הרצאה 5

27 באפריל 2019

אלגוריתם Prim המשך:

תזכורת - האלגוריתם:

$1.T \leftarrow \emptyset,\ S \leftarrow \{s\}$

$2.\textbf{while} S \neq V :$

$\quad 2.1\ e=(u,v)$ **e is the lightest edge crossing** $(S,\overline{S})$ **assuming** $u \in S, v \notin S$

$\quad 2.2\ T \leftarrow T \cup \{e\}, \quad S \leftarrow S \cup \{v\}$

$3.\textbf{Return}\ T$

כיצד נממש את האלגוריתם Prim?

נשמור את צמתי S בערימת מינימום. הערך והמפתח של צומת v בערימה יהיה משקל הקשת הקלה ביותר שנוגעת בו ומחברת אותו ל-S (אם לא קיימת קשת כזו ערך המפתח יהיה ∞).

אתחול:

המפתח של S יהיה O.

המפתח של כל צומת אחר יהיה ∞.

צעד:

ברגע שמוציאים את צומת u מהערימה, מעדכנים את המפתחות של השכנים שלו שעדיין בערימה.

סיבוכיות:

$O(|E \log |V|)$

האלגוריתם של Kruskal:

1. מיין את הקשתות: $w(e_1) \leq w(e_2) \leq \cdots \leq w(e_m)$
   $T \leftarrow \emptyset$

2. מ-$i=1$ עד m:
   אם $T \cup \{e_i\}$ לא מכיל מעגלים אזי $T \leftarrow T \cup \{e_i\}$.

3. החזר את T.

משפט:

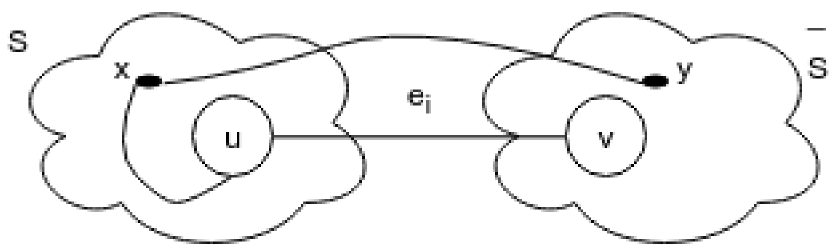
האלגוריתם של Kruskal מחזיר עץ פורש מינימום.

הוכחה:

נראה שהאלגוריתם של Kruskal הוא מימוש מסוים של השיטה הכללית. <u>כלומר</u> אם נצבע בכחול כל קשת שהאלגוריתם מוסיף ל־T ונצבע באדום כל קשת שהאלגוריתם לא מוסיף ל־T, נקבל הפעלה חוקית של הכללים.
ממחלק לשני מקרים:

1. ברגע שהאלגוריתם בוחן את $T \cup \{e_i\}$ מתקיים: $T \cup \{e_i\}$ מכיל מעגל C. נשים לב שבמעגל C כל הקשתות שייכות ל־T (פרט ל־e_i), כלומר כולן צבועות בכחול.
לפי הכלל האדום, ניתן לצבוע באדום את הקשת הכבדה ביותר ב־C מבין הקשתות הלא־צבועות. e_i היא הקשת היחידה ב־C שאינה צבועה ולכן צביעתה באדום היא הפעלה חוקים של הכלל האדום.

2. ברגע שהאלגוריתם בוחן את הקשת e_i מתקיים: ב־$T \cup \{e_i\}$ לא נסגרת מעגל



נתבונן בתחום: $S = \{x | \text{there is a path from } x \text{ to } u \text{ in } T\}$

(א) $u \in S$ (מההגדרה).

(ב) $v \notin S$ נראה זאת: נניח השלילה כי $v \in S$
$\Leftarrow$ יש ב־T מסלול (כחול) בין u ו־v (הגדרת S)
$\Leftarrow$ $T \cup \{e_i\}$ מכיל מעגל וזו סתירה.

(ג) למה אין קשת כחולה שחוצה את S?
נניח בשילה שיש קשת כחולה (x, y) כך שמתקיים $x \in S, y \notin S$
$x \in S$ $\Leftarrow$ יש מסלול כחול בין u ו־x. נשרשר למסלול זה את הקשת (x, y) וקבלנו מסלול כחול בין u ו־y וזו סתירה לכך ש־$y \notin S$.
<u>שאלה:</u> מדוע אין אף קשת e שחוצה את S, אינה צבועה וגם $w(e) < w(e_i)$?
אם זה קורה, eהייתה צריכה להיצבע באיטרציה קודמת וזו סתירה.
$\Leftarrow$ זו הפעלה חוקית של הכלל הכחול. ■

כיצד ניתן לממש את האלגוריתם ?

הרעיון: הכל איטרציה נרצה לשמור את רכיבי הקשירות של (V, T).
נשתמש ב־union find.
הפעולות שצריך בכל איטרציה:

1. לבדוק האם שני רכיבי קשירות באותה קבוצה.

2. אולי לאחד שני רכיבי קשירות.

⇐ סה"כ סיבוכיות: $O(|E|\log|V|)$.

מסלולים קלים ביותר

נתון:

גרף מכוון $G=(V,E)$, פונקציית משקל $W:E\to\mathbb{R}$

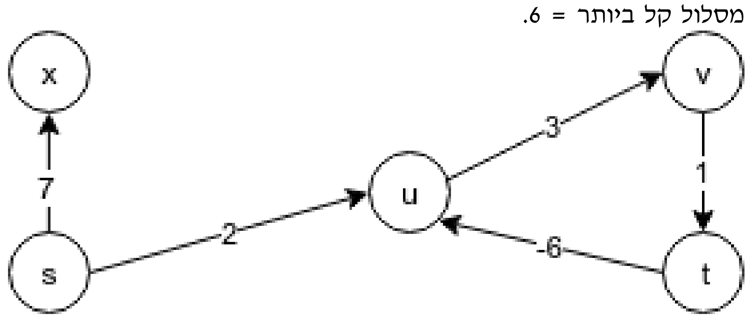
<u>משקל</u> של מסלול p מוגדר להיות סך משקלי הקשתות ב־p: $[w(p)\triangleq\sum\limits_{e\in p}w(e)]$

מטרה:

בהינתן שני צמתים s ו־t, מהו המסלול <u>הקל ביותר</u> מ־s ל־t?

דוגמה:

מסלול קל ביותר = 6.



- אם יש מעגל שלילי בגרף (מעגל שסכום משקלי הקשתות בו קטן ממש מאפס, אזי מרחקים קלים ביותר לא בהכרח מוגדרים).
- <u>הערה:</u> המקרה ש־ $w(e)=1\qquad\forall e\in E$ נפתר ע"י BFS.

הבחנה:

אם p מסלול קל ביותר מ־u ל־v, כל תת־מסלול של p גם הוא קל ביותר.

הוכחה:

נסתכל על p:

$$p:\ u=u_0\xrightarrow{e_1}u_1\xrightarrow{e_2}u_2\to\cdots\to u_{k-1}\to u_k=v$$

נתבונן בתת־המסלול מ־u_i ל־$u_j$$(i<j)$.

מתקיים: $u\xrightarrow{p'}u_i\xrightarrow{p_{ij}}u_j\xrightarrow{p''}v$

$w(p)=w(p')+w(p_{ij})+w(p'')$

נניח בשלילה ש־p_{ij}אינו קל ביותר.

⇐ יש מסלול q מ־u_i ל־u_j כך ש־$w(q)<w(p_{ij})$

נבנה מסלול חדש מ־u ל־v באופן הבא: $u\xrightarrow{p'}u_i\xrightarrow{q}u_j\xrightarrow{p''}v$

שאורכו: $w(p)=w(p')+w(q)+w(p'')$

וזו סתירה ■

נסמן ב־ $\delta(u,v)$ את אורך המסלול הקל ביותר מ־u ל־v:

$$\delta(u,v) = \begin{cases} \infty & v \text{ is not reachable from } u \\ \\ -\infty & \text{"negative" circle reachable from } u \\ & \text{and v reachable from the circle} \\ \\ \min\{w(p) : p\text{=path from } u \text{ to } v\} & \text{otherwise} \end{cases}$$