

Universidade de São Paulo
Trabalho de Métodos Numéricos para Equações Diferenciais
Problemas de Valor Inicial

Anna Lucia Moro Lanzuolo 13864436
Isabela Guarnier De Mitri 13862264

20 de agosto de 2024

1 Introdução

Neste trabalho, analisamos a consistência e estabilidade de métodos numéricos aplicados a problemas de valor inicial, com foco no impacto do tamanho da malha h e na precisão das soluções. Reduzir h aumenta os cálculos necessários, tornando a estabilidade crucial para obter soluções significativas em intervalos fixos.

A estabilidade é avaliada usando o problema teste linear $u' = \lambda u$. Para métodos de passo único, a verificação é direta, enquanto para métodos de passo múltiplo, observa-se as raízes do polinômio característico. Por exemplo, para o método de Euler Explícito, a solução converge para zero se $|1 + \lambda h| < 1$, resultando numa região de estabilidade no plano complexo.

Implementamos e estimamos numericamente as regiões de estabilidade dos métodos de Euler, Runge-Kutta (ordens 2 e 4), Adams-Bashforth (2 passos) e Adams-Moulton (2 passos, com preditor-corretor e método de Newton). Comparando a solução numérica com a exata, identificamos pontos estáveis e instáveis no plano complexo.

Adicionalmente, investigamos diferenças nas regiões de estabilidade do método de Adams-Moulton com diferentes abordagens e geramos gráficos das soluções numéricas e da ordem de convergência temporal para diferentes valores de λ e h .

Este estudo destaca a importância da escolha adequada de métodos numéricos, enfatizando a estabilidade e consistência para obter soluções precisas e confiáveis em problemas de valor inicial.

2 Tópico 1

2.1 Função Exata

Para comparação dos métodos numéricos, definimos uma função exata para um problema de valor inicial específico:

$$\text{solucao_exata}(t, \lambda) = e^{\lambda t} \tag{1}$$

Esta função retorna a solução exata para uma EDO linear simples.

2.2 Método de Euler Explícito

O método de Euler explícito é o método mais simples para resolver EDOs. A implementação é direta:

$$u_{n+1} = u_n + hf(u_n, t_n, \lambda) \quad (2)$$

Este método itera a partir do valor inicial u_0 usando um passo de tempo h até atingir o tempo final t_f .

2.3 Método de Runge-Kutta de Ordem 2

O método de Runge-Kutta de ordem 2 oferece uma precisão maior que o método de Euler explícito:

$$k_1 = hf(u_n, t_n, \lambda) \quad (3)$$

$$k_2 = hf(u_n + 0.5k_1, t_n + 0.5h, \lambda) \quad (4)$$

$$u_{n+1} = u_n + k_2 \quad (5)$$

Este método utiliza dois incrementos (k_1 e k_2) para calcular a próxima aproximação.

2.4 Método de Runge-Kutta de Ordem 4

O método de Runge-Kutta de ordem 4 é ainda mais preciso e é amplamente utilizado devido ao seu equilíbrio entre precisão e custo computacional:

$$k_1 = hf(u_n, t_n, \lambda) \quad (6)$$

$$k_2 = hf(u_n + 0.5k_1, t_n + 0.5h, \lambda) \quad (7)$$

$$k_3 = hf(u_n + 0.5k_2, t_n + 0.5h, \lambda) \quad (8)$$

$$k_4 = hf(u_n + k_3, t_n + h, \lambda) \quad (9)$$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (10)$$

Este método utiliza quatro incrementos (k_1 , k_2 , k_3 e k_4) para calcular a próxima aproximação.

2.5 Método de Adams-Bashforth de 2 Passos

Este método é um método explícito multistep que utiliza valores de passos anteriores para calcular a próxima aproximação:

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}(3f(u_n, t_n, \lambda) - f(u_{n-1}, t_{n-1}, \lambda)) \quad (11)$$

Este método utiliza uma fórmula que envolve os valores da função nos dois passos anteriores.

2.6 Método de Adams-Moulton de 2 Passos

O método de Adams-Moulton é um método implícito que também utiliza valores de passos anteriores. Implementamos duas abordagens diferentes para resolver o problema implícito.

2.6.1 Abordagem com Método de Newton

Nesta abordagem, utilizamos o método de Newton para resolver a equação implícita:

Para resolver a equação implícita:

$$u_{n+1} - u_n - \frac{h}{12}(5f(u_{n+1}, t_{n+1}, \lambda) + 8f(u_n, t_n, \lambda) - f(u_{n-1}, t_{n-1}, \lambda)) = 0 \quad (12)$$

Utilizamos o método de Newton para iterar e encontrar a solução implícita. A função de Newton resolve a equação implícita iterativamente até que a solução converja dentro de uma tolerância especificada.

2.6.2 Abordagem com Preditor-Corretor

Nesta abordagem, utilizamos uma estimativa inicial (preditor) seguida por uma correção (corretor):

Preditor:

$$u_{n+1}^{(0)} = u_n + \frac{h}{2}(3f(u_n, t_n, \lambda) - f(u_{n-1}, t_{n-1}, \lambda)) \quad (13)$$

Corretor:

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{12}(5f(u_{n+1}^{(0)}, t_{n+1}, \lambda) + 8f(u_n, t_n, \lambda) - f(u_{n-1}, t_{n-1}, \lambda)) \quad (14)$$

Esta abordagem utiliza uma predição inicial para u baseada nos passos anteriores e, em seguida, corrige essa predição usando a fórmula de Adams-Moulton.

3 Tópico 2

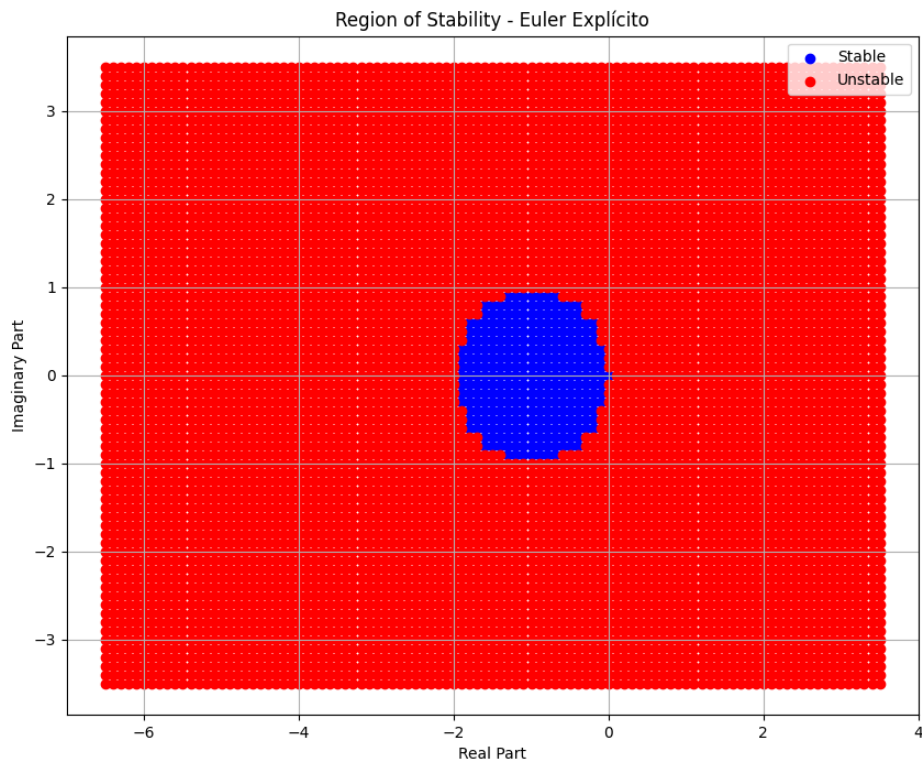
Para achar a região de estabilidade dos métodos, precisamos deduzir as funções de amplificação de cada método.

3.1 Método de Euler Explícito

$$u_{n+1} = u_n + hf(u_n, t_n, \lambda) \implies u_{n+1} = u_n(1 + h\lambda)$$

$$\implies |1 + \lambda h| < 1 \implies -1 < 1 + \lambda h < 1 \implies -2 < \lambda h < 0 \implies -2 < z < 0$$

Sendo z um número complexo. Logo, concluímos que a região de estabilidade está em um círculo de raio 1 no plano complexo.



3.2 Método de Runge-Kutta de Ordem 2

Calculando seu fator de amplificação, obtemos:

$$u_{n+1} = u_n(1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2}) \Rightarrow |1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2}| \Rightarrow -1 < 1 + z + \frac{z^2}{2} < 1$$

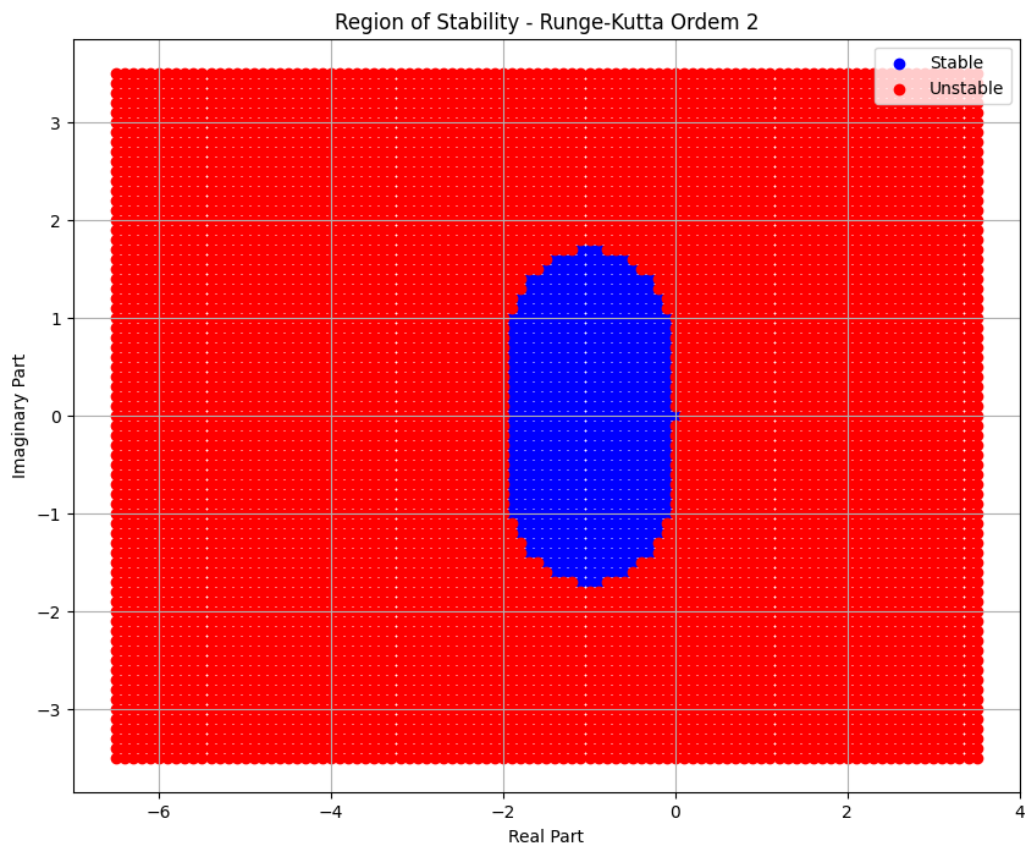
Para a parte real temos:

$$1 + z + \frac{z^2}{2} < 1 \Rightarrow -2 < z < 0$$

Para a parte imaginária temos:

$$1 + z + \frac{z^2}{2} < -1 \Rightarrow -1 - i\sqrt{3} < z < -1 + i\sqrt{3}$$

Temos então a seguinte região de estabilidade:

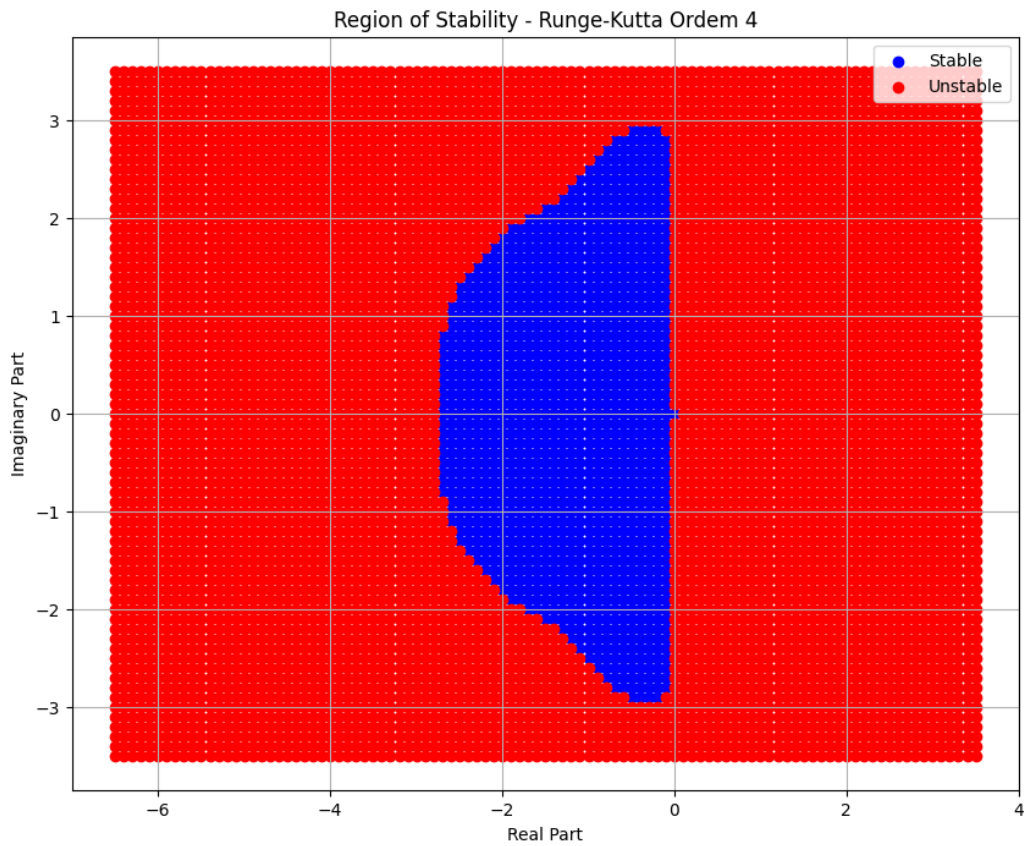


3.3 Método de Runge-Kutta de Ordem 4

O fator de amplificação é dado por:

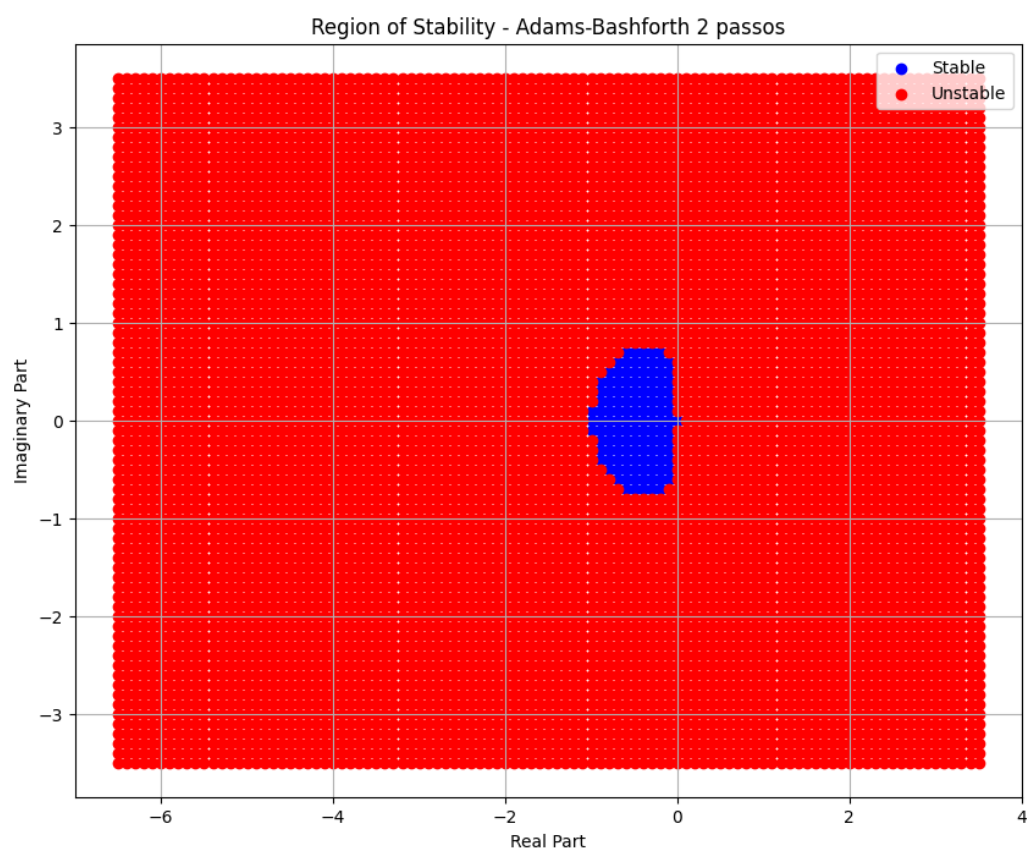
$$\left| 1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2} + \frac{(h\lambda)^3}{3} + \frac{(h\lambda)^4}{24} \right| < 1$$

Resolvendo o módulo, chegamos que para a parte real, a região varia entre -2.78 e 0, e a parte imaginária de $-0.6074 - 2.87i$ e $-0.6074 + 2.87i$.



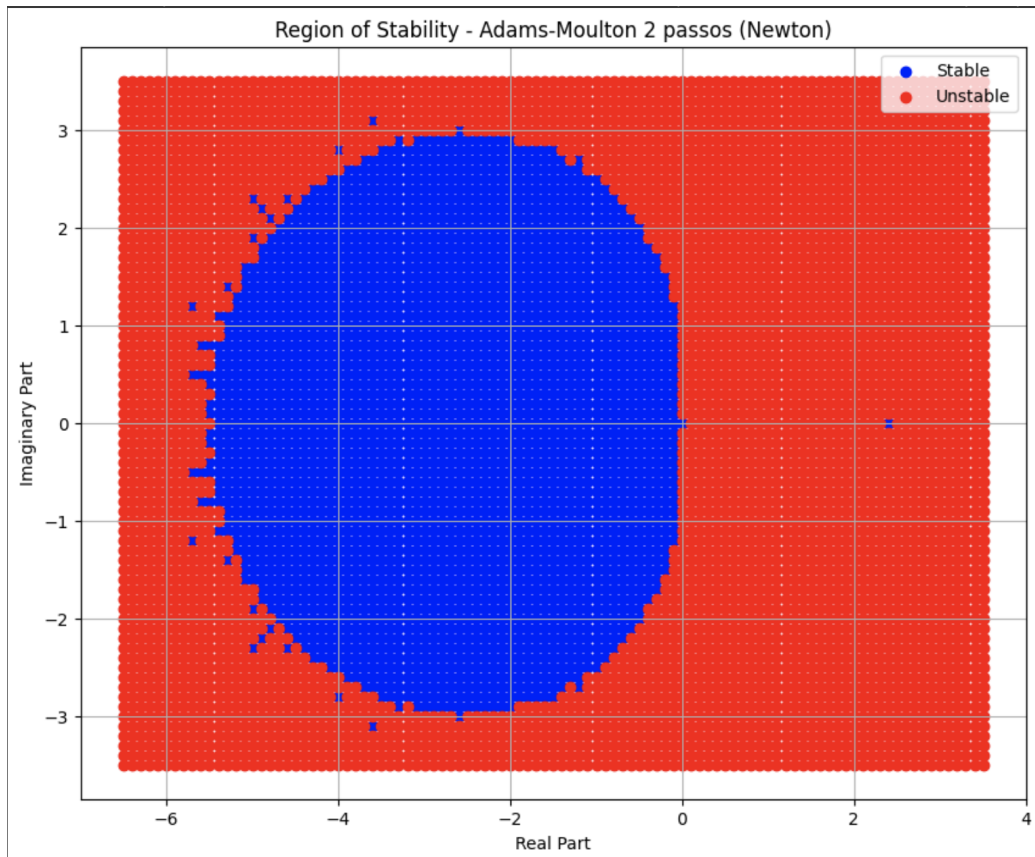
3.4 Método Adam-Bashforth

Observando o grafico vemos que a sua região de estabilidade varia entre 0 e -1 no eixo real e -1,7 e 1,7 no eixo complexo.



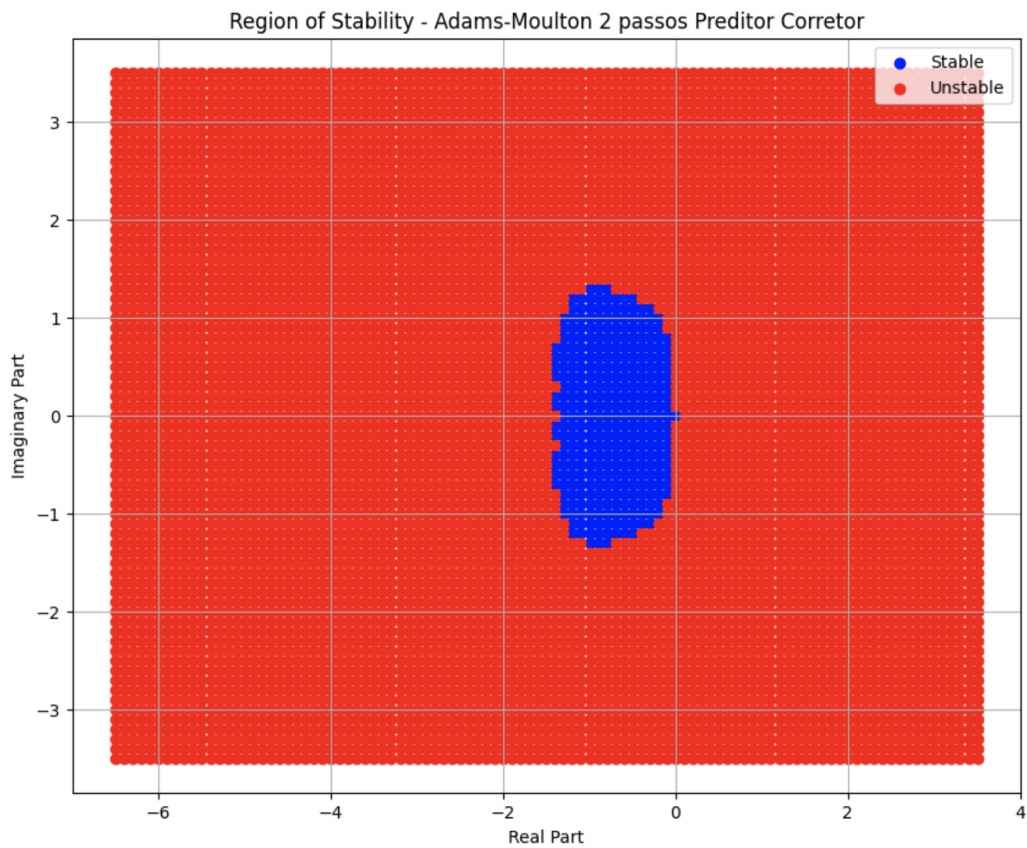
3.5 Método de Adams-Moulton de 2 Passos com Newton

Resolvendo o fator de amplificação desse método obtemos como região de estabilidade o gráfico abaixo. Observando a imagem podemos concluir que a parte real varia de 0 a aproximadamente 6 e a parte imaginária de -3 a 3.



3.6 Método de Adams-Moulton de 2 Passos Preditor Corretor

Calculando o módulo do fator de amplificação desse método obtemos como região de estabilidade a imagem abaixo. Observando o gráfico podemos concluir que a parte real varia de 0 a aproximadamente 2.5 e a parte imaginária de aproximadamente -1.4 a 1.4.



4 Tópico 3

A análise comoparativa da região de estabilidade absoluta do método de Adams-Moulton, gerada via técnica de preditor-corretor e pelo método de Newton, revela diferenças significativas entre as duas abordagens. Os gráficos gerados mostram que a região de estabilidade quando o método de Newton é utilizado é consideravelmente maior.

O método de Newton é um método iterativo que geralmente fornece uma aproximação mais precisa para soluções de equações não-lineares e quando aplicado ao método de Adams-Moulton, essa precisão se traduz em uma maior estabilidade numérica. A técnica de preditor-corretor, por outro lado, usa uma abordagem em duas etapas: primeiro, uma estimativa é feita (preditor), e depois esta estimativa é corrigida (corretor). Embora eficaz, esta técnica pode introduzir um maior grau de instabilidade, especialmente em problemas rígidos ou em situações onde a função derivada muda rapidamente.

Alguns fatores que contribuem para a maior região de estabilidade do método de Newton são a convergência quadrática, o que significa que a cada iteração, o erro é reduzido drasticamente, contribuindo para uma maior precisão; a resolução direta da equação implícita do método, enquanto a técnica de preditor-corretor pode introduzir erros adicionais na etapa de predição.

Portanto, a diferença na região de estabilidade observada entre as duas abordagens pode ser atribuída à maior precisão e robustez do método de Newton em resolver as equações implícitas associadas ao método de Adams-Moulton.

5 Tópico 4

Para encontrar a solução do problema para cada método, considerando os seguintes parâmetros:

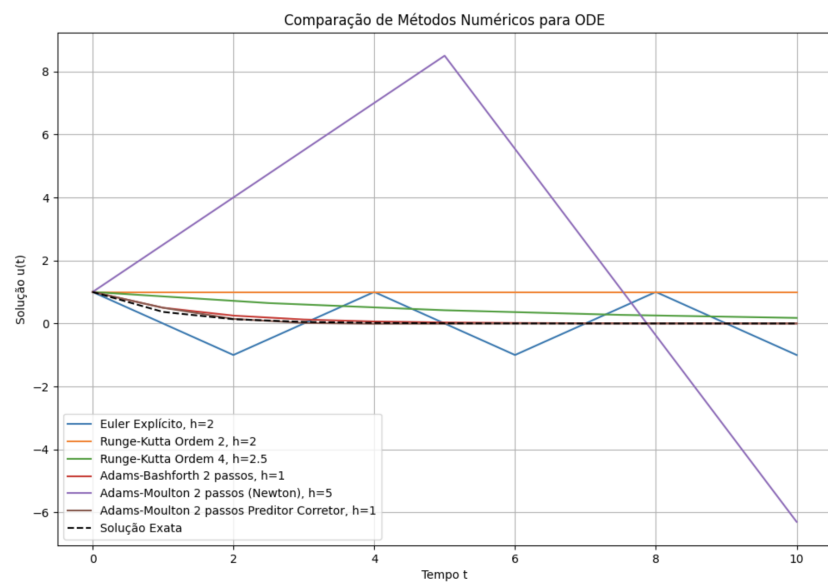
- $t_0 = 0$
- $t_{(final)} = 10$
- $u_0 = 1$
- $\lambda = -1$

Utilizando os resultados do item anterior encontramos também os valores de h máximo para cada método, sendo eles:

- Método de Euler Explícito = 2

- Método de Runge-Kutta de Ordem 2 = 2
- Método de Runge-Kutta de Ordem 4 = 2,5
- Método de Adams-Bashforth de 2 Passos = 1
- Método de Adams-Multon de 2 Passos com Newton = 5
- Método de Adams-Multon de 2 Passos Preditor Corretor = 1

Depois de definir cada parâmetro chamamos a função que resolve o problema e plotamos a solução para cada método. Além disso definimos a solução exata utilizando a função definida anteriormente e plotamos o seu resultado.



Observando a imagem podemos concluir que o método de Adams-Multon de 2 passos com Newton é o que mais foge do resultado da solução exata, independentemente do tempo que estamos considerando. Em contra partida, o mesmo método considerando a solução preditor corretor e o método de Adams-Bashforth de 2 p assos é o que resulta na solução mais próxima da realidade.

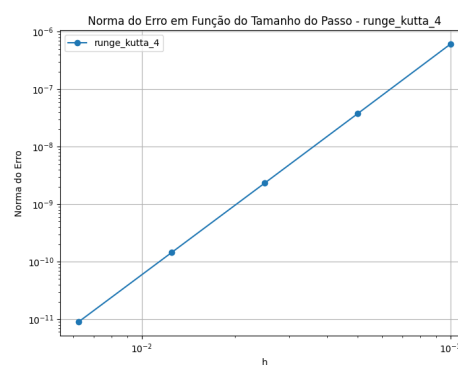
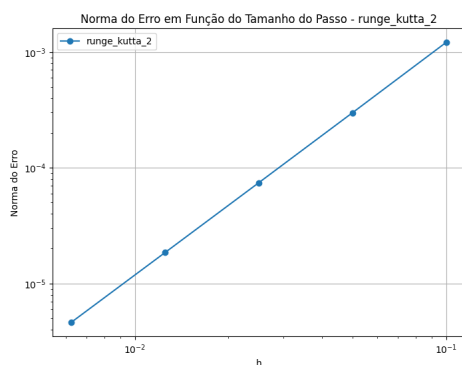
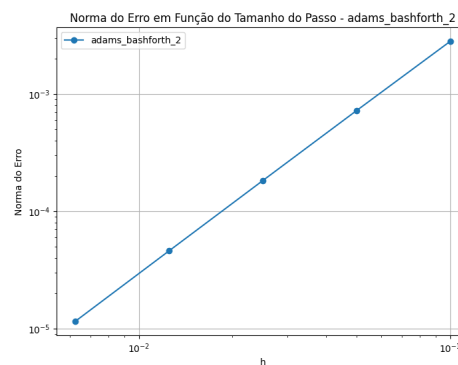
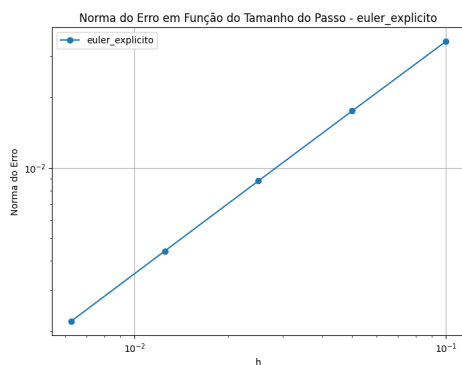
Esse resultado contradiz o que concluímos no tópico anterior já que nela resultamos que o método de Adams-Moulton de 2 passos por Newton possui uma região de estabilidade maior por ser mais precisa, que é o contrário do que o gráfico deste tópico mostra, já que este foi o método que pior se aproximou da solução exata.

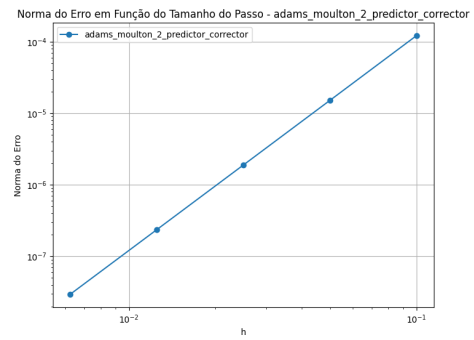
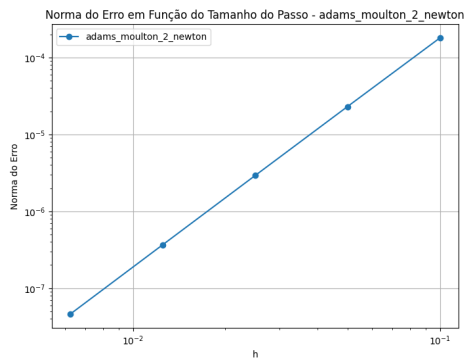
6 Tópico 5

Para esse tópico calculamos o valor da norma do erro para cada método usando como h os seguintes valores

- $t_0 = 0,1$
- $t_0 = 0,05$
- $t_0 = 0,025$
- $t_0 = 0,0125$
- $t_0 = 0,00625$

Pelas imagens abaixo podemos observar que quanto menor o valor de h , ou seja, quanto menor o subintervalo entre cada u mais aproximada é o resultado em relação à solução exata. Isso vale para todos os métodos, inclusive o que concluímos como pior.





7 Tópico 6

A partir dos resultados mostrados, os métodos mais vantajosos para resolver o problema seriam aqueles que mais se aproximam da solução exata. É fácil de observar pelo gráfico da comparação dos métodos no tópico 4, que os métodos que desempenham bem essa função são o Adam-Bashforth de 2 passos e o Adams-Moulton predictor-corretor.