

הרצאה 1

אלגוריתמים לחיפוש בגרפים

דוגמה:

| | | | |
|---------------------------------|-------------------------------|---|---|
| $s \rightarrow$ \downarrow | \rightarrow \downarrow | | |
| | | ■ | |
| ■ | | | |
| | | | T |

ההתקדמות בכל צעד: ימינה, שמאלה למטה

המטרה:

למצוא את המסלול הקצר ביותר מ-S ל-T.

חיפוש בגרף:

נתון גרף $G = (V, E)$ וצומת מקור $s \in V$.

- יש לגלות את כל הצמתים ב- G שהם ברי-הגעה מ- s .
- עבור צומת v שהוא ברי-הגעה מ- s יש למצוא את המרחק הקצר ביותר בקשתות מ- s ל- v .

האלגוריתם BFS (Breath First Search)

עובר על כל הקשתות של G ו"מגלה" את קבוצת הצמתים שניתנים להגעה מ- s , $R \subseteq V$.

פלט האלגוריתם:

- * עץ ששורשו s המכיל את כל הצמתים ב- R .
- * המרחק, דהיינו מספר הקשתות המינימלי מ- s לכל צומת ב- R .
- * ניתן להפעיל את BFS גם על גרפים מכוונים והן על גרפים לא-מכוונים.

פסאודו קוד ל-BFS:

Input: A graph $G = (V, E)$, $s \in V$

Output: For any $v \in V$, $d(v)$ is the distance from s to v .

For any $v \in V$, do:

$d(v) \leftarrow \infty$

$d(s) \leftarrow 0$

$i \leftarrow 0$

While there is neighbor v of u with $d(v) = \infty$ do:

$d(v) \leftarrow i + 1$

$i \leftarrow i + 1$

מימוש BFS באמצעות תור:

בתחילה התור Q ריק.

צומת v ש"התגלה" נכנס ל- Q .

צומת w יוצא מראש התור לקראת סריקת שכניו.

האב של צומת v בעץ החיפוש הוא הצומת שגרם ל- v להתגלות.

האלגוריתם רץ כל עוד Q לא ריק.

סימונים:

$d(v)$ - המרחק של v מ- s .

$\pi(v)$ - האב של v בעץ החיפוש.

$Adj(v)$ - קבוצת השכנים של v ב- G .

For any $u \in V \setminus \{s\}$ do: $\{d(u) \leftarrow \infty, \pi(u) \leftarrow NULL\}$

$d(s) \leftarrow 0$

$Q \leftarrow \emptyset$

Enqueue(Q, s)

While $Q \neq \emptyset$ do :

$u \leftarrow \text{dequeue}(Q)$

Foreach $v \in Adj(u)$ do:

if $d(v) = \infty$ then:

$d(v) \leftarrow d(u) + 1$

$\pi(v) \leftarrow u$

Enqueue(Q, v)

זמן הריצה של BFS:

אתחול: $O(|V|)$

לולאת ה-while:

עבור כל צומת v שיוצא מהתור עוברים על כל השכנים, דהיינו לכל היותר $O(|Adj(v)|)$ סה"כ נעבור על כל קשת בגרף לכל היותר פעמיים לכן זמן הריצה הוא $O(|E|)$.

הוכחת נכונות BFS:

* נראה כי BFS מוצא את המסלול הקצר מ- s לכל צומת v אשר בר הגעה מ- s .

* נסמן ב- $\delta(s, v)$ את המרחק הקצר ביותר (בקשתות) מ- s ל- v . אם אין מסלול מ- s ל- v אזי $\delta(s, v) = \infty$.

למה 1:

לכל קשת $(u, v) \in E$ מתקיים $\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1$

הוכחת למה 1:

1. אם u בר הגעה מ- s , אזי המסלול הקצר מ- s ל- v הוא לכל היותר המסלול הקצר מ- s ל- u + הקשת (u, v) .

2. אחרת $\delta(s, u) = \infty$ ולכן אי-השוויון מתקיים.

למה 2:

בסיום האלגוריתם הערך $d(v)$ המחושב ע"י BFS מקיים $d(v) \geq \delta(s, v)$ לכל $v \in V$.

הוכחה:

נוכיח באינדוקציה על מספר צעד ה-Enqueue, שאחרי צעד כזה יתקיים $d(v) \geq \delta(s, v)$ לכל $v \in V$.

בסיס: אחרי פעולת $\text{Enqueue}(Q, s)$ הטענה מתקיימת כי $d(s) = 0 = \delta(s, s)$ ולכל $v \in V \setminus \{s\}$ מתקיים $d(v) = \infty$.

צעד האינדוקציה: נניח שצומת v "התגלה" תכאשר סרקנו את השכנים של u . מכאן, v נכנס לתור. מהנחת האינדוקציה, $d(u) \geq \delta(s, u)$. לכן:

$$d(v) \underbrace{=}_{\text{Algorithm}} d(u) + 1 \underbrace{\geq}_{\text{Induction}} \delta(s, u) + 1 \underbrace{\geq}_{\text{Lema 1}} \delta(s, v)$$

היות ש- $d(v)$ לא ישתנה במהלך האלגוריתם, אי-השוויון שמצאנו לעיל מתקיים גם בסוף האלגוריתם.

למה 3:

נניח שבמהלך הביצוע של BFS התור Q מכיל את $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ אזי:

$$d(v_r) \leq d(v_1) + 1$$

$$\forall 1 \leq i \leq r, d(v_i) \leq d(v_{i+1})$$

מסקנה 4:

נניח ש- v_i נכנס ל- Q לפני ש- v_j נכנס לתור. אזי, $d(v_i) \leq d(v_j)$.

הוכחה:

נתבונן ב- v_i ו- v_j וסדרת הצמתים שהוכנסו ביניהם ל- Q : $\{v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, v_j\}$. כל זוג צמתים עוקבים בסדרה v_k, v_{k+1} מקיימים את אחד מהתנאים הבאים:

1. v_k, v_{k+1} יחד בתור ולכן לפי למה 3 $d(v_k) \leq d(v_{k+1})$.
2. v_{k+1} נכנס לתור Q אחרי ש- v_k יוצא ממנו אזי מפני שאין צומת ביניהם בסדרה נובע כי v_{k+1} גורם ל- v_k להתגלות ולכן $d(v_{k+1}) = d(v_k) + 1$.

\Leftarrow

$$d(v_i) \leq d(v_2) \leq \dots \leq d(v_l) \leq d(v_j)$$

■

משפט:

נניח שמריצים את BFS על G (מכוון/לא מכוון) עם צומת מקור s , אזי BFS מגלה כל צומת v שהוא בר-השגה מ- s ובסיום האלג' $d(v) = \delta(s, v)$. בנוסף, לכל צומת v בר-השגה מ- s אחד המסלולים הקצרים ל- v הוא מסלול קצר ביותר מ- s ל- $\pi(v)$, שאליו נוספת הקשת $(\pi(v), v)$.

הוכחה:

נניח בשלילה שקיים צומת v עבורו $d(v) \neq \delta(s, v)$ מלמה 2, מפני ש- $d(v) \geq \delta(s, v)$ אזי נקבל $d(v) > \delta(s, v)$. נקח את הצומת v עם $\delta(s, v)$ מינימלי שעבורו מתקיים אי-השוויון החזק.

נסתכל על המסלול הקצר ביותר מ- s ל- v . יהי u הצומת שמופיע מיד לפני v

במסלול זה. אזי, $\delta(s, v) = \delta(s, u) + 1$. מאופן הבחירה של v כצומת בעל $\delta(s, v)$ המינימלי שמקיים את אי־השוויון החזק, נקבל כי $d(v) = \delta(s, u) + 1$. מכאן:

$$d(v) > \delta(s, v) = \delta(s, u) + 1 = d(u) + 1 \quad (**)$$

נראה כי אי־השוויון $(**)$ לא יתכן. נסתכל על הצעד בו u יוצא מהתור נבחין ב 3 מקרים:

1. v עוד לא "התגלה", לכן מהאלגוריתם נקבל $d(v) = d(u) + 1 \Leftarrow$ סתירה ל- $(**)$.

2. v כבר לא היה בתור. לכן, v נכנס לתור לפני u (שכן התור FIFO) וממסקנה 4 $d(v) \leq d(u) \Leftarrow$ סתירה ל- $(**)$.

3. הצומת v עדיין בתור. לכן, מיד לפני ש- v יצא מהתור, u ראשון בתור ו- v "במקרה הגרוע" אחרון בתור. ולכן מלמה 3 $d(v) \leq d(u) + 1 \Leftarrow$ סתירה ל- $(**)$.

מכאן נקבל כי לכל צומת v שהוא בר הגעה מ- s מתקיים $d(v) = \delta(s, v)$. לסיום, נזכיר כי אם $\pi(v) = u$ אזי $\delta(s, v) = \delta(s, u) + 1 \Leftrightarrow d(v) = d(u) + 1$, לכן, ניתן לקבל מסלול קצר ביותר מ- s ל- v ע"י הוספת $(\pi(v), v)$ למסלול הקצר ביותר מ- s ל- $\pi(v)$.