הרצאה 6 אלגוריתמים

תזכורת: מסלולים קלים ביותר

<u>נתון:</u>

- ⋆ גרף מכוון $G=(V,E)$
- ⋆ ופונ' משקל $W:E\to\mathbb{R}$:
- ⋆ צומת $s\in V$

<u>מטרה:</u>

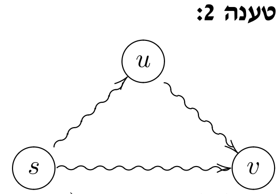
למצוא לכל $v\in V$ מסלול קל ביותר מ-s ל-v.
"אורך" נמדד ע"י סכום משקלי הקשתות שבמסלול.
מסמנים ב-$\delta(u,v)$ את אורך המסלול הקשל ביותר ב-G מ-u ל-v.

$$\delta(u,v)=\begin{cases}\infty & v\text{-non reachable from } u\\ -\infty & \text{there is "negative circle"}\\ & \text{reachable from u and}\\ & \text{v is reachable from the circle}\\ min\{w(p):\text{p-path from } u \text{to } v\} & \text{otherwise}\end{cases}$$

טענה 1:

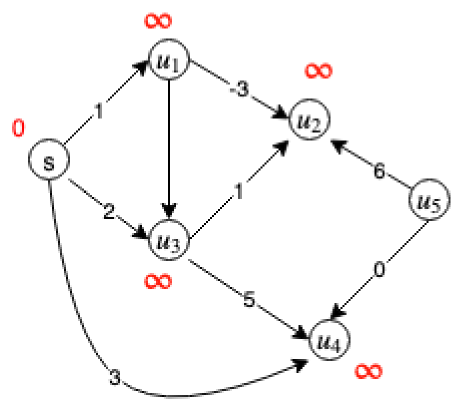
אם p מסלול קל ביותר מ-u ל-v, אז כל תת-מסלול שלו הוא קל ביותר.

טענה 2:



לכל קשת $(u\to v)\in E$ מתקיים:
$\delta(s,v)\le\delta(s,u)+w(u\to v)$

הוכחה:



אם אין מסלול מ-s ל-u אז $\delta(s,u)=\infty$ וסיימנו.
אחרת, נסתכל על המסלול קל ביותר מ-s ל-u, ונשרשר לו את הקשת $(u \to v)$.
$\Leftarrow$ אחרת המסלול החדש הוא $\delta(s,u)+w(u \to v)$ ולכן אי-השוויון מתקיים.■

השיטה הגנרית:

1. אתחול: $d(s) \leftarrow 0$, ולכל $u \neq s$: $d(u) \leftarrow \infty$.
2. כל עוד קיימת קשת $(u \to v) \in E$ כך ש:
   $d(v) > d(u)+w(u \to v)$:
   $d(v) \leftarrow d(u)+w(u \to v)$.

משפט:

אם אין מעגלים שליליים בגרף, אז:

1. לכל צומת $v \in V$ ולכל שלב בריצת השיטה הגנרית : $d(v) \geq \delta(s,v)$
2. כשה השיטה הגנרית עוצרת, אז:
   $d(v)=\delta(s,v) \quad \forall v \in V$

הוכחה:

1. נוכיח באינדוקציה על הצעדים של השיטה הגנרית.

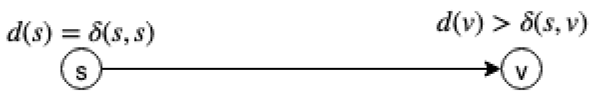
⋆ בסיס:
באתחול $d(u)$ לכל $u \neq s$ שווה ל-∞ ועבור s מתקיים $\delta(s,s) \underbrace{=}_{\text{there is no negative circles in G}} d(s)=0$

⋆ צעד:
בהינתן קשת $(u \to v) \in E$ שהפרה את אי-שוויון המשולש ביחס לסימונים d,

ביצענו: $d(v) \leftarrow d(u) + w(u \to v)$.

$$\begin{aligned} & d(v) = d(u) + w(u \to v) \\ & \underbrace{\geq}_{\text{induction on d(u)}} \delta(s,u) + w(u \to v) \underbrace{\geq}_{\text{triangle inequality}} \delta(s,v) \end{aligned}$$

2. מ-א, מספיק להראות שהשיטה הגנרית עוצרת שלכל $v \in V$:
$d(v) \leq \delta(s,v)$



נניח בשלילה שקיים צומת v עבורו:

$$d(v) > \delta(s,v)$$

$\Leftarrow$$\delta(s,v)$ אינו יכול להיות ∞, ובגלל שאין מעגלים שליליים, $\delta(s,v)$ סופי.
$\Leftarrow$יהיה p מסלול קל ביותר כלשהו מ-s ל-v

$$p = v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_{k-1} \to v_k = v$$

עבור s: $d(s) = \delta(s,s)$ (כי אין מעגלים שליליי).
עבור v: $d(v) > \delta(s,v)$
ולא קיים אף צומת v_iבמסלול כך ש-$d(v_i) < \delta(s,v_i)$ (בגלל א).
$\Leftarrow$קיימת קשת ב-p $(v_i \to v_{i+1})$ כך ש:

$$\begin{cases} d(v_i) = \delta(s,v_i) \\ d(v_{i+1}) > \delta(s,v_{i+1}) \end{cases}$$

(וזו הקשת הראשונה שבה זה קורה).

$$\begin{aligned} & d(v_{i+1}) > \delta(s,v_{i+1}) \underbrace{=}_{\text{1.sub-path of lightest path is lightest.}} \delta(s,v_i) + w(v_i \to v_{i+1}) \\ & = d(v_i) + w(v_i \to v_{i+1}) \end{aligned}$$

$\Leftarrow$הקשת $(v_i \to v_{i+1})$ מפרה את אי-שוויון המשלול ביחס לסימונים d.
$\Leftarrow$השיטה הגנרית לא היתה צריכה לעצורה.
$\blacksquare$.

$\delta(s, v_{i+1}) \underbrace{=}_{(1)}$ (סכום משקלי הקשתות הריש של δ מ-s ל-v_{i+1})

$= w(v_0 \to v_1) + w(v_1 \to v_2) + \cdots + w(v_{i-1} \to v_i) + w(v_i + v_{i+1})$

$w(v_i \to v_{i+1})$+סכום משקלי הקשתות ברישא של p מ-s ל-v_i=

$\underbrace{=}_{(1)} \delta(s, v_i) + w(v_i, v_{i+1})$

שאלה:

כיצד ניתן לשחזר איזשהו מסלול קל ביותר ?

לכל צומת $v \in V$ מסמן ב-$\pi(v)$ את הצומת שגרם לעדכון האחרון של $d(v)$.

- ⋆ אתחול: $\forall v \in V \ \pi(V) \leftarrow NULL$
- ⋆ בעדכון: שהקשת $(u \to v)$ מבצעת עדכון ל-$d(v)$ נצבע: $\pi(v) \leftarrow u$

הגדרה:

<u>עץ מסלולים קלים ביותר</u> של G ו-s הוא תת-גרף $G' = (V', E')$ של G כך ש:

1. V' זה אוסף הצמתים הישיגיים מ-s.
2. G' הוא מכוון ששורשו s.
3. לכל $v \in V'$ המסלול היחיד ב-G' מ-s ל-v הוא מסלול קל ביותר מ-s ל-v ב-G.

טענה:

אם אין מעגלים שליליים, אז שהשיטה הגנרית עוצרת, נסתכל על הגרף הבא:

$$G' = (V', E')$$
$$V' = \{v : \pi(v) \neq NULL\} \cup \{s\}$$
$$E' = \{(\pi(v) \to v) : \pi(v) \neq NULL)\}$$

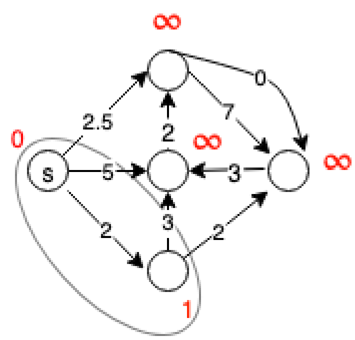
אז G' הוא עץ מסלולים קלים ביותר של G מ-s.

"הוכחה":

<u>שלבים להוכחה(לא נוכיח):</u>

- ⋆ בכל שלב בריצה של השיטה הגנרית, G' חסר מעגלים מכוונים.
- ⋆ בסיום הריצה, V' זה אוסף הצמתים הישיגים מ-s.
- ⋆ בסיום הריצה, המסלול היחיד ב-G' מ-s ל-v הוא מסלול קל ביותר ב-G מ-s ל-v.

נתמקד במקרה שמשקלים הם אי-שליליים, כלומר $w(u \to v) \geq 0 \quad \forall (u \to v) \in E$.
דוגמה:



האלג' של Dijkestra (1959)

1. אתחול:
$d(s) = 0$, ולכל $u \neq s$ $d(u) \leq \infty$, $Q \leftarrow V$.
2. כל עוד $Q \neq \emptyset$:
   (א) יהי u הצומת בעל d הקטן ביותר ב-Q.
   (ב) לכל קשת $(u \to v) \in E$, אם $d(v) > d(u) + w(u \to v)$ אז:
   $d(v) \leftarrow d(u) + w(u \to v)$
   (ג) הוצא את u מ-Q.

זמן ריצה:

למשל, אם מממשים את Q בעזרת ערימת מינימום זמן הריצה הכולל: $O(|E| \log |V|)$

נכונות:

מנכונות השיטה הגנרית, מספיק שנראה שהאלג' של Dijkestra עוצר
וכל הקשתות $(u \to v) \in E$ מקיימות:

$$d(v) \leq d(u) + w(u \to v)$$

טענה 1:

נניח באיטרציה מסויימת u יצא מ-Q, ובאיטרציה העוקבת לה v יצא מ-Q. אז:

- ⋆ $d(u)$ ברגע ההוצאת u מ-Q.
- ⋆ $d(v)$ ברגע ההוצאת v מ-Q.

ומתקיים:

$$d(u) \leq d(v)$$

הוכחה:

ברגע הוצאת u מ-Q מתקיים: $d(u) \leq d(v)$ (מאופן בחירת הצומת שיוצא מ-Q).

- $\star$ אם $d(v)$ לא התעדכן במהלך האיטרציה ש-u יצא מ-Q סיימנו.
- $\star$ אחרת יש קשת $E \ni (u \to v)$ וביצענו עדכון $d(v) \leftarrow d(u) + \underbrace{w(u \to v)}_{\geq 0}$ הטענה נובעת מאי-שליליות המשקלים.

■.

מסקנה 1:

טענה 1 נכונה גם אם v יצא אחרי u אבל לא בהכרח באיטרציה העוקבת.

מסקנה 2:

לאחר הוצאת v מ-Q, $d(v)$ לא מתעדכן.

הוכחה:

נניח בשלילה שקיים צומת v עבורו $d(v)$ מתעדכן אחרי ש-v יצא מ-Q.
נסתכל על הפעם הראשונה שזה קרה.
$\Leftarrow$ קיים צומת u, שכרגע יוצא מ-Q
וקשת $E \ni (u \to v)$ כך ש-$d(v) > \underbrace{d(u)}_{\text{when we get it from Q}} + w(u \to v)$
(ואז ברגע הוצאת v מ-Q בגלל שזו הפעם הראשונה).
מאי-שליליות המשקים קיבלנו ש-$d(v)$ ברגע הוצאת v מ-Q גדול ממש מ-$d(u)$
ברגע הוצאת u מ-Q וזו סתירה למסקנה הראשונה.■