

הרצאה 7 אלגוריתמים

שאלה:

מה יהיה אלו יהיו משקלים שליליים בגרף?
האלגוריתם של Dijkstra יכול להכשל גם אם תהיה אפילו קשת אחת שלילת בגרף ואין מעגלים שליליים.

הרעיון:

האלגוריתם יתקדם בפאזות. בכל פאזה, נעבור על כל קשתות הגרף בסדר כלשהו, ונבדוק הפרה של אי-שוויון המשולש ביחס ל- d .

אלגוריתם Bellman Ford:

1. אתחול $d(s) \leftarrow 0$ ולכל $v \neq s$ $d(v) \leftarrow \infty$.

2. מבצעים $n - 1$ פעמים: $(|V| = n)^*$

(א) עוברים על כל הקשתות פעם אחת ולכל קשת $(u \rightarrow v) \in E$, אם $d(v) > d(u) + w(u \rightarrow v)$
אז $d(v) \leftarrow d(u) + w(u \rightarrow v)$

זמן ריצה: $O(|V| \cdot |E|)$

טענה:

אם קיים מסלול קל ביותר מ- s ל- v שמכיל k קשתות, אז בסיום הפאזה ה- k : $d(v) = \delta(s, v)$.

הערה:

נכונות האלגוריתם נובעת מהטענה ומהנכונות של השיטה הגנרית שאומרת שבכל שלב של ריצת השיטה הגנרית אין פספו כלפי מטה, כלומר $d(v) \geq \delta(s, v)$.

הוכחת הטענה:

נוכיח באינדוקציה על k .

• בסיס: $k = 0$

רק עבור s יש מסלול קל ביותר מ- s ל- s שמכיל אפס קשתות (כשה אין מעגלים שליליים) ולכן $d(s) = \delta(s, s) = 0$.

• צעד:

נניח ש v יש מסלול קל ביותר מ- s ל- v המכיל $k+1$ קשתות. נסמנו:

$$p = \underbrace{v_0}_{s} \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_k \rightarrow \underbrace{v_{k+1}}_v$$

\Leftarrow הרישא של p מ- s ל- v_k מסלול קל ביותר המכיל k קשתות.

\Leftarrow לפי הנ"א על v_k , בסיום הפאזה על v_k מובטח ש- $d(v_k) = \delta(s, v_k)$ במהלך הפאזה ה- $k+1$ בוחנים את הקשת $(v_k \rightarrow v_{k+1})$ ואז מובטח שבסיום הפאזה ה- $k+1$:

$$d(v_{k+1}) \leq \underbrace{d(v_k) + w(v_k \rightarrow v_{k+1})}_{\text{p-length}} = \delta(s, v_{k+1})$$

לפי התכונה של השיטה הגנרית, נקבל בהכרח ש- $d(v_{k+1}) \leq \delta(s, v_{k+1})$ בסיום הפאזה ה- $k+1$.

הגישה החמדנית

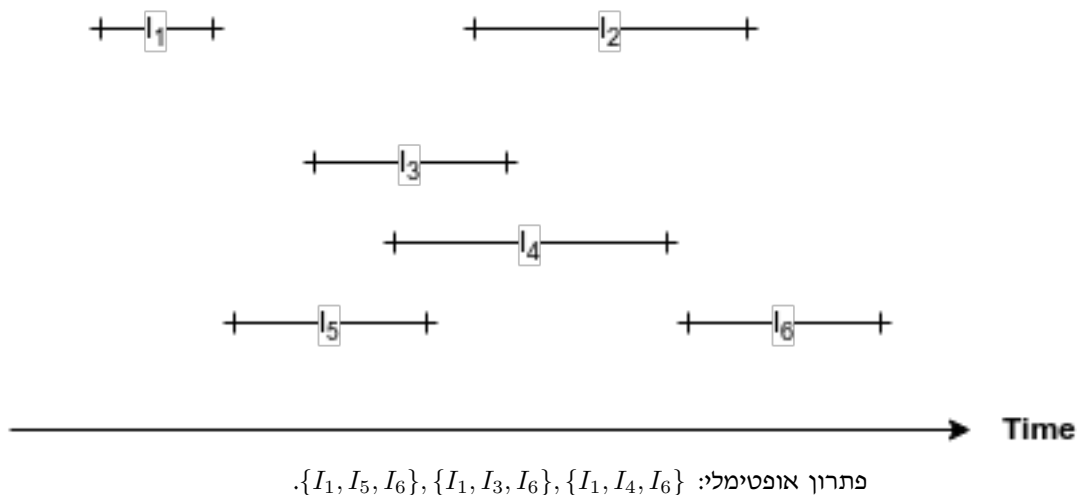
הרעיון:

הצגת גישה לפתרון בעיות בה האלגוריתם בוחר את האפשרות הטובה ביותר כרגע.

דוגמה:

נתונות n משימות, וכל משימה i מיוצגת ע"י זמן התחלה s_i וזמן סיום f_i . יש מכונה בודדת שיכולה להריץ את המשימות. המטרה היא לבחור אוסף משימות גדול ביותר כך שכל שתי משימות שנבחרו לא נחתכות.

לדוגמה:



- ניתן לנסח את הכיה ע"י גרפים. גרף אינטרוולים הוא גרף שבו כל צומת מייצג אינטרוול, יש קשת בין שני צמתים \Leftrightarrow האינטרוולים נחתכים. המטרה היא למצוא קבוצה בלתי-תלויה גדולה ביותר (תת-קבוצה של הצמתים כך שבין כל שתיים בתת-הקבוצה אין קשת).

האלגוריתם:

1. ממיינים את האינטרוולים לפי זמני סיום $X \leftarrow \emptyset, f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f_n$
2. עבור $j = 1$ עד n .
(א) אם I_j לא נחתך עם אף אינטרוול ב- X , בצע $X \leftarrow \{I_j\} \cup X$.

סיבוכיות: $O(n \log(n))$

טענה:

לכל $k = 0$ עד n , בסיום איטרציה k קיים פתרון אופטימלי X^* כך ש:
 $I_j \in X^* \Leftrightarrow I_j \in X \quad (\forall 1 \leq j \leq k)$

מסקנה:

אם נבחר $k = n$ נקבל שיש פתרון אופטימלי שזהה לפלט האלגוריתם.

הוכחה:

באינקוציה על- k .

- בסיס:

$k = 1$ נשים לב שתמיד $I_1 \in X^*$ (האלג' בוחר את I_1). נבחר X^* להיות פתרון אופטימלי כלשהוא. אם $I_1 \in X^*$ סיימנו. אחרת, $I_1 \notin X^*$ יהי $I_r \in X^*$ האינטרוול בעל זמן הסיום הקטן ביותר הנחתך עם I_1 (אם אין I_r כזה אזי $X^* \cup \{I_1\}$ פתרון חוקי וזו סתירה לאופטימליות של X^*). נטען ש- $X^* \setminus \{I_r\} \cup \{I_1\}$ פתרון חוקי (אם זה נכון סיימנו שכן פתרון זה גם הוא אופטימלי).

מפני ש- f_1 זמן הסיום הקטן ביותר של כל האינטרוולים אזי I_r הוא יחיד (כלומר אין עוד אינטרוולים ב- X^* הנחתך עם I_1 , אחרת X^* לא פתרון חוקי).
 $X^* \setminus \{I_r\} \cup \{I_1\} \Leftarrow$