio osiem na dziesięć strzałów, a drugi siedem na dziesięć strzałów. Strzała trafiła w cel. Oblicz prawdopodobieństwo, że celny strzał oddał pierwszy strzelec.

Ćwiczenie 8

Mamy 15 monet, z których $\frac{1}{5}$ jest fałszywa. Monety fałszywe zawsze upadają reszką do góry. Monetę wybrano losowo i rzucono dziesięć razy. Za każdym razem wypadła reszka. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wybrano fałszywą monetę.

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wzór Bayesa

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

XII. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka.

Zakres podstawowy. Uczeń:

1) oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) oblicza prawdopodobieństwo warunkowe i stosuje wzór Bayesa, stosuje twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- oblicza prawdopodobieństwo zajścia danego zdarzenia, korzystając ze wzoru Bayesa
- opisuje sytuację probabilistyczną, korzystając z prawdopodobieństwa warunkowego
- dobiera odpowiedni model matematyczny do rozwiązania problemu probabilistycznego z kontekstem realistycznym

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- ocena punktowa ważona
- obieg kart

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca w parach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie wspólnie metodą oceny punktowej ważonej przypominają wszystkie wiadomości i umiejętności dotyczące prawdopodobieństwa, jakie do tej pory uzyskali. Jeden z uczniów, na podstawie wypowiedzi pozostałych, tworzy graficzny model zależności między pozyskanymi informacjami. Wynikiem pracy może być konkluzja, które definicje i twierdzenia dotyczące prawdopodobieństwa trzeba znać koniecznie (najlepiej na pamięć), a które są ich pochodnymi.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w parach. Zapoznają się z animacją. Najpierw próbują samodzielnie rozwiązać podane tam przykłady, a następnie porównują z przedstawionym rozwiązaniami. W podobny sposób pracują, analizując przykłady przedstawione w sekcji „Przeczytaj”.
2. Teraz pary uczniów łączą się w grupy 4 osobowe i pracują metodą obiegu kart, rozwiązując zadania z sekcji „Sprawdź się”. Grupa rozpoczynająca rozwiązywanie danego zadania zapisuje początek rozwiązania i podaje następnej grupie kartkę z zapisem. Ta z kolei dopisuje następną część i podaje kartkę dalej, itp. Ostatnia grupa, która kończy rozwiązanie zadania sprawdza interaktywnie poprawność uzyskanego wyniku. Jeśli wynik jest błędny, kartka wędruje do początkowej grupy, która weryfikuje swoje rozwiązanie. Grupa podaje kartkę następnej grupie, itd. Jeśli nadal odpowiedź nie jest poprawna, grupa może poprosić o pomoc nauczyciela.
3. Końcowym elementem tej części zajęć może być dyskusja – czy łatwo jest rozwiązywać zadania, śledząc tok rozumowania innej grupy osób i czy wyodrębnienie na początku

lekcji najważniejszych wzorów i umiejętności pomogło w doborze odpowiednich strategii rozwiązywania zadań.

Faza podsumowująca:

1. Wskazany przez nauczyciela uczeń przedstawia krótko najważniejsze elementy zajęć, poznane wiadomości, ukształtowane umiejętności.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę grup i par.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest poszukanie w dostępnych źródłach, informacji na temat zastosowania wzoru Bayesa w innych dziedzinach wiedzy i przygotowania krótkiej prezentacji na ten temat. Od tych prezentacji rozpocznie się następna lekcja.

Materiały pomocnicze:

Klasyczna definicja prawdopodobieństwa (treść rozszerzona)

Wskazówki metodyczne:

Z animacją każdy uczeń może zapoznać się w domu i na jej podstawie przygotować jedno zadanie, które na lekcji da do rozwiązania koleżance lub koledze z ławki. Animację można wykorzystać na zajęciach z prawdopodobieństwa całkowitego.