הרצאה 7 אלגוריתמים

שאלה:

מה יהיה אלו יהיו משקלים שליליים בגרף?
האלגוריתם של Dijkstra יכול להכשל גם אם תהיה אפילו קשת אחת שלילת בגרף ואין מעגלים שליליים.

הרעיון:

האלגוריתם יתקדם בפאזות. בכל פאזה, נעבור על כל קשתות הגרף בסדר כלשהו, ונבדוק הפרה של אי-שוויון המשולש ביחס ל-d.

אלגוריתם Bellman Ford:

1. אתחול $d(s) \leftarrow 0$ ולכל $v \neq s$ $\quad d(v) \leftarrow \infty$.
2. מבצעים $*n-1$ פעמים: $(|V|=n)^*$

(א) עוברים על כל הקשתות פעם אחת ולכל קשת $(u \to v) \in E$, אם $d(v) > d(u) + w(u \to v)$
אז $d(v) \leftarrow d(u) + w(u \to v)$

זמן ריצה: $O(|V| \cdot |E|)$

טענה:

אם קיים מסלול קל ביותר מ-s ל-v שמכיל k קשתות, אז בסיום הפאזה ה-k: $d(v) = \delta(s,v)$.

הערה:

נכונות האלגוריתם נובעת מהטענה ומהנכונות של השיטה הגנרית שאומרת שבכל שלב של ריצת השיטה הגנרית אין פספו כלפי מטה, כלומר $d(v) \geq \delta(s,v)$.

הוכחת הטענה:

נוכיח באינדוקציה על k.

* בסיס: $k=0$
רק עבור s יש מסלול קל ביותר מ-s ל-s שמכיל אפס קשתות (כשה אין מעגלים שליליים) ולכן $d(s) = \delta(s,s) = 0$.

* צעד:
נניח ש ל-v יש מסלול קל ביותר מ-s ל-v המכיל $k+1$ קשתות. נסמנו:

$$p = \underbrace{v_0}_{s} \to v_1 \to \ldots \to v_k \to \underbrace{v_{k+1}}_{v}$$

⇐ הרישא של p מ-s ל-v_k מסלול קל ביותר המכיל k קשתות.
⇐ לפי הנ"א על v_k, בסיום הפאזה על v_Kמובטח ש-$d(v_k) = \delta(s, v_k)$
במהלך הפאזה ה-$k+1$ בוחנים את הקשת $(v_k \to v_{k+1})$ ואז מובטח שבסיום הפאזה ה-$k+1$:

$$d(v_{k+1}) \le \underbrace{d(v_k) + w(v_k \to v_{k+1})}_{\text{p-length}} = \delta(s, v_{k+1})$$

לפי התכונה של השיטה הגנרית, נקבל בהכרח ש- $d(v_{k+1}) \le \delta(s, v_{k+1})$ בסיום הפאזה ה-$k+1$.

הגישה החמדנית

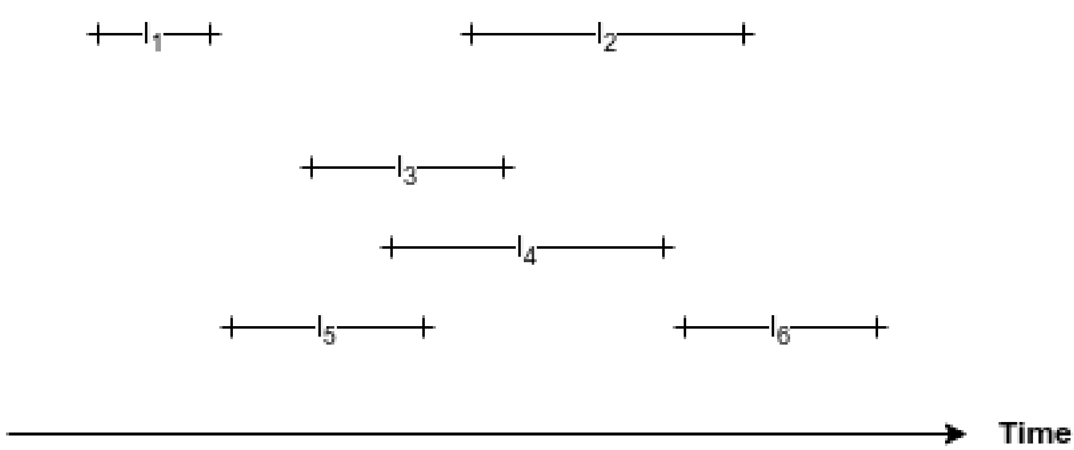
הרעיון:

הצגת גישה לפתרון בעיות בה האלגוריתם בוחר את האפשרות הטובה ביותר כרגע.

דוגמה:

נתונות n משימות, וכל משימה i מיוצגת ע"י זמן התחלה s_i וזמן סיום f_i.
יש מכונה בודדת שיכולה להריץ את המשמות. המטרה היא לבחור אוסף משימות גדול ביותר כך ש
כל שתי משימות שנבחרו לא נחתכות.

לדוגמה:



פתרון אופטימלי: $\{I_1, I_4, I_6\}, \{I_1, I_3, I_6\}, \{I_1, I_5, I_6\}$.

* ניתן לנסח את הכיה ע"י גרפים. גרף אינטרוולים הוא גרף שבו כל צומת מייצג אינטרוול, יש קשת בין שני צמתים $\Leftrightarrow$ האינטרוולים נחתכים.
המטרה היא למצוא קבוצה בלתי-תלויה גדולה ביותר (תת-קבוצה של הצמתים כך שבין כל שתיים בתת-הקבוצה אין קשת).

האלגוריתם:

1. ממיינים את האינטרוולים לפי זמני סיום $f_1 \leq f_2 \leq \ldots \leq f_n$, $X \leftarrow \emptyset$
2. עבור $j = 1$ עד n.
   (א) אם I_jלא נחתך עם אף אינטרוולי ב-X, בצע $X \leftarrow \{I_j\} \bigcup X$.

סיבוכיות: $O(nlog(n))$

טענה:

לכל $k = 0$ עד n, בסיום איטרציה k קיים פתרון אופטימלי X^* כך ש:
$(\forall 1 \leq j \leq k) \quad I_J \in X \Leftrightarrow I_j \in X^*$.

מסקנה:

אם נבחר $k = n$ נקבל שיש פתרון אופטימלי שזהה לפלט האלגוריתם.

הוכחה:

באינקוציה עלk.

* בסיס:
$k = 1$ נשים לב שתמיד $I_1 \in X^*$ (האלג' בוחר את I_1). נבחר X^* להיות פתרון אופטימלי כלשהוא. אם $I_1 \in X^*$ סיימנו. אחרת, $I \notin X^* \Leftarrow$ יהי $I_r \in X^*$ האינטרוול בעל זמן הסיום הקטן ביותר בנחתך עם I_1
(אם אין I_r כזה אזי $X^* \bigcup \{I_1\}$ פתרון חוקי וזו סתירה לאופטימליות של X^*).
נטען ש-$X^* \backslash \{I_r\} \bigcup \{I_1\}$ פתרון חוקי (אם זה נכון סיימנו שכן פתרון זה גם הוא אופטימלי).
מפני ש-f_1 זמן הסיום הקטן ביותר של כל האינטרוולים אזי I_r הוא יחיד
(כלומר אין עוד אינטרוולים ב-X^* הנחתך עם I_1, אחרת X^* לא פתרון חוקי).
$\Leftarrow$ $X^* \backslash \{I_r\} \bigcup \{I_1\}$ פתרון חוקי.