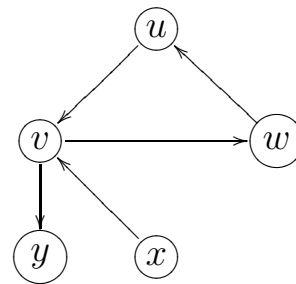


### אלגוריתמים - 3

8 באפריל 2019

#### DFS ושימושו



#### הגדרות:

רכיב קשיר היטב (רק"ה): בגרף מכוון  $G = (V, E)$  הוא קב' מקסימלית של צמתים  $C \subseteq V$ . כך שלכל זוג צמתים  $u, v \in C$  יש מסלול מכוון מ- $v$  ל- $u$  ( $v \rightarrow u$ ) ומ- $u$  ל- $v$  ( $u \rightarrow v$ ). צומת בודד לכול להיות רק"ה.

#### דוגמה:

- הגרף ההופכי של גרף מכוון  $G = (V, E)$  הוא  $G^T = (V, E^T)$   
 $E^T = \{(u, v) : (v, u) \in E\}$

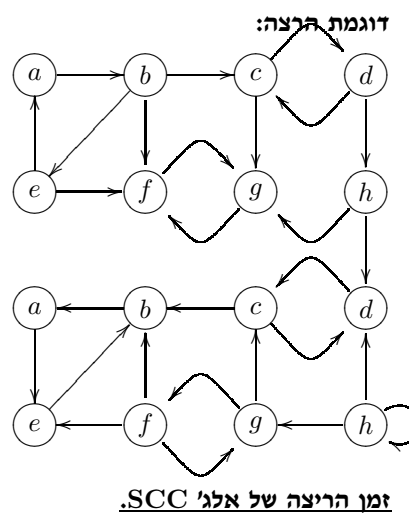
(דהיינו הופכים את כיווני הקשתות ב- $G$ ).

- נשים לב כי ב- $G$  וב- $G^T$  יש בדיוק אותם רק"ה. בפרט אם  $u$  ו- $v$  ניתנים להגעה הדדית ב- $G$ , אז גם ב- $G^T$ .

## אלגוריתם למציאת רכיבים קשירים היטב

### Strongly Connected Components (G)

- 1.Call DFS to compute  $f[u]$  for all  $u \in V$
- 2.Compute  $G^T$
- 3.Call DFS( $G^T$ )but in the main loop consider the vertices in decreasing order of  $f[u]$ (as computed in 1.)
- 4.Output the certices in each DFS tree generated in 3. as a separate component.



זמן הרצה נקבע ע"י

1. הרצה של DFS  $\Rightarrow \Theta(|V| + |E|)$  (סה"כ זמן ריצה)
2. יצירת  $G^T$   $O(|E|)$ .
3. סריקת הצמתים בלולאה המרכזית בצעד 3.  
בסדר יורד לפי  $f[u]$ .  
 $\Leftarrow$  ניתן לשמור את ערכי  $f[u]$  בצעד 1. במחשנית.

לצורך הוכחת הנכונות של SCC נגדיר את

גרף הרכיבים של G,  $G^* = (V^*, E^*)$ :

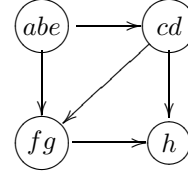
נניח כי הרק"ה ב- $G$  הם  $C_1, C_2, \dots, C_k$ .

אזי  $V^* = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  והוא כולל צומת  $v_i$  לכל

רק"ה  $C_i$  ב- $G$ .

תהיה קשת  $(v_i, v_j)$  ב- $G^*$  אם  $G$  מכיל קשת מאיזשהו צומת

בדוגמה: גרף הרכיבים הוא:  $x \in C_i$  ל-  $y \in C_j$ .



**למה 1:** יהיו  $C$  ו- $C'$  שני רק"ה בגרף מכוון  $G = (V, E)$ . ויהיו  $u, v \in C$  ו- $u', v' \in C'$  נניח שיש מסלול מכוון  $u \rightarrow u'$  ב- $G$ , אזי לא ייתכן שיש מסלול מכוון מ- $u' \rightarrow v'$ . (הוכחה בתרגול).

כאשר נשתמש ב-  $d[u]$  ו-  $f[u]$  בניתוח האלג', נתייחס לערכים אלו כפי שנקבעו ל- $u$  בקריאה הראשונה ל-DFS (בצעד 1. של האלג').

נרחיב את ההגדרות של זמן "גילוי" ו"נסיגה" לקבוצות צמתים אם  $U \subseteq V$  אזי  $d(U) = \min_{u \in U} \{d[u]\}$  ו-  $f(U) = \max_{u \in U} \{f[u]\}$  דהיינו  $d(U)$  ו- $f(U)$  הם זמן הגילוי המוקדם וזמן הנסיגה המאוחר בקבוצה  $U$ , בהתאמה.

## למה 2:

יהיו  $C$  ו-  $C'$  שני קר"ה בגרף מכוון  $G = (V, E)$ . נניח שיש קשת  $(u, v) \in E$  כאשר  $u \in C$  ו- $v \in C'$  אזי  $f(C) > f(C')$ .

## הוכחה:

נטפל בשני מקרים כתלות ביחס בין  $d(C)$  ו-  $d(C')$

1.  $d(C) < d(C')$  ויהיו  $x$  הצומת הראשון שהתגלה ב-  $C$ . אזי בזמן  $d[x]$  כל הצמתים ב- $C$  ו- $C'$  לבנים. היות ו-  $(u, v) \in E$  יש מסלול שמורכב רק מצמתים לבנים מ- $x$  לכל צומת ב- $C$  וגם מ- $x$  לכל צומת ב- $C'$ . ממשפט המסלול הלבן, כל הצמתים ב- $C$  וב- $C'$  יהפכו צאצאים של  $x$  בעץ DFS. ממשפט הסוגריים, לכל צומת  $w$  ב- $C$  או ב- $C'$  מתקיים:  $f[x] = f[C] > f(C')$  ולכן  $d[x] < d[w] < f[w] < f[x]$
2. אם  $d(C) > d(C')$ , אזי יהי  $y$  הצומת הראשון שהתגלה ב- $C'$  בזמן  $d[y]$  יש מסלול לבן מ- $y$  לכל צומת ב-  $C'$ . לכן, ממשפט המסלול הלבן כל הצמתים ב- $C'$  יהפכו לצאצאים של  $y$  בעץ DFS, וממפץ הסוגריים  $f[y] = f(C')$ . בזמן הגילוי של  $y$  כל הצמתים ב- $C$  לבנים. היות ויש קשת  $(u, v)$  מ- $C$  ל- $C'$ . מלמה 1 לא ייתכן שיש מסלול מ- $C'$  ל- $C$ , לכן לא ניתן להגיע מ- $y$  לאף צומת ב- $C$ . לכן, בזמן  $f[y]$  כל הצמתים ב- $C$  עדיין לבנים. מכאן נקבל כי לכל  $w \in C$   $f[w] > f[y]$ .

לכן  $f(C) > f(C')$

■

### מסקנה 3:

יהיו  $C$  ו- $C'$  רק"ה בגרף מכוון  $G = (V, E)$   
 נניח שיש קשת  $(u, v) \in E^T$ , כאשר  $u \in C$  ו- $v \in C'$   
 אזי בהרצה של DFS על  $G$  (בצעד 1 של SCC).  
 נקבל כי  $f(C) < f(C')$ .

### הוכחה:

היות ו- $(u, v) \in E^T$ , יש ב- $G$  קשת  $(v, u) \in E$  מלמה 2,  
 היות ויש קשת מ- $C'$  ל- $C$  ב- $G$ .  
 נקבל כי  $f(C') > f(C)$ .

■

### משפט 4:

האלגוריתם Strongly Connected Components מחשב נכון את הרק"ה בגרף מכוון  $G$ .

### הוכחה:

נוכיח באינדוקציה שכ"א מ- $x$  העצים הראשונים שנמצאו בהרצת DFS על  $G^T$  (בצעד 3 של SCC) הוא רק"ה.

### בסיס:

$k = 0$ , נכון באופן ריק.

### צעד האינדוקציה:

נניח שהטענה נכונה ל- $k$  העצים הראשונים ונוכיח לעץ ה- $(k+1)$  נניח כי השורש של העץ הינו צומת  $u$ ,

כאשר  $u$  שייך לרק"ה  $C$  ב- $G$ .

- מאופן התקדמות האלג' בלולאה המרכזית של צעד 3. מתקיים:

$$f[u] = f(C) > f(C')$$

לכל רק"ה  $C'$  ב- $G$  שעוד לא טופל (בצעד 3).

- מהנחת האינדוקציה, בזמן ש-DFS "מגלה" את  $u$  (בצעד 3) כל

הצמתים ב- $C$  לבנים ממשפט המסלול הלבן, כל הצמתים ב- $C$  יהפכו לצאצאים של  $u$  בעץ DFS.

- בנוסף ממסקנה 3. כל קשת שיוצאת מ- $C$  ב- $G^T$  מובילה לרק"ה שכבר ביקרנו.

- לכן הצאצאים של  $u$  בעץ DFS הם כל הצמתים ב- $C$  ורק הצמתים ב- $C$ .

■