# הרצאה 1

7 באפריל 2019

## אלגוריתמים לחיפוש בגרפים

**דוגמה:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| s→ ↓ | → ↓ | | |
| | | ■ | |
| ■ | | | |
| | | | T |

ההתקדמות בכל צעד: ימינה, שמאלה למטה

**המטרה:**

**למצוא את המסלול הקצר ביותר מ־S ל־T.**

**חיפוש בגרף:**

נתון גרף $G = (V, E)$ וצומת מקור $s \in V$ .

1. יש לגלות את כל הצמתים ב־G שהם ברי־הגיעה מ־$s$.
2. עבור צומת $v$ שהוא בר־הגעה מ־$s$ יש למצוא את המרחק הקצר ביותר בקשתות מ־$s$ ל־$v$.

### האלגוריתם BFS (Breath First Search)

עובר על כל הקשתות של G ו"מגלה" את קבוצת הצמתים שניתנים להגעה מ־$s$, $R \subseteq V$.

**פלט האלגוריתם:**

- ⋆ עץ ששורשו $s$ המכיל את כל הצמתים ב־$R$.
- ⋆ המרחק, דהיינו מספר הקשתות המינימלי מ־$s$ לכל צומצ ב־$R$.
- ⋆ ניתן להפעיל את BFS גם על גרפים מכוונים והן על גרפים לא־מכוונים.

**פסאודו קוד ל־BFS:**

Input: A graph $G=(V,E)$ s$\in V$
Output: For any $v\in V$, $d(v)$ is the distance from $s$ to $v$.
For any $v\in V$, do:
  $d(v)\leftarrow\infty$
  $d(s)\leftarrow 0$
  $i\leftarrow 0$
 While there is neighbor $v$ of $u$with $d(v)$= $\infty$ do
    d(v)$\leftarrow i+1$
$i\leftarrow i+1$

**מימוש BFS באמצעות תור:**

בתחילה התור $Q$ ריק.
צומת $v$ ש"התגלה" נכנס ל־$Q$.
צומת $w$ יוצא מראש התור לקראת סריקת שכניו.
<u>האב</u> של צומת $v$ בעץ החיפוש הוא הצומת שגרם ל־$v$ להתגלות.
האלגוריתם רץ כל עוד $Q$ לא ריק.

**סימונים:**

- $\star$ $d(v)$ ־ המרחק של $v$ מ־$s$.
- $\star$ $\pi(v)$ ־ האב של $v$בעץ החיפוש.
- $\star$ $Adj(v)$ ־קבוצת השכנים של $v$ ב־$G$.

For any $u\in V\backslash\{s\}$do $\{d(u)\leftarrow\infty,\pi(u)\leftarrow NULL\}$
$d(s)\leftarrow 0$
$Q\leftarrow\emptyset$
Enqueue$(Q,s)$
While $Q\neq\emptyset$ do
  $u\leftarrow$ dequeue$(Q)$
  Foreach $v\in Adj(u)$do
    if $d(v)=\infty$then
      $d(v)\leftarrow d(u)+1$
      $\pi(v)\leftarrow u$
      Enqueue$(Q,v)$

**זמן הריצה של BFS:**

**אתחול:** $O(|V|)$

**לולאת ה־while:**

עבור כל צומת $v$ שיוצא מהתור עוברים על כל השכנים, דהיינו לכל היותר $O(|Adj(v)|)$ סה"כ נעבור על כל קשת בגרף לכל היותר פעמיים לכן זמן הריצה הוא $O(|E|)$.

**הוכחת נכונות BFS:**

- ⋆ נראה כי BFS מוצא את המסלול הקצר מ־$s$ לכל צומת $v$ אשר בר הגעה מ־$s$.
- ⋆ נסמן ב־$\delta(s,v)$ את המרחק הקצר ביותר (בקשתות) מ־$s$ ל־$v$. אם אין מסלול מ־$s$ ל־$v$ אזי $\delta(s,v)=\infty$.

**למה 1:**

**לכל קשת** $(u,v)\in E$ **מתקיים** $\delta(s,v)\le\delta(s,u)+1$

**הוכחת למה 1:**

1. אם $u$ בר הגעה מ־$s$, אזי המסלול הקצר מ־$s$ ל־$v$ הוא לכל היותר המסלול הקצר מ־$s$ ל־$u$ + הקשת $(u,v)$.
2. אחרת $\delta(s,u)=\infty$ ולכן אי־השוויון מתקיים.

**למה 2:**

בסיום האלגוריתם הערך $d(v)$ המחושב ע"י BFS מקיים $d(v)\ge\delta(s,v)$ לכל $v\in V$.

**הוכחה:**

נוכיח באינדוקציה על מספר צעד ה־Enqueue, שאחרי צעד כזה יתקיים $d(v)\ge\delta(s,v)$ לכל $v\in V$.

**בסיס:** אחרי פעולת $\text{Enqueue}(Q,s)$ הטענה מתקיימת כי $d(s)=0=\delta(s,s)$ ולכל $v\in V\backslash\{s\}$ מתקיים $d(v)=\infty$.

**צעד האינדוקציה:** נניח שצומת $v$ "התגלה" תכאשר סרקנו את השכנים של $u$. מכאן, $v$ נכנס לתור. מהנחת האינדוקציה, $d(u)\ge\delta(s,u)$. לכן:

$$d(v)\underbrace{=}_{\text{Algorithm'}}d(u)+1\underbrace{\ge}_{\text{Induction}}\delta(s,u)+1\underbrace{\ge}_{\text{Lema 1}}\delta(s,v)$$

היות ש־$d(v)$ לא ישתנה במהלך האלגוריתם, אי־השוויון שמצאנו לעיל מתקיים גם בסוף האלגוריתם.

**למה 3:**

נניח שבמהלך הביצוע של BFSהתור $Q$ מכיל את $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$
אזי:

$$d(v_r) \leq d(v_1) + 1$$

$$\forall 1 \leq i \leq r, d(v_i) \leq d(v_{i+1})$$

**מסקנה 4:**

נניח ש־$v_i$ נכנס ל־$Q$ לפני ש־$v_j$נכנס לתור. אזי, $d(v_i) \leq d(v_j)$.

**הוכחה:**

נתבונן ב־$v_i$ ו־$v_j$וסדרת הצמתים שהוכנסו ביניהם ל־$Q$: $\{v_i, v_{i+1}, v_{i+1}, v_j\}$
כל זוג צמתים עוקבים בסדרה $v_k, v_{k+1}$ מקיימים את אחד מהתנאים הבאים:

1. $v_k, v_{k+1}$ יחד בתור ולכן לפי למה 3 $d(v_k) \leq d(v_{k+1})$.
2. $v_{k+1}$ נכנס לתור $Q$ אחרי ש־$v_k$יוצא ממנו אזי מפני שאין צומת ביניהם בסדרה נובע כי $v_k$
גורם ל־$v_{k+1}$ להתגלות ולכן $d(v_{k+1}) = d(v_k) + 1$

$\Leftarrow$

$$d(v_i) \leq d(v_2) \leq \cdots \leq d(v_l) \leq d(v_j)$$

.■

**משפט:**

נניח שמריצים את BFSעל $G$ (מכוון/לא מכוון) עם צומת מקור $s$,
אזי BFS מגלה כל צומת $v$ שהוא בר־השגה מ־$s$ ובסיום האלג' $d(v) = \delta(s, v)$.
בנוסף, לכל צומת $v$בר־השגה מ־$s$ אחד המסלולים הקצרים ל־$v$ הוא מסלול קצר ביותר מ־$s$ל־$\pi(v)$, שאליו נוספת הקשת $(\pi(v), v)$.

**הוכחה:**

נניח בשלילה שקיים צומת $v$ עבורו $d(v) \neq \delta(s, v)$ מלמה 2, מפני ש־$d(v) \geq \delta(s, v)$ אזי נקבל $d(v) > \delta(s, v)$. נקח את הצומת $v$ עם $\delta(s, v)$ מינימלי שעבורו מתקיים אי־השוויון החזק.

נסתכל על המסלול הקצר ביותר מ־$s$ ל־. יהי $u$ הצומת שמופיע מיד לפני $v$
במסלול זה. אזי, $\delta(s,v)=\delta(s,u)+1$.
מאופן הבחירה של $v$ כצומת בעל $\delta(s,v)$המינימלי שמקיים את אי־השוויון החזק,
נקבל כי $d(v)=\delta(s,u)$.
מכאן:

$$d(v) > \delta(s,v) = \delta(s,u) + 1 = d(u) + 1 \ (**)$$

נראה כי אי־השוויון (**) לא יתכן. נסתכל על הצעד בו $u$ יוצא מהתור נבחין ב 3 מקרים:

1. $v$ עוד לא "התגלה", לכן מהאלגוריתם נקבל $d(v)=d(u)+1$$\Leftarrow$ סתירה ל־(**).
2. $v$ עוד לא היה בתור. לכן, $v$ נכנס לתור לפני $u$ (שכן התור FIFO) וממסקנה 4 $d(v)\le d(u)$ $\Leftarrow$ סתירה ל־(**).
3. הצומת $v$ עדיין בתור. לכן, מיד לפני ש־$v$ יצא מהתור, $u$ ראשון בתור ו־$v$ "במקרה הגרוע" אחרון בתור. ולכן מלמה 3 $d(v)\le d(u)+1$ $\Leftarrow$ סתירה ל־(**).

מכאן נקבל כי לכל צומת $v$ שהוא בר הגעה מ־$s$ מתקיים $d(v)=d(s,v)$.
לסיום, נזכיר כי אם $\pi(v)=u$ אזי $\delta(s,v)=\delta(s,u)+1 \Leftrightarrow d(v)=d(u)+1$
לכן, ניתן לקבל מסלול קצר ביותר מ־$s$ ל־$v$ ע"י הוספת $(\pi(v),v)$ למסלול הקצר ביותר מ־$s$ ל־$\pi(v)$.