



## **BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM**

---

Kémiai és Környezeti Folyamatmérnöki Tanszék

Tervezési feladat:

Hőintegráció tervezése matematikai modellel

Témavezető:

Dr. Farkas Tivadar

Készítette:

Kiss Bendegúz Barnabás

2024

## Tartalomjegyzék

A tervezési feladat: .....	3
Módszer kiválasztása: .....	3
A matematikai modell: .....	4
A matematikai modell paraméterei és változói: .....	5
A modell kikötései/egyenletei: .....	6
Hőmérleg egyenletek: .....	6
Hőmérsékletek kikötései: .....	7
A külső fűtés/hűtés igénye: .....	7
Logikai kikötések: .....	8
Hőmérsékletkülönbségek kikötése: .....	8
A modell célfüggvénye: .....	9
Eredmények: .....	12
Összegzés .....	17
Felhasznált irodalom: .....	19

## A TERVEZÉSI FELADAT:

A feladatom egy költséghatékony hőintegráció kapcsolás megtervezése volt, az áramok adatai: a hőkapacitásáram, hőátadási tényező és a ki és bemeneti hőmérsékletei adottak voltak. A külső hűtés és fűtés fajlagos költségei fixek, emellett a hőcserélő költségei annak a hőcserélő felületével arányosítjuk. A feladatot a következő 1. táblázat szemlélteti:

1. táblázat A hőintegrációs feladat adatait összefoglaló táblázat

Áram	T <sub>be</sub> (°C)	T <sub>ki</sub> (°C)	CP (kW/°C)
H1	85	45	156,3
H2	120	40	50,0
H3	125	35	23,9
H4	56	46	1250,0
H5	90	85	1500,0
H6	225	74	50,0
C1	40	55	466,7
C2	55	65	600,0
C3	65	165	195,0
C4	10	170	81,3
Gőz	200	199	–
Hűtővíz	15	25	–

Továbbá: Gőz költsége: 100 \$/kW/év Hűtővíz költsége: 15 \$/kW/év  
Hőcserélő költség: 60\$/kW/év Hőátadási tényező: 0,05 kW/m<sup>2</sup>/°C

## MÓDSZER KIVÁLASZTÁSA:

Számos eszköz áll rendelkezésünkre, hogy egy hőintegrációt effektív módon megtervezzünk. [1] Viszont ezek számos módon heurisztikára épülnek, ami nem minden esetben igaz. Folytatva minden egyes új feladatra meg kell oldani őket, illetve a módszerek csak egy adott változót minimalizálnak. Emellett nem vesz figyelembe mérnöki megfontolásokat például, hogy egyes áramokat nem lehet összekötni, vagy egy meglévő hőintegrációt kell fejleszteni.

Példának okán, a pinch módszer a külső/fűtés igényt minimalizálja, de nem lehet fel benne a hőcserélő felület minimalizálásra való törekvés a minimális hajtóerő megfogalmazásán kívül. [2]

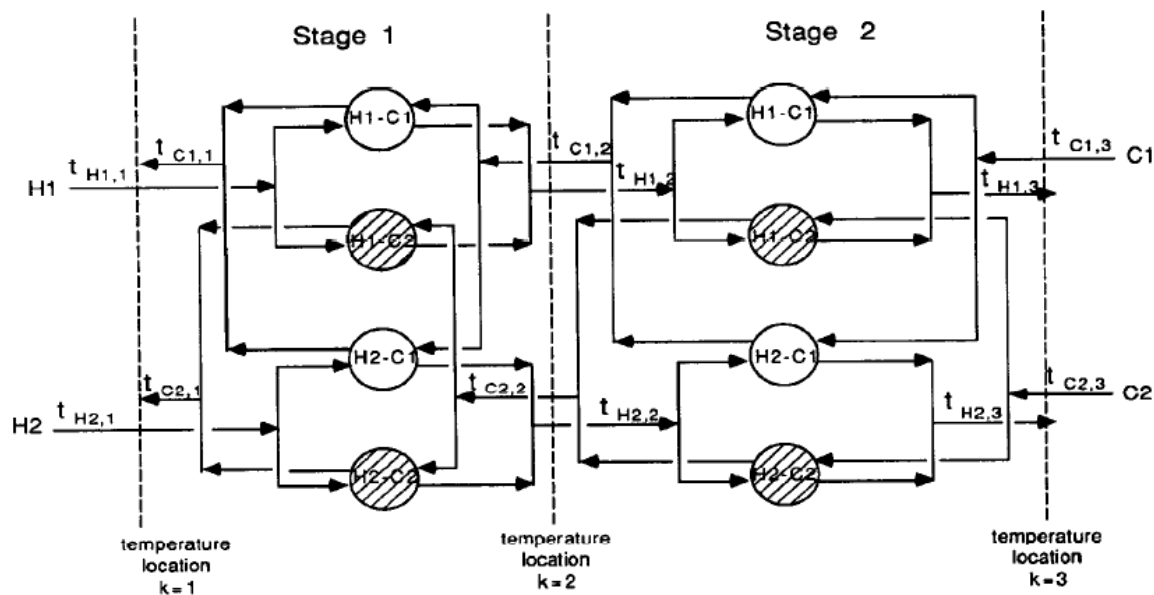
Ennélfogva a feladatot úgy ítélem, hogy egy matematikai modellel fogom megoldani, amiben a hőcserélők költségét és a külső fűtés/hűtés költségét fogom szempontba helyezni. Amiben egyes kikötések eszközölhetőek, fixálhatók egyes hőcserélők pozíciói, (további fejlesztés

érdekében,) vagy egyes áramok csatlakozásait megtilthatjuk, vagy áramok bármilyen arányú elosztását eszközölhetjük. És nem utolsó sorban más hőintegrációs feladatok esetén is használható lesz.

#### A MATEMATIKAI MODELL:

Minden matematikai modell felépítése előtt ismernünk kell a problémát, ami adott (a hőintegráció költségének minimalizálása). Mindemellett az ahhoz tartozó konstans paramétereket és változókat kell azonosítanunk, de ehhez előtte meg kell érteni a szuperstruktúra működését.

Az általam alkalmazott modellt egy folyóiralcikk alapján írtam meg.[2] Ahol a szuperstruktúrát a következő 1. ábra szemlélteti:



1. ábra Az általam használt matematikai modell szuperstruktúrája

Az 1. ábrán látható szuperstruktúrában a hőcsere folyamatok egyes intervallumokban történnek meg, ezeket az intervallumokat egyes hőmérséklet-állapotok határolják be. Következésképpen, amennyi intervallumunk van +1 hőmérséklet állapotunk lesz.

A hideg és meleg áramok egymással szemben közlekednek. A meleg belépési hőmérséklete a legelső hőállapot lesz, és intervallumról intervallumra csökkenhet. Míg a hideg belépési hőmérséklete az utolsó állapot lesz és visszafelé lépve annak a hőmérséklete emelkedhet.

Minden egyes intervallumban minden két áram között történhet hőcsere, vagy nem. Mindezen lehetőségek különböző egyenleteket jelent, (pl.: egy nem létező hőcserélőben a hőcserének pontosan nullának kell lennie, vagy egy létező hőcserélőben a hőmérsékletek közötti hajtóerőnek, pozitívnak kell lennie) tehát szükségünk lesz egy bináris változóra, ami meghatározza egy hőcserélő létezését és az ahhoz tartozó kikötéseket.

Ráadásul, ha felület költségeit kell számolni, a két áram közötti hajtóerőre is szükség lesz, a következő módon:

$$\dot{Q} = A * U * LMTD$$

$$A = \frac{\dot{Q}}{U * LMTD}$$

Ahol A a felület [m<sup>2</sup>], U a hőátbocsátási tényező [W/m<sup>2</sup>/K], az LMTD a logaritmikus hőmérsékletkülönbség [K] és  $\dot{Q}$  a hőáram [W].

Mivel a logaritmikus hőmérsékletkülönbség jól tudjuk, hogy nem lineáris összefüggés.[3] Következésképpen a matematikai modell sem lesz lineáris. Az előbb felsorolt tényezők miatt lesz szükségünk egy vegyes egészértékű nemlineáris programozási modellre, (Mixed Integer Non-Linear Program) MINLP-re.

A matematikai modell paraméterei és változói:

Az ismert szuperstruktúra alapján tudjuk azonosítani az egyes halmazokat, paramétereket és változókat. A halmazok indexei a következők:

$i = \text{Meleg áramok}$

$j = \text{Hideg áramok}$

$k = \text{Hőmérséklet lokáció}$

Továbbá fogalmazunk meg részhalmazokat:

$HU \in i$  és  $HS \in i$  [A (Hot Utility) külső fűtőközeg és a (Hot Process Stream) meleg áram része a meleg áram halmazának]

$CU \in j$  és  $CPr \in j$  [A (Cold Utility) külső hűtőközeg és a (Cold Process Stream) hideg áram része a hideg áram halmazának]

$STEPS \in k$  [A (STEPS) lokációk száma része a hőmérséklet állapotoknak]

A modell paraméterei a következők:

TIN =	Bemeneti hőmérséklet
TOUT =	Kimeneti hőmérséklet
F =	Hőkapacitásáram
h =	Hőátadási tényező
U =	Teljes hőátbocsátási tényező
CCU =	A hűtőközeg fajlagos költsége
CHU =	A fűtőközeg fajlagos költsége
CF =	Hőcserélő fix költsége
C =	Hőcserélő költség felületével arányosan
B =	A hőcserélő felület költség hatványkitevője
NumberOfStages =	Intervallumok száma
MaxHeatTransfer =	A maximális hőcsere mennyiség
MaxQCU =	Maximális hőcsere a meleg áram és a hűtőközeg között
MaxQHU =	Maximális hőcsere a hideg áram és a hűtőközeg között

MaxTempDifference= Maximális hőmérséklet-különbség

MAT = Minimum hőmérséklet-különbség

A modell változói:

$dt_{i,j,k}$ = hőmérséklet különbség  $i$  és  $j$  között, a  $k$  hőmérséklet állapotban

$dtcu_i$ = hőmérséklet különbség az  $i$  áram és a hűtőközeg között (a külső hűtést végző hőcserélő az  $i$  áram szempontjából a bemeneti oldalon)

$dthu_j$ = hőmérsékletkülönbség a  $j$  áram és a fűtőközeg között (a külső fűtést végző hőcserélő a  $j$  áram szempontjából a bemeneti oldalon)

$q_{i,j,k}$ = hőáram  $i$  és  $j$  áramok között a  $k$  hőmérséklet állapotban

$qcu_i$ = hőáram az  $i$  áram és a hűtőközeg között

$qhu_j$ = hőáram a  $j$  áram és a fűtőközeg között

$th_{i,k}$ =  $i$  áram hőmérséklete a  $k$  lokációban

$tc_{j,k}$ =  $j$  áram hőmérséklete a  $k$  lokációban

$z_{i,j,k}$ = bináris változó, meghatározza, hogy megvalósul-e a kötés az  $i$  és  $j$  áram között a  $k$  lokációban

$zcu_i$ = bináris változó, meghatározza, hogy megvalósul-e az  $i$  áram külső hűtése

$zhu_j$ = bináris változó, meghatározza, hogy megvalósul-e a  $j$  áram külső fűtése

A fent közölt paraméterekkel és változókkal felírható a matematikai modell, fontos kiemelni, hogy az alábbi egyszerűsítésekkel élünk:

-Hőcsere csakis a hőcserélőkben történik, nincs hőveszteség

-A hőkapacitásárama egyes áramoknak a megadott hőmérséklettartományban közel konstans

Ahogy említettem az intervallumok számából, ugyanannyi +1 hőállapot/lokáció fog származni, ennél fogva a  $k = [1, \dots NumberOfStages + 1]$  tagokat fog tartalmazni.

A modell kikötései/egyenletei:

Miután azonosítottuk a paramétereket felírhatóak a modell egyenletei és kikötései, a következő egyelétréjön-e kötés nletek akkor érvényesek, ha minden egyes paraméter és változó nem negatív értéket vesz fel. Ez az első kikötésünk, minden változóra és paraméterre.

$$0 \leq \text{minden változó és paraméter}, \quad (1)$$

Hőmérleg egyenletek:

Teljes hőmérleg egyenlet egyes áramokra azért van szükség, hogy az áramok bemenő és kimenő hőmérsékletéhez szükséges hő mennyiségét fixáljuk. A hő mennyiségének egyenlőnek kell lennie, a hőintegráció során felvett/leadott hő és a külső hűtés/fűtés hő összegével:

$$(TIN_i - TOUT_i) * F_i = \sum_{k \in STEPS, j \in CPr} q_{i,j,k} + qcu_i, \quad i \in HP, (2)$$

$$(TOUT_j - TIN_j) * F_j = \sum_{k \in STEPS, i \in HP} q_{i,j,k} + qhu_j, \quad j \in CPr \quad (3)$$

Hőmérleg egyenletet kell írunk minden egyes intervallumra, amit úgy tehetünk meg, hogy a hőcsere mennyiségét a k intervallumban a k-ban lévő hőmérséklet és a k+1-ben lévő hőmérséklet viszonyából kapjuk meg:

$$(th_{i,k} - th_{i,k+1}) * F_i = \sum_{j \in CPr} q_{i,j,k}, \quad k \in STEPS, i \in HP, \quad (4)$$

Mivel a szuperstruktúrában a k lokáció számozásával a hőmérsékletek csökkennek, mind a hideg és meleg áramra, így a hideg áramra ez hasonlóan felírható.

$$(tc_{j,k} - tc_{j,k+1}) * F_j = \sum_{i \in HP} q_{i,j,k}, \quad k \in STEPS, j \in CPr, \quad (5)$$

Ezen egyenletekből következik, hogy a hőcserét egyes intervallumokban értelmezzük, tehát száma megegyezik a NumberOfStages paraméterrel. Míg a modellben NumberOfStages+1 hőmérséklet lesz.

Hőmérsékletek kikötései:

A bemeneti hőmérsékleteket ki kell kötni, hogy melyik k pozícióba érkezzenek. Mivel egymással szemben közlekednek a meleg és hideg áramok, a meleg áram a k=1-be érkezik, míg a hideg áram a k= NumberOfStages + 1-be:

$$TIN_i = th_{i, k=1}, \quad i \in HP, \quad (6)$$

$$TIN_j = tc_{j, k=NOS+1}, \quad j \in CPr, \quad (7)$$

Ki kell kötnünk, hogy a meleg áram csak hűlhet, míg a hideg áram csak melegedhet, ahogy intervallumról intervallumra halad. Továbbá, hogy az utolsó hőmérsékletük nem lehet hideg áram esetén melegebb, míg meleg áram esetén hidegebb, mint a feladatban megfogalmazott kimeneti hőmérsékletek. Azért nem kell, hogy pontosan egyenlőnek kell ezen hőmérsékleteknek lennie a feladatban megfogalmazottakkal, mert azokat még tudjuk külső fűtés/hűtés-vel a megfelelő hőmérsékletre emelni/csökkenteni.

$$th_{i,k} \geq t_{i,k+1}, \quad i \in HP, k \in STEPS, \quad (8)$$

$$tc_{j,k} \geq tc_{j,k+1}, \quad j \in CPr, k \in STEPS, \quad (9)$$

$$TOUT_i \leq th_{i,k=NOS+1}, \quad i \in HP, \quad (10)$$

$$TOUT_j \geq tc_{j,k=1}, \quad j \in CPr, \quad (11)$$

A külső fűtés/hűtés igénye:

A külső fűtés/hűtés hőmennyisége minden egyes áramra külön van definiálva, miután tudjuk a hőmérsékletek kimeneti k lokációját és hőmérsékletét (7-10), definiálható a fűtés/hűtés igénye, hogy a megfelelő kimeneti hőmérsékletet kaphassuk:

$$(th_{i,k=NOS+1} - TOUT_i) * F_i = qcu_i, \quad i \in HP, \quad (12)$$

$$(TOUT_j - tc_{j,k=1}) * F_j = qhu_j, \quad j \in CPr, \quad (13)$$

Logikai kikötések:

Logikai kifejezésekre és bináris változókra van szükségünk, hogy eldöntsük  $i$  és  $j$  áram között létrejön-e kapcsolat  $k$  lokációban, illetve létrejön-e a külső fűtés és hűtés. A bináris változókat  $z_{i,j,k}$ ,  $zhu_j$  és  $zcu_i$  fogja megtestesíteni. Minden egyes  $k$  lokációban, ha kötés nem jön létre  $z_{i,j,k} = 0$ , ha igen  $z_{i,j,k} = 1$ , hasonlóan ez érvényes az előbb említett bináris változókra.

Ezáltal felírhatóak a következő kikötések a hőcsere mennyiségre egyes  $i$  és  $j$  kötés esetén:

$$q_{i,j,k} - MaxHeatTransfer_{i,j} * z_{i,j,k} \leq 0, \quad i \in HP, k \in STEPS, j \in CPr \quad (14)$$

Az alábbi képlet azt jelenti, ha kötés nem jön létre akkor a hőcsere mennyiségnek pontosan 0-nak kell lennie, mivel negatív értéket nem vehet fel a  $q_{i,j,k}$  a (1) -ben meg fogalmazottak miatt. A  $MaxHeatTransfer$  értéke változik minden egyes áram párosításra. Ennek az értéknek a meghatározása paraméterekből származik, tehát fixen kiszámolható bármilyen plusz változó beiktatása nélkül.

Azért fontos, hogy ennek az értéket egyesével külön meghatározzunk, egy nagy érték helyett, mint a tradicionális big M módszernél, mert ez pontosan olyan a keresési határokat ad, ami lehetséges. Ezzel könnyebben kezelhető modellt tudunk alkotni. A maximális hőcsere mennyiség két áram esetén a két áram szükséges hőmennyisége közül a kisebbik lesz, tehát:

$$MaxHeatTransfer_{i,j} = MIN \left( (TIN_i - TOUT_i) * F_i, (TOUT_j - TIN_j) * F_j \right), i \in HP, j \in CPr \quad (15)$$

Az előbb említett módszerek alapján felírhatóak a következő logikai kikötések, a visszamaradt bináris változókra, ahol a maximális hőcsere, az adott áram teljes hőigényével lesz egyenlő:

$$qcu_i - MaxQCU_i \leq 0, \quad i \in HP \quad (16)$$

$$MaxQCU_i = (TIN_i - TOUT_i) * F_i, \quad i \in HP \quad (17)$$

$$qhu_j - MaxQHU_j \leq 0, \quad j \in CPr \quad (18)$$

$$MaxQHU_j = (TOUT_j - TIN_j) * F_j, \quad j \in CPr \quad (19)$$

Hőmérsékletkülönbségek kikötése:

Ahhoz, hogy megfelelően meg tudjuk határozni a hőcsere felülettel arányos hőcserélő költséget, ismernünk kell a hajtóerőt, ehhez meg kell adnunk hőmérsékletkülönbséget kifejező változókat ( $dt_{i,j,k}$ ,  $dteu_i$  és  $dthu_j$ ). Ezen hőmérsékletkülönbségeket logikusan a következő egyenletek fogják kifejezni:

$$dt_{i,j,k} = th_{i,k} - tc_{j,k}, \quad i \in HP, j \in CPr \quad (20)$$

$$dteu_i = th_{i,k=NOS+1} - TOUT_{CU}, \quad i \in HP \quad (21)$$

$$dthu_j = TOUT_{HU} - tc_{j,k=1}, \quad j \in CPr \quad (22)$$

Azonban gyorsan belátható, hogy vannak olyan helyzetek, amikor az  $i$  és  $j$  áram hőmérsékletkülönbsége negatív. Ez egyben kimondja, hogy ebben a helyzetben csatlakozás nem jöhet létre ugyanis  $0 \leq dt_{i,j,k}$ , így ez kiköthető a következő logikával:



$$(0 \leq) dt_{i,j,k} \leq th_{i,k} - tc_{j,k} + MaxTemperatureDifference_{i,j} * (1 - z_{i,j,k}) \quad (23)$$

$$i \in HP, k \in STEPS, j \in CPr \quad (24)$$

Tehát, ha az előbb említett különbség negatívát eredményez, csakis úgy teljesíthető az előbb említett egyenlet, ha  $z_{i,j,k} = 0$ . Ezért nem valósul meg az  $i$  és  $j$  áram kötése, továbbá a hőcsere mennyisége is nulla, az áramok érintetlenül elhaladnak egymás mellett.

A maximális hőmérsékletkülönbséget már említett okok miatt volt fontos megalkotni, amit a bemeneti és kilépési hőmérsékletek adnak meg, a következő módon:

$$MaxTemperatureDifference_{i,j} = MAX(TIN_i - TIN_j, TOUT_j - TOUT_i) \quad (25)$$

Érdemes megjegyezni, hogy azért keressük a kilépési hőmérsékletek különbségét is, mert ha esetleg azok nagyobb különbséget eredményeznek, mint a belépési hőmérsékletek különbsége akkor a kikötés megvalósíthatatlan lesz.

A logikai kikötések az előbbi megfontolások alapján:

$$dtcu_i \leq th_{i,k=NOS+1} - TOUT_{CU} + MaxtemperatureDifference_{i,j} * (1 - zcu_i), \\ i \in HP, \quad (26)$$

$$dthu_j \leq TOUT_{HU} - tc_{j,k=1} + MaxtemperatureDifference_{i,j} * (1 - zhu_j), \\ j \in CPr, \quad (27)$$

Emellett a végtelen hőcsere felület elkerülésének érdekében a hőmérsékletkülönbségnek kell adnunk egy minimális értéket:

$$dt_{i,j,k} \geq MAT, \quad (28)$$

A modell célfüggvénye:

Mostmár a felvázolt képletekkel és kikötésekkel fel tudjuk írni a matematikai modell célfüggvényét, ami jelen esetben a költségfüggvénye lesz a hőintegrációnak. A költségfüggvény a hőcserélők fix költsége, a külső fűtés/hűtés költsége és a hőcserélők felületével arányos költség. Így a célfüggvényünk a következő lesz:

$$\begin{aligned} \min \sum_{i \in HP} CCU * qcu_i + \sum_{j \in CPr} CHU * qhu_j + \sum_{i \in HP} \sum_{k \in STEPS} \sum_{j \in CPr} CF_{i,j} * z_{i,j,k} + \\ + \sum_{i \in HP} CF_{i,CU} * zcu_i + \sum_{j \in CPr} CF_{HU,j} * zhu_j + \sum_{i \in HP} \sum_{k \in STEPS} \sum_{j \in CPr} C_{i,j} * \left( \frac{q_{i,j,k}}{U_{i,j} * LMTD_{i,j,k}} \right)^{B_{i,j}} \\ + \sum_{i \in HP} C_{i,CU} * \left( \frac{qcu_i}{U_{i,CU} * LMTD_{i,CU}} \right)^{B_{i,CU}} + \sum_{j \in CPr} C_{HU,j} * \left( \frac{qhu_j}{U_{HU,j} * LMTD_{HU,j}} \right)^{B_{i,j}}, \quad (29) \end{aligned}$$

Amiből a hőátbocsátási tényező  $U_{i,j}$ , az egyes árampárosokra az egyes áramok hőátadási tényezőivel számítható a következő módon:

$$U_{i,j} = \frac{1}{\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_j}} \quad (29)$$

Mivel  $U_{i,j}$  paraméterekből van kiszámolva, így annak értéke állandó, így nem fog egy másik változóként megjelenni, ezáltal nem fogja növelni a nemlineáris összefüggéseket a modellben.

Ahhoz, hogy a felületet kiszámolhassuk a már említett okok miatt szükség lesz a hajtóerőre, amit az LMTD tölt be az értéke a következő:[3]

$$LMTD = \frac{\Delta T_1 - \Delta T_2}{\ln\left(\frac{\Delta T_1}{\Delta T_2}\right)}$$

Ahol  $\Delta T_1$  és  $\Delta T_2$  a hőmérsékletkülönbséget jelenti a kilépési és belépési oldalon. Azonban ez nagyon messze van a lineáris kifejezéstől, továbbá nem kezelhető, ha a hőmérsékletkülönbség egyenlő mindkettő oldalon, ennek eredményeképp szükségünk van az LMTD valamilyen könnyebben kezelhető közelítésére[4].

Több lehetséges opciónk is van a Paterson féle:

$$LMTD \cong \frac{2}{3} * (\Delta T_1 * \Delta T_2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3} * \frac{(\Delta T_1 + \Delta T_2)}{2}$$

Underwood:

$$LMTD^{0,3275} \cong \frac{1}{2} * (\Delta T_1^{0,3275} + \Delta T_2^{0,3275})$$

Illetve az általam választott Chen féle közelítés:

$$LMTD \cong \left( \Delta T_1 * \Delta T_2 * \frac{(\Delta T_1 + \Delta T_2)}{2} \right)^{\frac{1}{3}},$$

Azért esett a választás az utolsó közelítésre, mert az míg alábecsüli a hajtóerőt, tehát túlbecsüli a felületet, addig a Paterson féle közelítés általában túlbecsüli azt, tehát alábecsüli a szükséges hőcserélő felületet. Ennek eredményeképpen biztosan nem vétünk olyan hibát, hogy alábecsüljük a tervezett hőintegráció éves költségét. [4]

Azonkívül a Chen közelítése pontosabb mivel, ha az egyik oldalon a hajtóerő nulla, az egész kifejezés nullával lesz egyenlő, míg ez a további közelítésnél nem mondható el, így ezek hamis hajtóerőt adhatnak.

A számítás során feltételezzük, hogy az összes hőcserélő ellenáramban működik, az LMTD számolásánál is ezt tesszük, ezért a következő egyenleteket kapjuk a hajtóerőkre:

$$LMTD_{i,j,k} = \left( dt_{i,j,k} * dt_{i,j,k+1} * \frac{dt_{i,j,k} + dt_{i,j,k+1}}{2} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad i \in HP, k \in STEPS, j \in CPr \quad (30)$$

Hasonlóan, mint a  $q_{i,j,k}$  esetében, mindig eggyel kevesebb hajtóerő kerül majd kiszámításra, mint k lokáció van.

Míg a külső fűtés/hűtés esetén a hajtóerők a következők lesznek:

$$LMTDcu_{i,CU} = \left( dtcu_i * (TOUT_i - TIN_{CU}) * \frac{dtcu_i + (TOUT_i - TIN_{CU})}{2} \right)^{\frac{1}{3}},$$

$$i \in HP \quad (31)$$

$$LMTDhu_{HU,j} = \left( dthu_j * (TIN_{HU} - TOUT_j) * \frac{dthu_j + (TIN_{HU} - TOUT_j)}{2} \right)^{\frac{1}{3}},$$

$$j \in CPr \quad (32)$$

Tapasztalataim szerint az általam használt program sokkal könnyebben kezelte a modellt, ha a hajtóerőket nem külön változóként, hanem rögtön a célfüggvénybe illesztettem őket az új alkalmazásokkal ellentétben[5], így a célfüggvény konkrét alakja:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i \in HP} CCU * qcu_i + \sum_{j \in CPr} CHU * qhu_j + \sum_{i \in HP} \sum_{k \in STEPS} \sum_{j \in CPr} CF_{i,j} \cdot z_{i,j,k} + \\ & + \sum_{i \in HP} CF_{i,CU} * zcu_i + \sum_{j \in CPr} CF_{HU,j} * zhu_j + \\ & + \sum_{i \in HP} \sum_{k \in STEPS} \sum_{j \in CPr} C_{i,j} * \left( \frac{q_{i,j,k}}{U_{i,j} \cdot \left( dt_{i,j,k} * dt_{i,j,k+1} * \frac{dt_{i,j,k} + dt_{i,j,k+1}}{2} \right)^{\frac{1}{3}}} \right)^{B_{i,j}} \\ & + \sum_{i \in HP} C_{i,CU} * \left( \frac{qcu_i}{U_{i,CU} * \left( dtcu_i * (TOUT_i - TIN_{CU}) * \frac{dtcu_i + (TOUT_i - TIN_{CU})}{2} \right)^{\frac{1}{3}}} \right)^{B_{i,CU}} \\ & + \sum_{j \in CPr} C_{HU,j} * \left( \frac{qhu_j}{U_{HU,j} * \left( dthu_j * (TIN_{HU} - TOUT_j) * \frac{dthu_j + (TIN_{HU} - TOUT_j)}{2} \right)^{\frac{1}{3}}} \right)^{B_{i,j}}, \quad (33) \end{aligned}$$

Az előbb felvázolt modellt azért választottam, mert rugalmasan használható további feladatokhoz. Valamint már meglévő hőintegrációk továbbfejlesztésre azzal, hogy egyes kötések meglétét fixálhatjuk a bináris  $z_{i,j,k}$  változókkal, továbbá fixálhatjuk a hőcsere mennyiségét és a ki/be meneti hőmérsékletet. Ráadásul, a tervezendő hőcserélők mennyiségét is fixálhatjuk oly módon, hogy egy kikötésben megfogalmazzuk a bináris változók összege egy érték alatt kell legyen:

$$\sum_{i \in HP} \sum_{j \in CPr} \sum_{k \in STEPS} z_{i,j,k} \leq N, \quad (34)$$

Ahol  $N$  a kívánt maximális hőcserélők száma. De akár minimumot is megfogalmazhatunk, de annak alkalmazása nem ajánlott ugyanis megoldhatatlan programot alkothatunk vele.

A hőmérsékletkülönbségnek ( $dt_{i,j,k}$ ) nem kell megadni szigorú minimális értéket ( $MAT \sim 0,1$ ), mint más heurisztikus módszereknél. Ugyanis a változó maximalizálását már megfogalmazza a célfüggvény (mivel az a nevezőben van). Tehát nem kell tartani végtelen nagyságú hőcserélőktől, mert azt kerülni fogja a program. A véleményem szerint indokolt helyzetben érdemes lehet  $MAT$  értékét magasabb értékre venni, például, ha kis helyigényű hőintegrációt szeretnénk tervezni.

Egyes áramok között kötés lehetőségét megtilthatjuk  $z_{i,j,k}$  változó nullára fixálásával a két áram számára. Valamint az egyes áramok szétágazását is korlátozhatjuk a bináris változók összegének korlátozásával, példa okán, ha nem szeretnénk semmiféle ágazást a következő kikötést kell alkalmaznunk:

$$\sum_{i \in HP} z_{i,j,k} \leq 1, \quad k \in STEPS, j \in CPr$$

$$\sum_{j \in CPr} z_{i,j,k} \leq 1, \quad k \in STEPS, i \in HP$$

A modell előnye, hogy minden összefüggés lineáris benne, kivéve a célfüggvényben, ami könnyebb kezelhetőséget ígér. Az előbbieken hosszan tárgyalt modell alkalmazható programban, és a nekem szánt feladat megoldható vele.

## EREDMÉNYEK:

Az előbb felépített matematikai modellt az AIMMS egyenlet orientált optimalizálási szoftverrel oldottam meg a (24.5.8.5-ös verzió) továbbá az Octeract 4.7 solvert használtam.

A programba felvitt egyenletekben olyan változtatást eszközöltem, hogy minden olyan változóra vonatkozó kikötést, ahol a két  $k$  „hőmérsékletközre” volt értendő (pl.:  $LMTD_{i,j,k}$  és  $q_{i,j,k}$ ) ott limitáltam a  $k$  értelmezési határát. Tehát ne okozzon megoldhatatlan egyenleteket, tapasztalataim szerint e kikötés nélkül használhatatlan a modell.

Példaként említem a hőmérleg egyenleteket, amit módosítottam az előbb említett módon:

$$(th_{i,k} - th_{i,k+1}) * F_i = \sum_{j \in CPr} q_{i,j,k}, \quad k | k \leq NOS, i \in HP,$$

$$(tc_{j,k} - tc_{j,k+1}) * F_j = \sum_{i \in HP} q_{i,j,k}, \quad k | k \leq NOS, j \in CPr,$$

Jól látható, meg kell határoznunk, hogy az egyenleteket csak  $k | k \leq NOS$ -ben értelmezzük, mert az utolsó lokációban:  $(tc_{j,NOS+1} - 0) * F_j = (tc_{j,NOS+1}) * F_j = \sum_{i \in HP} q_{i,j,k}$ , vagy  $(th_{i,NOS+1} - 0) * F_i = (th_{i,NOS+1}) * F_i = \sum_{j \in CPr} q_{i,j,k}$  egyenletek teljesíthetetlenek lennének.

Hasonlóan jártam el az összes olyan egyenletre, ami tartalmazza a következő változókat:

$$(dt_{i,j,k}, q_{i,j,k}, z_{i,j,k})$$

A megoldás eléréséhez kifejezetten jó hatással volt, ha kezdőértékeket adtam meg minden egyes változóra, a kezdőértékeket aszerint adtam meg, hogy teljes külső hűtés/fűtés-t feltételeztem. A kezdőértékek közül a legfontosabb a hőmérsékletkülönbség volt, mert az a program indításánál összeesést okozott, így azt a minimális értékére állítottam kezdőértékként, ugyanis nem történik, tehát az értéke bármekkora értéket felvehet a MAT felett:

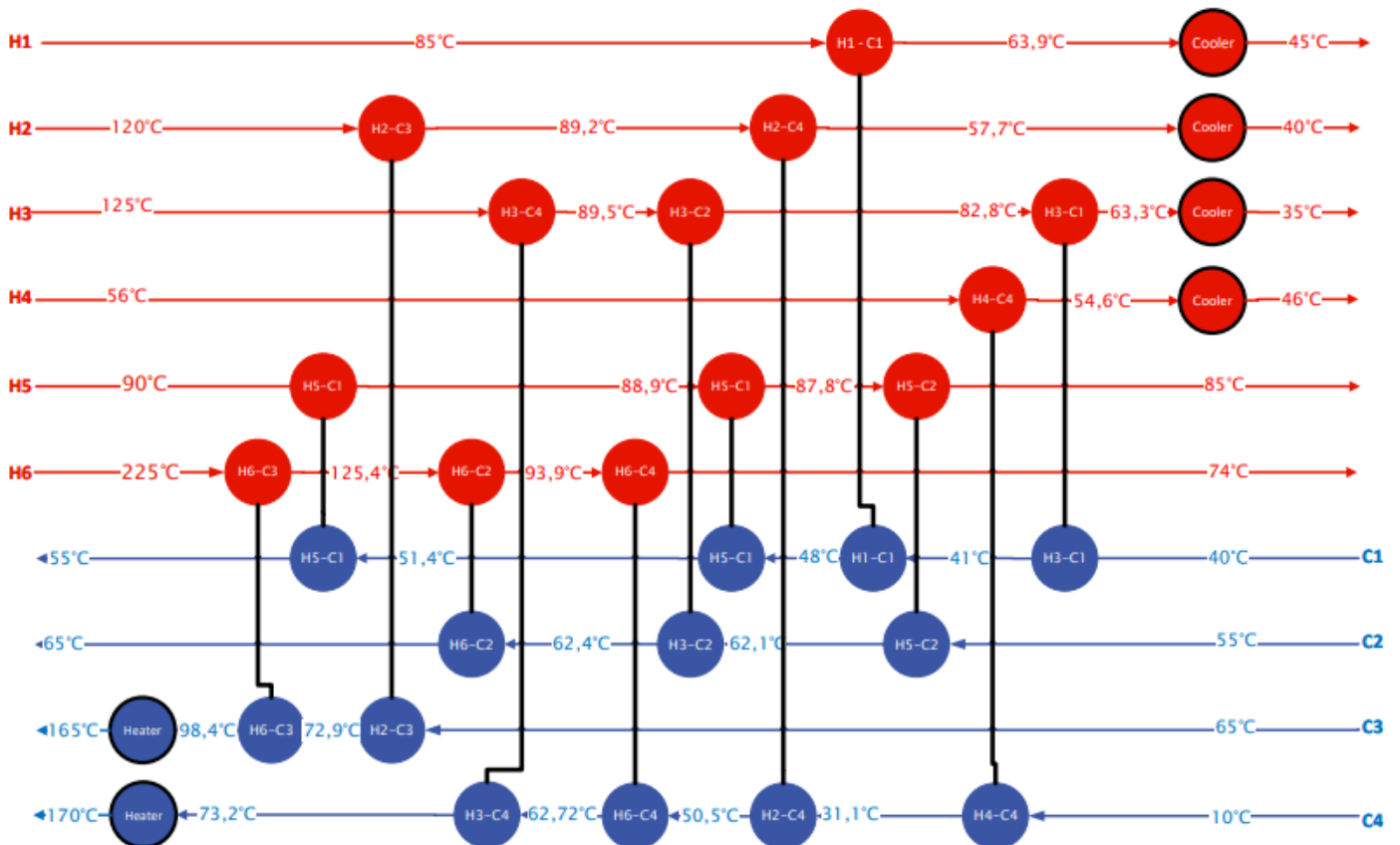
$$dt_{i,j,k} = MAT,$$

A modell alkotója ajánlásával[2] egy ökölszabály szerint kell kiválasztani az intervallumok számát  $\text{NumberOfStages} = \max(N_{HP}, N_{CPr})$  szerint, tehát legtöbb tagot tartalmazó hideg/meleg áram számát kell kiválasztani az intervallumok számának: Az 1. táblázatban látható feladathoz az intervallumok számát,  $[\max(6,4)]$  6-nak állítottam be.

Továbbá az egyes áramok ágaztatását megtiltottam, ugyanis ilyen sok áram esetén a valóságban sok bonyodalmat és magasabb költséget okozhat, ha ágaztatást is eszközölünk. Ennek ellenére futtattam, hogy az ágaztatást engedélyeztem, de az nem adott számottevően jobb eredményt.

A paraméterek felvihetőek voltak °C-ban ugyanis nem volt egy áram sem, aminek hőmérséklete 0 °C alatt lett volna. Azonban, ha ez a helyzet fennáll, szigorúan Kelvin mértékegységet kell használni.

A programot közelítőleg 12 óráig futtattam és a következő kapcsolásokat kaptam, amit a 2. ábra jól szemléltet, az egyes hőcserélő egységek, karikával vannak jelölve az áramok nyilain, összekötve. A hideg oldali párjával a hűtés/fűtés a nyilak végein vannak ábrázolva.



2. ábra a tervezett hőintegráció szemléltetése

A feladatot 13 hőcserélő egységgel valósította meg a program, a költségek részletei a következő táblázatokban foglaltam össze:

2. táblázat a hőintegrációban résztvevő hőcserélőkben a hajtóerő, hőcsere, felület és költségei

Hőcserélő neve	LMTD [°C]	Hőcsere mennyisége [kW]	Felület [m <sup>2</sup> ]	Költség [\$/év]
H1-C1	29,4	3297	4492	269526
H2-C3	34,4	1538	1789	107310
H2-C4	32,3	1576	1953	117162
H3-C4	38	848	894	53622
H3-C2	23,8	160	270	16188
H3-C1	31,7	466	588	35286
H4-C4	33,8	1717	2032	121932
H5-C1	36,2	1685	1861	111654
H5-C1 (2)	38,6	1552	1607	96444
H5-C2	27,8	4263	6130	367812
H6-C3	84,1	4980	2368	142074
H6-C2	44,4	1577	1421	85260
H6-C4	27,1	993	1464	87840
			SZUM	1612110

3. táblázat a külső fűtést és hűtést megvalósító hőcserélőkben megvalósuló hőcsere, felülete és költsége

Áramok	Szükséges hőcsere mennyisége [kW]	külső fűtés/hűtés költsége [\$/év]	Szükséges felület [m <sup>2</sup> ]	Hőcserélő költsége [\$]
H1	2955	44319	3450	206992
H2	886	13285	1235	74109
H3	677	10156	961	57684
H4	10783	161748	14232	853916
H5	0	0	0	0
H6	0	0	0	0
C1	0	0	0	0
C2	0	0	0	0
C3	12982	1298217	8373	502350
C4	7874	787391	4736	284142
SZUM		2315116		1979193

A teljes költsége a megvalósított hőintegrációnak  $5,906 \frac{M\$}{\text{év}}$ -nek adódott. Jól látható, hogy nincs szükség külső hőigényre a H5, H6, C1, és C2 esetében. Ami összesen 28050 kW szükségletet vesz ki a rendszerből.

Azért, tarottam érdemesnek megemlíteni a hajtóerőket egyes egységekben, mert ez jól bizonyítja azt, hogy a program költségminimalizálás esetén az LMTD-k értékeit ésszerűnek választja meg, annak ellenére, hogy a hőmérsékletkülönbség minimális értéke nagyon alacsony 0,1 volt. A legkisebb hajtóerő  $\sim 24^\circ\text{C}$ , ami teljesen elképzelhető egy pinch tervezés során egy MAT értéknek.

A programot lefuttattam, úgy, hogy az ágaztatást engedélyeztem, ez az azonban nem hozott szignifikánsan jobb eredményt a költség szempontjából  $5,900 \frac{M\$}{\text{év}}$ -re jött ki az éves költség. Ekkor egyszer történik ágaztatás és a H5-ös áramot osztja a program három része, egy intervallumban.

Érkezhet az a kérdés, hogy mennyit spórolunk ezzel a hőintegrációval, ha mindent külső fűtéssel/hűtéssel oldanánk meg? A választ összegezi a következő 4. táblázat:

4. táblázat, ha a kapott feladatot csakis csak külső hűtés és fűtéssel szeretnénk volna megoldani, látható a hajtóerő, hőcsere mennyisége, a hőcserélő szükséges felülete, költsége és a külső áramok költségei.

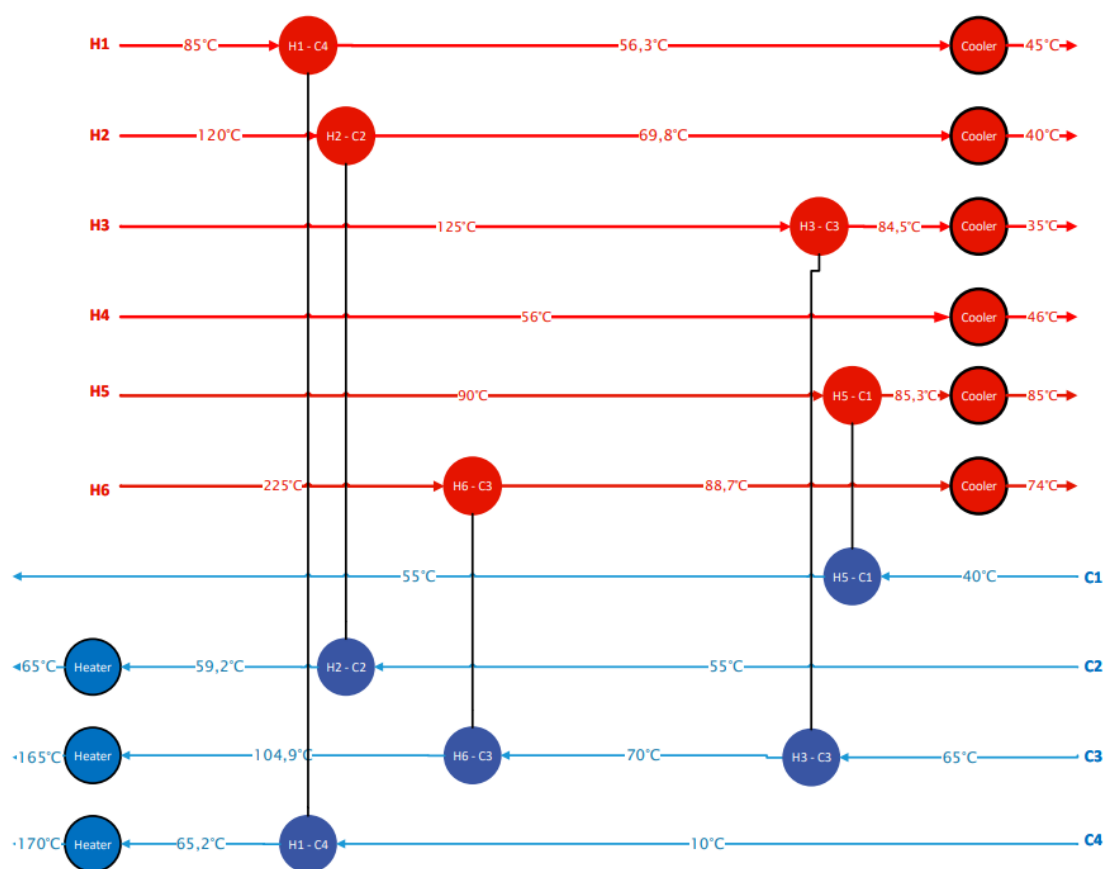
Áram	LMTD [°C]	Hőcsere [kW]	Felület [m <sup>2</sup> ]	Hőcserélő költsége \$/év	Külső áramok költsége \$/év
H1	43	6252	5782	346922	93780
H2	52	4000	3064	183867	60000
H3	49	2151	1745	104703	32265
H4	31	12500	16135	968074	187500
H5	67	7500	4448	266901	112500
H6	115	7550	2623	157391	113250
C1	152	7001	1844	110668	700050
C2	139	6000	1722	103313	600000
C3	73	19500	10624	637415	1950000
C4	85	13008	6102	366114	1300800
-			SZUM	3245369,299	5150145

Ha ilyen módon oldottuk volna meg a feladatot akkor az összköltség  $8,4 \frac{M\$}{\text{év}}$ -nek adódott volna, ez a többletköltség annak ellenére jelenik meg, hogy a hajtóerők kimondottan magasak, ami az előző megoldáshoz képest  $2,5 \frac{\$}{\text{év}}$  több. Tehát kimondható, hogy közel 30%-os költség csökkentést sikerült a modellel eszközölni.

Mindezek ellenére gyorsan belátható, hogy a 13 hőcserélővel megalkotott kötések igen bonyolultak és karbantartás esetén még 4-5 ilyen hőintegráció esetén a karbantartás ideje jócskán növekedhet. Továbbá, létrejöttek a megoldásomban igen kicsi hőcserét megvalósító egységek, mint pl.: a H3-C2. A töredezettséget elkerülve szerettem volna egy olyan hőintegráció kapcsolást tervezni, ahol a maximális hőcserélők számát megadom a következő kikötéssel, ezzel elkerülve a magas számú hőcserélőket a programban:

$$\sum_{i \in HP} \sum_{j \in CPr} \sum_{k \in STEPS} z_{i,j,k} \leq N,$$

A maximális hőcserélők számát N=6-ra állítottam. A megoldás 10 percet vett igénybe, ami végül csak 5 hőcserélőt eredményezett, amit szemléltet a 3. ábra:



3. ábra az új kritérium szerint kapott hőintegrációs kapcsolás

Az összköltség  $6,135 \frac{M\$}{\text{év}}$ -nak adódott, ami összesen  $0,235 \frac{M\$}{\text{év}}$  növekedés az első megoldáshoz képest. Továbbá látható, hogy már csak egy áram van (C1), amit teljes mértékben integrálni tudtunk. Ráadásul egy áram teljes mértékben kimaradt a H4-es. A költségek részleteit az alábbi táblázatokban részleteztem:

5. táblázat a hőintegrációban résztvevő hőcserélőkben a hajtóerő, hőcsere, felület és költségei

Hőcserélő neve	LMTD [°C]	Hőcsere mennyisége [kW]	Felület [m <sup>2</sup> ]	Költség [\$]
H1-C4	31	4490	5767	346015
H2-C2	32	2509	3096	185769
H3-C3	34	968	1132	67942
H5-C1	40	7000	7011	420637
H6-C3	54	6813	5058	303464
-			SZUM	1323828



6. táblázat a külső fűtést és hűtést megvalósító hőcserélőkben megvalósuló hőcsere, felülete és költsége

Áramok	Szükséges hőcsere mennyisége [kW]	Külső fűtés/hűtés költsége [\$/év]	Szükséges felület [m <sup>2</sup> ]	Hőcserélő költsége [€]
H1	1762	26429	2301	138049
H2	1491	22361	1757	105406
H3	1183	17745	1308	78509
H4	12500	187500	16130	967775
H5	500	7493	307	18431
H6	737	11048	480	28822
C1	0	0	0	0
C2	3491	349073	1016	60979
C3	11719	1171852	7854	471263
C4	8518	851790	4938	296255
-	SZUM	2645290		2165489

Látható a hőintegrációban résztvevő hőcserélők költsége kisebb, mint az első feladatban azonban ezt gyorsan túlszárnyalja a külső fűtés/hűtés költsége, ami összességében  $0,235 \frac{M\$}{\text{év}}$  plusz költségként jelenik meg. Kis hőcserélők nem jelennek meg, a minimális cserélt hőmennyiség 960 kW a H3-C3-as egységben. Ez az első megoldás minimumánál közel majdnem egy nagyságrenddel nagyobb. Valamint, a költségcsökkentés a legrosszabb szituációhoz is képest nagy,  $2,265 \frac{M\$}{\text{év}}$  megtakarítás.

## ÖSSZEGZÉS

Egy civilizáció fejlettségét és jólétét nagymértékben meghatározza, hogy mennyi energia áll rendelkezésére és azt milyen hatásokkal tudja hasznosítani. Annak ellenére, hogy úgy tűnik energia nagy mennyiségben áll rendelkezésünkre, szükségünk van azok minél magasabb hatásfokú kihasználására, hogy költséget csökkentsünk, a környezetünket kevésbé terheljük, vagy éppen a kényelmünket szinten tartjuk/ emeljük. [6]

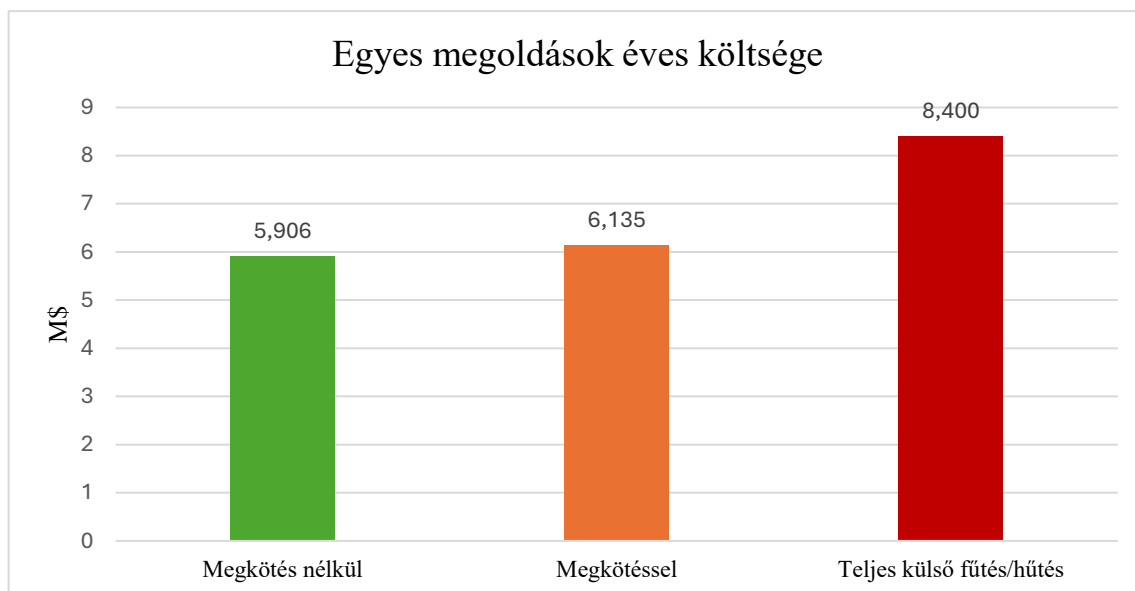
Emiatt tartom egy fontos mérnöki feladatnak az energia/nyersanyag felhasználásának optimalizálását, és érdemes minden erre irányuló kérdést megfontolni és megoldani, mint az én feladatom volt. Sőt jól látható, hogy ebben a tekintetben a matematikai optimalizálás igazán jól teljesít

A feladatot, amit kaptam kétféleképpen oldottam meg, egyszer, ahol a hőcserélők számát elengedtem ekkor a problémát 10 áramra 13 hőcserélővel tudtam megoldani, ahol 6 külső egységre volt szükség. Ekkor az összköltség  $5,906 \frac{M\$}{\text{év}}$ -nek adódott.

Ez a magas egységszám nem praktikus, ezért a feladatot másképpen is elvégeztem, ahol az integrációt végző hőcserélők számát korlátoztam 6-ra (kevesebb, mint a felére). Végül 5 hőcserélő vett részt a kötésekben és 9 külső egységre volt szükség, ami összességében a feladatot 5 egységgel kevesebbel meg lehetett oldani, mint az első módszernél. A korlátozás

ellenére sem kaptam sokkal nagyobb költséget:  $6,135 \frac{M\$}{\text{év}}$ . Valamint jóval kisebb futtatási időt tapasztaltam a kikötéssel, mint anélkül.

A 3 szituáció éves költségét összehasonlító 4. ábra jól szemlélteti, hogy mekkora mértékben tudtuk a feladat költségét csökkenteni az egyes módszerekkel:



4. ábra összehasonlítja és szemlélteti a megoldó módszerek költség hatékonyságát

A szabad módszer és a kötött módszer közötti választást a véleményem szerint nem lehet egyértelművé tenni az összes feladatra, hanem azt az adott probléma egyedisége szerint kell átgondolni. (Pl.: mennyi hely áll rendelkezésünkre a hőintegráció megvalósítására? van-e meglévő hőcserélőnk, amit szeretnénk újrahasznosítani?)

#### FELHASZNÁLT IRODALOM:

- [1] T. Gundeppen és L. Naess, „The synthesis of cost optimal heat exchanger networks: An industrial review of the state of the art”, *Computers & Chemical Engineering*, köt. 12, sz. 6, o. 503–530, jún. 1988, doi: 10.1016/0098-1354(88)87002-9.
- [2] T. F. Yee és I. E. Grossmann, „Simultaneous optimization models for heat integration—II. Heat exchanger network synthesis”, *Computers & Chemical Engineering*, köt. 14, sz. 10, o. 1165–1184, okt. 1990, doi: 10.1016/0098-1354(90)85010-8.
- [3] „Logarithmic mean temperature difference”, *Wikipedia*. 2024. május 20. Elérés: 2024. november 30. [Online]. Elérhető: [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Logarithmic\\_mean\\_temperature\\_difference&oldid=1224726676](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Logarithmic_mean_temperature_difference&oldid=1224726676)
- [4] T. F. Yee, I. E. Grossmann, és Z. Kravanja, „Simultaneous optimization models for heat integration—I. Area and energy targeting and modeling of multi-stream exchangers”, *Computers & Chemical Engineering*, köt. 14, sz. 10, o. 1151–1164, okt. 1990, doi: 10.1016/0098-1354(90)85009-Y.
- [5] O. J. Odejobi, A. E. Adejokun, és E. M. Al-Mutairi, „Heat exchanger network synthesis incorporating enhanced heat transfer techniques”, *Applied Thermal Engineering*, köt. 89, o. 684–692, okt. 2015, doi: 10.1016/j.applthermaleng.2015.05.087.
- [6] V. Smil, *How the World Really Works: The Science Behind How We Got Here and Where We’re Going*, First Edition. New York: Viking, 2022.