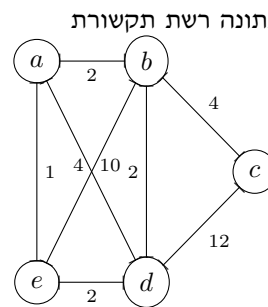


הרצאה 4 אלגוריתמים

בעיות אופטימיזציה ברשתות

דוגמה:



- על כל קשת מופיע מחיר השימוש בה
- נניח כי הצומת a מעוניין להפיץ הודעה לכל הצמתים במחיר מינימלי
- יש למצוא תת-קב' קשתות ברשת שעליהן ההודעה תעבור כך שתגיע לכל הצמתים
- נשים לב כי היות ונרצה להשיג מחיר מינימלי תת-הגרף שהתקבל מבחירת הקשתות יהיה חסר מעגלים
- מכאן נקבל את בעיית עץ פורש מינימום:
- נתון גרף קשיר לא מכוון $G = (V, E)$, שבו לכל קשת (v, u) יש משקל $w(v, u)$ יש למצוא עץ פורש של הגרף שסה"כ משקל הקשתות בו מינימלי.

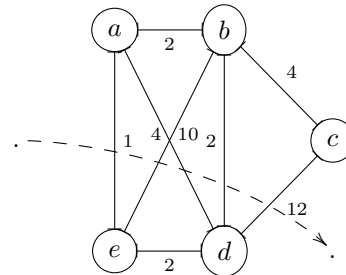
אלגוריתמים לבעיות עץ חיפוש מינימום ('עפ' מ')

- נראה תחילה אלג' גנרי שבונה עפ"מ קשת אחר קשת. על-ידי הוספת קשתות עם מקשל נמוך והשמטת קשתות עם משקל גבוה.
- האלגוריתם יתקדם על-ידי צביעת קשתות. קשתות שיצבעו בכחול יופיעו בעץ, וקשתות שיצבעו בצבע אדום יושמטו.
- האלג' יקיים בכל שלב את:
 - "שמורת הצבע" - קיים עפ"מ שמכיל את כל הקשתות הכחולות ואף אחת מהקשתות האדומות.

- משמורת הצבע נובע כי כאשר כל הקשתות ב- G נצבעו. הקשתות הכחולות יוצרות עץ"מ.

חתך (cut) בגרף $G = (V, E)$ הוא חלוקה של קב' הצמתים v לשתי תת-קב' x ו- $x^c = v \setminus x$ קשת חוצה את החתך אם קצה אחד שלה ב- x והקצה האחר ב- x^c .

- לעיתים נתייחס לחתך כאל "קבוצת הקשתות החוצות".



אלגוריתם גנרי למציאת עץ"מ

הכלל הכחול: מצא חתך שאין בו קשת כחולה. צבע בכחול את את הקשת הקלה ביותר שאינה צבועה.

הכלל האדום: מצא מעגל שאין בו קשת אדומה. צבע באדום את הקשת הכבדה ביותר שאינה צבועה.

אלגוריתם חמדן: הפעל את הכללים לעיל עד שכל הקשתות צבועות. הקשתות הכחולות הן עץ פורש מינימלי.

נוכיח את נוכחות האלג' הגנרי

משפט 1: האלגוריתם הגנרי צובע את כל הקשתות של גרף קשיר G ומקיים את שמורת הצבע.

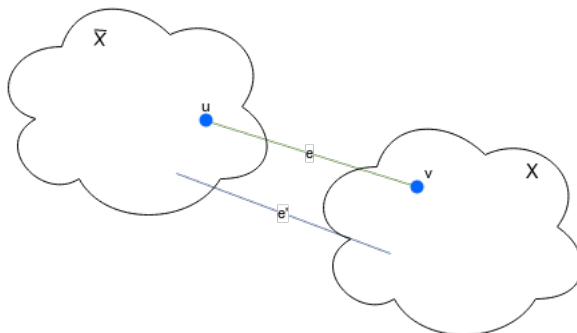
הוכחה: נראה תחילה כי האלג' מקיים את השמורה, באינדוקציה על מס' האיטרציות (דהיינו הפעלות של הכלל הכחול או האדום).

- **בסיס:** בתחלה כל הקשתות אינן צבועות ולכן כל עץ"מ ל- G מקיים את השמורה (באופן ריק).

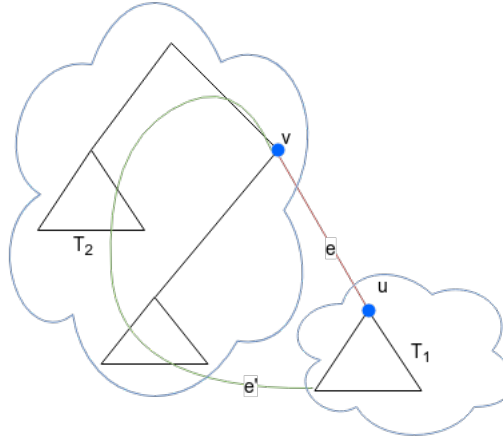
- **צעד האינדוקציה:** נטפל לחוד בשני מקרים:

1. נניח כי השמורה מתקיימת לפני הפעלה של הכלל הכחול. תהיי e קשת שנצבית כעת בכחול, ויהיה T עץ"מ שמקיים את השמורה לפני שהקשת e נצבעה.
- (א) אם $e \in T$ אזי T מקיים את השמורה אחריי שהקשת e נצבעה (סיימנו).

(ב) אם $e \notin T$ אזי נסתכל על החתך x, \bar{x} שעליו הפעלנו את הכלל הכחול. יש מסלול ב- T שמחבר את הצמתים u, v בקצוות של e .



- היות והקשת e חוצה את החתך, קיימת על המסלול הנ"ל קשת אחרת e' , שחוצה את החתך ו- $e' \in T$.
 - הקשת e' לבטח לא צבועה בכחול (וגם אינה צבועה באדום מהנחת האינדוקציה).
 - בנוסף $w(e') \geq w(e)$
 - \Leftarrow ניתן להשמיט את e' מ- T ולהוסיף במקומה את e .
 - נשים לב, כי אם המסלול היחיד בין שני צמתי ב- T עבר דרך e' , המסלול יעבור כעת דרך e .
 - בנוסף, T נשאר עפ"מ, כי המשקל הכולל לא יכול לעלות.
 - * אם נצבע כעת את e בכחול, נקבל כי השמורה מתקיימת עבור העץ T (החדש).
2. נניח כי השמורה מתקיימת לפני הפעלה של הכלל האדום.
- תהי e קשת שנצבעת כעת באדום, והי T עפ"מ שמקיים את השמורה לפני שהקשת e נצבעת.
- אם $e \in T$ אזי T מקיים את השמורה גם אחרי שהקשת e נצבעת.
 - נניח כי $e \notin T$ אזי השמורה e מ- T מחלקת את T לשני עצים וגם מגדירה חלוקה של הצמתים ב- G



- לקשת e יש קצה אחד ב- T_1 וקצה אחר ב- T_2 , נסמנם u ו- v בהצאמה המעגל שעליו שפעלנו את הכלל האדום מכל מסלול נוסף מ- u ל- v על המעגל יש קשת e' שקצה אחד שלה ב- T_1 והקצה האחר ב- T_2 .

– מהשמורה נובע כי e' לא כחולה (כי $e' \notin T$), ומהכלל האדום e' לא צבוע באדום.

– בסוף, $w(e') \leq w(e)$.

- \Leftarrow הוספת הקשת e' לעץ T והשמטת הקשת e יוצרת עץ חדש מקיים את השמורה אחרי שהקשת e נצבעת באדום. בנוסף לא הגדלנו את משקל העץ, לכן T (החדש) הינו עפ"מ.

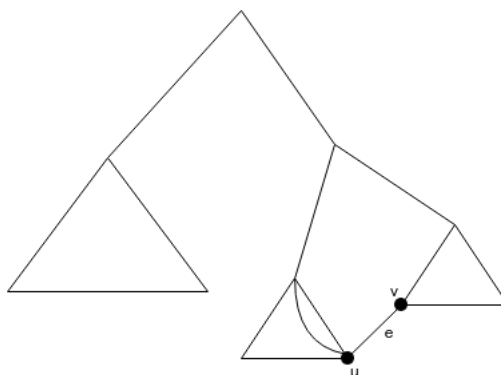
חלק שני של ההוכחה:

נראה כעת כי האלג, הגנרי יצבע את כל הקשתות בגרף. נניח בשלילה כי קיימת קשת e לא צבועה, אך לא ניתן להפעיל אף אחד מהכללים.

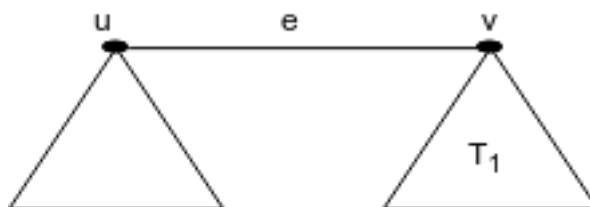
- נשים לב כי מהכלל הכחול, הקשתות הכחולות יוצרות עבר של עצים כחולים.

נבחין בין שני מקרים:

1. שני הקצוות של e באותו עץ כחול, אז נקבל: כלומר, מצאנו ב- G מעגל שאין בו קשתות אדומות לכן ניתן להפעיל על e את הכלל האדום.



2. אם הקצוות של e בעצים כחולים שונים, נסמן ב- X את אוסף הצמתים ב- T_2 וב- \bar{X} את שאר הצמתים בגרף. קיבלנו חתך שאין בו קשתות כחולות \Leftarrow ניתן להפעיל את הכלל הכחול על e .



מכאן נקבל שכל עוד יש ב- G קשת לא צבועה מובטח שניתן להפעיל את אחד הכללים, לכן האלג' הגנרי צובע את כל הקשתות.

אלגוריתמים קלאסיים למציאת עץ מ

אלגוריתם Prim: נפעיל את הכלל הכחול על החתך שמוגדר ע"י העץ שהולך ונבנה, כלומר בין צמתי העץ ושאר צמתי הגרף.

```

1.Init: All the edges are non-colored,  $T := \{r\}$ 
while  $T \neq V$  do:
     $e = (u, v)$  minimal edge in the cut  $(T, V \setminus T) : u \in T$ 
     $e \leftarrow \text{Blue}$ 
     $T := T \cup \{v\}$ 

```

זמן הריצה של Prim:

מימוש ע"י מערכים: יהיה v צומת שגובל בעץ כחול T . דהיינו, יש קשת (v, u) כך ש- $u \in T$.

- עבור כל צומת v שגובל ב- T נגדיר קשת בצבע תכלת. זו היא הקשת "הקלה" ביותר מבין הקשתות שמחברות את v ל- T .

(הקשתות בצבע תכלת "מועמדות להיות כחולות).
 כאשר נפעיל את הכלל הכחול נבחר קשת בצבע תכלת ונהפוך אותה לכחולה.

- נניח כי הצומת v נוסף לעץ T . נסתכל על כל הקשתות (שאינן צבועות) (v, x) כך ש- $x \notin T$. אם אין ל- x קשת תכלת, נצבע את (v, x) בתכלת. אחרת, קיימת ל- x קשת תכלת ונסמנה (x, y) ($y \in T$). ו- $w(v, x) < w(x, y)$, אזי נהפוך את (v, x) לתכלת במקום הקשת (x, y) .

סיבוכיות:

בכל איטרציה של הכלל הכחול הסיבוכיות היא $O(|V|)$ וכיוון שנעשה $|V| - 1$ איטרציות נקבל $O(|V|^2)$ האלגוריתם יתחזק מערך בגודל $|V|$ של קשתות בצבע תכלת.