

הרצאה 2

10 באפריל 2019

אלגוריתם חיפוש לעומק

דוגמה:

Start ↓	⊙	→	
↓→	→	↑ ↓	⊙
	⊙	→	↓
⊙		⊙	

רובוט סורק אזור לצורך גילוי מוקשים, ההתקדמות בכל צעד: ימינה שמאלה למטה, למעלה.

אלגוריתם DFS (Depth First Search)

מנסה להתקדם כמה שיותר לעומק הגרף.
כאשר נבקש בצומת v , אם יש קשת (u, v) לצומת u שעוד לא "התגלה", נחצה את הקשת ונמשיך את החיפוש מהצומת u .
המטרה: יש לגלות את כל הצמתים בגרף.

DFS על גרף מכוון:

קלט: גרף מכוון $G = (V, E)$, צומת s .
פלט: לכל $v \in V$, $d[v]$ זמן הגילוי של v .
סימונים:

- $d[v]$ זמן גילוי של v .
- $\pi[v]$ הצומת שגרם ל- v להתגלות.

DFS:

```

1. For all  $v \in V$   $d[v] \leftarrow 0, \pi[v] \leftarrow null$ 
   mark all edges "unused"
    $i \leftarrow 0, v \leftarrow s$ 
2.  $i \leftarrow i + 1$   $d[v] \leftarrow i$ 
3. While there are unused out-edges from  $v$ ,
   choose unused edges  $(v, u)$ , mark  $(v, u)$  as used
   if  $d[u] = 0$ :  $\{\pi[u] \leftarrow v, v \leftarrow u, i \leftarrow i + 1, d[v] \leftarrow i\}$ 
4. If  $\pi[v] \neq null$  then  $v \leftarrow \pi[v]$  and go to (3)
   else if there is  $u \in V$  with  $d[u] = 0$  then
    $v \leftarrow u$  and go to (2)
5. stop

```

- נשים לב כי בהרצות שונות של SFD נוכל לקבל פלטים שונים, אך הכולן נקבל "יער" שבו כל צומת מופיע מאיזשהו עץ מכוון.
- בנוסף, SFD לא בהכרח מוצא מרחקים קצרים.
- בסיום הרצת SFD נקבל predecessor subgraph. זהו תת-גרף שבו לכל צומת v מופיע קשת $(v, \pi(v))$ כפי שנמצא ע"י האלגוריתם, סימון: G_π .

```

For each  $u \in V$  do  $\{\text{color}[u] \leftarrow \text{white}, \pi[u] \leftarrow null\}$ 
For each  $u \in V$  do
  if  $\text{color}[u] = \text{white}$  then DFS-VISIT( $u$ )
DFS-VISIT( $u$ ):
   $\text{color}[u] \leftarrow \text{gray}$ 
   $i \leftarrow i + 1$ 
   $d[u] \leftarrow i$ 
  For each  $v \in \text{Adj}[u]$  do
    if  $\text{color}[v] = \text{white}$  then  $\{\pi[v] \leftarrow u, \text{DFS-VISIT}(v)\}$ 
   $i \leftarrow i + 1$ 
   $f[u] \leftarrow i$ 

```

$\{white, gray\}$ - $\text{color}[u]$
 $f[u]$ - זמן היציאה האחרון מ- u .
 $\text{Adj}[u]$ - אוסף השכנים של u .

זמן הריצה של SFD :

- לולאת האתחוד: $\theta(|V|)$.
- נסמן ב- $T(\text{DFS-VISIT})$ את מספר הפעולות המבוצעות בקריאה ל-DFS-VISIT עבור הצומת.
נשים לב כי DFS-VISIT נקראת בדיוק פעם אחת עבור v כאשר v "לבן", ומיד בכניסה לפרוצדוקרה v הופך ל-"אפור". בנוסף, מספר הפעולות בלולאת ה-"For" של DFS-VISIT הוא לינארי במספר השכנים של v . לכן סיבוכיות הקריאות ל-DFS-VISIT:

$$\sum_{v \in V} T(\text{DFS-VISIT}) = \sum_{v \in V} \theta(|\text{Adj}[v]|) = \theta(|E|)$$

\Leftarrow סה"כ זמן הריצה של DFS: $\Theta(|E| + |V|)$.

תכונות של DFS:

1. התכונה הבסיסית: G_π הוא יער, שכן המבנה של עצי DFS מקשף את הקריאות הרקורסיביות ל-DFS-VISIT.
2. v הוא צאצא של u בעץ DFS אם v התגלה כאשר u היה אפור ולפני שנקבע ערף ל- $f[u]$.
3. תכונת הסוגריים: נייצג את הגילוי של צומת u ע"י סוגר שמאלי $'(u'$ ואת סיום הטיפול בו ע"י $'(u)$. אזי, ההסטוריה של "גילוי" ו"סיום הטיפול" מגדירה ביטוי שבו הסוגריים מקוננים היטב.

משפט 1 (הסוגריים):

בכל חיפוש לעומק של גרף מכוון/לא-מכוון G , לכל שני צמתים u ו- v מתקיים בדיוק אחד מהתנאים:

1. האנטרוולים $[d[u], f[u]]$ ו- $[d[v], f[v]]$ זרים לחלוטית ואין קשר של אב-קדמון/צאצא בין הצמתים.
2. האנטרוול $[d[u], f[u]]$ מוכל ממש בתוך $[d[v], f[v]]$ ו- u צאצא של v בעץ DFS.
3. $[d[v], f[v]]$ מוכל ממש ב- $[d[u], f[u]]$ ו- v צאצא של u בעץ DFS.
4. תכונה נוספת של צאצאים ביער במשפט הבא.

משפט 2 (המסלול הלבן):

ביער DFS של גרף (מכוון/לא-מכוון) צומת v הוא צאצא של צומת u אם ורק אם בזמן $d[v]$, הזמן בו u התגלה, ניתן להגיע ממנו ל- v ע"י מסלול המורכב כולו מצמתים לבנים.

הוכחה:

\Leftarrow

נניח ש- v צאצא של u . יהיה w צומת על המסלול בין u ו- v בעץ DFS כך ש- w צאצא של u . ממשפט 1, $d[u] < d[w]$, לכן w היה לבן בזמן $d[u]$.

\Rightarrow

נניח בשלילה שיש מסלול לבן מ- u ל- v בזמן $d[u]$, אבל v לא נהיה צאצא של u בעץ DFS. נניח ש- v הוא הצומת שראשון על המסלול הלבן שאנינו צאצא של u . יהיה w הצומת לפני v על המסלול הלבן כך ש- w צאצא של u (או $w = u$). אזי ממשפט 1 $f[w] \leq f[u]$. נשים לב כי v מוכרח להתגלות אחרי u , אבל לפני שנצא בפעם האחרונה מ- w דהיינו:

$$d[u] \quad \underbrace{\leq}_{\text{at } d[u] \text{ there is a white path to } v} \quad d[v] \quad \underbrace{\leq}_{\text{we won't finish with } w \text{ before we get to } v} \quad f[u]$$

ממשפט 1 נקבל כי $[d[v], f[v]]$ חייב להיות מוכל ממש ב- $[d[u], f[u]]$ ולכן v יהיה צאצא של u בעץ DFS- סתירה. ■