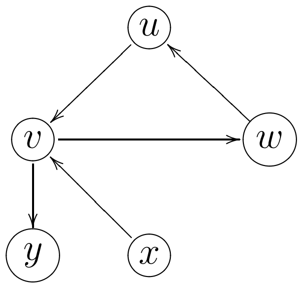
אלגוריתמים - 3

10 באפריל 2019

DFS ושימושיו



הגדרות:

רכיב קשיר היטב(רק"ה): בגרף מכוון $G=(V,E)$ הוא קב' מקסימלית
של צמתים $C\subseteq V$. כך שלכל זוג צמתים $u,v\in C$
יש מסלול מכוון מ-v-ל-u $(v\to u)$
ומ-u ל-v $(u\to v)$.
צומת בודד לכול להיות רק"ה.

דוגמה:

- **הגרף ההופכי של גרף מכוון** $G=(V,E)$ **הוא** $G^T=(V,E^T)$
$E^T=\{(u,v):(v,u)\in E\}$

(דהיינו הופכים את כיווני הקשתות ב-G.)
- נשים לב כי ב-GובG^T יש בדיוק אותם רק"ה. בפרטת אם u ו-v
ניתנים להגעה הדדית ב-G, אז גם ב-G^T.

<u>אלגוריתם למציאת רכיבים קשירים היטב</u>

Strongly Connected Comptonents (G)

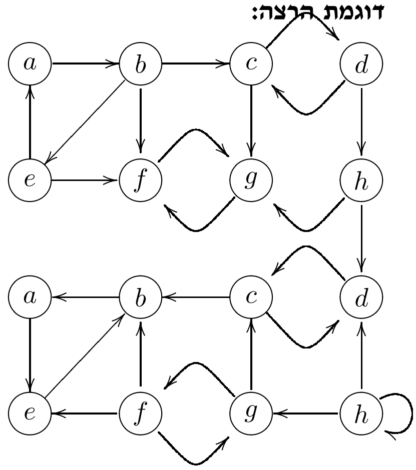
1.Call DFS to compute f[u] for all $u \in V$

2.Compute G^T

3.Call DFS(G^T)but in the main loop consider the vertices
in decreasing order of $f[u]$(as computed in 1.)

4.Output the certices in each DFS tree generated in 3.
as a seperate component.

דוגמת הרצה:



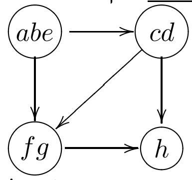
<u>זמן הריצה של אלג' SCC.</u>

זמן הרצה נקבע ע"י

1. הרצה של DFS $\to \Theta(|V|+|E|) \Rightarrow$(סה"כ זמן ריצה)
2. יצירת G^T $O(|E|)$.
3. סריקת הצמתים בלולאה המרכזית בצעד 3.
בסדר יורד לפי $f[u]$.
$\Leftarrow$ניתן לשמור את ערכי $f[u]$ בצעד 1. במחסנית.

לצורכך הוכחת הנכונות של SCC נגדיר את
<u>גרף הרכיבים</u> של G, $G^* = (V^*, E^*)$:
נניח כי הרק"ה ב-G הם $C_1, C_2, \ldots, C_k$.
אזי $V^* = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ והוא כולל צומת v_i לכל
רק"ה C_i ב-G.
תהיה קשת (v_i, v_j) ב-G^* אם G מכיל קשת מאיזשהו צומת

$x \in C_i$ ל־ $y \in C_j$.
<u>בדוגמה:</u> גרף הרכיבים הוא:



<u>למה 1:</u> יהיו C ו־C' שני רק"ה בגרף מכוון $G = (V, E)$.
ויהיו $v, u \in C$ ו־$v', u' \in C'$ נניח שיש מסלול מכוון $u \to u'$ ב־G,
אזי לא ייתכן שיש מסלול מכוון מ־$v' \to u'$.
(הוכחה בתרגול).
-

כאשר נשתמש ב־ $d[u]$ ו־ $f[u]$ בניתוח האלג',
נתייחס לערכים אלו כפי שנקבעו ל־u <u>בקריאה הראשונה</u>
ל־DFS (בצעד 1. של האלג').
־נרחיב את ההגדרות של זמן "גילוי" ו"נסיגה" <u>לקבוצות</u>
צמתים אם $U \subseteq V$ אזי $d(U) = \min\limits_{u \in U}\{d[u]\}$
ו־ $f(U) = \max\limits_{u \in U}\{f[u]\}$
דהיינו $d(U)$ ו־$f(U)$ הם זמן הגילוי המוקדם
וזמן הנסיגה המאוחר בקבוצה U, בהתאמה.

למה 2:

יהיו C ו־ C' שני קר"ה בגרף מכוון $G = (V, E)$.
נניח שיש קשת $(u, v) \in E$ כאשר $u \in C$
ו־$v \in C'$, אזי $f(C) > f(C')$.

הוכחה:

נטפל בשני מקרים כתלות ביחס
בין $d(C)$ ו־ $d(C')$

1. $d(C) < d(C')$ ויהיו x הצומת הראשון שהתגלה ב־ C.
אזי בזמן $d[x]$ כל הצמתים ב־C ו־C' לבנים. היות ו־ $(u, v) \in E$
יש מסלול שמורכב רק מצמתים לבנים מ־x לכל צומת ב־C <u>וגם</u> מ־x לכל צומת ב־C'.
ממשפט המסלול הלבן, כל הצמתים ב־C וב־C' יהפכו צאצאים של x בעץ DFS.
ממשפט הסוגריים, לכל צומת w ב־C או ב־C' מתקיים:
$d[x] < d[w] < f[w] < f[x]$ ולכן $f[x] = f[C] > f(C')$.

2. אם $\boldsymbol{d(C) > d(C')}$, אזי יהי y הצומת הראשון שהתגלה ב־C' בזמן $d[y]$
יש מסלול לבן מ־y לכל צומת ב־ C'. לכן, ממשפט המסלול הלבן כל הצמתים ב־C'
יהפכו לצאצאים של y בעץ DFS, וממפש הסוגריים $f[y] = f(C')$.
בזמן הגילוי של y כל הצמתים ב־C לבנים. היות ויש קשת (u, v) מ־C ל־C'.
מלמה 1ת לא ייתכן שיש מסלול מ־C' ל־C, לכן לא ניתן להגיע מ־y לאף צומת ב־C.
לכן, בזמן $f[y]$ כל הצמתים ב־C עדיין לבנים.
מכאן נקבל כי לכל $w \in C$, $f[w] > f[y]$.

לכן $f(C) > f(C')$
.■

מסקנה 3:

יהיו C ו־C' רק"ה בגרף מכוון $G = (V, E)$
נניח שיש קשת $(u, v) \in E^T$, כאשר $u \in C$ ו־ $v \in C'$
אזי בהרצה של DFS על G (בצעד ו של SCC).
נקבל כי $f(C) < f(C')$.

הוכחה:

היות ו־$(u, v) \in E^T$, יש ב־ G קשת $(v, u) \in E$ מלמה 2,
היות ויש קשת מ־C' ל־C ב־G.
נקבל כי $f(C') > f(C)$
.■

<u>משפט 4:</u>

האלגוריתם Strongly Connected Components מחשב נכון את הרק"ה בגרף מכוון G.

<u>הוכחה:</u>

נוכיח באינדוקציה שכ"א מ־x העצים הראשונים שנמצאו בהרצת DFS על G^T (בצעד 3.
של SCC) הוא רק"ה.
<u>בסיס:</u>
$k = 0$, נכון באופן ריק.
<u>צעד האינדוקציה:</u>
נניח שהטענה נכונה ל־k העצים הראשונים ונוכיח לעץ ה־$(k + 1)$ נניח כי השורש של העץ הינו צומת u,
כאשר u שייך לרק"ה C ב־G.
־ מאופן התקדמות האלג' בלולאה המרכזית של צעד 3. מתקיים:
$f[u] = f(C) > f(C')$
לכל רק"ה C' ב־G שעוד לא טופל (בצעד 3).
־מהנחת האינדוקציה, בזמן ש־DFS "מגלה" את u (בצעד 3.) כל הצמתים ב־C לבנים ממשפט המסלול הלבן, כל הצמתים ב־C יהפכו לצאצאים של u בעץ DFS.
־בנוסף ממסקנה 3. כל קשת שיוצאת מ־C ב־G^T מובילה לרק"ה שכבר ביקרנו.
־לכן הצאצאים של u בעץ DFS הם <u>כל</u> הצמתים ב־C ורק הצמתים ב־C.
.■