

הרצאה 6 אלגוריתמים

תזכורת: מסלולים קלים ביותר

נתון:

★ גרף מכוון $G = (V, E)$

★ ופונ' משקל $W : E \rightarrow \mathbb{R}$

★ צומת $s \in V$

מטרה:

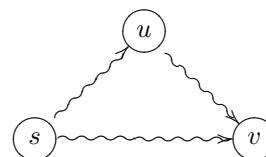
למצוא לכל $v \in V$ מסלול קל ביותר מ- s ל- v .
 "אורך" נמדד ע"ס כוס משקלי הקשתות שבמסלול.
 מסמנים ב- $\delta(u, v)$ את אורך המסלול הקשל ביותר ב- G מ- u ל- v .

$$\delta(u, v) = \begin{cases} \infty & v \text{-non reachable from } u \\ -\infty & \begin{array}{l} \text{there is "negative circle"} \\ \text{reachable from } u \text{ and} \\ v \text{ is reachable from the circle} \end{array} \\ \min\{w(p) : p\text{-path from } u \text{ to } v\} & \text{otherwise} \end{cases}$$

טענה 1:

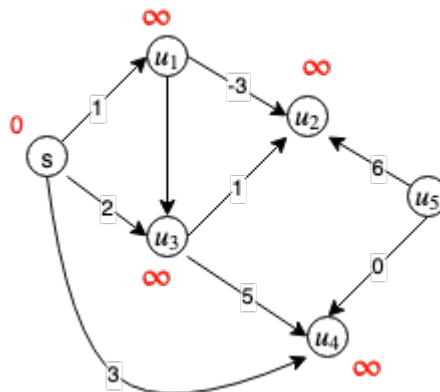
אם p מסלול קל ביותר מ- u ל- v , אז כל תת-מסלול שלו הוא קל ביותר.

טענה 2:



לכל קשת $(u \rightarrow v) \in E$ מתקיים:
 $\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + w(u \rightarrow v)$

הוכחה:



אם אין מסלול מ- s ל- u אז $\delta(s, u) = \infty$ וסיימנו.
 אחרת, נסתכל על המסלול קל ביותר מ- s ל- u , ונשרשר לו את הקשת $(u \rightarrow v)$.
 \Leftarrow אחרת המסלול החדש הוא $\delta(s, u) + w(u \rightarrow v)$ ולכן אי-שוויון מתקיים. ■

השיטה הגנרית:

1. אתחול: $d(s) \leftarrow 0$, ולכל $u \neq s$: $d(u) \leftarrow \infty$.
2. כל עוד קיימת קשת $(u \rightarrow v) \in E$ כך ש:
 $d(v) > d(u) + w(u \rightarrow v)$
 $d(v) \leftarrow d(u) + w(u \rightarrow v)$

משפט:

אם אין מעגלים שליליים בגרף, אז:

1. לכל צומת $v \in V$ ולכל שלב בריצת השיטה הגנרית: $d(v) \geq \delta(s, v)$.
2. כשהשיטה הגנרית עוצרת, אז:
 $d(v) = \delta(s, v) \quad \forall v \in V$

הוכחה:

1. נוכיח באינדוקציה על הצעדים של השיטה הגנרית.

★ בסיס:

באתחול $d(u)$ לכל $u \neq s$ שווה ל- ∞ ועבור s מתקיים $\delta(s, s)$
 $d(s) = 0$ $\underbrace{\hspace{1cm}}_{\text{there are no negative circles in G}}$

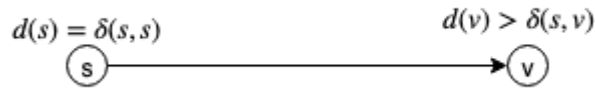
★ צעד:

בהינתן קשת $(u \rightarrow v) \in E$ שהפרה את אי-שוויון המשולש ביחס לסימונים d ,

ביצענו: $d(v) \leftarrow d(u) + w(u \rightarrow v)$

$$\begin{aligned} d(v) &= d(u) + w(u \rightarrow v) \\ &\geq \underbrace{\delta(s, u)}_{\text{induction on } d(u)} + w(u \rightarrow v) \geq \underbrace{\delta(s, v)}_{\text{triangle inequality}} \end{aligned}$$

2. מ-א, מספיק להראות שהשיטה הגנרית עוצרת שלכל $v \in V$
 $d(v) \leq \delta(s, v)$



נניח בשלילה שקיים צומת v עבורו:

$$d(v) > \delta(s, v)$$

$\Leftarrow \delta(s, v)$ אינו יכול להיות ∞ , ובגלל שאין מעגלים שליליים, $\delta(s, v)$ סופי.
 \Leftarrow יהיה p מסלול קל ביותר כלשהו מ- s ל- v

$$p = v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_{k-1} \rightarrow v_k = v$$

עבור s : $d(s) = \delta(s, s)$ (כי אין מעגלים שליליים).
 עבור v : $d(v) > \delta(s, v)$
 ולא קיים אף צומת v_i במסלול כך ש- $d(v_i) < \delta(s, v_i)$ (בגלל א).
 \Leftarrow קיימת קשת ב- p $(v_i \rightarrow v_{i+1})$ כך ש:

$$\begin{cases} d(v_i) = \delta(s, v_i) \\ d(v_{i+1}) > \delta(s, v_{i+1}) \end{cases}$$

(וזו הקשת הראשונה שבה זה קורה).

$$\begin{aligned} d(v_{i+1}) &> \delta(s, v_{i+1}) \underbrace{=} \delta(s, v_i) + w(v_i \rightarrow v_{i+1}) \\ &\quad \text{1. sub-path of lightest path is lightest.} \\ &= d(v_i) + w(v_i \rightarrow v_{i+1}) \end{aligned}$$

\Leftarrow הקשת $(v_i \rightarrow v_{i+1})$ מפרה את אי-שוויון המשולש ביחס לסימונים d .
 \Leftarrow השיטה הגנרית לא היתה צריכה לעצורה. ■

$$\begin{aligned}
\delta(s, v_{i+1}) &= \underbrace{(v_{i+1} \text{ ל-} s \text{ מ-} \delta}_{(1)} \\
&= w(v_0 \rightarrow v_1) + w(v_1 \rightarrow v_2) + \dots + w(v_{i-1} \rightarrow v_i) + w(v_i \rightarrow v_{i+1}) \\
&= \underbrace{w(v_i \rightarrow v_{i+1}) + \delta(s, v_i)}_{(1)} \\
&= \delta(s, v_i) + w(v_i, v_{i+1})
\end{aligned}$$

שאלה:

כיצד ניתן לשחזר איזשהו מסלול קל ביותר ?
לכל צומת $v \in V$ מסמן ב- $\pi(v)$ את הצומת שגרם לעדכון האחרון של $d(v)$.

★ אתחול: $\forall v \in V \pi(v) \leftarrow NULL$

★ בעדכון: שהקשת $(u \rightarrow v)$ מבצעת עדכון ל- $d(v)$ נצבע: $\pi(v) \leftarrow u$

הגדרה:

עץ מסלולים קלים ביותר של G ו- s הוא תת-גרף $G' = (V', E')$ של G כך ש:

1. V' זה אוסף הצמתים הישיגיים מ- s .
2. G' הוא מכון ששורשו s .
3. לכל $v \in V'$ המסלול היחיד ב- G' מ- s ל- v הוא מסלול קל ביותר מ- s ל- v ב- G .

טענה:

אם אין מעגלים שליליים, אז השיטה הגנרית עוצרת, נסתכל על הגרף הבא:

$$\begin{aligned}
G' &= (V', E') \\
V' &= \{v : \pi(v) \neq NULL\} \cup \{s\} \\
E' &= \{(\pi(v) \rightarrow v) : \pi(v) \neq NULL\}
\end{aligned}$$

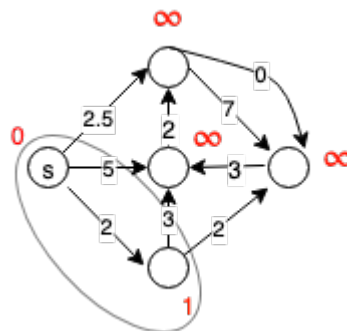
אז G' הוא עץ מסלולים קלים ביותר של G מ- s .

"הוכחה":

שלבים להוכחה (לא נוכיח):

- ★ בכל שלב בריצה של השיטה הגנרית, G' חסר מעגלים מכוונים.
- ★ בסיום הריצה, V' זה אוסף הצמתים הישיגיים מ- s .
- ★ בסיום הריצה, המסלול היחיד ב- G' מ- s ל- v הוא מסלול קל ביותר מ- s ל- v ב- G .

נתמקד במקרה שמשקלים הם אי-שליליים, כלומר $\forall (u \rightarrow v) \in E, w(u \rightarrow v) \geq 0$.
דוגמה:



האלג' של Dijkstra (1959)

1. אתחול:

$Q \leftarrow V, d(s) = 0$, ולכל $u \neq s, d(u) = \infty$.

2. כל עוד $Q \neq \emptyset$:

(א) יהי u הצומת בעל d הקטן ביותר ב- Q .

(ב) לכל קשת $(u \rightarrow v) \in E$, אם $d(v) > d(u) + w(u \rightarrow v)$ אז:
 $d(v) \leftarrow d(u) + w(u \rightarrow v)$

(ג) הוצא את u מ- Q .

זמן ריצה:

למשל, אם מממשים את Q בעזרת ערימת מינימום זמן הריצה הכולל: $O(|E| \log |V|)$

נכונות:

מנכונות השיטה הגנרית, מספיק שנראה שהאלג' של Dijkstra עוצר
וכל הקשתות $(u \rightarrow v) \in E$ מקיימות:

$$d(v) \leq d(u) + w(u \rightarrow v)$$

טענה 1:

נניח באיטרציה מסויימת u יצא מ- Q , ובאיטרציה העוקבת לה v יצא מ- Q . אז:

$\star d(u)$ ברגע ההוצאת u מ- Q .

$\star d(v)$ ברגע ההוצאת v מ- Q .

ומתקיים:

$$d(u) \leq d(v)$$

הוכחה:

ברגע הוצאת u מ- Q מתקיים: $d(u) \leq d(v)$ (מאופן בחירת הצומת שיוצא מ- Q).

* אם $d(v)$ לא התעדכן במהלך האיטרציה ש- u יצא מ- Q סיימנו.

* אחרת יש קשת $(u \rightarrow v) \in E$ וביצענו עדכון $d(v) \leftarrow d(u) + \underbrace{w(u \rightarrow v)}_{\geq 0}$ הטענה

נובעת מאי-שליליות המשקלים.

■

מסקנה 1:

טענה 1 נכונה גם אם v יצא אחרי u אבל לא בהכרח באיטרציה העוקבת.

מסקנה 2:

לאחר הוצאת v מ- Q , $d(v)$ לא מתעדכן.

הוכחה:

נניח בשלילה שקיים צומת v עבורו $d(v)$ מתעדכן אחרי ש- v יצא מ- Q .
נסתכל על הפעם הראשונה שזה קרה.

\Leftarrow קיים צומת u , שכרגע יוצא מ- Q

וקשת $(u \rightarrow v) \in E$ כך ש- $d(v) > \underbrace{d(u)}_{\text{when we get it from } Q} + w(u \rightarrow v)$

when we get it from Q

(ואז ברגע הוצאת v מ- Q בגלל שזו הפעם הראשונה).

מאי-שליליות המשקלים קיבלנו ש- $d(v)$ ברגע הוצאת v מ- Q גדול ממש מ- $d(u)$

ברגע הוצאת u מ- Q וזו סתירה למסקנה הראשונה. ■