Universidade de São Paulo

Trabalho de Métodos Numéricos para Equações Diferenciais
Equações Parabólicas e Hiperbólicas

Anna Lucia Moro Lanzuolo 13864436
Isabela Guarnier De Mitri 13862264

29 de junho de 2024

1 Tópico 1

Dada a equação

$$u_t + u_x = \frac{1}{\mathbb{P}e} u_{xx}, \quad 0 \leq x \leq 25 \tag{1}$$

com condições de contorno periódicas, para $0 \leq t \leq 25$ e condição inicial:

$$u(x, 0) = \exp\left(-20(x-2)^2\right) + \exp\left(-(x-5)^2\right)$$

Vamos usar diferenças progressivas no tempo e centradas no espaço para discretizar essa equação.

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}$$

Substituindo essas discretizações na equação original, obtemos:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = \frac{1}{Pe} \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}$$

Rearranjando para encontrar u_i^{n+1}:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \Delta t \left(\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x}\right) + \Delta t \left(\frac{1}{Pe} \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}\right)$$

Agora, implementamos o método com $\delta x = 0.1$ e um espaço temporal que satisfaz $\Delta t \leq \frac{1}{2} \min\{\Delta x^2 \mathbb{P}e, \Delta x\}$ considerando os casos em que Pe é menor que 1, igual a 1 e maior que 1.

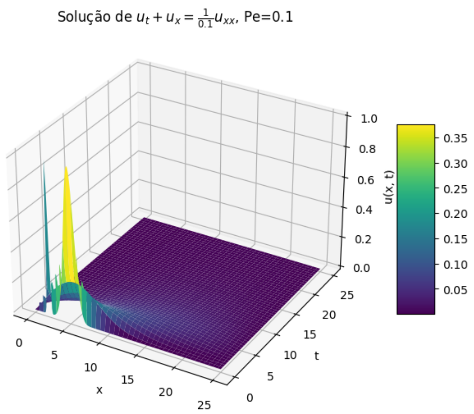


Figura 1: Gráfico 3D $Pe << 1$

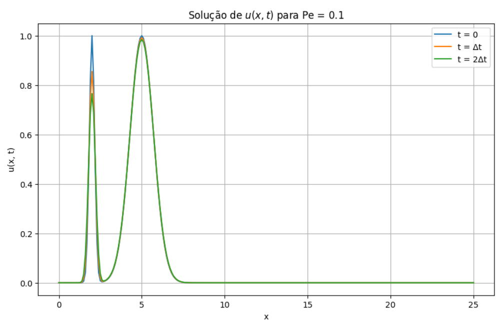


Figura 2: Gráfico 2D $Pe << 1$

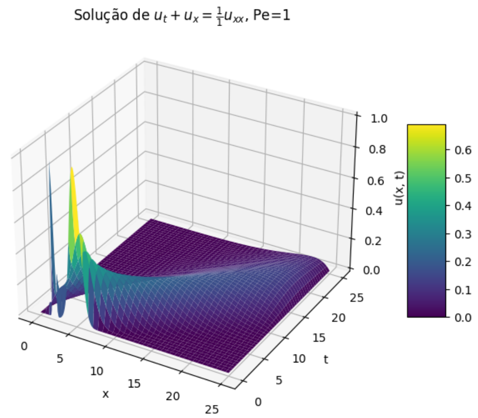


Figura 3: Gráfico 3D Pe=1

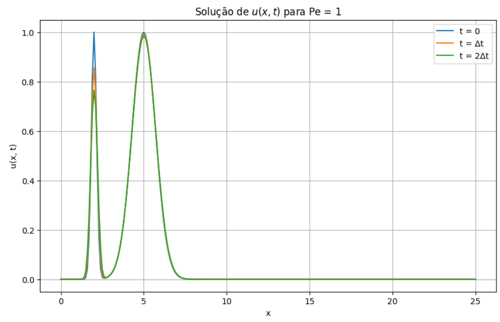


Figura 4: Gráfico 2D $Pe = 1$

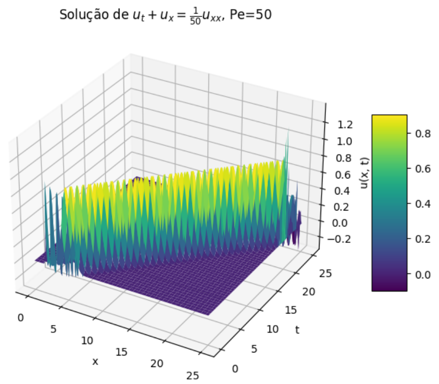


Figura 5: Gráfico 3D $Pe >> 1$

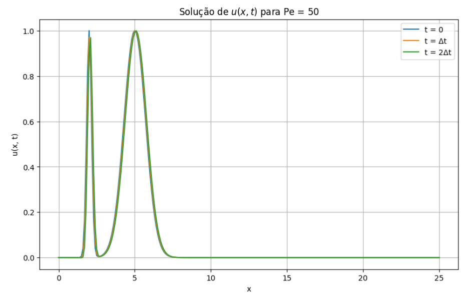


Figura 6: Gráfico 2D $Pe >> 1$

A diferença entre os gráficos para os três casos distintos de número de Péclet é significativa, pois o valor Pe influencia a relação entre os processos de advecção e difusão.

Caso I: Pe $\ll$ 1 (Difusão Dominante)

- **Gráfico 3D (u, t, x):** A difusão é o processo dominante. Isso implica que o perfil da solução $u(x,t)$ será suavizado rapidamente ao longo do tempo, devido à alta taxa de difusão. A solução tende a se espalhar uniformemente no espaço.

- **Gráfico 2D (u vs. x em $t = 0$, Δt, $2\Delta t$):** A partir do tempo $t = 0$, a distribuição inicial de u se difunde rapidamente. Em $t = \Delta t$ e $t = 2\Delta t$, a curva de u em função de x será bastante suave e a variação espacial de u será pequena.

Caso II: Pe = 1 (Advecção e Difusão Equilibrados)

- **Gráfico 3D (u, t, x):** Neste caso, os processos de advecção e difusão têm contribuições comparáveis. A solução $u(x, t)$ mostrará tanto a propagação da onda (devido à advecção) quanto o alargamento da onda (devido à difusão). Haverá uma propagação clara da solução no espaço, mas não tão rápida quanto no caso onde $\mathrm{Pe} \gg 1$.

- **Gráfico 2D (u vs. x em $t = 0$, Δt, $2\Delta t$):** Inicialmente, a distribuição de u começa a se mover na direção da advecção, mas também se difunde. Em $t = \Delta t$ e $t = 2\Delta t$, verá uma mistura entre a propagação da frente de onda e seu alargamento.

Caso III: Pe ≫ 1 (Advecção Dominante)

- **Gráfico 3D (u, t, x):** A advecção é o processo dominante. Isso significa que a solução $u(x, t)$ se moverá rapidamente ao longo do eixo x, com menor alargamento devido à difusão. Haverá uma clara propagação da onda sem muito espalhamento.

- **Gráfico 2D (u vs. x em $t = 0$, Δt, $2\Delta t$):** A partir de $t = 0$, a solução u se moverá rapidamente na direção da advecção. Em $t = \Delta t$ e $t = 2\Delta t$, verá que a frente de onda se moveu significativamente ao longo do eixo x, mantendo uma forma mais nítida devido à baixa difusão.

Essas observações mostram como a combinação de advecção e difusão influencia a dinâmica da solução da equação de advecção-difusão.

2 Tópico 2

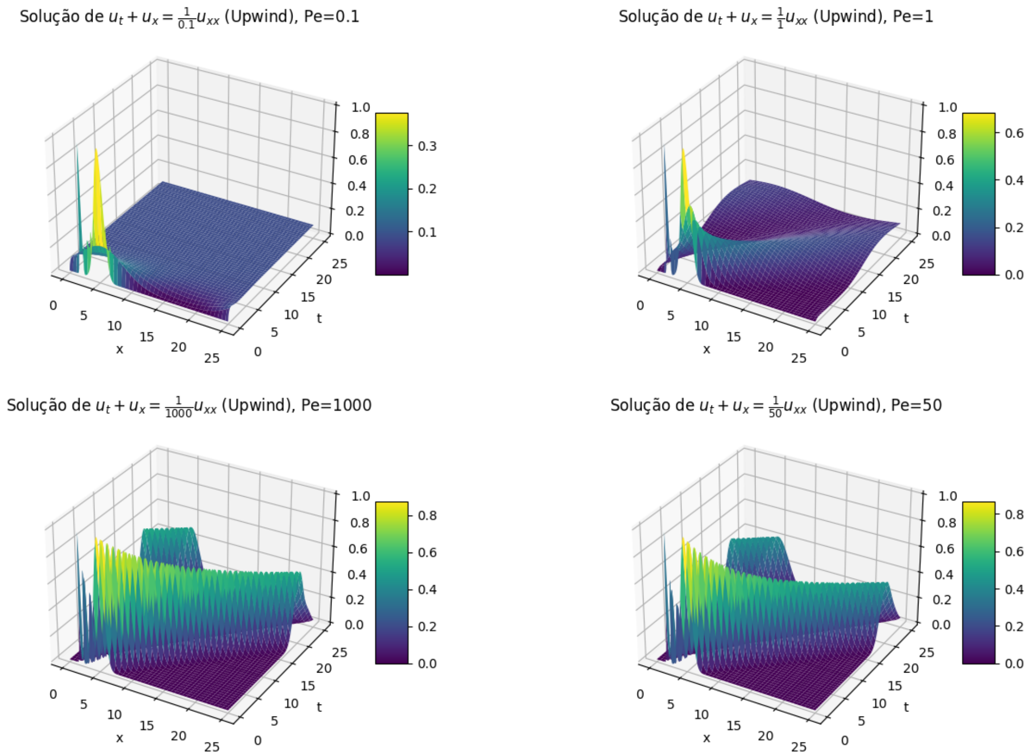
Para discretizar o mesmo problema, mas agora para as derivadas de segunda ordem de $\mathbb{P}e^{-1}u_{xx}$, e estratégia Upwind para o termo advectivo u_x , temos que:

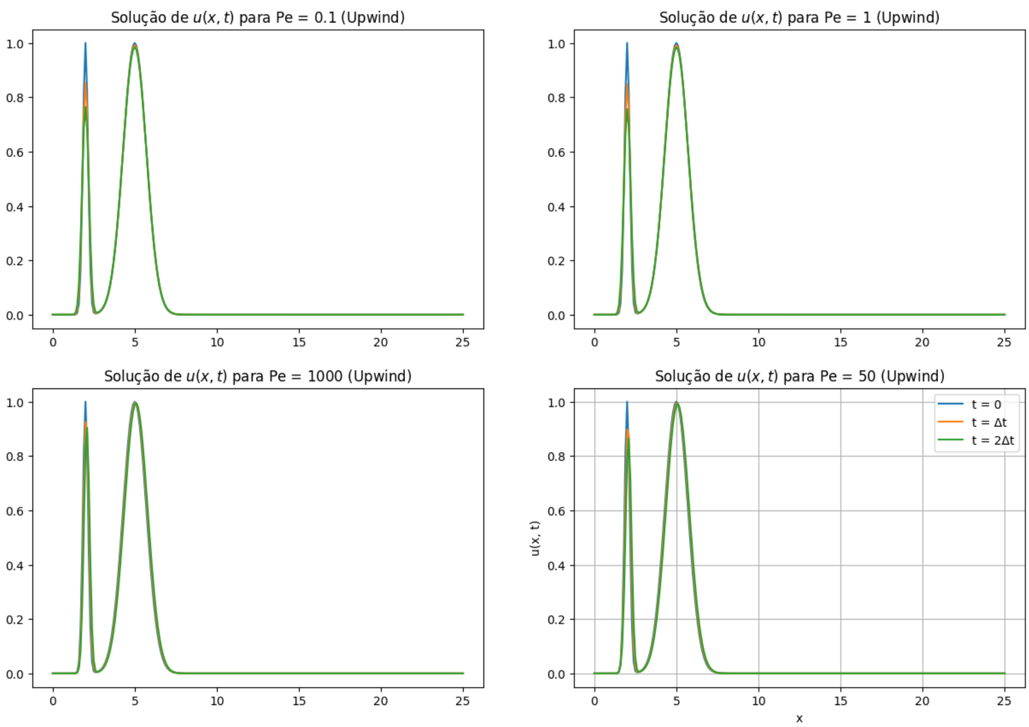
$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = \frac{1}{\mathrm{Pe}} \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

Rearranjando para resolver para u_i^{n+1} :

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \Delta t \left(\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} - \frac{1}{\mathrm{Pe}} \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} \right)$$

Resolvendo o problema, obtemos os seguintes resultados para os valores de Péclet 0.1, 1, 50 e 1000:


Solução de $u_t + u_x = \frac{1}{0.1}u_{xx}$ (Upwind), Pe=0.1
Solução de $u_t + u_x = \frac{1}{1}u_{xx}$ (Upwind), Pe=1
Solução de $u_t + u_x = \frac{1}{1000}u_{xx}$ (Upwind), Pe=1000
Solução de $u_t + u_x = \frac{1}{50}u_{xx}$ (Upwind), Pe=50
x
t


Solução de $u(x, t)$ para Pe = 0.1 (Upwind)
Solução de $u(x, t)$ para Pe = 1 (Upwind)
Solução de $u(x, t)$ para Pe = 1000 (Upwind)
Solução de $u(x, t)$ para Pe = 50 (Upwind)
t = 0
t = Δt
t = 2Δt
u(x, t)
x

Número de Péclet Muito Grande (Pe $\gg 1$)

- **Método Centrado no Espaço:**
  - Quando Pe é muito grande, a equação se aproxima de uma equação de advecção linear.
  - O termo difusivo $\frac{1}{\text{Pe}}u_{xx}$ se torna insignificante.
  - O método centrado pode sofrer instabilidade para Pe $> \frac{5}{\Delta x}$ devido à natureza oscilatória da solução.
  - Isso ocorre porque o método centrado no espaço é condicionalmente estável e requer um número de Courant adequado (CFL $= \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$) para manter a estabilidade.
- **Método Upwind:**
  - O método Upwind é mais estável para altos valores de Pe.
  - Isso ocorre porque o método Upwind é inerentemente dissipativo, ajudando a suprimir oscilações indesejadas.
  - Para Pe $> \frac{5}{\Delta x}$, o método Upwind pode fornecer soluções mais estáveis e fisicamente realistas.

Número de Péclet Muito Pequeno (Pe $\ll 1$)

- **Método Centrado no Espaço:**
  - Quando Pe é muito pequeno, a equação se aproxima de uma equação de difusão.
  - O termo advectivo u_x se torna insignificante.
  - O método centrado é adequado para a equação de difusão e tende a fornecer soluções estáveis e precisas.
- **Método Upwind:**
  - O método Upwind ainda pode ser utilizado, mas não é necessário para resolver problemas dominados pela difusão.
  - Pode introduzir dissipação numérica excessiva, suavizando demais a solução.

2.1 Testes com Diferentes Valores de Pe

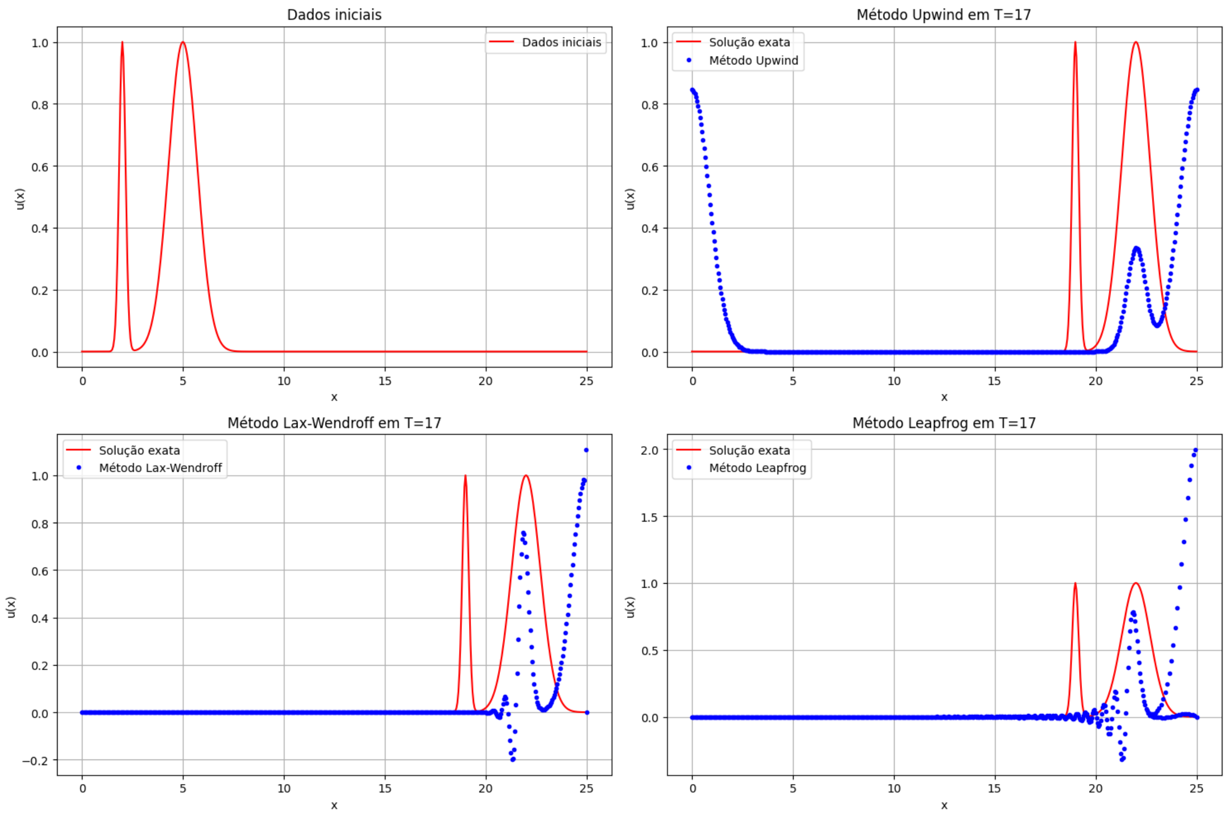
- **Teste com Pe $> \frac{5}{\Delta x}$:**
  - Para Pe $= 50$ e Pe $= 1000$, o método centrado no espaço pode apresentar instabilidades e oscilações.
  - O método Upwind deve fornecer soluções mais estáveis devido à sua natureza dissipativa.
- **Teste com Pe < 1:**
  - Para Pe $= 0.1$, Pe $= 1$, o método centrado no espaço deve funcionar bem, enquanto o método Upwind pode introduzir dissipação numérica excessiva.

Conclusão

- O método centrado no espaço é adequado para problemas de difusão (Pe $\ll 1$) e pode apresentar instabilidade para altos valores de Pe devido a oscilações.
- O método Upwind é mais robusto e estável para problemas de advecção (Pe $\gg 1$), evitando oscilações e fornecendo soluções fisicamente realistas.
- A escolha do método depende do regime de Pe, e é importante considerar a estabilidade e precisão numérica para diferentes valores de Pe.

3 Tópico 3

Considerando agora o problema de transporte $u_t + u_x = 0, \quad 0 \leq x \leq 25$, vamos produzir gráficos utilizando os métodos Upwind, Lax-Wendroff e Leapfrog.



Método Upwind:

- Deveria ser estável para todos os valores de Δt que satisfaçam a condição CFL.
- Introduz dissipação numérica, o que pode suavizar a solução ao longo do tempo.

Método Lax-Wendroff:

- Proporciona uma solução um pouco mais precisa em comparação com o método Upwind, pois reduz a dissipação numérica.

- Pode introduzir pequenas oscilações na solução, especialmente perto de descontinuidades.

Método Leapfrog:

- Método de segunda ordem no tempo, proporcionando alta precisão.
- Pode introduzir instabilidades para grandes valores de Δt ou em presença de descontinuidades, mas é geralmente mais preciso que o método Upwind.

Esses métodos ilustram diferentes abordagens para resolver a equação de transporte e mostram como as propriedades numéricas de cada método influenciam a solução obtida.