אלגוריתמים הרצאה 9

תכנון דינאמי

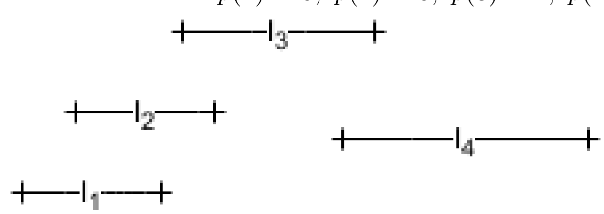
טכניקה המאפשרת לפרק בעיה באופן רקורסיבי לתתי-בעיות קטנות מאותו סוג.

דוגמה 1:

שיבוץ משימות ממושקלות.
נתון: n אנטרוולים, כאשר כל אינטרוול נתון ע״י התחלה s_i וזמן סיום f_i. לאינטרוול ה-i נתון רווח w_i.
מטרה: למצוא אוסף אינטרוולים S כך שכל שני אינטרוולים ב-S לא נחתכים שממקסם $\sum\limits_{j \in S} w_j$.
נזכר שמיינו את האינטרוולים: $f_1 \leq f_2 \leq \cdots \leq f_n$.
עבור אינטרוול I_j, נסמן ב-$p(j)$ את האינדקס הכי גדול כך ש-$p(j) \leq s_j$
(כלומר , אינטרוול $I_{p(j)}$ לא נחתך עם אינטרוול I_j).
אם לא קיים אינטרוול כזה, p_j יוגדר להיות 0.

דוגמה:

$p(1) = 0,\ p(2) = 0,\ p(3) = 1,\ p(4) = 2$



שאלה:

מה הן תתי הבעיות שנוצרו ?
תתי-הביות שיעניינו אותנו יהיו רישאות, כלומר לכל $0 \leq j \leq n$ הראישר ה-j תכיל $\{I_1, I_2, \ldots, I_j\}$

הגדרה:

נסמן ב-$A(j)$ את ערך הפתרון האופטימלי עבור תת-הבעיה ה-j.

שאלה:

האם יש קשר רקורסיבי בין $A(0), A(1), \dots, A(n)$?

$$A(j) = \begin{cases} 0 & j = 0 \\ max\{A(j-1), w_j + A(p_j) & 1 \leq j \leq n \end{cases}$$

טענה:

$A(0), \dots, A(n)$ מקיימות את הנוסחה הרקורסיבית לעיל.

הוכחה:

אם $j = 0$ אזי $A(0)$ הוא ערך הפתרון האופטימלי עבור קלט ריק, כלומר $A(0) = 0$, כפי שאכן מגדירה הנוסחה הרקורסיבית.
אחרת $1 \leq j \leq n$. נסמן ב-S_j^* פתרון אופטימלי כלשהו לתת-הבעיה $\{I_1, I_2, \dots I_j\}$.

- ⋆ אם $I_J \notin S_j^*$ אזי S_j^* פתרון אופטימלי לבעיה ה-$j-1$ (שכן אחרת S_j^* לא היה פתרון אופטימלי לתת-הבעיה ה-j).
  $\Leftarrow \sum_{i \in S_j^*} w_i = A(j-1)$ (מההגדרה)
  $\Leftarrow A(j) = A(j-1)$

האם יתכן כי $\sum_{i \in S_j^*} w_i < w_j + A(p(j))$?
<u>לא</u>, מפני שבמקרה זה היה פתרון עדיף מ-s_j ל-$\{I_1, I_2, \dots, I_j\}$.

- ⋆ אם $I_j \in S_j^*$ אזי $S_j^* \setminus \{I_j\}$ הוא פתרון אופטימלי לתת-הבעיה $p(j)$ (שכן אחרת S_j^* לא היה פתרון אפשרי עבור תת-הבעיה ה-j).
  $\Leftarrow \sum_{i \in S_j^*} w_i = w_j + A(p(j))$
  $\Leftarrow A_j = w_j + A(p(j))$

האם יתכן כי $A(j-1) > \underbrace{w_j + A(p(j))}_{A_J}$? <u>לא!</u>

$\Leftarrow$ $A(0), \dots, A(n)$ מקיימת את הנוסחה הרקורסיבית.

שאלה:

האם ניתן לחשב את $A(n)$ במהירות בעזרת הנוסחה הרקורסיבית?
<u>הרעיון:</u> בדומה לסדרת פיבונאצ'י, ניתן לשלם בזכרון ולחשב את $A(n)$ בזמן לינארי.

$A =$ (סדר חישוב $\rightarrow$)

0			...		
0	1	2	...	$n-1$	n

האלגוריתם:

1. חשב את $p(1),\dots,p(n)$
2. עבור $j-0$ עד n בצע:
   (א) חשב את $A(j)$ לפי הנוסחה הרקורסיבית.
3. החזר את $A(n)$

<u>(ללא המיון $f_1 \le \cdots \le f_n$ זמן הריצה הוא $O(n)$)</u>

דוגמה 2:

סדר ביצוע כפל מטריצות
<u>נתון:</u> תרגיל כפל מטריצות $A_1,\dots,A_n$ כאשר A_i במימדים $p_{i-1\times p_i}$.
<u>מטרה:</u> למצוא סדר לביצוע התרגיל הממזער את מספר כפלים האריתמטיים.
(הערה: כפל של $A \cdot B$ כשא A במימדים $p \times q$ ו-B במימדים $q \times r$ דורש pqr מכפלות).

דוגמה:

$$A_1(10\times 100), A_2(100\times 5), A_3(5\times 50)$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & A_1\cdot A_2\cdot A_3 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
(A_1\cdot A_2)\cdot A_3 \arrow[d, Rightarrow] & & A_1\cdot(A_2\cdot A_3) \arrow[d, Rightarrow] \\
10*100*5+10*5*50 \arrow[d, Rightarrow] & & 100*5*50+10*100*50 \arrow[d, Rightarrow] \\
=7500 & & =75000
\end{tikzcd}$$

שאלה:

כמה אפשרויות יש לביצוע תרגיל באורך n?
נסמן ב-$p(n)$ את מס' האפשרויות למקם סוגריים בתרגיל באורך n.

$$p(n) \triangleq \begin{cases} 1 & n=1 \\ \sum\limits_{k=1}^{n-1} p(k)\cdot p(k-1) & n\neq 1 \end{cases}$$

הפתרון הוא $p(n) = \underbrace{C_{n-1}}_{\text{Cathalan's number}}$

$$C_n = \frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n} = \Omega\left(\frac{4^n}{n^{3/2}}\right)$$

$\Leftarrow$ לא ניתן לעבור באופן יעיל על כל האפשרויות.
נגדיר תת-בעיה לכל תת-סדרה של התרגיל, כלומר לכל $1 \leq i \leq j \leq n$: $A_i, A_{i+1}, \ldots, A_j$

הגדרה

נסמן ב-$M(i,j)$ את המספר הכפלים האריתמטיים ברטון ביותר שצריך על מנת לפתור את $A_i \cdot A_{i+1} \cdots A_j$.

$$M\left(i,j\right) \triangleq \begin{cases} 0 & i=j \\ \underbrace{\min}_{i \leq k \leq j} \{ \underbrace{M(i,j)}_{\text{dimesnsions } p_{i-1} \times p_k} + \underbrace{M(k+1,j)}_{\text{dimesnsions} p_k \times p_j} + p_{i-1} \cdot p_k \cdot p_j \} & i<j \end{cases}$$

טענה

$M(i,j)$ מקיים את נוסחת הרקורסיה.

שאלה:

כיצד לחשב במהירות את נוסחת הרקורסיה ?

$M =$

	1	2	3	$\ldots$	$n-1$	n
1	0					(פלט)?
2		0				
3			0			
$\vdots$				$\ddots$		
$n-1$					0	
n						0

נשים לב שאם נייצג את M כמטריצה מתקיים:

- $\star$ תנאי העצירה נותן את ערכי האלכסון.
- $\star$ מעוניינים רק במשולש העליון של המטריצה.
- $\star$ לפי נוסחת הרקורסיה $M(i,j)$ תלוי בתאי המטריצה משמאלו ומתחתיו.

$\Leftarrow$
קיימים הרבה סדרים שבהם ניתן לחשב את איברי המטריצה M
כך שברגע שמחשבים את $M(i,j)$ כל התאים במטריצה שהוא תלוי בהם כבר חושבו.
בכל סדר חישוב שכזה, חישוב תא $M(i,j)$ לוקח זמן של $O(j-i)$.
$\Leftarrow$ במקרה הגרוע זה $O(n)$.
$\Leftarrow$ זמן הריצה הוא $O(n^3)$.