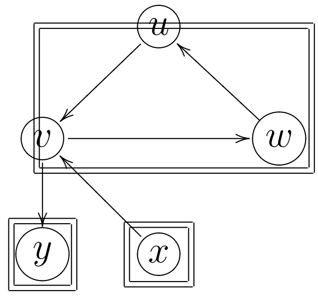
אלגוריתמים - 3

DFS ושימושיו



הגדרות:

רכיב קשיר היטב(רק"ה): בגרף מכוון $G=(V,E)$ הוא קב' מקסימלית
של צמתים $C\subseteq V$. כך שלכל זוג צמתים $u,v\in C$
יש מסלול מכוון מ-v ל-u $(v\to u)$
ומ-u ל-v $(u\to v)$.
צומת בודד יכול להיות רק"ה.

דוגמה:

- הגרף ההופכי של גרף מכוון $G=(V,E)$ **הוא** $G^T=(V,E^T)$
$E^T=\{(u,v):(v,u)\in E\}$

(דהיינו הופכים את כיווני הקשתות ב-G).
- נשים לב כי ב-G וב-G^T יש בדיוק אותם רק"ה. בפרטת אם u ו-v
ניתנים להגעה הדדית ב-G, אז גם ב-G^T.

אלגוריתם למציאת רכיבים קשירים היטב

Strongly Connected Comptonents (G)

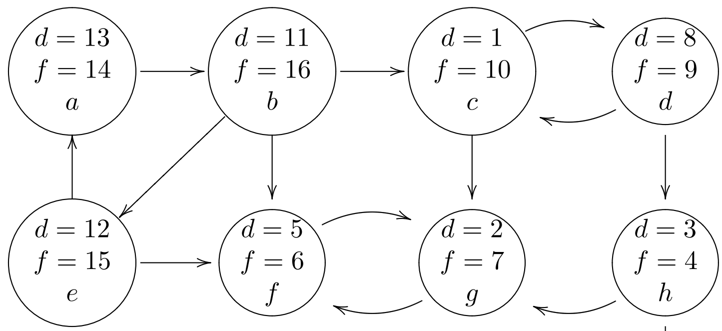
1.Call DFS to compute f[u] for all $u \in V$

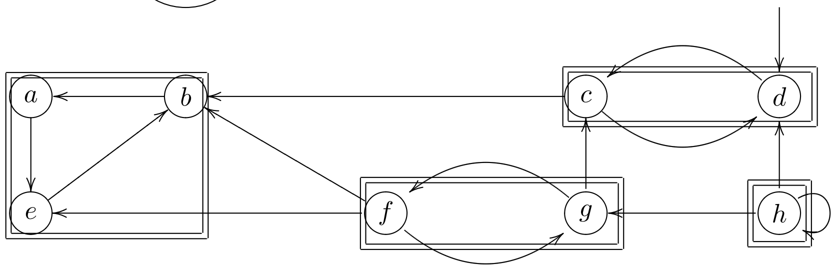
2.Compute G^T

3.Call DFS(G^T) but in the main loop consider the vertices
in decreasing order of $f[u]$(as computed in (.1

4.Output the vertices in each DFS tree generated in .3
as a seperate component.

דוגמת הרצה:



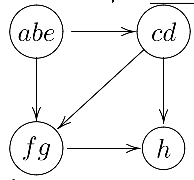


זמן הריצה של אלג' SCC.

זמן הריצה נקבע ע"י:

1. הרצה של DFS $\rightarrow \Theta(|V|+|E|) \Rightarrow$(סה"כ זמן ריצה)
2. יצירת G^T : $O(|E|)$.
3. סריקת הצמתים בלולאה המרכזית בצעד 3.
   בסדר יורד לפי $f[u]$.
   $\Leftarrow$ניתן לשמור את ערכי $f[u]$ בצעד 1. במחסנית.

לצורכך הוכחת הנכונות של SCC נגדיר את
גרף הרכיבים של G, $G^* = (V^*, E^*)$:
נניח כי הרק"ה ב-G הם $C_1, C_2, \ldots, C_k$.
אזי $V^* = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ והוא כולל צומת v_i לכל
רק"ה C_i ב-G.
תהיה קשת (v_i, v_j) ב-G^* אם G מכיל קשת מאיזשהו צומת
$x \in C_i$ ל- $y \in C_j$.
בדוגמה: גרף הרכיבים הוא:



למה 1: יהיו C ו-C' שני רק"ה בגרף מכוון $G = (V, E)$.
ויהיו $v, u \in C$ ו-$v', u' \in C'$ נניח שיש מסלול מכוון $u \to u'$ ב-G,
אזי לא ייתכן שיש מסלול מכוון מ-$v' \to v$.
(הוכחה בתרגול).
-
כאשר נשתמש ב- $d[u]$ ו- $f[u]$ בניתוח האלג',
נתייחס לערכים אלו כפי שנקבעו ל-u בקריאה הראשונה
ל-DFS (בצעד 1. של האלג').
-נרחיב את ההגדרות של זמן "גילוי" ו"נסיגה" לקבוצות
צמתים אם $U \subseteq V$ אזי $d(U) = \min_{u \in U}\{d[u]\}$
ו- $f(U) = \max_{u \in U}\{f[u]\}$
דהיינו $d(U)$ ו-$f(U)$ הם זמן הגילוי המוקדם
וזמן הנסיגה המאוחר בקבוצה U, בהתאמה.

למה 2:

יהיו C ו- C' שני רק"ה בגרף מכוון $G = (V, E)$.
נניח שיש קשת $(u, v) \in E$ כאשר $u \in C$
ו-$v \in C'$, אזי $f(C) > f(C')$.

הוכחה:

נטפל בשני מקרים כתלות ביחס
בין $d(C)$ ו- $d(C')$

1. $d(C) < d(C')$ ויהי x הצומת הראשון שהתגלה ב- C.
   אזי בזמן $d[x]$ כל הצמתים ב-C ו-C' לבנים.
   היות ו- $(u, v) \in E$ יש מסלול שמורכב רק מצמתים לבנים מ-x
   לכל צומת ב-C וגם מ-x לכל צומת ב-C'.
   ממשפט המסלול הלבן, כל הצמתים ב-C וב-C' יהפכו צאצאים של x בעץ DFS.
   ממשפט הסוגריים, לכל צומת w ב-C או ב-C' מתקיים:
   $d[x] < d[w] < f[w] < f[x]$ ולכן $f[x] = f[C] > f(C')$.

2. אם $d(C) > d(C')$, אזי יהי y הצומת הראשון שהתגלה ב-C' בזמן $d[y]$
יש מסלול לבן מ-y לכל צומת ב- C'. לכן, ממשפט המסלול הלבן כל הצמתים ב-C'
יהפכו לצאצאים של y בעץ DFS, וממפש הסוגריים $f[y] = f(C')$.
בזמן הגילוי של y כל הצמתים ב-C לבנים. היות ויש קשת (u, v) מ-C ל-C'.
מלמה 1 לא ייתכן שיש מסלול מ-C' ל-C, לכן לא ניתן להגיע מ-y לאף צומת ב-C.
לכן, בזמן $f[y]$ כל הצמתים ב-C עדיין לבנים.
מכאן נקבל כי לכל $w \in C$, $f[w] > f[y]$.
לכן $f(C) > f(C')$
■.

מסקנה 3:

יהיו C ו-C' רק"ה בגרף מכוון $G = (V, E)$
נניח שיש קשת $(u, v) \in E^T$, כאשר $u \in C$ ו- $v \in C'$
אזי בהרצה של DFS על G (בצעד 1 של SCC).
נקבל כי $f(C) < f(C')$.

הוכחה:

היות ו-$(u, v) \in E^T$, יש ב- G קשת $(v, u) \in E$ מלמה 2,
היות ויש קשת מ-C' ל-C ב-G.
נקבל כי $f(C) < f(C')$
■.

<u>משפט 4:</u>

האלגוריתם Strongly Connected Components מחשב נכון את הרק"ה בגרף מכוון G.

<u>הוכחה:</u>

נוכיח באינדוקציה שכ"א מ-x העצים הראשונים שנמצאו בהרצת DFS על G^T (בצעד 3. של SCC) הוא רק"ה.
<u>בסיס:</u>
$k = 0$, נכון באופן ריק.
<u>צעד האינדוקציה:</u>
נניח שהטענה נכונה ל-k העצים הראשונים ונוכיח לעץ ה-$(k+1)$ נניח כי השורש של העץ הינו צומת u,
כאשר u שייך לרק"ה C ב-G.
- מאופן התקדמות האלג' בלולאה המרכזית של צעד 3. מתקיים:
$f[u] = f(C) > f(C')$
לכל רק"ה C' ב-G שעוד לא טופל (בצעד 3).
-מהנחת האינדוקציה, בזמן ש-DFS "מגלה" את u (בצעד 3.)
כל הצמתים ב-C לבנים ממשפט המסלול הלבן,
כל הצמתים ב-C יהפכו לצאצאים של u בעץ DFS.
בנוסף ממסקנה 3. כל קשת שיוצאת מ-C ב-G^T מובילה לרק"ה שכבר ביקרנו.
לכן הצאצאים של u בעץ DFS הם <u>כל</u> הצמתים ב-C ורק הצמתים ב-C.
■.