אלגוריתמים הרצאה 11

שאלה:

מתןמה רשת תקשורת (גרף מכוון) ונתון צומת שולח וצומת מקבל.
לכל קשת נתון הקצב בו ניתן לשלוח מידע עליה.

- ⋆ מהו הקצב הגדול ביותר בו ניתן לשלוח מהצומת השולח לצומת המקבל?
- ⋆ מה הניתוב שמשיג את הקצב הגדול ביותר?

זרימה

הגדרה: רשת זרימה היא רביעייה (G, s, t, c) כאשר:

- ⋆ $G = (V, E)$ גרף מכוון.
- ⋆ $s, t \in V$ שני צמתים בגרף (s נקרא מקור ו־t נקרא בור).
- ⋆ $c : E \to \mathbb{R}_+$ פונקציית קיבול על הקשתות.

הגדרה: בהנתן קשת זרימה (G, s, t, c), **פונקציית זרימה** היא $f : E \to \mathbb{R}_+$ שמקיימת:

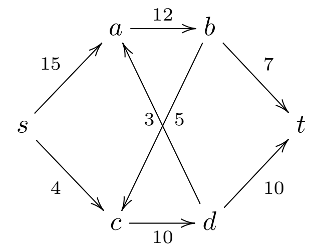
- ⋆ $\forall e \in E \; 0 \le f(e) \le c(e)$ (אילוצי קיבול).
- ⋆ $\forall u \in V \setminus \{s, t\} \; \sum\limits_{e \in \delta^+(u)} f(e) = \sum\limits_{e \in \delta^-(u)} f(e)$ (אילוצי שימור).

כאשר: $\delta^+(u)$ מהווה את אוסף הקשתות היוצאות מ-u.
$\delta^-(u)$ מהווה את אוסף הקשתות הנכנסות מ־u.
הגדרה: בהינתן רשת זרימה (G, s, t, c) ופונקציית זרימה f ברשת, **הערך** של f יסומן ויוגדר:

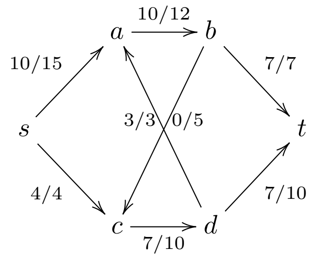
$$|f| \triangleq \sum_{e \in \delta^+(s)} f(e) - \sum_{e \in \delta^-(s)} f(e)$$

כלומר, "נטו" הזרימה היוצאת מ־s.
הבעיה:
בהינתן רשת זרימה (G, s, t, c), מהי פונקציית הזרימה f בעלת ערך $|f|$ הקטן ביותר?

דוגמה:



הפונקצייה המזרימה O על כל קשת היא חוקית ועותקים עבורה $|f| = 0$.



הפונקצייה (הערך השמאלי בגרף) היא פונקציית זרימה חוקית וערכה $|f| = 14$.

שאלה:

כיצד נוכיח שאין פונקציית ערימה שערכה גדול ממש מ־14 ?

הגדרה:

בהינתן רשת זרימה (G, s, t, c), <u>חתך $s - t$</u> הוא $S \subseteq V$ כך ש־$s \in S$ ו־$t \notin S$.
<u>קיבול</u> החתך מוגדר להיות סך הקיבולים של הקשתות הקדמיות בחתך, כלומר

$$c(S) = \sum_{\substack{e=(u\to v)\in E: \\ u\in S, v\notin S}} c(e)$$

טענה 1

בהינתן רשת זרימה (G, s, t, c), לכל פונקציית זרימה חוקית f ברשת ולכל חתך $s - t$ ו־S:

$$|f| < c(S)$$

טענת עזר:

בהינתן רשת זרימה (G, s, t, c), וחתך $s - t$ S ופונקציית זרימה f, מתקיים:

$$\sum_{\substack{e=(u\to v)\in E:\\ u\in S, v\notin S}} f(e) \;-\; \sum_{\substack{e=(u\to v)\in E:\\ u\notin S, v\in S}} f(e) \;=|f|$$

הוכחת טענת העזר:

$$|f| \underbrace{=}_{\text{def.}} \sum_{e\in\delta^+(s)} f(e) - \sum_{e\in\delta^-(s)} f(e) \underbrace{=}_{\text{current save.}} \sum_{u\in S}\left[\sum_{e\in\delta^+(s)} f(e) - \sum_{e\in\delta^-(s)} f(e)\right]$$
$$\underbrace{=}_{\text{sum order change}} \sum_{\substack{e=(u\to v)\in E:\\ u\in S, v\notin S}} f(e) \;-\; \sum_{\substack{e=(u\to v)\in E:\\ u\notin S, v\in S}} f(e) \;=|f|$$

הוכחת טענה 1:

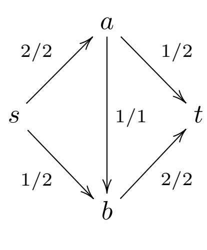
$$|f| \underbrace{=}_{\text{Aux. claim}} \sum_{\substack{e=(u\to v)\in E:\\ u\in S, v\notin S}} f(e) \;-\; \sum_{\substack{e=(u\to v)\in E:\\ u\notin S, v\in S}} f(e) \;\le\; \sum_{\substack{e=(u\to v)\in E:\\ u\in S, v\notin S}} c(e) \;-0=c(S)$$

מסקנה:

אילו מצאנו פונקציות זרימה וחתך $s-t$ S כך ש: $c(S)=|f|$, מובטח שיש לנו זרימה אופטימלית.

הרעיון באופן כללי:

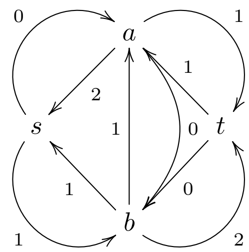
נתחיל מזרימה חוקית (למשל, זרימת האפס) וננסה לשפר אותה עד שנתקע.
צעד השיפור יעשה על ידי הזרימה על מסלול מ־s ל־t.
<u>דוגמה:</u>



הגדרה:

נתונה רשת זרימה (G,s,t,c) ופונקציית זרימה חוקית f ברשת.
השרת השיורית היא (G_f,s,t,c_p) כאשר:

* $G_f=(V,E_f)$ ★
* $E_f=E\bigcup\{\bar{e}|e\in E$ הקשת ההפוכה לקשת $\bar{e}\}$. ★
* $\forall e\in E,\, C_f(e)\triangleq c(e)-f(e)$. ★
* $C_f(\bar{e})=f(e)$ ★



הגדרת פעולת חיבור זרימות

נתונה רשת זרימה (G,s,t,c) ופונקציית זרימה f חוקית בה.
f' פונקציית זרימה חוקית ברשת השיורית (G_f,s,t,c_f).
נגדיר פונקציית זרימה שנסמן ב־$f+f'$ באופן הבא:

$$\forall e\in E,\ (f+f')(e)\triangleq f(e)+f'(e)-f'(\bar{e})$$

טענה:

בהינתן רשת זרימה (G,s,t,c), פונקציית זרימה f החוקית בה, ו־f' פונק' זרימה חוקית ב־(G_f,s,t,c_f), אזי: $f+f'$ זרימה חוקית ב־(G,s,t,c) וערכה: $|f+f'|=|f|+|f'|$

הגדרה:

מסלול שיפור הוא מסלול מ־s ל־t ברשת השיורית שכל הקיבולים השיוריים בו חיוביים ממש.

אלגוריתם Ford Fulkerson

1. מתחילים עם זרימה $0\equiv f(e)$ $\forall e\in E$
2. כל עוד ב־G_f יש מסלול שיפור p,

(א) מגדירים f' ברשת השיורית (G_f, s, t, c_f):

$$e \notin P \Rightarrow f'(e) = 0\,, e \in P \Rightarrow f'(e) = \underset{e \in P}{min}\{c_f(e)\}$$

(ב) $f \leftarrow f + f'$

3. הפלט הוא f.