# Pràctica 1: Àlgebra Lineal

---

Les instruccions precises de què (i quan) cal entregar com a resultat d'aquesta pràctica les expliquem al final d'aquest document.

---

Fixem $n \geq 2$. Donats $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^n$ i $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ de rang màxim ($\det(A) \neq 0$), considerem el sistema lineal $Ax = b$. El nostre objectiu és resoldre'l. Per tal d'anar de situacions més senzilles a més complicades ho farem en **TRES** parts.

### Primera Part: Sistemes triangulars

Implementeu una funció per resoldre el sistema d'equacions $Ax = b$ quan $A$ és triangular superior (zeros sota de la diagonal principal). La funció tindrà com a capçalera

```
int resoltrisup (int n, double **A, double *b, double *x, double tol)
```

La funció rebrà com a parametres la dimensió `n`, la matriu $A$ i el vector $b$, respectivament i `tol` és la tolerància acceptada, és a dir, qualsevol nombre més petit que `tol` el considerem 0.

Per tal de resoldre el sistema, la funció `resoltrisup` suposarà que la matriu $A$ és triangular superior, és a dir, tal que $a_{ij} = 0$ per $0 \leq j < i$, $i = 0, \ldots, n-1$. La solució del sistema es guardarà en el vector `x`. D'altra banda, la funció retornarà l'enter 0 si ha pogut resoldre el sistema i 1 altrament.

Dissenyeu un programa principal (la funció `main`) que llegeixi una matriu $A = (a_{ij})_{0\leq i,j<n}$, llegeixi un vector $b = (b_i)_{0\leq i<n}$ i cridi a la funció `resoltrisup`. Una vegada s'hagi calculat la solució $x$ del sistema $Ax = b$, el programa principal escriurà el vector solució $x$ i el valor $\|Ax - b\|_2$ com a moderador de la bondat de la solució $x$ proposada.

Com aplicació resoleu els sistemes següents, amb tolerància $10^{-3}$, $10^{-6}$, $10^{-9}$ i $10^{-12}$,

a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 1.0234 & 2.0981 & 9.9871 & 1.1 \\ 0 & -6.9876 & 2.2222 & 0.3333 \\ 0 & 0 & -1.9870 & 20.121 \\ 0 & 0 & 0 & 1.1234 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Caldrà elaborar un fitxer `triangular.c` amb les funcions `main` i `resoltrisup`.

**Segona Part: El mètode de Gauss (sense pivotatge)**

Considereu ara una matriu qualsevol (no necessàriament triangular) i implementeu una funció que resolgui $Ax = b$ usant el mètode de Gauss. La funció tindrà com a capçalera

```
int gauss(int n, double **A, double *v, double tol)
```

on `n` és la dimensió, `A` és una matriu, `v` és un vector, que inicialment conté $b$ i en sortir de `gauss` conté $x$ (la solució, si s'escau). Aquesta funció usarà `resoltrisup` per a resoldre el sistema triangular resultant i retorna:

`0` si ha trobat la solució, i aquesta s'ha guardat en `v`.

`1` si en algun moment s'ha aturat el procés.

Nota: `gauss` canvia la matriu `A` !!!!

Dissenyeu un programa principal (la funció `main`) que llegeixi una matriu $A = (a_{ij})_{0\le i,j<n}$, llegeixi un vector $b = (b_i)_{0\le i<n}$ i cridi a la funció `gauss`. Una vegada s'hagi calculat la solució $x$ del sistema $Ax = b$, el programa principal escriurà el vector solució $x$ i el valor $\|Ax - b\|_2$ com a moderador de la bondat de la solució $x$ proposada.

Resoleu els sistemes següents, amb tolerància $10^{-3}$, $10^{-6}$, $10^{-9}$ i $10^{-12}$,

a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & 1 & 2 \\ -4 & -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} \frac{25}{12} \\ \frac{77}{60} \\ \frac{19}{20} \\ \frac{319}{420} \end{pmatrix}.$$

Caldrà elaborar un fitxer `gauss.c` amb les funcions `main`, `gauss` i `resoltrisup`.

## Tercera Part: El mètode de Gauss amb pivotatge

Si la matriu $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ té rang màxim, el sistema $Ax = b$ té una única solució. Pot passar però que el **mètode de Gauss** que acabem de programar no ens doni aquesta solució, això és degut a què, encara que la matriu $A$ té rang màxim, podem trobar-nos que en algun pas del mètode $|a_{kk}^{(k)}| <$ `tol` i per tant no poguem continuar. Per a solucionar aquest problema podem usar **pivotatge maximal per columnes**. En cada pas $k$ abans de calcular $m_{ik}$ busquem $max_{j=k,\dots,n}|a_{jk}^{(k)}|$, si, per exemple, $a_{lk}^{(k)}$ ens dóna aquest màxim canviem la fila $l$ per la fila $k$ (també l'element corresponent del vector $b$) i continuem amb el mètode.

Implementeu una funció que faci aquest algorisme. La funció tindrà com a capçalera

```
int gausspivot(int n, double **A, double *v, double tol)
```

que resolgui el sistema $Ax = b$ usant el **mètode de Gauss amb pivotatge**. (Aquesta funció es una modificació de la funció `gauss`).

Dissenyeu un programa principal (la funció `main`) que llegeixi una matriu $A = (a_{ij})_{0\le i,j<n}$, llegeixi un vector $b = (b_i)_{0\le i<n}$ i cridi a la funció `gausspivot`. Una vegada s'hagi calculat la solució $x$ del sistema $Ax = b$, el programa principal escriurà el vector solució $x$ i el valor $\|Ax - b\|_2$ com a moderador de la bondat de la solució $x$ proposada.

Per testejar la funció resoleu els sistemes de l'apartat anterior usant les funcions que acabeu de programar i compareu els valors de $\|Ax - b\|_2$ en ambdós casos.

Caldrà elaborar un fitxer `pivot.c` amb les funcions `main`, `gausspivot` i `resoltrisup`.

## Instruccions per a l'entrega

Abans de començar a fer la pràctica heu de crear un subdirectori anomenat:

*Grup-Cognom1Cognom2Nom-X*

on

- Grup: és el vostre grup de pràctiques en majúscules (pot ser A, B, C o D).
- Cognom1Cognom2Nom: és el vostre primer cognom, segon cognom i nom.
- X: identifica el número de la pràctica (1, 2, 3, etc).

Exemple: `A-LopezPerezMaria-2` correspon a una alumna del grup A que comença a fer la pràctica 2.

Aquest directori contindrà els arxius .c corresponents a les diverses parts.

Es crearà un arxiu comprimit del directori amb la comanda

```
tar -czvf A-LopezPerezMaria-2.tgz A-LopezPerezMaria-2
```

executada des del directori pare.

**Entregar la pràctica vol dir el següent:**

(1) S'entregarà el fitxer comprimit (.tgz) al campus virtual (moodle). La data límit serà les 15 hores de la tarda del dia 12 de novembre.

Tots els programes lliurats hauran de començar amb el comentari següent, on cadascun dels alumnes inclourà les seves dades personals

/* COGNOM1: COGNOM2: NOM: DNI: */

Tots els programes lliurats hauran de compilar amb les opcions: `-ansi`, `-pedantic`, `-O` i `-Wall`.

(2) El 13 de novembre de 2012 a l'hora de laboratori es proposarà un problema (el que hem anomenat **prova** en el pla docent) que s'haurà de resoldre usant i modificant exclusivament les funcions (programes) que heu el·laborat durant la pràctica. S'entregarà un fitxer .c al Campus Virtual.