הרצאה 6 אלגוריתמים

תזכורת: מסלולים קלים ביותר

<u>נתון:</u>

- גרף מכוון $G = (V, E)$
- ופונ' משקל: $W : E \to \mathbb{R}$
- צומת $s \in V$

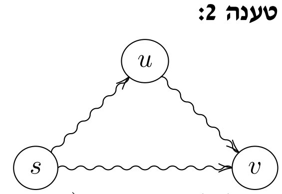
<u>מטרה:</u>
למצוא לכל $v \in V$ מסלול קל ביותר מ־s ל־v.
"אורך" נמדד ע"י סכום משקלי הקשתות שבמסלול.
מסמנים ב־$\delta(u,v)$ את אורך המסלול הקשל ביותר ב־G מ־u ל־v.

$$\delta(u,v) = \begin{cases} \infty & v\text{-non reachable from } u \\ -\infty & \text{there is "negative circle"} \\ & \text{reachable from u and} \\ & \text{v is reachable from the circle} \\ min\{w(p) : \text{p-path from } u \text{to } v\} & \text{otherwise} \end{cases}$$

טענה 1:

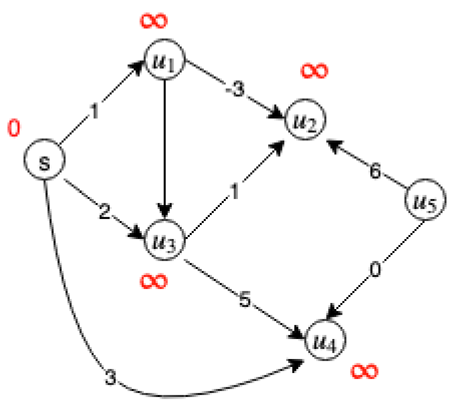
אם p מסלול קל ביותר מ־u ל־v, אז כל תת־מסלול שלו הוא קל ביותר.

טענה 2:



לכל קשת $(u \to v) \in E$ מתקיים:
$\delta(s,v) \leq \delta(s,u) + w(u \to v)$

הוכחה:



אם אין מסלול מ־s ל־u אז $\delta(s,u)=\infty$ וסיימנו.
אחרת, נסתכל על המסלול קל ביותר מ־s ל־u, ונשרשר לו את הקשת $(u \to v)$.
$\Leftarrow$ אחרת המסלול החדש הוא $\delta(s,u)+w(u \to v)$ ולכן אי־השוויון מתקיים.$\blacksquare$

השיטה הגנרית:

1. אתחול: $d(s) \leftarrow 0$, ולכל s $u \neq s$: $d(u) \leftarrow \infty$.
2. כל עוד קיימת קשת $(u \to v) \in E$ כך ש:
   $d(v) > d(u) + w(u \to v)$:
   $d(v) \leftarrow d(u) + w(u \to v)$.

משפט:

אם אין מעגלים שליליים בגרף, אז:

1. לכל צומת $v \in V$ ולכל שלב בריצת השיטה הגנרית : $d(v) \geq \delta(s,v)$
2. כשה השיטה הגנרית עוצרת, אז:
   $d(v) = \delta(s,v) \quad \forall v \in V$

הוכחה:

1. נוכיח באינדוקציה על הצעדים של השיטה הגנרית.

- בסיס:

באתחול $d(u)$ לכל $u \neq s$ שווה ל־∞ ועבור s מתקיים $\delta(s,s) \underbrace{=}_{\text{there are no negative circles in G}} d(s)=0$

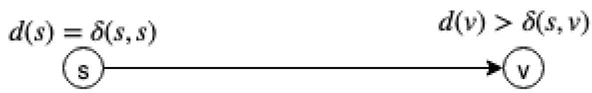
- צעד:

בהינתן קשת $(u \to v) \in E$ שהפרה את אי־שוויון המשולש ביחס לסימונים d,

ביצענו: $d(v) \leftarrow d(u) + w(u \to v)$.

$$\begin{aligned} d(v) &= d(u) + w(u \to v) \\ &\underbrace{\geq}_{\text{induction on d(u)}} \delta(s,u) + w(u \to v) \underbrace{\geq}_{\text{triangle inequality}} \delta(s,v) \end{aligned}$$

2. מ־א, מספיק להראות שהשיטה הגנרית עוצרת שלכל $v \in V$:
$d(v) \leq \delta(s,v)$



נניח בשלילה שקיים צומת v עבורו:

$$d(v) > \delta(s,v)$$

⇐$\delta(s,v)$ אינו יכול להיות ∞, ובגלל שאין מעגלים שליליים, $\delta(s,v)$ סופי.
⇐יהיה p מסלול קל ביותר כלשהו מ־s ל־v

$$p = v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_{k-1} \to v_k = v$$

עבור s: $d(s) = \delta(s,s)$ (כי אין מעגלים שליליי).
עבור v: $d(v) > \delta(s,v)$
ולא קיים אף צומת v_iבמסלול כך ש־$d(v_i) < \delta(s,v_i)$ (בגלל א).
⇐קיימת קשת ב־p $(v_i \to v_{i+1})$ כך ש:

$$\begin{cases} d(v_i) = \delta(s,v_i) \\ d(v_{i+1}) > \delta(s,v_{i+1}) \end{cases}$$

(וזו הקשת הראשונה שבה זה קורה).

$$\begin{aligned} d(v_{i+1}) &> \delta(s,v_{i+1}) \underbrace{=}_{\text{1.sub-path of lightest path is lightest.}} \delta(s,v_i) + w(v_i \to v_{i+1}) \\ &= d(v_i) + w(v_i \to v_{i+1}) \end{aligned}$$

⇐הקשת $(v_i \to v_{i+1})$ מפרה את אי־שוויון המשלול ביחס לסימונים d.
⇐השיטה הגנרית לא היתה צריכה לעצורה.
$\blacksquare$.

$$\delta(s, v_{i+1}) \underbrace{=}_{(1)} (\text{סכום משקלי הקשתות הריש של } \delta \text{ מ־} s \text{ ל־} v_{i+1})$$
$$= w(v_0 \to v_1) + w(v_1 \to v_2) + \cdots + w(v_{i-1} \to v_i) + w(v_i + v_{i+1})$$
$$= \text{סכום משקלי הקשתות ברישא של } p \text{ מ־} s \text{ ל־} v_i + w(v_i \to v_{i+1})$$
$$\underbrace{=}_{(1)} \delta(s, v_i) + w(v_i, v_{i+1})$$

שאלה:

כיצד ניתן לשחזר איזשהו מסלול קל ביותר ?
לכל צומת $v \in V$ מסמן ב־$\pi(v)$ את הצומת שגרם לעדכון האחרון של $d(v)$.

- אתחול: $\forall v \in V \ \pi(V) \leftarrow NULL$
- בעדכון: שהקשת $(u \to v)$ מבצעת עדכון ל־$d(v)$ נצבע: $\pi(v) \leftarrow u$

הגדרה:

<u>עץ מסלולים קלים ביותר</u> של G ו־s הוא תת־גרף $G' = (V', E')$ של G כך ש:

1. V' זה אוסף הצמתים הישיגיים מ־s.
2. G' הוא מכוון ששורשו s.
3. לכל $v \in V'$ המסלול היחיד ב־G' מ־s ל־v הוא מסלול קל ביותר מ־s ל־v ב־G.

טענה:

אם אין מעגלים שליליים, אז שהשיטה הגנרית עוצרת, נסתכל על הגרף הבא:

$$G' = (V', E')$$
$$V' = \{v : \pi(v) \neq NULL\} \cup \{s\}$$
$$E' = \{(\pi(v) \to v) : \pi(v) \neq NULL)\}$$

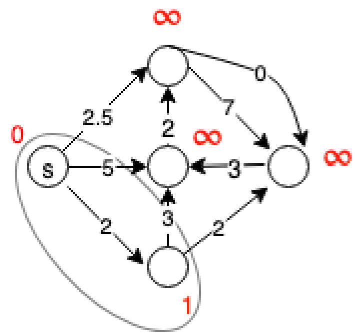
אז G' הוא עץ מסלולים קלים ביותר של G מ־s.

"הוכחה":

<u>שלבים להוכחה(לא נוכיח):</u>

- בכל שלב בריצה של השיטה הגנרית, G' חסר מעגלים מכוונים.
- בסיום הריצה, V' זה אוסף הצמתים הישיגים מ־s.
- בסיום הריצה, המסלול היחיד ב־G' מ־s ל־v הוא מסלול קל ביותר ב־G מ־s ל־v.

נתמקד במקרה שמשקלים הם אי־שליליים, כלומר $w(u \to v) \geq 0 \quad \forall (u \to v) \in E$.
דוגמה:



האלג' של Dijkestra (1959)

1. אתחול:
$d(s) = 0$, ולכל $u \neq s$ $d(u) \leq \infty$, $Q \leftarrow V$.

2. כל עוד $Q \neq \emptyset$:

   (א) יהי u הצומת בעל d הקטן ביותר ב־Q.

   (ב) לכל קשת $(u \to v) \in E$, אם $d(v) > d(u) + w(u \to v)$ אז:
   $d(v) \leftarrow d(u) + w(u \to v)$

   (ג) הוצא את u מ־Q.

זמן ריצה:

למשל, אם מממשים את Q בעזרת ערימת מינימום זמן הריצה הכולל: $O(|E| \log |V|)$

נכונות:

מנכונות השיטה הגנרית, מספיק שנראה שהאלג' של Dijkestra עוצר
וכל הקשתות $(u \to v) \in E$ מקיימות:

$$d(v) \leq d(u) + w(u \to v)$$

טענה 1:

נניח באיטרציה מסויימת u יצא מ־Q, ובאיטרציה העוקבת לה v יצא מ־Q. אז:

- $d(u)$ ברגע ההוצאת u מ־Q.
- $d(v)$ ברגע ההוצאת v מ־Q.

ומתקיים:

$$d(u) \le d(v)$$

הוכחה:

ברגע הוצאת u מ־Q מתקיים: $d(u) \le d(v)$ (מאופן בחירת הצומת שיוצא מ־Q).

- אם $d(v)$ לא התעדכן במהלך האיטרציה ש־u יצא מ־Q סיימנו.
- אחרת יש קשת $(u \to v) \in E$ וביצענו עדכון $d(v) \leftarrow d(u) + \underbrace{w(u \to v)}_{\ge 0}$ הטענה נובעת מאי־שליליות המשקלים.

.■

מסקנה 1:

טענה 1 נכונה גם אם v יצא אחרי u אבל לא בהכרח באיטרציה העוקבת.

מסקנה 2:

לאחר הוצאת v מ־Q, $d(v)$ לא מתעדכן.

הוכחה:

נניח בשלילה שקיים צומת v עבורו $d(v)$ מתעדכן אחרי ש־v יצא מ־Q.
נסתכל על הפעם הראשונה שזה קרה.
$\Leftarrow$ קיים צומת u, שכרגע יוצא מ־Q
וקשת $(u \to v) \in E$ כך ש־$d(v) > \underbrace{d(u)}_{\text{when we get it from Q}} + w(u \to v)$
(ואז ברגע הוצאת v מ־Q בגלל שזו הפעם <u>הראשונה</u>).
מאי־שליליות המשקים קיבלנו ש־$d(v)$ ברגע הוצאת v מ־Q גדול ממש מ־$d(u)$
ברגע הוצאת u מ־Q וזו <u>סתירה</u> למסקנה הראשונה.■