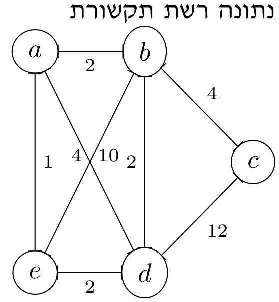
הרצאה 4 אלגוריתמים

27 באפריל 2019

בעיות אופטימיזציה ברשתות

דוגמה:

נתונה רשת תקשורת



- על כל קשת מופיע מחיר השימוש בה
- נניח כי הצומת a מעוניין להפיץ הודעה לכל הצמתים במחיר מינימלי

$\Leftarrow$ יש למצא תת־קב' קשתות ברשת שעליהן ההודעה תעבור כך שתגיע לכל הצמתים

- נשים לב כי היות ונרצה להשיג מחיר מינימלי תת־הגרף שהתקבל מבחירת הקשתות יהיה חסר מעגלים

מכאן נקבל את בעיית עץ פורש מינימום:

- נתון גרף קשיר לא מכוון $G=(V,E)$, שבו לכל קשת (v,u) יש משקל $w(v,u)$ יש למצוא
  עץ פורש של הגרף שסה"כ משקל הקשתות בו מינימלי.

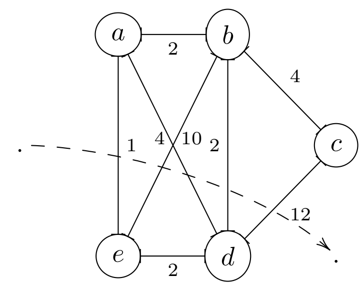
אלגוריתמים לבעיות עץ חיפוש מינימום('עפ"מ')

- נראה תחילה אלג' גנרי שבונה עפ"מ קשת אחר קשת. על־ידי הוספת קשתות עם מקשל נמוך והשמטת קשתות עם משקל גבוה.
- האלגוריתם יתקדם על־ידי צביעת קשתות. קשתות שיצבעו בכחול יופיעו בעץ, וקשתות שיצבעו בצבע אדום יושמטו.
- האלג' יקיים בכל שלב את:
  "שמורת הצבע" - קיים עפ"מ שמכיל את כל הקשתות הכחולות ואף אחת מהקשתות האדומות.

- משמורת הצבע נובע כי כאשר כל הקשתות ב־G נצבעו. הקשתות הכחולות יוצרות עפ"מ.

חתך(cut) בגרף $G=(V,E)$ הוא חלוקה של קב' הצמתים v לשתי תת־קב' x ו־$\overline{x}=v\backslash x$ קשת חוצה את החתך אם קצה אחד שלה ב־x והקצה האחר ב־$\overline{x}$.

- לעיתים נתייחס לחתך כאל "קבוצת הקשתות החוצות".



אלגוריתם גנרי למציאת עפ"מ

הכלל הכחול: מצא חתך שאין בו קשת כחולה. צבע בכחול את את הקשת הקלה ביותר שאינה צבועה.

הכלל האדום: מצא מעגל שאין בו קשת אדומה. צבע באדום את הקשת הכבדה ביותר שאינה צבועה.

אלגוריתם חמדן: הפעל את הכללים לעיל עד שכל הקשתות צבועות. הקשתות הכחולות הן עץ פורש מינימלי.

נוכיח את נכונות האלג' הגנרי

משפט 1: האלגוריתם הגנרי צובע את כל הקשתות של גרף קשיר G ומקיים את שמורת הצבע.

הוכחה: נראה תחילה כי האלג' מקיים את השמורה,
באינדוקציה על מס' האיטרציות
(דהיינו הפעלות של הכלל הכחול או האדום).

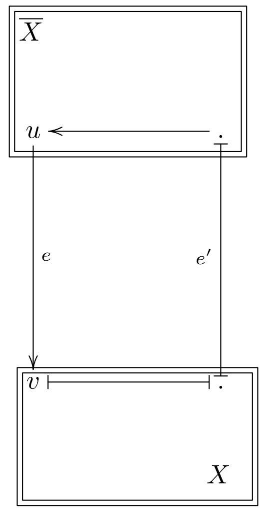
- <u>בסיס:</u> בתחלה כל הקשתות אינן צבועות ולכן כל עפ"מ ל־G מקיים את השמורה (באופן ריק).

- <u>צעד האינדוקצייה:</u> נטפל לחוד בשני מקרים:

1. נניח כי השמורה מתקיימת לפני הפעלה של הכלל הכחול.
תהיי e קשת שנצבית כעת בכחול, ויהיה T עפ"מ שמקיים את השמורה <u>לפני</u> שהקשת e נצבעה.

(א) אם $e\in T$ אזי T מקיים את השמורה אחריי שהקשת e נצבעה (סיימנו).

(ב) אם $e \notin T$ אזי נסתכל על החתך $x, \overline{x}$ שעליו הפעלנו את הכלל הכחול.
יש מסלול ב־T שמחבר את הצמתים u, v בקצוות של e.



- היות והקשת e חוצה את החתך, קיימת על המסלול הנ"ל קשת אחרת e', שחוצה את החתך ו־$e' \in T$.
- הקשת e' לבטח לא צבועה בכחול (וגם אינה צבועה באדום מהנחת האינדוקציה).
- בנוסף $w(e') \geq w(e)$
- $\Leftarrow$ ניתן להשמיט את e' מ־T ולהוסיף במקומה את e.

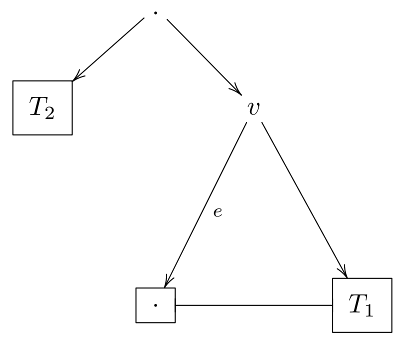
  נשים לב , כי אם המסלול היחדי בין שני צמתי ב־T עבר דרך e', המסלול יעבור כעת דרך e.

  בנוסף, T נשאר עפ"מ, כי המשקל הכולל לא יכול לעלות.

  * אם נצבע כעת את e בכחול, נקבל כי השמורה מתקיימת כבור העץ T (החדש).

2. נניח כי השמורה מתקיימת לפני הפעלה של הכלל האדום.
   תהי e קשת שנצבעת כעת באדום, והי T עפ"מ
   שמקיים את השמורה לפני שהקשת e נצבעת.

- אם $e \in T$ אזי T מקיים את השמורה גם אחרי שהקשת e נצבעת.
- נניח כי $e \in T$ אזי השמטת e מ־ T מחלקת את T לשני עצים
  וגם מגדירה חלוקה של הצמתים ב־G

- 

- לקשת e יש קצה אחד ב־T_1 וקצה אחר ב־T_2, נסמנם ב־u ו־v בהצאמה המעגל שעליו שפעלנו את הכלל האדום מכיל
מסלול נוסף מ־u ל־v על המעגל יש קשת e' שקצה אחד שלה ב־T_1 והקצה האחר ב־T_2.
  - מהשמורה נובע כי e' לא כחולה (כי $e' \notin T$), ומהכלל האדום e' לא צבוע באדום.
  - בסוף, $w(e') \leq w(e)$.

- $\Leftarrow$ הוספת הקשת e' לעץ T והשמטת הקשת e יוצרת עץ חדש מקיים את השמורה אחרי שהקשת e נצבעת
באדום. בנוסף לא הגדלנו את משקל העץ, לכן T (החדש) הינו עפ"מ.

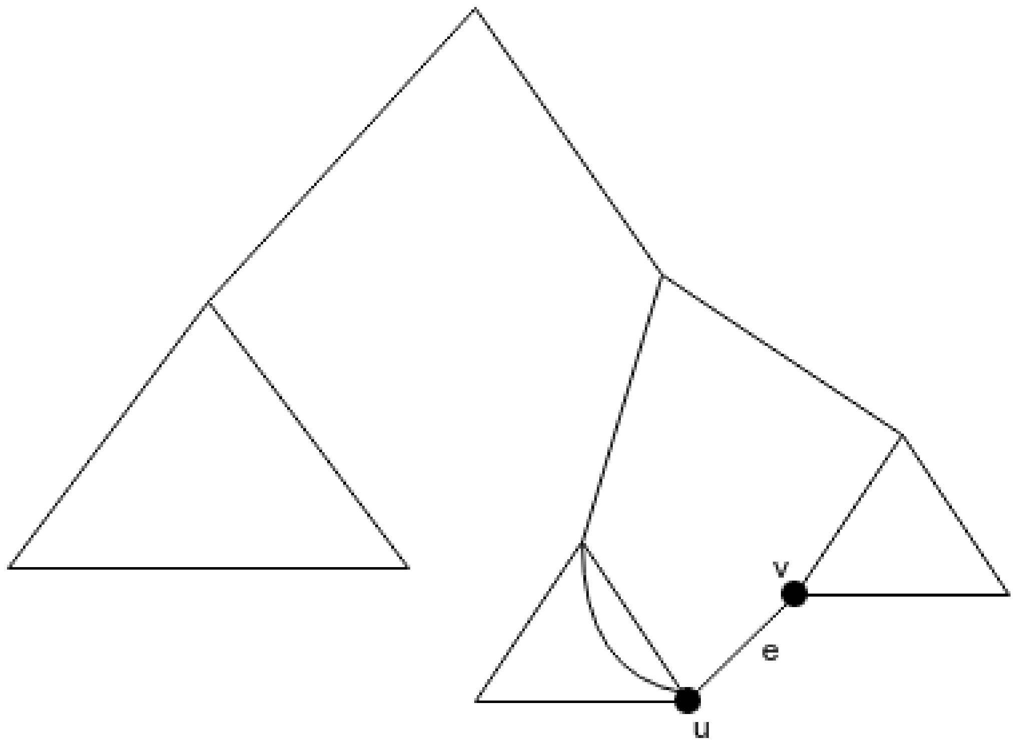
חלק שני של ההוכחה:

נראה כעת כי האלג, הגנרי יצבע את כל הקשתות בגרף. נניח בשלילה כי קיימת קשת e לא צבועה, אך לא ניתן
להפעיל אף אחד מהכללים.

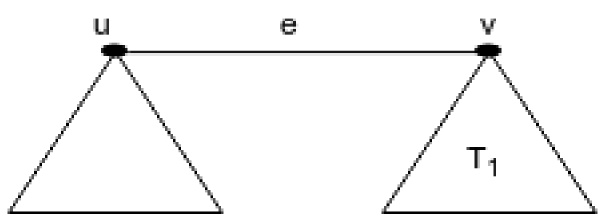
- נשים לב כי מהכלל הכחול, הקשתות הכחולות יוצרות יער של עצים כחולים.

נבחין בין שני מקרים:

1. שני הקצוות של e באותו עץ כחול, אז נקבל:
כלומר, מצאנו ב־G מעגל שאין בו קשתות אדומות
לכן ניתן להפעיל על e את הכלל האדום.



2. אם הקצוות של e בעצים כחולים שונים, נסמן ב־X את אוסף הצמתים ב־T_2 וב־$\overline{X}$ את שאר הצמתים בגרף. קיבלנו חתך שאין בו קשתות כחולות $\Leftarrow$ ניתן להפעיל את הכלל הכחול על e.



מכאן נקבל שכל עוד יש ב־G קשת לא צבועה מובטח שניתן להפעיל את אחד הכללים, לכן האלג' הגנרי צובע את כל הקשתות.

אלגוריתמים קלאסיים למציאת עפ"מ

אלגוריתם Prim: נפעיל את הכלל הכחול על החתך שמוגדר ע"י העץ שהולך ונבנה, כלומר בין צמתי העץ ושאר צמתי הגרף.

1.Init: All the edges are non-colored, $T := \{r\}$

while $T \neq V$ do:

$e = (u, v)$ minimal edge in the cut $(T, V \backslash T) : u \in T$

$e \leftarrow$ Blue

$T := T \cup \{v\}$

זמן הריצה של Prim:

מימוש ע"י מערכים: יהיה v צומת שגובל בעץ כחול T. דהיינו, יש קשת (v,u) כך ש־$u \in T$.

- עבור כל צומת v שגובל ב־T נגדיר קשת בצבע תכלת.
  זו היא הקשת "הקלה" ביותר מבין הקשתות שמחברות את v ל־T
  (הקשתות בצבע תכלת "מועמדות להיות כחולות).
  כאשר נפעיל את הכלל הכחול נבחר קשת בצבע תכלת ונהפוך אותה לכחולה.

- נניח כי הצומת v נוסף לעץ T. נסתכל על כל הקשתות (שאינן צבועות)
  (v,x) כך ש־$x \notin T$. אם אין ל־x קשת תכלת, נצבע את (v,x) בתכלת.
  אחרת, קיימת ל־x קשת תכלת ונסמנה (x,y) $(y \in T)$
  ו־ $w(v,x) < w(x,y)$, אזי נהפוך את (v,x) לתכלת במקום הקשת (x,y).

סיבוכיות:

בכל איטרציה של הכלל הכחול הסיבוכיות היא $O(|V|)$ וכיוון שנעשה $|V|-1$ איטרציות
נקבל $O(|V^2|)$ האלגוריתם יתחזק מערך בגודל $|V|$ של קשתות בצבע תכלת.