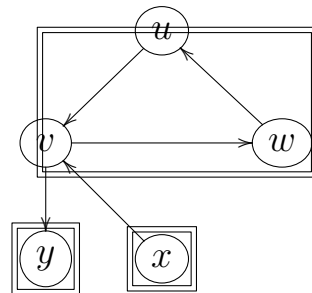


אלגוריתמים - 3

DFS ושימושי



הגדרות:

רכיב קשיר היטב(רק"ה): בגרף מכוון $G = (V, E)$ הוא קב' מקסימלית של צמתים $C \subseteq V$. כך שלכל זוג צמתים $u, v \in C$ יש מסלול מכוון מ- v ל- u ($v \rightarrow u$) ומ- u ל- v ($u \rightarrow v$). צומת בודד יכול להיות רק"ה.

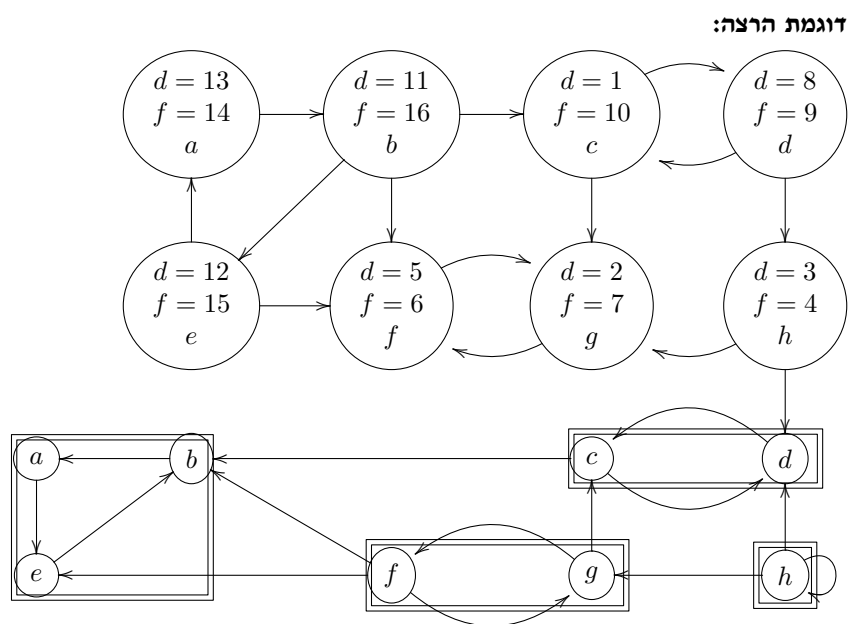
דוגמה:

- הגרף ההופכי של גרף מכוון $G = (V, E)$ הוא $G^T = (V, E^T)$
 $E^T = \{(u, v) : (v, u) \in E\}$
(דהיינו הופכים את כיווני הקשתות ב- G).
- נשים לב כי ב- G וב- G^T יש בדיוק אותם רק"ה. בפרט אם u ו- v ניתנים להגעה הדדית ב- G , אז גם ב- G^T .

אלגוריתם למציאת רכיבים קשירים היטב

Strongly Connected Components (G)

1. Call DFS to compute $f[u]$ for all $u \in V$
2. Compute G^T
3. Call $\text{DFS}(G^T)$ but in the main loop consider the vertices in decreasing order of $f[u]$ (as computed in 1.)
4. Output the vertices in each DFS tree generated in 3. as a separate component.



זמן הריצה של אלג' SCC.

זמן הריצה נקבע ע"י:

1. הרצה של DFS $\Rightarrow \Theta(|V| + |E|)$ (סה"כ זמן ריצה)

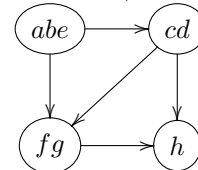
2. יצירת G^T : $O(|E|)$.

3. סריקת הצמתים בלולאה המרכזית בצעד 3.

בסדר יורד לפי $f[u]$.

נ"תן לשמור את ערכי $f[u]$ בצעד 1. במחסנית.

לצורך הוכחת הנכונות של SCC נגדיר את
 גרף הרכיבים של G , $G^* = (V^*, E^*)$:
 נניח כי ה"רק" ב- G^* הם C_1, C_2, \dots, C_k .
 אזי $V^* = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ והוא כולל צומת v_i לכל
 "רק" C_i ב- G .
 תהיה קשת (v_i, v_j) ב- G^* אם G מכיל קשת מאיזשהו צומת
 $x \in C_i$ ל- $y \in C_j$.
בדוגמה: גרף הרכיבים הוא:



למה 1: יהיו C ו- C' שני "רק" בגרף מכוון $G = (V, E)$.
 ויהיו $v, u \in C$ ו- $v', u' \in C'$ נניח שיש מסלול מכוון $u \rightarrow u'$ ב- G ,
 אזי לא ייתכן שיש מסלול מכוון $v' \rightarrow v$.
 (הוכחה בתרגול).

כאשר נשתמש ב- $d[u]$ ו- $f[u]$ בניתוח האלג',
 נתייחס לערכים אלו כפי שנקבעו ל- u בקריאה הראשונה
 ל-DFS (בצעד 1. של האלג').
 נרחיב את ההגדרות של זמן "גילוי" ו"נסיגה" לקבוצות
 $d(U) = \min_{u \in U} \{d[u]\}$ אזי $U \subseteq V$
 $f(U) = \max_{u \in U} \{f[u]\}$ ו-
 דהיינו $d(U)$ ו- $f(U)$ הם זמן הגילוי המוקדם
 וזמן הנסיגה המאוחר בקבוצה U , בהתאמה.

למה 2:

יהיו C ו- C' שני "רק" בגרף מכוון $G = (V, E)$.
 נניח שיש קשת $(u, v) \in E$ כאשר $u \in C$
 ו- $v \in C'$ אזי $f(C) > f(C')$.

הוכחה:

נטפל בשני מקרים כתלות ביחס
 בין $d(C)$ ו- $d(C')$

1. $d(C) < d(C')$ ויהי x הצומת הראשון שהתגלה ב- C .
 אזי בזמן $d[x]$ כל הצמתים ב- C ו- C' לבנים.
 היות ו- $(u, v) \in E$ יש מסלול שמורכב רק מצמתים לבנים מ- x
 לכל צומת ב- C וגם מ- x לכל צומת ב- C' .
 ממשפט המסלול הלבן, כל הצמתים ב- C וב- C' יהפכו צאצאים של x בעץ DFS.
 ממשפט הסוגריים, לכל צומת w ב- C או ב- C' מתקיים:
 $f[x] = f[C] > f(C') \geq f[w] > d[w] > d[x]$ ולכן $d[x] < d[w] < f[w] < f[x]$

2. אם $d(C) > d(C')$, אזי יהי y הצומת הראשון שהתגלה ב- C' בזמן $d[y]$. יש מסלול לבן מ- y לכל צומת ב- C' . לכן, ממשפט המסלול הלבן כל הצמתים ב- C' יהפכו לצאצאים של y בעץ DFS, וממפש הסוגריים $f[y] = f(C')$. בזמן הגילוי של y כל הצמתים ב- C' לבנים. היות ויש קשת (u, v) מ- C' ל- C . מלמה 1 לא ייתכן שיש מסלול מ- C' ל- C , לכן לא ניתן להגיע מ- y לאף צומת ב- C . לכן, בזמן $f[y]$ כל הצמתים ב- C' עדיין לבנים. מכאן נקבל כי לכל $w \in C$, $f[w] > f[y]$.
 $f(C) > f(C')$
 לכן $f(C) > f(C')$. ■

מסקנה 3:

יהיו C ו- C' רק"ה בגרף מכוון $G = (V, E)$. נניח שיש קשת $(u, v) \in E^T$, כאשר $u \in C$ ו- $v \in C'$. אזי בהרצה של DFS על G (בצעד 1 של SCC) נקבל כי $f(C) < f(C')$.

הוכחה:

היות ו- $(u, v) \in E^T$, יש ב- G קשת $(v, u) \in E$ מלמה 2, היות ויש קשת מ- C' ל- C ב- G . נקבל כי $f(C) < f(C')$. ■

משפט 4:

האלגוריתם Strongly Connected Components מחשב נכון את הרק"ה בגרף מכוון G .

הוכחה:

נוכיח באינדוקציה שכ"א מ- x העצים הראשונים שנמצאו בהרצת DFS על G^T (בצעד 3 של SCC) הוא רק"ה.

בסיס:

$k = 0$, נכון באופן ריק.

צעד האינדוקציה:

נניח שהטענה נכונה ל- k העצים הראשונים ונוכיח לעץ ה- $(k + 1)$ נניח כי השורש של העץ הינו צומת u ,

כאשר u שייך לרק"ה C ב- G .

- מאופן התקדמות האלג' בלולאה המרכזית של צעד 3. מתקיים:

$$f[u] = f(C) > f(C')$$

לכל רק"ה C' ב- G שעוד לא טופל (בצעד 3).

-מהנחת האינדוקציה, בזמן ש-DFS "מגלה" את u (בצעד 3).

כל הצמתים ב- C' לבנים ממשפט המסלול הלבן,

כל הצמתים ב- C יהפכו לצאצאים של u בעץ DFS.

בנוסף ממסקנה 3. כל קשת שיוצאת מ- C ב- G^T מובילה לרק"ה שכבר ביקרנו.

לכן הצאצאים של u בעץ DFS הם כל הצמתים ב- C ורק הצמתים ב- C . ■