Trabalho #3 - Equações Parabólicas e Hiperbólicas

1. Conhecimentos Preliminares

A modelagem precisa da interação entre processos advectivos e difusivos é um dos desafios mais comuns e complexos na aproximação numérica de equações diferenciais parciais. Isso se deve à frequência e diversidade desses problemas, além de sua estreita ligação com questões de perturbação singular e com a teoria da camada limite. Outro motivo é que os algoritmos e técnicas numéricas aplicados à sua análise diferem significativamente nos casos de equações parabólicas e hiperbólicas.

Considere u uma propriedade material, como calor, entalpia ou de concentração de uma solução. Assuma que u é conservada e pode mudar apenas através de trocas entre partículas materiais ou por fontes externas. Por meio de suposições que simplificam o problema, com base na Lei de Conservação para u, e considerando a Lei de Fick (ou Lei de Fourier se u é temperatura), pode-se escrever a relação:

$$u_t + au_x = \kappa u_{xx} + f, \tag{1}$$

onde $\kappa > 0$ é o coeficiente de difusão, f é o termo fonte, e a é a velocidade.

A equação (1) é conhecida como equação unidimensional de advecção-difusão. O lado esquerdo representa o transporte de u na direção horizontal. Por outro lado, o primeiro termo do lado direito representa o transporte por difusão. O balanço entre advecção e difusão é caracterizado pelo número de Péclet, $\mathbb{P}e$, definido por

$$\mathbb{P}e = \frac{|a|L}{\kappa},$$

onde L representa o comprimento característico. Para $\mathbb{P}e \gg 1$ a advecção será dominante, e caso $\mathbb{P}e \ll 1$ a difusão será dominante. Com a introdução de variáveis adimensionais que levam ao surgimento de $\mathbb{P}e$, e considerando o termo fonte nulo, a equação (1) pode ser escrita na forma:

$$u_t + u_x = \frac{1}{\mathbb{P}e} u_{xx}.$$

A equação (1) é parabólica; se $\kappa = 0$ ela será hiperbólica; caso $0 < \kappa \ll 1$, isto é, se $\mathbb{P}e \gg 1$, aspectos hiperbólicos emergem. Informações adicionais e desenvolvimentos detalhados podem ser encontrados em [1, 2]. Este tipo de equação ocorre com frequência em simulação de escoamentos transiente em dutos, na difusão de quantidade de movimento, energia ou vorticidade, por exemplo.

Referências

[1] K. W. Morton. *Numerical Solution of Convection-Diffusion Problems*. Oxford University Computing Laboratory, Oxford , UK, 1996.

[2] P. Wesseling. *Principles of Computacional Fluid Dynamics*. Springer, 2001.

2. Especificações sobre o trabalho

2.1 O que deve ser feito

Para facilitar as análises, a equação pode ser trabalhada na sua forma adimensional

$$u_t + u_x = \frac{1}{\mathbb{P}e} u_{xx}, \quad 0 \leq x \leq 25, \tag{2}$$

com condições de contorno periódicas, para $0 \leq t \leq 25$ e com condição inicial:

$$u(x,0) = \exp(-20(x-2)^2) + \exp(-(x-5)^2).$$

Para atender aos requisitos desta atividade, você deverá:

1. Discretizar o problema dado por (2) aplicando diferenças progressivas no tempo e centradas no espaço, e implementar o método resultante com $\Delta x = 0.1$ e espaçamento temporal que satisfaça $\Delta t \leq \frac{1}{2} \min\left\{\Delta x^2 \mathbb{P}e, \Delta x\right\}$, considerando três casos distintos:

   $$\text{(I) } \mathbb{P}e \ll 1, \qquad \text{(II) } \mathbb{P}e = 1, \qquad \text{(III) } \mathbb{P}e \gg 1.$$

   Construa gráficos tridimensionais que relacione as variáveis u, t e x em cada uma das três situações. Inclua também um gráfico para cada caso que apresente u como função de x nos tempos $t = 0$, Δt e $2\Delta t$. Comente as diferenças observadas entre os três casos.

2. Discretizar o mesmo problema, mas agora aplicando diferenças progressivas no tempo, centradas no espaço para as derivadas de segunda ordem $\mathbb{P}e^{-1} u_{xx}$, e estratégia Upwind de primeira ordem para o termo advectivo u_x, implementando o método resultante.

   Estude o que acontece com ambas discretizações quando o número de Péclet é muito grande (equação se aproxima de uma equação de advecção linear) ou muito pequeno (equação se aproxima de uma equação de difusão). O que acontece com o método centrado quando $\mathbb{P}e > 5/\Delta x$? Acontece o mesmo com o método Upwind? Teste mais de um valor de $\mathbb{P}e$ nessa faixa. Caso haja diferença, explique o motivo.

3. Considerando agora o problema de transporte

   $$u_t + u_x = 0, \quad 0 \leq x \leq 25, \tag{3}$$

   ou seja, $\kappa = 0$, produza gráficos semelhantes aos que estão no **slide 27**, com os métodos indicados neste mesmo slide (Upwind, Lax-Wendroff e Leapfrog) e usando as especificações que estão no **slide 26** do tópico Equações Hiperbólicas. Comente os resultados obtidos.

4. Redigir um documento em PDF que contenha: breve relatório que mostre de maneira concisa e organizada todo o estudo desenvolvido neste trabalho. Inclua também, neste PDF, comentários que julgar necessários.

2.2 O que deve ser entregue

1. Documento em pdf elaborado;
2. Códigos utilizados.

Bom trabalho!