

## הרצאה 2

10 באפריל 2019

### אלגוריתם חיפוש לעומק

דוגמה:

Start ↓	⊙	→	
↓→	→	↑ ↓	⊙
	⊙	→	↓
⊙		⊙	

רובוט סורק אזור לצורך גילוי מוקשים, ההתקדמות בכל צעד: ימינה שמאלה למטה, למעלה.

### אלגוריתם DFS (Depth First Search)

מנסה להתקדם כמה שיותר לעומק הגרף.  
כאשר נבקש בצומת  $v$ , אם יש קשת  $(u, v)$  לצומת  $u$  שעוד לא "התגלה", נחצה את הקשת ונמשיך את החיפוש מהצומת  $u$ .  
המטרה: יש לגלות את כל הצמתים בגרף.

#### DFS על גרף מכוון:

**קלט:** גרף מכוון  $G = (V, E)$ , צומת  $s$ .  
**פלט:** לכל  $v \in V$ ,  $d[v]$  זמן הגילוי של  $v$ .  
**סימונים:**

- $d[v]$  זמן גילוי של  $v$ .
- $\pi[v]$  הצומת שגרם ל- $v$  להתגלות.

DFS:

```

1. For all  $v \in V$   $d[v] \leftarrow 0, \pi[v] \leftarrow null$ 
   mark all edges "unused"
    $i \leftarrow 0, v \leftarrow s$ 
2.  $i \leftarrow i + 1$   $d[v] \leftarrow i$ 
3. While there are unused out-edges from  $v$ ,
   choose unused edges  $(v, u)$ , mark  $(v, u)$  as used
   if  $d[u] = 0$ :  $\{\pi[u] \leftarrow v, v \leftarrow u, i \leftarrow i + 1, d[v] \leftarrow i\}$ 
4. If  $\pi[v] \neq null$  then  $v \leftarrow \pi[v]$  and go to (3)
   else if there is  $u \in V$  with  $d[u] = 0$  then
    $v \leftarrow u$  and go to (2)
5. stop

```

- נשים לב כי בהרצות שונות של SFD נוכל לקבל פלטים שונים, אך הכולן נקבל "יער" שבו כל צומת מופיע מאיזשהו עץ מכוון.
- בנוסף, SFD לא בהכרח מוצא מרחקים קצרים.
- בסיום הרצת SFD נקבל predecessor subgraph. זהו תת-גרף שבו לכל צומת  $v$  מופיע קשת  $(v, \pi(v))$  כפי שנמצא ע"י האלגוריתם, סימון:  $G_\pi$ .

```

For each  $u \in V$  do  $\{\text{color}[u] \leftarrow \text{white}, \pi[u] \leftarrow null\}$ 
For each  $u \in V$  do
  if  $\text{color}[u] = \text{white}$  then DFS-VISIT( $u$ )
DFS-VISIT( $u$ ):
   $\text{color}[u] \leftarrow \text{gray}$ 
   $i \leftarrow i + 1$ 
   $d[u] \leftarrow i$ 
  For each  $v \in \text{Adj}[u]$  do
    if  $\text{color}[v] = \text{white}$  then  $\{\pi[v] \leftarrow u, \text{DFS-VISIT}(v)\}$ 
   $i \leftarrow i + 1$ 
   $f[u] \leftarrow i$ 

```

$\{white, gray\}$  -  $\text{color}[u]$   
 $f[u]$  - זמן היציאה האחרון מ- $u$ .  
 $\text{Adj}[u]$  - אוסף השכנים של  $u$ .

זמן הריצה של SFD :

- לולאת האתחוד:  $\theta(|V|)$ .
- נסמן ב- $T(\text{DFS-VISIT})$  את מספר הפעולות המבוצעות בקריאה ל-DFS-VISIT עבור הצומת.  
נשים לב כי DFS-VISIT נקראת בדיוק פעם אחת עבור  $v$  כאשר  $v$  "לבן", ומיד בכניסה לפרוצדוקרה  $v$  הופך ל-"אפור". בנוסף, מספר הפעולות בלולאת ה-"For" של DFS-VISIT הוא לינארי במספר השכנים של  $v$ . לכן סיבוכיות הקריאות ל-DFS-VISIT:

$$\sum_{v \in V} T(\text{DFS-VISIT}) = \sum_{v \in V} \theta(|Adj[v]|) = \theta(|E|)$$

$\Leftarrow$  סה"כ זמן הריצה של DFS:  $\Theta(|E| + |V|)$ .

### תכונות של DFS:

1. התכונה הבסיסית:  $G_\pi$  הוא יער, שכן המבנה של עצי DFS מקשף את הקריאות הרקורסיביות ל-DFS-VISIT.
2.  $v$  הוא צאצא של  $u$  בעץ DFS אם  $v$  התגלה כאשר  $u$  היה אפור ולפני שנקבע ערף ל- $f[u]$ .
3. תכונת הסוגריים: נייצג את הגילוי של צומת  $u$  ע"י סוגר שמאלי  $'(u'$  ואת סיום הטיפול בו ע"י  $'u)$ . אזי, ההסטוריה של "גילוי" ו"סיום הטיפול" מגדירה ביטוי שבו הסוגריים מקוננים היטב.

### משפט 1 (הסוגריים):

בכל חיפוש לעומק של גרף מכוון/לא-מכוון  $G$ , לכל שני צמתים  $u$  ו- $v$  מתקיים בדיוק אחד מהתנאים:

1. האנטרוולים  $[d[u], f[u]]$  ו- $[d[v], f[v]]$  זרים לחלוטין ואין קשר של אב-קדמון/צאצא בין הצמתים.
2. האנטרוול  $[d[u], f[u]]$  מוכל ממש בתוך  $[d[v], f[v]]$  ו- $u$  צאצא של  $v$  בעץ DFS.
3.  $[d[v], f[v]]$  מוכל ממש ב- $[d[u], f[u]]$  ו- $v$  צאצא של  $u$  בעץ DFS.
4. תכונה נוספת של צאצאים ביער במשפט הבא.

### משפט 2 (המסלול הלבן):

ביער DFS של גרף (מכוון/לא-מכוון) צומת  $v$  הוא צאצא של צומת  $u$  אם ורק אם בזמן  $d[v]$ , הזמן בו  $u$  התגלה, ניתן להגיע ממנו ל- $v$  ע"י מסלול המורכב כולו מצמתים לבנים.

הוכחה:

$\Leftarrow$

נניח ש- $v$  צאצא של  $u$ . יהיה  $w$  צומת על המסלול בין  $u$  ו- $v$  בעץ DFS כך ש- $w$  צאצא של  $u$ . ממשפט 1,  $d[u] < d[w]$ , לכן  $w$  היה לבן בזמן  $d[u]$ .

$\Rightarrow$

נניח בשלילה שיש מסלול לבן מ- $u$  ל- $v$  בזמן  $d[u]$ , אבל  $v$  לא נהיה צאצא של  $u$  בעץ DFS. נניח ש- $v$  הוא הצומת שראשון על המסלול הלבן שאנינו צאצא של  $u$ . יהיה  $w$  הצומת לפני  $v$  על המסלול הלבן כך ש- $w$  צאצא של  $u$  (או  $w = u$ ). אזי ממשפט 1  $f[w] \leq f[u]$ . נשים לב כי  $v$  מוכרח להתגלות אחרי  $u$ , אבל לפני שנצא בפעם האחרונה מ- $w$  דהיינו:

$$d[u] \quad \underbrace{\leq}_{\text{at } d[u] \text{ there is a white path to } v} \quad d[v] \quad \underbrace{\leq}_{\text{we won't finish with } w \text{ before we get to } v} \quad f[u]$$

ממשפט 1 נקבל כי  $[d[v], f[v]]$  חייב להיות מוכל ממש ב-  $[d[u], f[u]]$  ולכן  $v$  יהיה צאצא של  $u$  בעץ DFS- סתירה. ■