Trabalho #1 - Problemas de Valor de Contorno

1. Conhecimentos Gerais Preliminares

Equações diferenciais são fundamentais em diversas áreas como Biologia, Ecologia, Sociologia, Economia, Termodinâmica e Física, modelando uma variedade de problemas reais, incluindo crescimento populacional, movimento de pêndulos, propagação de doenças, movimento de corpos celestes e circuitos elétricos. A equação de Van der Pol, proposta por Balthazar Van der Pol (1889-1959), é uma das mais estudadas, com aplicações que vão desde ciências físicas até biológicas, devido aos efeitos auto-oscilatórios. Fenômenos naturais importantes como batimentos cardíacos, disparo de neurônios, ondas do mar e pulsação de estrelas variáveis são exemplos de autooscilações. Além disso, a autooscilação é essencial na tecnologia humana, presente em turbinas, relógios, instrumentos musicais (incluindo a voz humana), motores térmicos e *lasers*. Van der Pol foi um pioneiro na dinâmica experimental moderna nas décadas de 1920 e 1930, introduzindo uma equação diferencial ordinária de segunda ordem com não linearidade cúbica para descrever oscilações de triodo em circuitos elétricos. O oscilador Van der Pol é um exemplo clássico de sistema autooscilatório e é considerado um modelo matemático útil em sistemas mais complicados e modificados. Contemporâneo de Lorenz, Thompson e Appleton, Van der Pol conduziu experimentos com oscilações em um circuito triodo de tubo de vácuo [1] e observou que todas as condições iniciais convergiam para a mesma órbita periódica de amplitude finita. Esse comportamento difere das soluções de equações lineares. Por isso, Van der Pol propôs a seguinte equação diferencial não linear, que hoje é conhecida pelo seu nome,

$$u'' + \mu(u^2 - 1)u' + u = 0 \tag{1}$$

para modelar oscilações triodo em circuitos elétricos. Esta equação descreve um oscilador não conservativo com uma força de mola linear e um amortecimento não-linear da força representada por

$$\mu(u^2 - 1)u',$$

onde o parâmetro μ é um escalar positivo que mede a força do termo de amortecimento. Observa-se que o sinal da força de amortecimento depende da magnitude de u. Quando $|u| > 1$ temos amortecimento "verdadeiro", o que significa que ele se opõe ao movimento, fazendo com que decaia com o tempo. No entanto, quando $|u| < 1$ o termo de amortecimento tem efeito oposto, ou seja, amplifica o movimento. Nos instantes em que $|u| = 1$ a força de amortecimento desaparece momentaneamente [2]. A não linearidade cúbica presente na equação torna uma solução exata ainda inatingível.

Desde sua introdução, a equação de Van der Pol tem sido um protótipo para sistemas com oscilações de ciclo limite autoexcitadas, tornando-se um modelo básico para processos oscilatórios em várias disciplinas, como física, eletrônica, biologia, neurologia, sociologia e economia, sendo usada, por exemplo, em estudos preliminares para desenvolvimento de modelos de neurônios acoplados em biologia e de interação de placas em falhas geológicas na sismologia. O modelo (1) passou, mais tarde, a ser tratado na forma:

$$u'' + \mu(u^2 - 1)u' + u = aF_\omega(x), \tag{2}$$

onde $F_\omega(x)$ é uma força externa, possivelmente dependendo de algum parâmetro $\omega \in \mathbb{R}$.

Referências

[1] B. Van der Pol. On relaxation-oscillations. *Edinburgh Dublin Phil. Mag. & J. Sci*, 7(2):978–992, 1926.

[2] S. D'Alessio. Solutions of the van der pol equation. *The College Mathematics Journal*, 54:90–98, 2023.

2. Descrição do trabalho proposto

2.1 Instruções

2.1.1 Primeira parte: solução de um problema não-linear

Considere a equação de Van der Pol:

$$u'' + \mu(u^2 - 1)u' + u = 0, \tag{3}$$

definida no intervalo $[0, 3\pi]$ com condições de contorno

$$u(0) = 1, \quad u(3\pi) + u'(3\pi) = -1$$

Discretize o problema acima utilizando malha uniforme com espaçamento h. Utilize somente diferenças finitas de ordem 2. Monte o sistema não-linear explicando claramente como as condições de contorno foram tratadas.

Em seguida, implemente e resolva este problema de valor de contorno usando MATLAB/OCTAVE ou Python, e produza gráficos com a solução do problema considerando os diferentes valores de μ dispostos a seguir: $\mu \in \{0,\ 1/16,\ 1/8,\ 1/4,\ 1/2,\ 1,\ 6/5\}$. Quais mudanças foram percebidas com as alterações dos valores de μ? Tais variações impactaram na performance do código que você construiu?

Observações:

1. Os gráficos gerados devem estar legíveis. Considere quantidades de pontos que produzam curvas suaves;
2. Notoriamente, o problema em estudo é não-linear. Desta forma, na etapa de construção do código é indispensável que você implemente o método de Newton para resolução do sistema não-linear.

2.1.2 Segunda parte: Estudo de convergência

Com o intuito de facilitar o estudo de convergência, é de grande valia o conhecimento de uma solução de referência para o problema. Nesta perspectiva, vamos considerar uma adaptação do problema em (3), considerando $\mu = 1/16$ e a adição de um termo fonte, conforme disposição a seguir:

$$u'' + \mu(u^2 - 1)u' + u = \mu \sin^3(x). \tag{4}$$

O intervalo de interesse, bem como as condições de contorno não serão alterados.

Para o problema definido em (4), uma solução exata conhecida se apresenta na forma:

$$u(x) = \cos(x).$$

Nesta parte do trabalho, você deve realizar um estudo numérico de convergência, comparando a solução exata da equação (4) com as soluções numéricas obtidas através da discretização do problema por aproximações de ordem 2. Plote um gráfico destes resultados em um plano cartesiano com eixos (Erro x espaçamento) em escala logarítmica. Utilize pelo menos 5 malhas diferentes para capturar o comportamento assintótico do erro, e verificar se ele está tendendo a zero com a ordem esperada. Construa também uma tabela com os valores das inclinações produzidas entre cada pares de pontos a fim de confirmar o comportamento gráfico a partir de dados numéricos.

Sugestão: O uso de funções direcionadas para operações com matrizes esparsas tornarão seus códigos mais eficientes com ganho significativo de tempo de execução.

Redija um documento em PDF que contenha: as representações gráficas solicitadas nas duas partes do trabalho; uma descrição de como a construção e resolução do sistema não-linear ocorreu, incluindo um desenvolvimento minuncioso do tratamento das condições de contorno. Inclua também, neste PDF, comentários que julgar necessários.

2.2 Entrega

Os arquivos esperados com entrega deste trabalho se constituem de:

1. Documento em pdf, organizado e com escrita clara;

2. Códigos construídos utilizados para produzir os resultados apresentados. Por favor, se atente à organização das linhas de código e insira comentários sucintos que indiquem a funcionalidade dos blocos construídos.