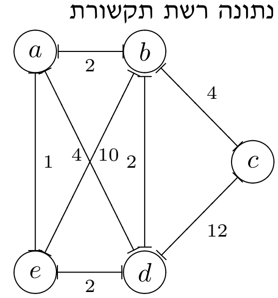
הרצאה 4 אלגוריתמים

בעיות אופטימיזציה ברשתות

דוגמה:

נתונה רשת תקשורת



- ⋆ על כל קשת מופיע מחיר השימוש בה
- ⋆ נניח כי הצומת a מעוניין להפיץ הודעה לכל הצמתים במחיר מינימלי

$\Leftarrow$ יש למצא תת-קב' קשתות ברשת שעליהן ההודעה תעבור כך שתגיע לכל הצמתים

- ⋆ נשים לב כי היות ונרצה להשיג מחיר מינימלי תת-הגרף שהתקבל מבחירת הקשתות יהיה חסר מעגלים

מכאן נקבל את בעיית עץ פורש מינימום:

- ⋆ נתון גרף קשיר לא מכוון $G=(V,E)$, שבו לכל קשת (v,u) יש משקל $w(v,u)$ יש למצוא
עץ פורש של הגרף שסה"כ משקל הקשתות בו מינימלי.

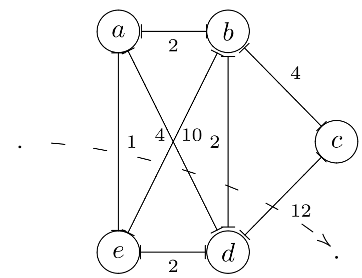
אלגוריתמים לבעיות עץ חיפוש מינימום('עפ"מ')

- ⋆ נראה תחילה אלג' גנרי שבונה עפ"מ קשת אחר קשת. על-ידי הוספת קשתות עם מקשל נמוך והשמטת קשתות עם משקל גבוה.
- ⋆ האלגוריתם יתקדם על-ידי צביעת קשתות. קשתות שיצבעו בכחול יופיעו בעץ, וקשתות שיצבעו בצבע אדום יושמטו.
- ⋆ האלג' יקיים בכל שלב את:
"שמורת הצבע" - קיים עפ"מ שמכיל את כל הקשתות הכחולות ואף אחת מהקשתות האדומות.

⋆ משמורת הצבע נובע כי כאשר כל הקשתות ב-G נצבעו.
הקשתות הכחולות יוצרות עפ"מ.

חתך(cut) בגרף $G=(V,E)$ הוא חלוקה של קב' הצמתים v לשתי תת-קב' x ו-$\overline{x}=v\backslash x$ קשת חוצה את החתך אם קצה אחד שלה ב-x והקצה האחר ב-$\overline{x}$.

⋆ לעיתים נתייחס לחתך כאל "קבוצת הקשתות החוצות".



אלגוריתם גנרי למציאת עפ"מ

הכלל הכחול: מצא חתך שאין בו קשת כחולה. צבע בכחול את
את הקשת הקלה ביותר שאינה צבועה.

הכלל האדום: מצא מעגל שאין בו קשת אדומה. צבע באדום
את הקשת הכבדה ביותר שאינה צבועה.

אלגוריתם חמדן: הפעל את הכללים לעיל עד שכל הקשתות צבועות.
הקשתות הכחולות הן עץ פורש מינימלי.

נוכיח את נכונות האלג' הגנרי

משפט 1: האלגוריתם הגנרי צובע את כל הקשתות של גרף קשיר G ומקיים את שמורת הצבע.

הוכחה: נראה תחילה כי האלג' מקיים את השמורה,
באינדוקציה על מס' האיטרציות
(דהיינו הפעלות של הכלל הכחול או האדום).

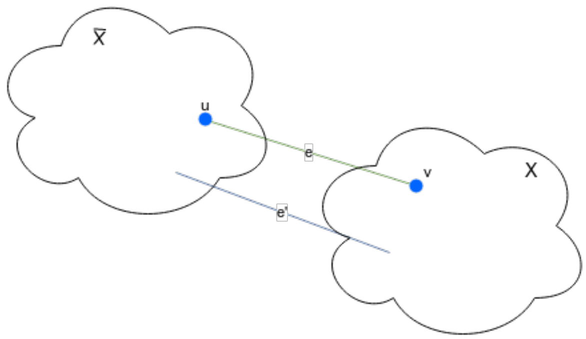
⋆ <u>בסיס:</u> בתחילה כל הקשתות אינן צבועות ולכן כל עפ"מ ל-G מקיים את השמורה (באופן ריק).

⋆ <u>צעד האינדוקצייה:</u> נטפל לחוד בשני מקרים:

1. נניח כי השמורה מתקיימת לפני הפעלה של הכלל הכחול.
תהיי e קשת שנצבעת כעת בכחול, ויהיה T עפ"מ שמקיים את השמורה <u>לפני</u> שהקשת e נצבעה.

(א) אם $e\in T$ אזי T מקיים את השמורה אחריי שהקשת e נצבעה (סיימנו).

(ב) אם $e \notin T$ אזי נסתכל על החתך $x, \overline{x}$ שעליו הפעלנו את הכלל הכחול.
יש מסלול ב-T שמחבר את הצמתים u, v בקצוות של e.



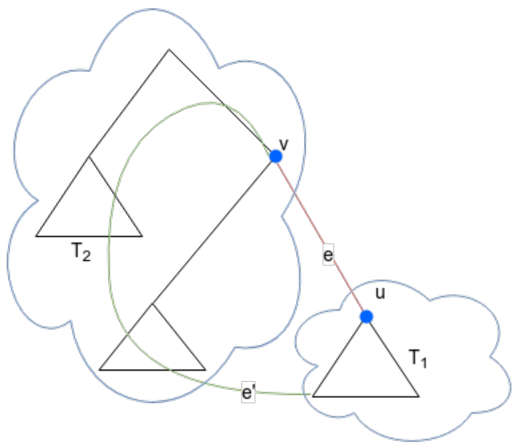
- היות והקשת e חוצה את החתך, קיימת על המסלול הנ"ל קשת אחרת e', שחוצה את החתך ו-$e' \in T$.
- הקשת e' לבטח לא צבועה בכחול (וגם אינה צבועה באדום מהנחת האינדוקציה).
- בנוסף $w(e') \geq w(e)$
- $\Leftarrow$ ניתן להשמיט את e' מ-T ולהוסיף במקומה את e.

נשים לב , כי אם המסלול היחדי בין שני צמתי ב-T עבר דרך e', המסלול יעבור כעת דרך e.
בנוסף, T נשאר עפ"מ, כי המשקל הכולל לא יכול לעלות.

  – אם נצבע כעת את e בכחול, נקבל כי השמורה מתקיימת כבור העץ T (החדש).

2. נניח כי השמורה מתקיימת לפני הפעלה של הכלל האדום.
תהי e קשת שנצבעת כעת באדום, והי T עפ"מ שמקיים את השמורה לפני שהקשת e נצבעת.

- אם $e \in T$ אזי T מקיים את השמורה גם אחרי שהקשת e נצבעת.
- נניח כי $e \in T$ אזי השמטת e מ- T מחלקת את T לשני עצים וגם מגדירה חלוקה של הצמתים ב-G



-

⋆ לקשת e יש קצה אחד ב-T_1 וקצה אחר ב-T_2, נסמנם ב-u ו-v בהצאמה המעגל שעליו שפעלנו את הכלל האדום מכיל
מסלול נוסף מ-u ל-v על המעגל יש קשת e' שקצה אחד שלה ב-T_1 והקצה האחר ב-T_2.

- מהשמורה נובע כי e' לא כחולה (כי $e' \notin T$), ומהכלל האדום e' לא צבוע באדום.
- בסוף, $w(e') \leq w(e)$.

⋆ $\Leftarrow$ הוספת הקשת e' לעץ T והשמטת הקשת e יוצרת עץ חדש מקיים את השמורה אחרי שהקשת e נצבעת
באדום. בנוסף לא הגדלנו את משקל העץ, לכן T (החדש) הינו עפ"מ.

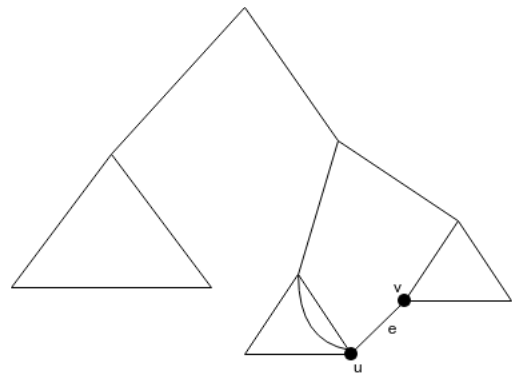
חלק שני של ההוכחה:

נראה כעת כי האלג, הגנרי יצבע את כל הקשתות בגרף. נניח בשלילה כי קיימת קשת e לא צבועה, אך לא ניתן
להפעיל אף אחד מהכללים.

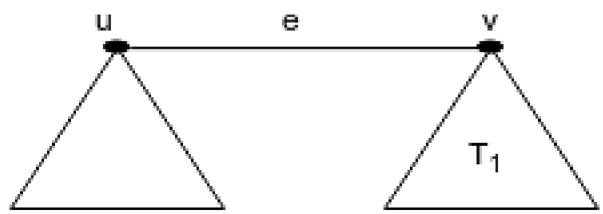
⋆ נשים לב כי מהכלל הכחול, הקשתות הכחולות יוצרות יער של עצים כחולים.

נבחין בין שני מקרים:

1. שני הקצוות של e באותו עץ כחול, אז נקבל:
כלומר, מצאנו ב-G מעגל שאין בו קשתות אדומות
לכן ניתן להפעיל על e את הכלל האדום.



2. אם הקצוות של e בעצים כחולים שונים, נסמן ב-X את אוסף הצמתים ב-T_2
וב-$\overline{X}$ את שאר הצמתים בגרף. קיבלנו חתך שאין בו קשתות כחולות
$\Leftarrow$ ניתן להפעיל את הכלל הכחול על e.



מכאן נקבל שכל עוד יש ב-G קשת לא צבועה מובטח שניתן להפעיל את אחד הכללים, לכן האלג' הגנרי צובע את כל הקשתות.

אלגוריתמים קלאסיים למציאת עפ"מ

אלגוריתם Prim: נפעיל את הכלל הכחול על החתך שמוגדר ע"י העץ שהולך ונבנה, כלומר בין צמתי העץ ושאר צמתי הגרף.

1.Init: All the edges are non-colored, $T := \{r\}$
while $T \neq V$ do:
  $e = (u, v)$ minimal edge in the cut $(T, V \setminus T) : u \in T$
  $e \leftarrow$ Blue
  $T := T \cup \{v\}$

זמן הריצה של Prim:

<u>מימוש ע"י מערכים:</u> יהיה v צומת שגובל בעץ כחול T. דהיינו, יש קשת (v, u) כך ש-$u \in T$.

$\star$ עבור כל צומת v שגובל ב-T נגדיר קשת בצבע <u>תכלת</u>.
זו היא הקשת "הקלה" ביותר מבין הקשתות שמחברות את v ל-T

(הקשתות בצבע תכלת "מועמדות להיות כחולות).
כאשר נפעיל את הכלל הכחול נבחר קשת בצבע תכלת ונהפוך אותה לכחולה.

- ⋆ נניח כי הצומת v נוסף לעץ T. נסתכל על כל הקשתות (שאינן צבועות) (v,x) כך ש-$x \notin T$. אם אין ל-x קשת תכלת, נצבע את (v,x) בתכלת. אחרת, קיימת ל-x קשת תכלת ונסמנה (x,y) $(y \in T)$ ו- $w(v,x) < w(x,y)$, אזי נהפוך את (v,x) לתכלת במקום הקשת (x,y).

סיבוכיות:
בכל איטרציה של הכלל הכחול הסיבוכיות היא $O(|V|)$ וכיוון שנעשה $|V|-1$ איטרציות נקבל $O(|V^2|)$ האלגוריתם יתחזק מערך בגודל $|V|$ של קשתות בצבע תכלת.