

## Trabalho #2 - Problemas de Valor inicial

### 1. Informações Preliminares

Os conceitos estudados na disciplina sobre a consistência de um método referem-se ao comportamento do erro de truncamento local quando  $h \rightarrow 0$ . No entanto, considerar valores cada vez menores para  $h$  produzirá maiores quantidades de cálculos que deverão ser efetuados para produzir uma solução aproximada em determinada posição do domínio fixada. Dessa forma, a garantia de estabilidade é crucial, principalmente, para problemas que exigem muitas aplicações repetidas de um método para obter a solução em um dado intervalo. Assim, a escolha do tamanho da malha  $h$  está intimamente ligada à estabilidade do método e é o parâmetro que permite exercer esse controle. Em problemas com valor inicial, um método numérico produz novos resultados numéricos a partir dos dados iniciais. Então, se esses dados iniciais contêm erros, e/ou a máquina amplifica esses erros rapidamente, o crescimento do erro dominará a solução produzida, tornando-a sem significado.

O estudo da estabilidade está relacionado com o crescimento ou não do erro global quando o número de aplicações do método numérico aumenta, mantendo-se o passo  $h$  fixo. Contudo, é usual aplicar abordagens distintas para realizar este estudo para métodos de passo único e para os que são de passo múltiplo. A verificação da estabilidade é realizada através do problema teste linear  $u' = \lambda u$ . No caso dos métodos de passo único, essa checagem pode ser realizada diretamente. Já para os métodos de passo múltiplo, a estabilidade é determinada observando-se as raízes do polinômio  $\pi(\zeta, z) = \rho(\zeta) - z\sigma(\zeta)$ . Nesta seção, serão apresentados exemplos de região de estabilidade para alguns métodos numéricos populares de ambos os grupos discutidos, começando pelo método de Euler Explícito.

Considere, inicialmente, o problema teste de valor inicial

$$u'(t) = \lambda u(t), \quad u(0) = \eta,$$

com  $\lambda, \eta \in \mathbb{C}$ . Suponha que a parte real de  $\lambda$  seja negativa ( $\Re(\lambda) < 0$ ) e que portanto  $u(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

A análise de estabilidade absoluta do método de Euler para problemas lineares, pode ser feita conforme sequência disposta a seguir:

$$U^{n+1} = U^n + hf(U^n, t_n) = U^n + h\lambda U^n = (1 + \lambda h)U^n.$$

Por recorrência, chega-se em

$$U^{n+1} = (1 + \lambda h)^{n+1}U^0.$$

Isso implica que, para que a solução convirja para zero, é necessário que

$$|1 + \lambda h| < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} U^n = 0.$$

Considerando  $z = \lambda h$ , tem-se que:

$$|1 + z| < 1 \Rightarrow -1 < 1 + z < 1 \Rightarrow -2 < z < 0,$$

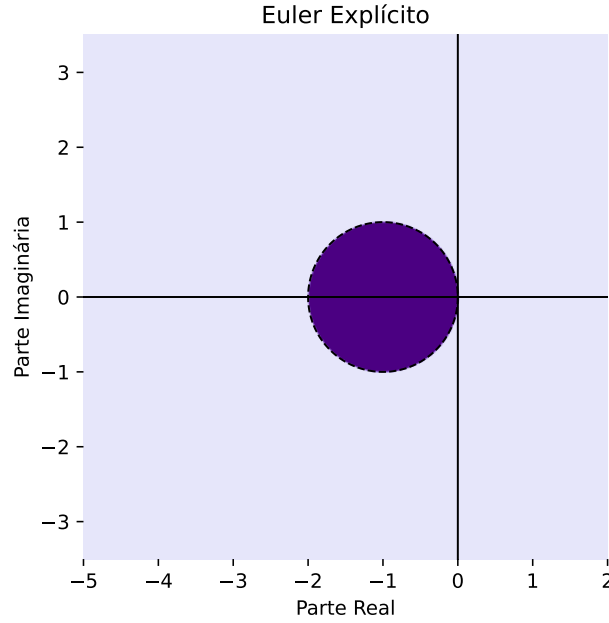


Figura 1: Representação geométrica da região de estabilidade do método de Euler Explícito.

que requer que o valor de  $z$  esteja incluído no interior de um disco de raio 1 e centro em  $(-1, 0)$  do plano complexo. Uma representação geométrica dessa região está disposta na Figura 1.

Neste desenvolvimento, chamaremos de "fator de amplificação" para o método de Euler explícito a expressão  $\psi(z) = 1 + z$ .

Com desenvolvimento análogo ao que foi realizado para o método de Euler, pode-se extrair os fatores de amplificação

$$\psi(z) = 1 + z + \frac{1}{2}z^2, \quad \psi(z) = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4,$$

para os métodos clássicos de Runge-Kutta de ordem 2 e de ordem 4, respectivamente. Tais métodos, estão representados nas seguintes tabelas de Butcher:

$$\begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline 1 & 1 \\ \hline & 1/2 \quad 1/2 \end{array}, \quad \begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \hline 1/2 & 1/2 & & \\ 1/2 & 0 & 1/2 & \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 \end{array},$$

e apresentam regiões de estabilidade absoluta, obtidas considerando-se  $|\psi(z)| < 1$ , ilustradas na Figura 2.

Considere agora, como exemplo de método de passo múltiplo, o método de Adams-Bashforth de 2 passos, que é dado por

$$U^{n+2} = U^{n+1} + \frac{h}{2} [-f(U^n) + 3f(U^{n+1})].$$

Os coeficientes dos polinômios característicos associados a esse método são:

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = -1, \quad \alpha_2 = 1, \quad \beta_0 = -\frac{1}{2}, \quad \beta_1 = \frac{3}{2}, \quad \beta_2 = 0,$$

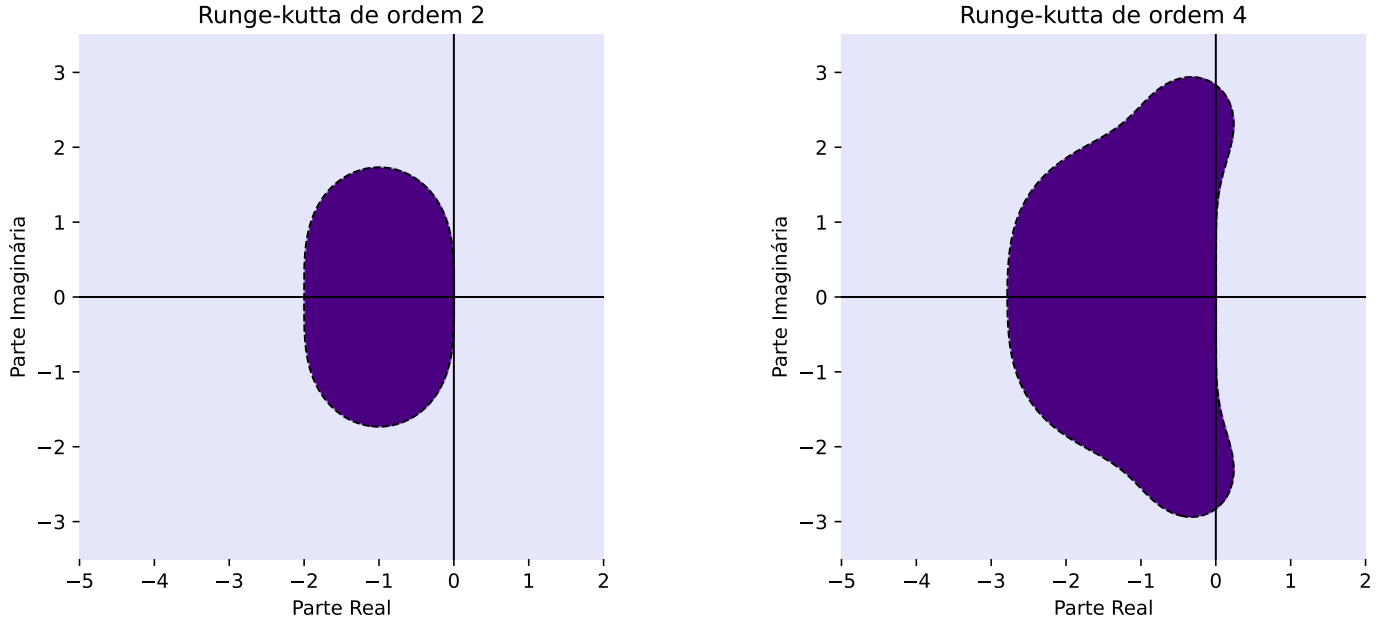


Figura 2: Representação geométrica das regiões de estabilidade dos métodos de Runge-Kutta de ordem 2 (à esquerda); e de ordem 4 (à direita).

e a estabilidade do método é governado pelas raízes do polinômio

$$\pi(\zeta, z) = \rho(\zeta) - z\sigma(\zeta) = \zeta^2 - \left(1 + \frac{3}{2}z\right)\zeta + \frac{1}{2}z = 0.$$

As raízes desse polinômio são dadas por

$$\zeta_{1,2} = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{3}{2}z \pm \sqrt{\left(1 + \frac{3}{2}z\right)^2 - 2z} \right].$$

Para o estudo de estabilidade, estamos interessados nos valores de  $z$  para os quais se tem  $|\zeta_1| < 1$  e  $|\zeta_2| < 1$ . Os valores que satisfazem ambas as desigualdades, simultaneamente, estão dispostos na região destacada na Figura 3.

Por outro lado, ao considerar o método de Adams-Moulton de 2 passos, dado pela configuração

$$U^{n+2} = U^{n+1} + \frac{h}{12} [-f(U^n) + 8f(U^{n+1}) + 5f(U^{n+2})],$$

os coeficientes dos polinômios característicos associados a esse método são, desta vez

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = -1, \quad \alpha_2 = 1, \quad \beta_0 = -\frac{1}{12}, \quad \beta_1 = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}, \quad \beta_2 = \frac{5}{12}.$$

Então, a estabilidade do método de Adams-Moulton de 2 passos é governado pelas raízes do polinômio

$$\pi(\zeta, z) = \rho(\zeta) - z\sigma(\zeta) = \left(1 - \frac{5}{12}z\right)\zeta^2 - \left(1 + \frac{2}{3}z\right)\zeta + \frac{1}{12}z = 0$$

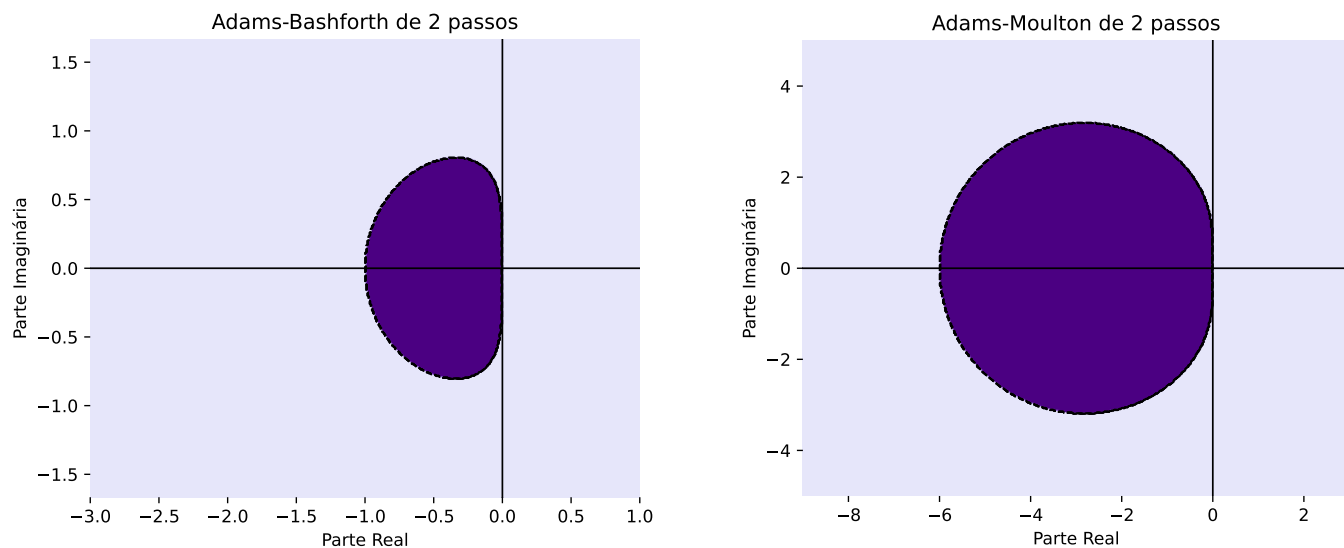


Figura 3: Representação geométrica das regiões de estabilidade dos métodos de Adams-Bashforth de 2 passos (à esquerda); e de Adams-Moulton de 2 passos (à direita).

As raízes desse polinômio são dadas por

$$\zeta_{1,2} = \frac{1}{2\left(1 - \frac{5}{12}z\right)} \left[ 1 + \frac{2}{3}z \pm \sqrt{\left(1 + \frac{2}{3}z\right)^2 - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{5}{12}z\right)} \right].$$

Os valores de  $z$  que satisfazem simultaneamente  $|\zeta_1| \leq 1$  e  $|\zeta_2| \leq 1$  estão dispostos na região destacada na Figura 3.

De posse das informações apresentadas, aliadas aos conhecimentos obtidos durante as aulas e estudos extraclasse, será apresentada a proposta para o segundo trabalho da disciplina SME0202 na próxima seção.

## 2. Especificações sobre o trabalho

### 2.1 O que deve ser feito

Para atender aos requisitos desta atividade, você deverá:

1. Implementar, para problemas de valor inicial, os métodos Euler explícito, Runge-Kutta de ordem 2 e de ordem 4 (configurações apresentadas nas tabelas de Butcher da seção anterior), Adams-Bashforth de 2 passos e Adams-Moulton de 2 passos. Implemente o método de Adams-Moulton de 2 passos com duas abordagens diferentes: usando uma estratégia do tipo preditor-corretor e utilizando o método de Newton para solução do problema implícito;
2. Considerando o problema teste de valor inicial

$$u'(t) = \lambda u(t), \quad u(0) = 1, \quad t \in [0, 10], \quad (1)$$

com passo fixo  $h = 0.1$ , estimar numericamente a região de estabilidade dos 5 (cinco) métodos implementados. Para isso, siga os passos abaixo:

- Gere uma malha uniforme no plano complexo com espaçamento  $\Delta z$  que contemple, com algum excesso, toda a região de estabilidade absoluta dos métodos. Por exemplo, se a região de interesse é  $[-3, 1]$  no eixo real e  $[-2, 2]$  no eixo imaginário, construa a malha em uma área um pouco maior que essa com espaçamento  $\Delta z = 0.1$ . Você pode optar por uma mesma região para todos os métodos ou regiões específicas para cada método;
  - Na sequência, resolva o problema dado em (1) considerando que  $z = \lambda h$  assuma todos os valores representados pelos pontos da malha gerada. Para cada valor de  $z$ , compare a solução numérica obtida com a solução exata do problema no tempo  $t = 10$ ; caso a diferença absoluta entre as duas soluções nesse tempo exceda a margem  $\varepsilon = 0.1$ , imprima o ponto no plano complexo com uma cor de sua escolha; caso essa margem não seja excedida, imprima o ponto com outra cor que contraste com a primeira. Siga este procedimento para todos os pontos da malha produzida e imprima os pontos em um mesmo plano complexo. A Figura 4 ilustra como o resultado desta etapa pode ser apresentado para o método de Euler explícito;
3. Observar se há alguma diferença na região de estabilidade absoluta do método de Adams-Moulton quando gerado via técnica de preditor-corretor e pelo método de Newton. Caso haja alguma diferença, explique o motivo;
  4. Gerar gráficos das soluções numéricas produzidas por cada método considerando  $\lambda = -1$  e um valor máximo para  $h$  que permita que o método esteja dentro da região absoluta de estabilidade. Observe e comente o comportamento das soluções estimadas nestes casos extremos;
  5. Considerando  $\lambda = -1$ , produzir gráficos de ordem de convergência temporal, usando a solução exata do problema como referência, para cada um dos métodos (utilize pelo menos 5 malhas diferentes para capturar o comportamento assintótico do erro, e verificar se ele está tendendo a zero com a ordem esperada);

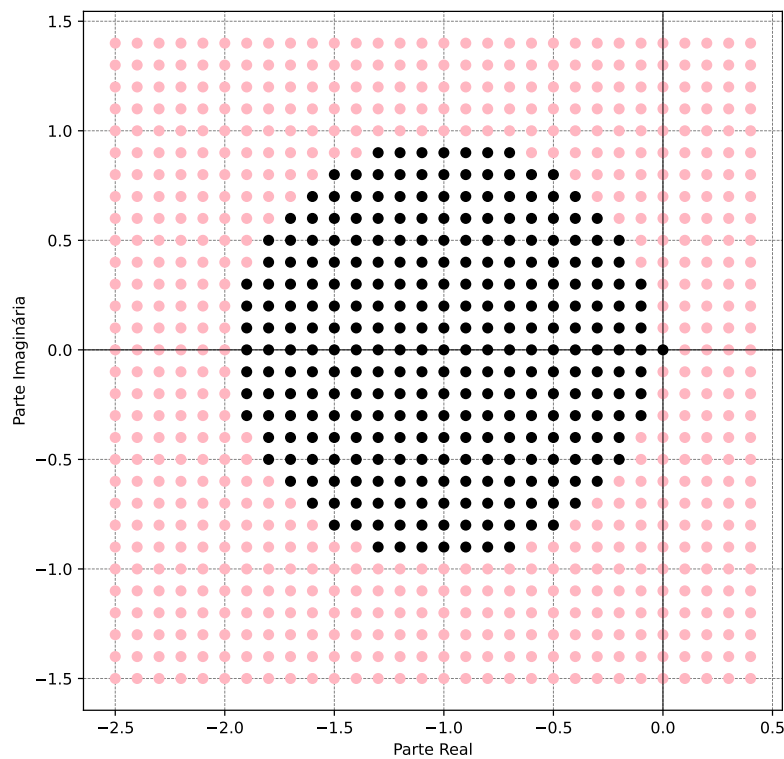


Figura 4: Representação geométrica da região de estabilidade absoluta do método de Euler Explícito obtida numericamente.

6. Comentar brevemente, a partir dos resultados mostrados, e do seu ponto de vista, quais métodos seriam mais vantajosos, dentre os utilizados, para resolver o problema estudado;
7. Redigir um documento em PDF que contenha: breve relatório que inclua descrição de como o problema tratado para ser resolvido por cada método; os resultados solicitados com gráficos e comentários. Não se esqueça de se atentar à qualidade da escrita, à disposição do texto (justificado, com tipo e tamanho da fonte padronizados) e à legibilidade das imagens inseridas (lembre-se de incluir legendas caso haja mais de uma curva no mesmo plano). Inclua também, neste PDF, comentários que julgar necessários.

## 2.2 O que deve ser entregue

1. Documento em pdf elaborado;
2. Códigos utilizados.

Bom trabalho!