

הרצאה 5

אלגוריתם Prim המושך:

תזכורת - האלגוריתם:

1. $T \leftarrow \emptyset, S \leftarrow \{s\}$
2. **while** $S \neq V$:
 - 2.1 $e = (u, v)$ **e is the lightest edge crossing** (S, \bar{S}) **assuming** $u \in S, v \notin S$
 - 2.2 $T \leftarrow T \cup \{e\}, S \leftarrow S \cup \{v\}$
3. **Return** T

כיצד נממש את האלגוריתם Prim?

נשמור את צמתי S בערימת מינימום. הערך והמפתח של צומת v בערימה יהיה משקל הקשת הקלה ביותר שנוגעת בו ומחברת אותו ל- S (אם לא קיימת קשת כזו ערך המפתח יהיה ∞).

אתחול:

המפתח של S יהיה O .

המפתח של כל צומת אחר יהיה ∞ .

צעד:

ברגע שמוציאים את צומת u מהערימה, מעדכנים את המפתחות של השכנים שלו שעדיין בערימה.

סיבוכיות:

$$O(|E| \log |V|)$$

האלגוריתם של Kruskal:

1. מייין את הקשתות: $w(e_1) \leq w(e_2) \leq \dots \leq w(e_m)$
 $T \leftarrow \emptyset$

2. מ- $i = 1$ עד m :

אם $T \cup \{e_i\}$ לא מכיל מעגלים אזי $T \leftarrow T \cup \{e_i\}$

3. החזר את T .

משפט:

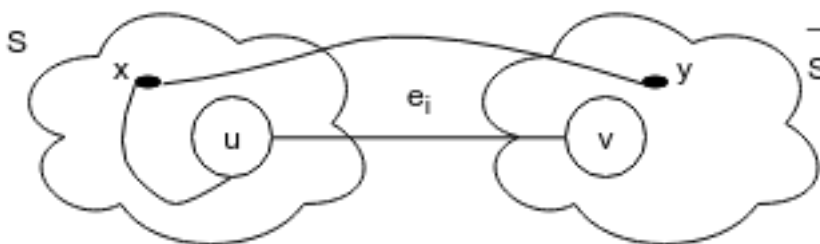
האלגוריתם של Kruskal מחזיר עץ פורש מינימום.

הוכחה:

נראה שהאלגוריתם של Kruskal הוא מימוש מסוים של השיטה הכללית. כלומר אם נצבע בכחול כל קשת שהאלגוריתם מוסיף ל- T ונצבע באדום כל קשת שהאלגוריתם לא מוסיף ל- T , נקבל הפעלה חוקית של הכללים. ממחלק לשני מקרים:

1. ברגע שהאלגוריתם בוחר את $T \cup \{e_i\}$ מתקיים: $T \cup \{e_i\}$ מכיל מעגל C . נשים לב שבמעגל C כל הקשתות שייכות ל- T (פרט ל- e_i), כלומר כולן צבועות בכחול. לפי הכלל האדום, ניתן לצבוע באדום את הקשת הכבדה ביותר ב- C מבין הקשתות הלא-צבועות. e_i היא הקשת היחידה ב- C שאינה צבועה ולכן צביעתה באדום היא הפעלה חוקית של הכלל האדום.

2. ברגע שהאלגוריתם בוחר את הקשת e_i מתקיים: ב- $T \cup \{e_i\}$ לא נסגרת מעגל



נתבונן בתחום: $S = \{x | \text{there is a path from } x \text{ to } u \text{ in } T\}$

(א) $u \in S$ (מההגדרה).

(ב) $v \notin S$ נראה זאת: נניח השלייה כי $v \in S$

\Leftarrow יש ב- T מסלול (כחול) בין u ו- v (הגדרת S)

$\Leftarrow T \cup \{e_i\}$ מכיל מעגל וזו סתירה.

(ג) למה אין קשת כחולה שחוצה את S ?

נניח בשלייה שיש קשת כחולה (x, y) כך שמתקיים $x \in S, y \notin S$

$\Leftarrow x \in S$ יש מסלול כחול בין u ו- x . נשרשר למסלול זה את הקשת (x, y)

וקבלנו מסלול כחול בין u ו- y וזו סתירה לכך ש- $y \notin S$.

שאלה: מדוע אין אף קשת e שחוצה את S , אינה צבועה וגם $w(e) < w(e_i)$?

אם זה קורה, e הייתה צריכה להיצבע באיטרציה קודמת וזו סתירה.

\Leftarrow זו הפעלה חוקית של הכלל הכחול. ■

כיצד ניתן לממש את האלגוריתם ?

הרעיון: הכל איטרציה נרצה לשמור את רכיבי הקשירות של (V, T) .

נשתמש ב-`union find`.

הפעולות שצריך בכל איטרציה:

1. לבדוק האם שני רכיבי קשירות באותה קבוצה.

2. אולי לאחד שני רכיבי קשירות.

\Leftarrow סה"כ סיבוכיות: $O(|E| \log |V|)$.

מסלולים קלים ביותר

נתון:

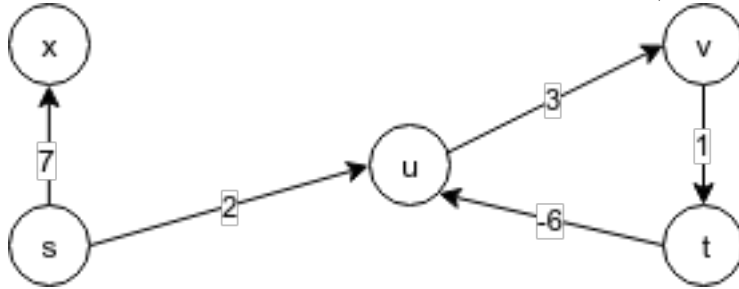
גרף מכוון $G = (V, E)$, פונקציית משקל $W : E \rightarrow \mathbb{R}$
משקל של מסלול p מוגדר להיות סך משקלי הקשתות ב- p :
 $[w(p) \triangleq \sum_{e \in p} w(e)]$

מטרה:

בהינתן שני צמתים s ו- t , מהו המסלול הקל ביותר מ- s ל- t ?

דוגמה:

מסלול קל ביותר = 6.



- אם יש מעגל שלילי בגרף (מעגל שסכום משקלי הקשתות בו קטן ממש מאפס, אזי מרחקים קלים ביותר לא בהכרח מוגדרים).

- הערה: המקרה ש- $w(e) = 1 \forall e \in E$ נפתר ע"י BFS.

הבחנה:

אם p מסלול קל ביותר מ- u ל- v , כל תת-מסלול של p גם הוא קל ביותר.

הוכחה:

נסתכל על p :

$$p : u = u_0 \xrightarrow{e_1} u_1 \xrightarrow{e_2} u_2 \rightarrow \dots \rightarrow u_{k-1} \rightarrow u_k = v$$

נתבונן בתת-המסלול מ- u_i ל- u_j ($i < j$).

$$u \xrightarrow{p'} u_i \xrightarrow{p_{ij}} u_j \xrightarrow{p''} v$$

$$w(p) = w(p') + w(p_{ij}) + w(p'')$$

נניח בשלילה ש- p_{ij} אינו קל ביותר.

$$\Leftarrow \text{יש מסלול } q \text{ מ-} u_i \text{ ל-} u_j \text{ כך ש-} w(q) < w(p_{ij})$$

$$u \xrightarrow{p'} u_i \xrightarrow{q} u_j \xrightarrow{p''} v$$

$$w(p) = w(p') + w(q) + w(p'')$$

וזה סתירה סתירה ■

נסמן ב- $\delta(u, v)$ את אורך המסלול הקל ביותר מ- u ל- v :

$$\delta(u, v) = \begin{cases} \infty & v \text{ is not reachable from } u \\ -\infty & \text{"negative" circle reachable from } u \\ & \text{and } v \text{ reachable from the circle} \\ \min\{w(p) : p = \text{path from } u \text{ to } v\} & \text{otherwise} \end{cases}$$

