הרצאה 1

אלגוריתמים לחיפוש בגרפים

דוגמה:

s→ ↓	→ ↓		
		■	
■			
			T

ההתקדמות בכל צעד: ימינה, שמאלה למטה

המטרה:

למצוא את המסלול הקצר ביותר מ־S ל־T.

חיפוש בגרף:

נתון גרף $G=(V,E)$ וצומת מקור $s \in V$.

1. יש לגלות את כל הצמתים ב־G שהם ברי־הגעה מ־s.
2. עבור צומת v שהוא בר־הגעה מ־s יש למצוא את המרחק הקצר ביותר בקשתות מ־s ל־v.

האלגוריתם BFS (Breath First Search)

עובר על כל הקשתות של G ו"מגלה" את קבוצת הצמתים שניתנים להגעה מ־s, $R \subseteq V$.

פלט האלגוריתם:

- ⋆ עץ ששורשו s המכיל את כל הצמתים ב־R.
- ⋆ המרחק, דהיינו מספר הקשתות המינימלי מ־s לכל צומת ב־R.
- ⋆ ניתן להפעיל את BFS גם על גרפים מכוונים והן על גרפים לא־מכוונים.

פסאודו קוד ל־BFS:

Input: A graph $G = (V, E)$, s$\in V$
Output: For any $v \in V$, $d(v)$ is the distance from s to v.
For any $v \in V$, do:
$d(v) \leftarrow \infty$
$d(s) \leftarrow 0$
$i \leftarrow 0$
While there is neighbor v of u with $d(v)= \infty$ do:
d(v)$\leftarrow i + 1$
$i \leftarrow i + 1$

מימוש BFS באמצעות תור:

בתחילה התור Q ריק.
צומת v ש"התגלה" נכנס ל־Q.
צומת w יוצא מראש התור לקראת סריקת שכניו.
האב של צומת v בעץ החיפוש הוא הצומת שגרם ל־v להתגלות.
האלגוריתם רץ כל עוד Q לא ריק.

סימונים:

- $d(v)$ ־ המרחק של v מ־s.
- $\pi(v)$ ־ האב של v בעץ החיפוש.
- $Adj(v)$ ־קבוצת השכנים של v ב־G.

For any $u \in V \backslash \{s\}$ do: $\{d(u) \leftarrow \infty, \pi(u) \leftarrow NULL\}$
$d(s) \leftarrow 0$
$Q \leftarrow \emptyset$
Enqueue(Q, s)
While $Q \neq \emptyset$ do :
$u \leftarrow$ dequeue(Q)
Foreach $v \in Adj(u)$ do:
if $d(v) = \infty$ then:
$d(v) \leftarrow d(u) + 1$
$\pi(v) \leftarrow u$
Enqueue(Q, v)

זמן הריצה של BFS:

אתחול: $O(|V|)$

לולאת ה־while:

עבור כל צומת v שיוצא מהתור עוברים על כל השכנים, דהיינו לכל היותר $O(|Adj(v)|)$ סה"כ נעבור על כל קשת בגרף לכל היותר פעמיים לכן זמן הריצה הוא $O(|E|)$.

הוכחת נכונות BFS:

- ⋆ נראה כי BFS מוצא את המסלול הקצר מ־s לכל צומת v אשר בר הגעה מ־s.
- ⋆ נסמן ב־$\delta(s,v)$ את המרחק הקצר ביותר (בקשתות) מ־s ל־v. אם אין מסלול מ־s ל־v אזי $\delta(s,v)=\infty$.

למה 1:

לכל קשת $(u,v)\in E$ **מתקיים** $\delta(s,v)\leq\delta(s,u)+1$

הוכחת למה 1:

1. אם u בר הגעה מ־s, אזי המסלול הקצר מ־s ל־v הוא לכל היותר המסלול הקצר מ־s ל־u + הקשת (u,v).
2. אחרת $\delta(s,u)=\infty$ ולכן אי־השוויון מתקיים.

למה 2:

בסיום האלגוריתם הערך $d(v)$ המחושב ע"י BFS מקיים $d(v)\geq\delta(s,v)$ לכל $v\in V$.

הוכחה:

נוכיח באינדוקציה על מספר צעד ה־Enqueue, שאחרי צעד כזה יתקיים $d(v)\geq\delta(s,v)$ לכל $v\in V$.

בסיס: אחרי פעולת $\text{Enqueue}(Q,s)$ הטענה מתקיימת כי $d(s)=0=\delta(s,s)$ ולכל $v\in V\backslash\{s\}$ מתקיים $d(v)=\infty$.

צעד האינדוקציה: נניח שצומת v "התגלה" תכאשר סרקנו את השכנים של u. מכאן, v נכנס לתור. מהנחת האינדוקציה, $d(u)\geq\delta(s,u)$. לכן:

$$d(v)\underbrace{=}_{\text{Algorithm'}}d(u)+1\underbrace{\geq}_{\text{Induction}}\delta(s,u)+1\underbrace{\geq}_{\text{Lema 1}}\delta(s,v)$$

היות ש־$d(v)$ לא ישתנה במהלך האלגוריתם, אי־השוויון שמצאנו לעיל מתקיים גם בסוף האלגוריתם.

למה 3:

נניח שבמהלך הביצוע של BFS התור Q מכיל את $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$
אזי:

$$d(v_r) \le d(v_1) + 1$$

$$\forall 1 \le i \le r, d(v_i) \le d(v_{i+1})$$

מסקנה 4:

נניח ש־v_i נכנס ל־Q לפני ש־v_j נכנס לתור. אזי, $d(v_i) \le d(v_j)$.

הוכחה:

נתבונן ב־v_i ו־v_j וסדרת הצמתים שהוכנסו ביניהם ל־Q: $\{v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, v_j\}$
כל זוג צמתים עוקבים בסדרה v_k, v_{k+1} מקיימים את אחד מהתנאים הבאים:

1. v_k, v_{k+1} יחד בתור ולכן לפי למה 3 $d(v_k) \le d(v_{k+1})$.
2. v_{k+1} נכנס לתור Q אחרי ש־v_k יוצא ממנו אזי מפני שאין צומת ביניהם בסדרה נובע כי v_kגורם ל־v_{k+1} להתגלות ולכן $d(v_{k+1}) = d(v_k) + 1$.

$\Leftarrow$

$$d(v_i) \le d(v_2) \le \dots \le d(v_l) \le d(v_j)$$

$\blacksquare$.

משפט:

נניח שמריצים את BFS על G (מכוון/לא מכוון) עם צומת מקור s,
אזי BFS מגלה כל צומת v שהוא בר־השגה מ־s ובסיום האלג' $d(v) = \delta(s, v)$.
בנוסף, לכל צומת v בר־השגה מ־s אחד המסלולים הקצרים ל־v הוא מסלול קצר ביותר מ־s ל־$\pi(v)$, שאליו נוספת הקשת $(\pi(v), v)$.

הוכחה:

נניח בשלילה שקיים צומת v עבורו $d(v) \neq \delta(s, v)$ מלמה 2, מפני ש־$d(v) \ge \delta(s, v)$ אזי נקבל $d(v) > \delta(s, v)$. נקח את הצומת v עם $\delta(s, v)$ מינימלי שעבורו מתקיים אי־השוויון החזק.
נסתכל על המסלול הקצר ביותר מ־s ל־v. יהי u הצומת שמופיע מיד לפני v

במסלול זה. אזי, $\delta(s,v)=\delta(s,u)+1$.
מאופן הבחירה של v כצומת בעל $\delta(s,v)$ המינימלי שמקיים את אי־השוויון החזק,
נקבל כי $d(v)=\delta(s,u)$.
מכאן:

$$d(v)>\delta(s,v)=\delta(s,u)+1=d(u)+1 \ (**)$$

נראה כי אי־השוויון (**) לא יתכן. נסתכל על הצעד בו u יוצא מהתור נבחין ב 3 מקרים:

1. v עוד לא "התגלה", לכן מהאלגוריתם נקבל $d(v)=d(u)+1$ $\Leftarrow$ סתירה ל־(**).
2. v כבר לא היה בתור. לכן, v נכנס לתור לפני u (שכן התור FIFO) וממסקנה 4 $d(v)\leq d(u)$ $\Leftarrow$ סתירה ל־(**).
3. הצומת v עדיין בתור. לכן, מיד לפני ש־v יצא מהתור, u ראשון בתור ו־v "במקרה הגרוע" אחרון בתור. ולכן מלמה 3 $d(v)\leq d(u)+1$ $\Leftarrow$ סתירה ל־(**).

מכאן נקבל כי לכל צומת v שהוא בר הגעה מ־s מתקיים $d(v)=\delta(s,v)$.
לסיום, נזכיר כי אם $\pi(v)=u$ אזי $\delta(s,v)=\delta(s,u)+1 \Leftrightarrow d(v)=d(u)+1$
לכן, ניתן לקבל מסלול קצר ביותר מ־s ל־v ע"י הוספת $(\pi(v),v)$ למסלול הקצר ביותר מ־s ל־$\pi(v)$.