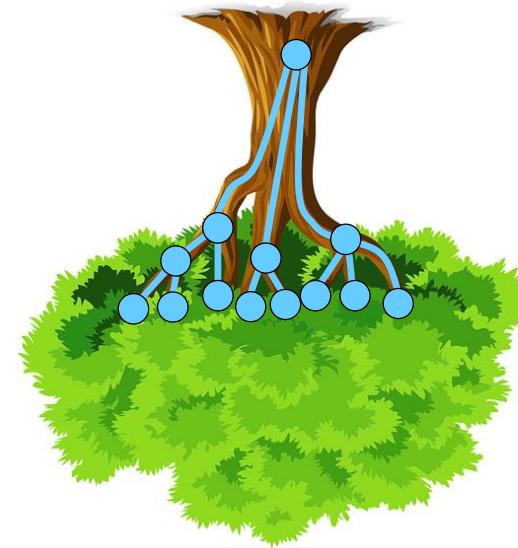


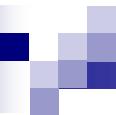
Algoritmizace

Marko Genyg-Berezovskyj, Daniel Průša

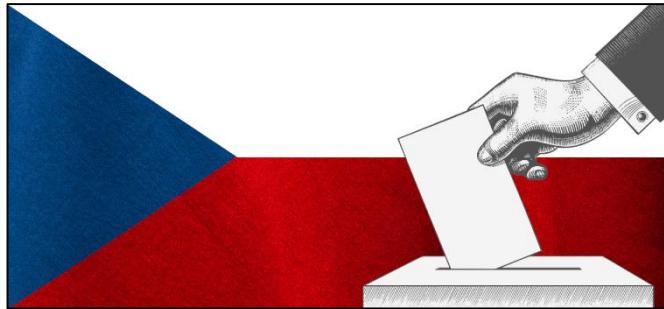
2010 – 2021

- Stromy
- Prohledávání s návratem (backtracking)
- Druhá domácí úloha





Volby



Join at
slido.com
#092 451





**Kterou stranu/koalici
byste volili?**

ⓘ Start presenting to display the poll results on this slide.

Audience Q&A

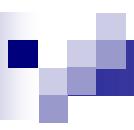
Je někde přístup k 2021 prezentaci, když na webu je jenom verze z 2011?

Prezentace:

<https://cw.fel.cvut.cz/wiki/courses/b4b33alg/prednasky>

Záznamy cvičení:

<https://cw.fel.cvut.cz/wiki/courses/b4b33alg/cviceni>



Dataset slovních úloh

Přispět můžete na [slido.com](https://www.slido.com) přes Audience Q&A.

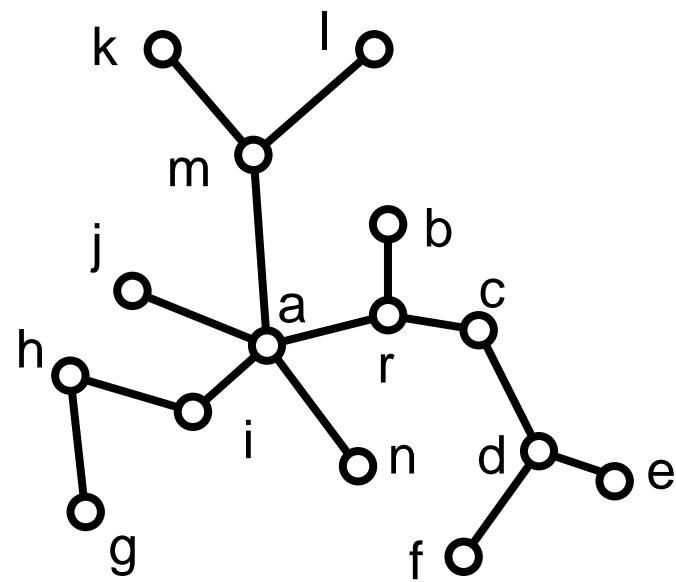
Příklady:

- Na talíři bylo 24 sušenek. Adam snědl 3 krát více sušenek než Markéta, která snědla 5 sušenek. Kolik sušenek zbylo na talíři?
- Jindra dal 6 samolepek svému mladšímu bratrovi. Zůstalo mu 9 samolepek. Kolik samolepek Jindra původně měl?
- V krabičce je 20 korálků. 7 korálků je červených, 5 je modrých, 2 jsou žluté a ostatní jsou zelené. Kolik zelených korálků je v krabičce?

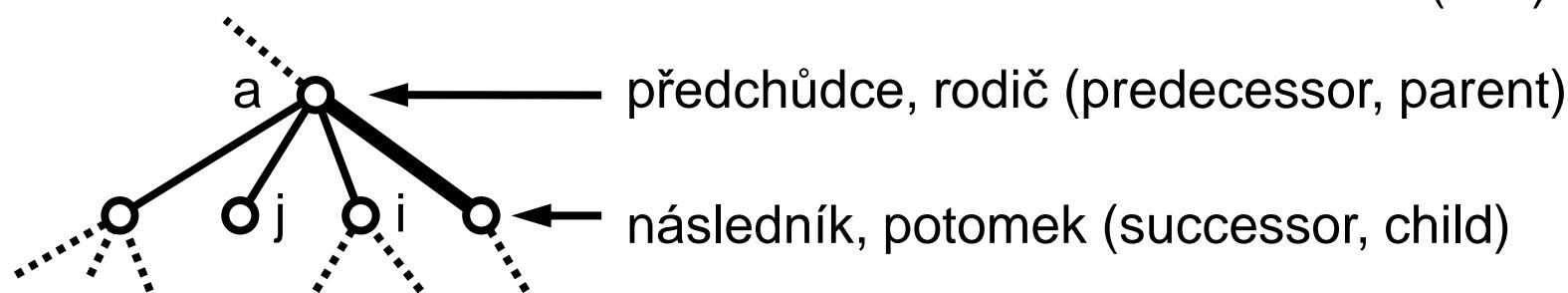
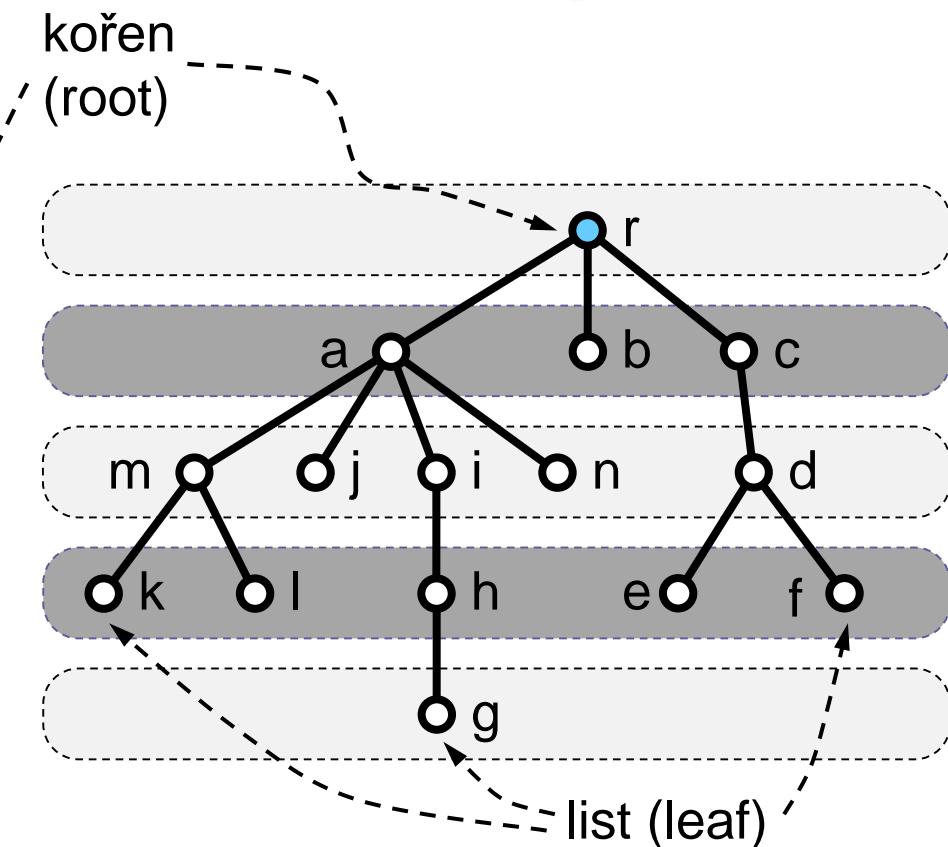
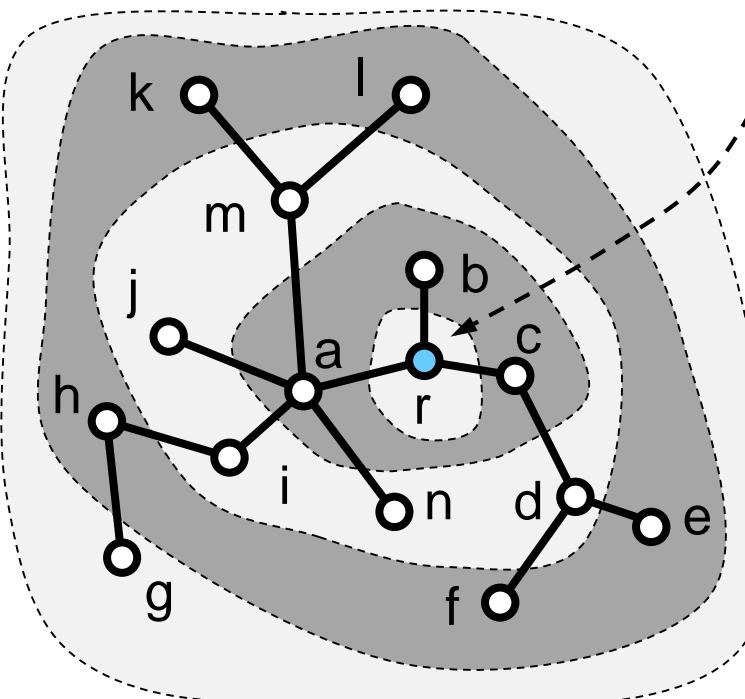
Strom jako graf

■ $G = (V, E)$

- Souvislý graf bez cyklů.
- Každé dva uzly spojuje právě jedna cesta.
- $|E| = |V| - 1$.



Kořenový strom



Co lze stromem reprezentovat?

Aritmetický výraz

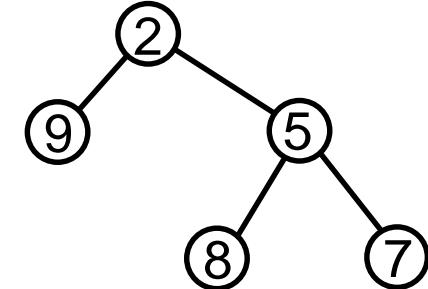
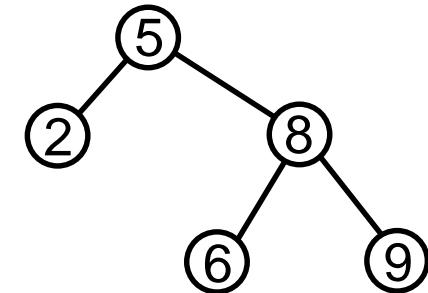
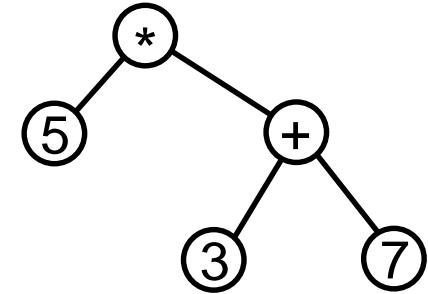
Datová struktura (BVS, halda)

Rozhodovací strom (botanický klíč)

Hierarchie entit (zaměstnanci, rodokmen)

Rekurzivní volání

Stavový prostor



Znáte tyto pojmy?

Pravidelný binární strom, **vyyážený** binární strom.

Reprezentace binárního stromu **v paměti**.

Prohledávání stromu **do hloubky** (rekurzivně nebo se zásobníkem).

Průchod stromem v pořadí **preorder**, **inorder**, **postorder**.

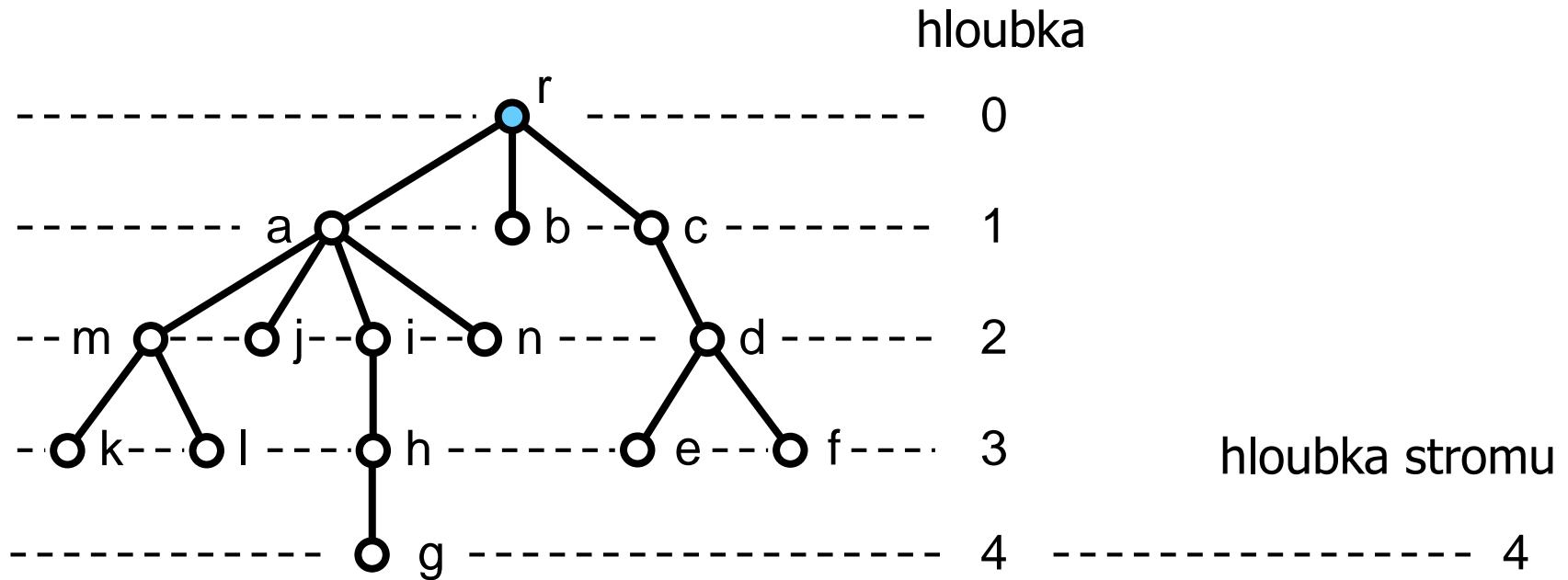
- A. Znám vše uvedené jak své boty.
- B. Znám víceméně vše, jen si nepamatuji některé detailly.
- C. Znám pouze část.
- D. Vůbec nic mi to neříká.



**Jak znáte pojmy
související s binárními
stromy?**

ⓘ Start presenting to display the poll results on this slide.

Hloubka kořenového stromu

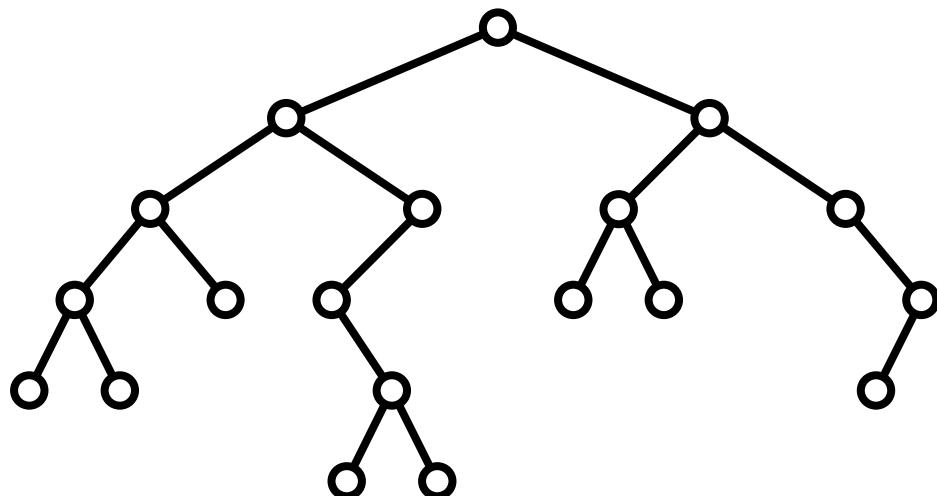


Hloubka uzlu u je hranová vzdálenost u od kořene.

Hloubka stromu T je maximum z hloubek uzelů v T .

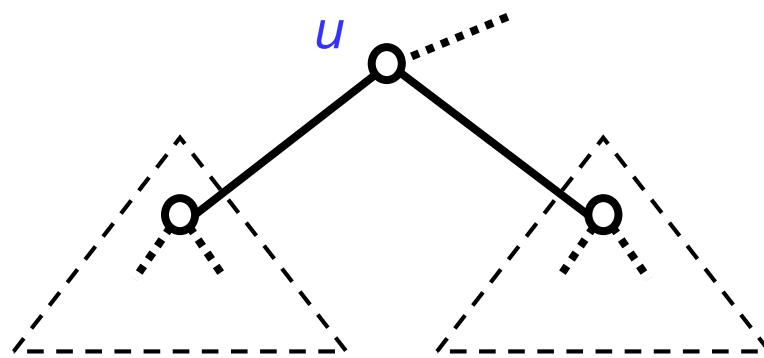
Hloubku prázdného stromu definujeme jako -1 .

Binární strom



Počet potomků každého uzlu je 0,1, nebo 2.

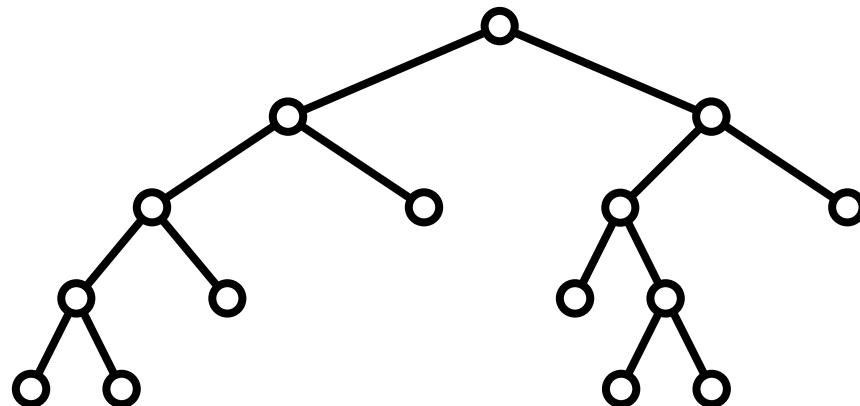
Levý a pravý podstrom
(left and right subtree):



Podstrom uzlu u levý pravý

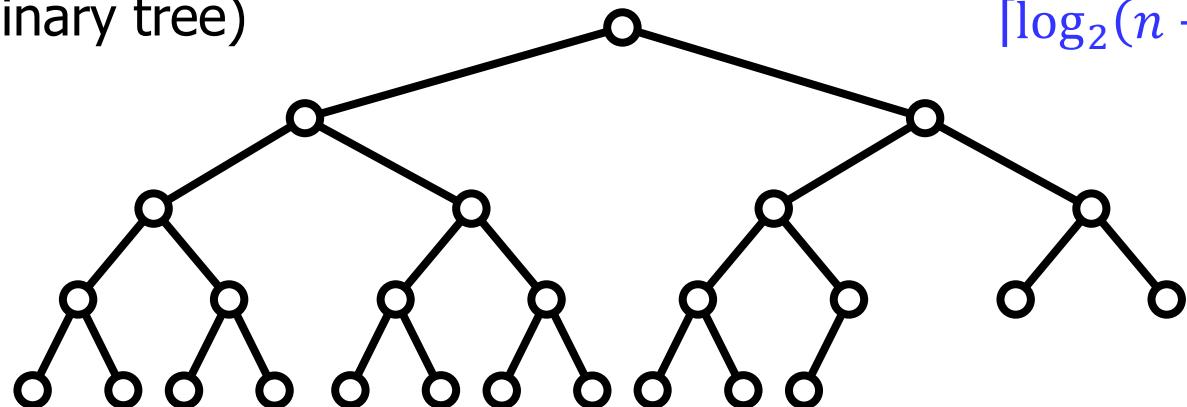
Binární strom

Pravidelný binární strom
(regular binary tree)



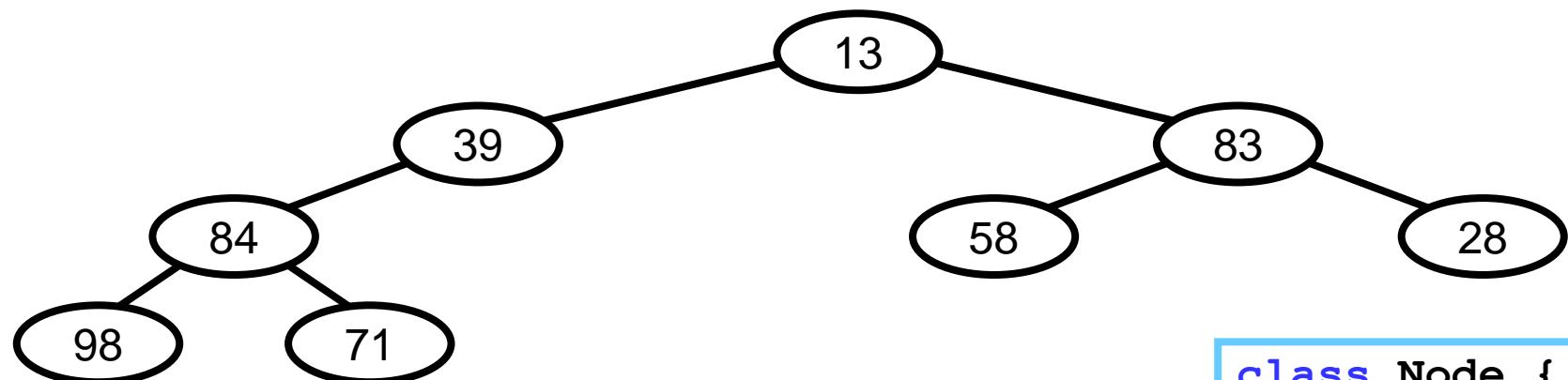
Počet potomků každého uzlu
je jen 0 nebo 2.

Vyvážený binární strom
(balanced binary tree)

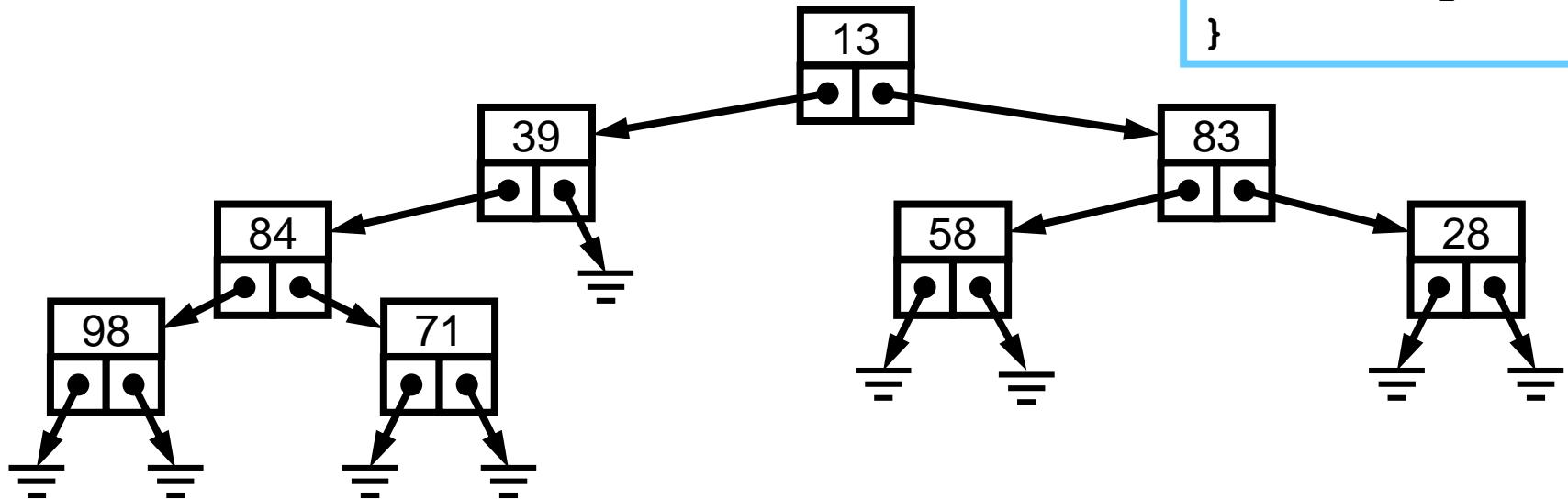


hloubka pro n uzlů je
 $[\log_2(n + 1)] - 1$

Reprezentace binárního stromu



```
class Node {  
    Node left;  
    Node right;  
    int key;  
}
```

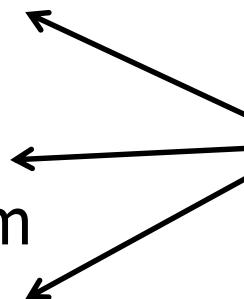


Průchod stromem do hloubky

Začni v kořeni stromu a opakuj:

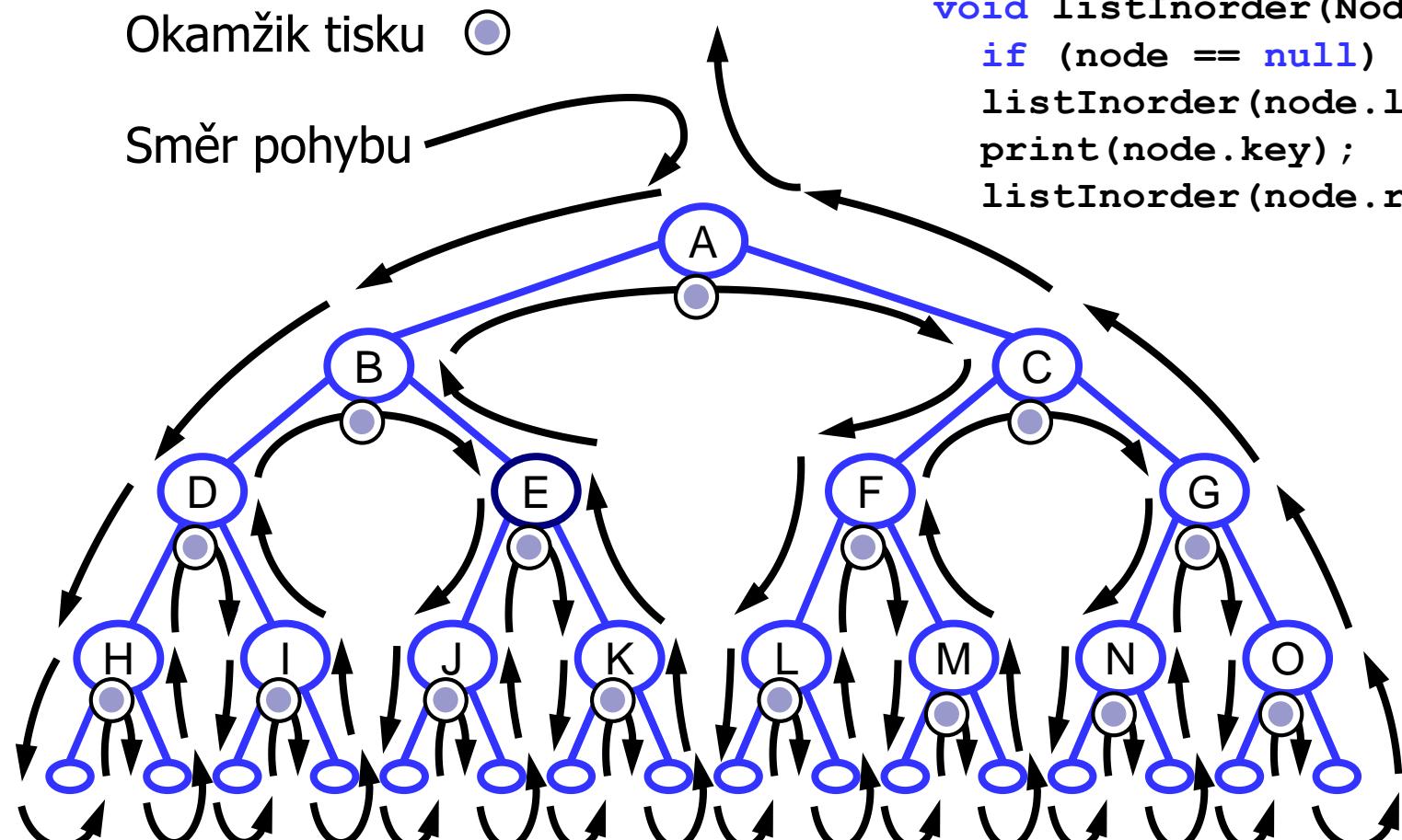
Pro aktuální uzel *u*

- projdi rekuzivně levý podstrom
- projdi rekuzivně pravý podstrom



zpracuj uzel *u*
(je více možností,
kdy to provést)

Průchod v pořadí Inorder

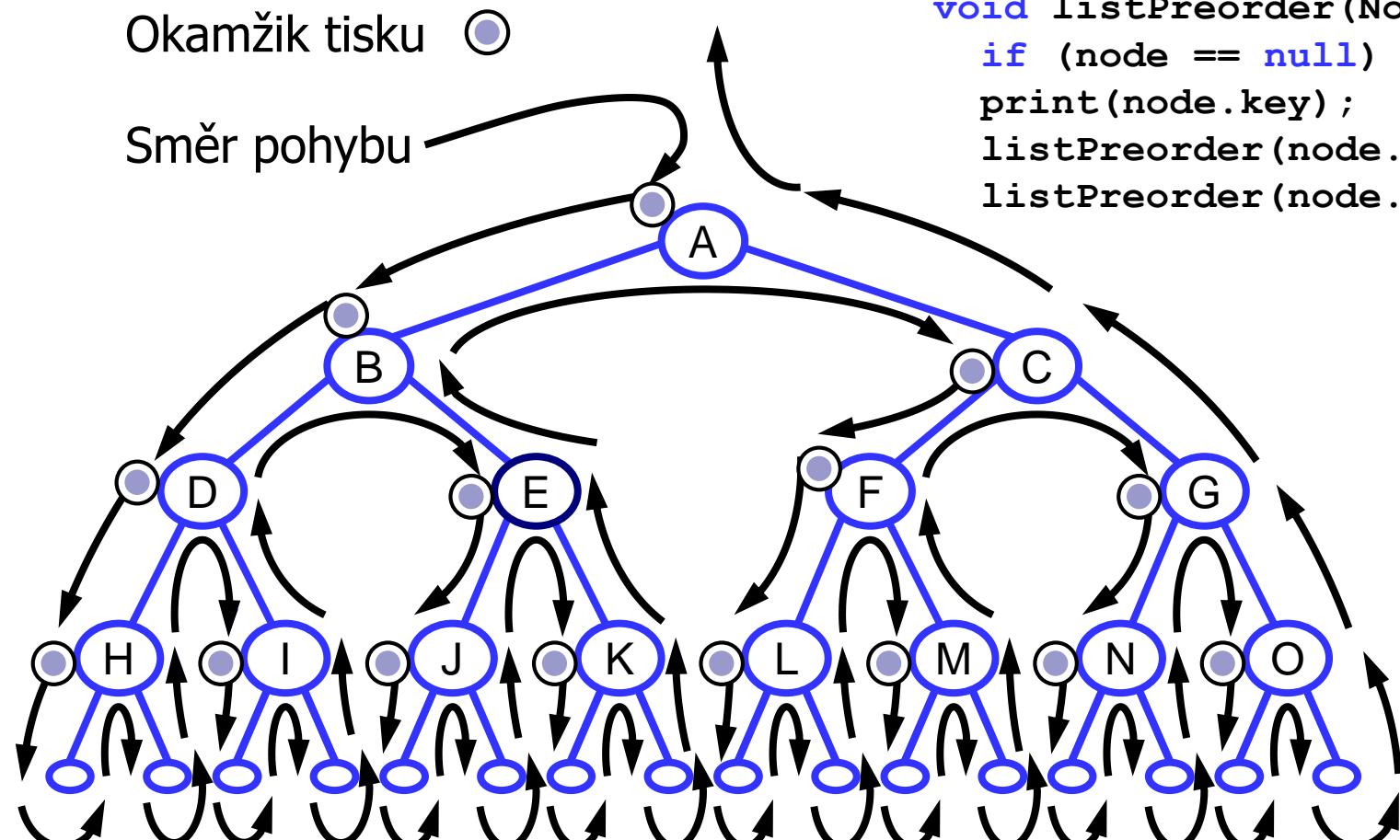


```
void listInorder(Node node) :  
    if (node == null) return;  
    listInorder(node.left);  
    print(node.key);  
    listInorder(node.right);
```

Výstup

H D I B J E K A L F M C N G O

Průchod v pořadí Preorder

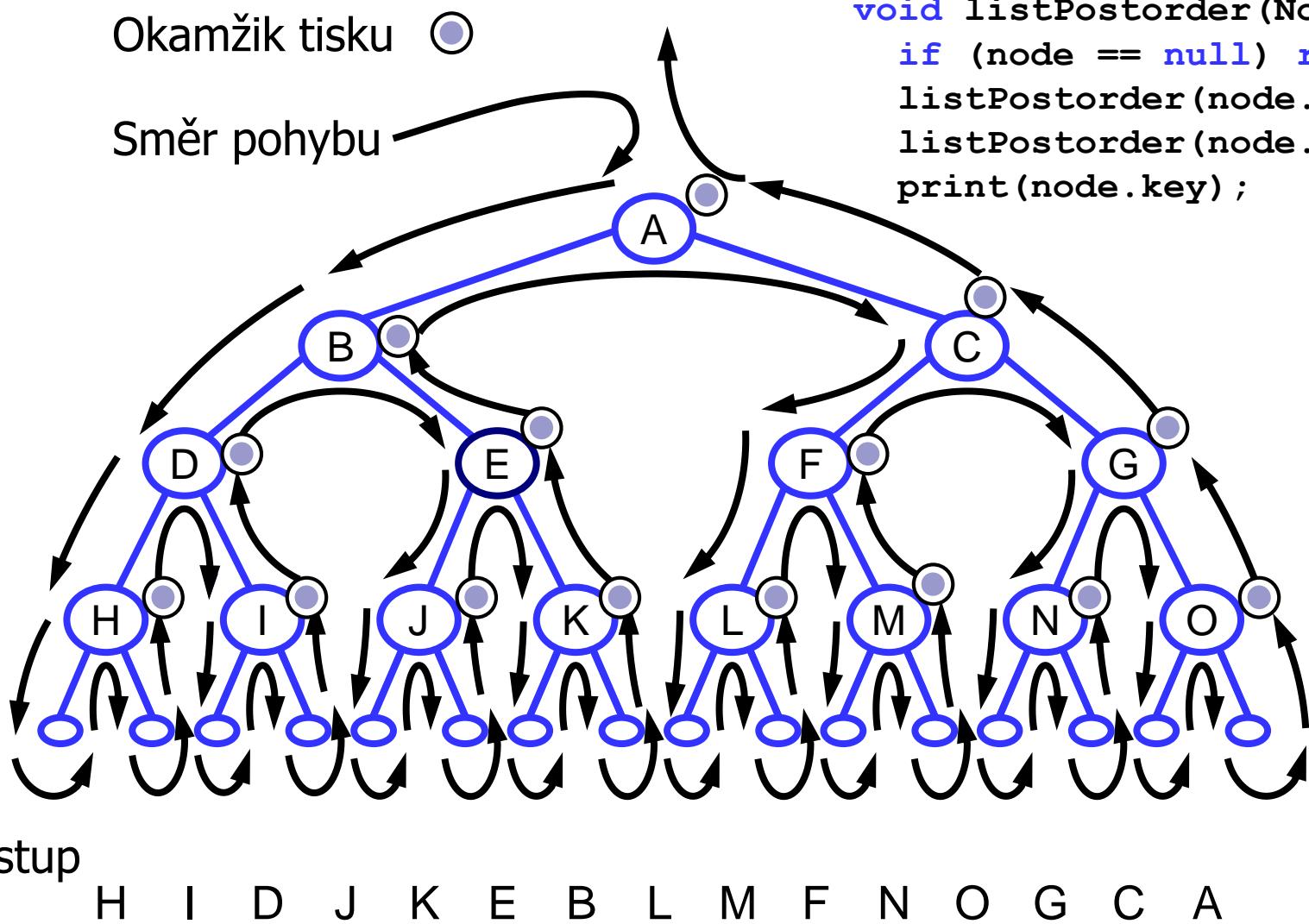


```
void listPreorder(Node node) :  
    if (node == null) return;  
    print(node.key);  
    listPreorder(node.left);  
    listPreorder(node.right);
```

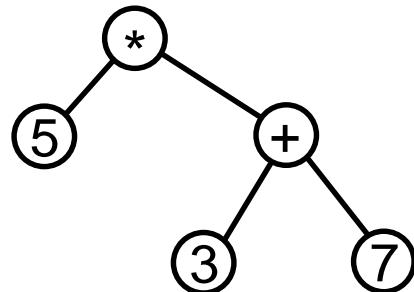
Výstup

A B D H I E J K C F L M G N O

Průchod v pořadí Postorder



Použití průchodů



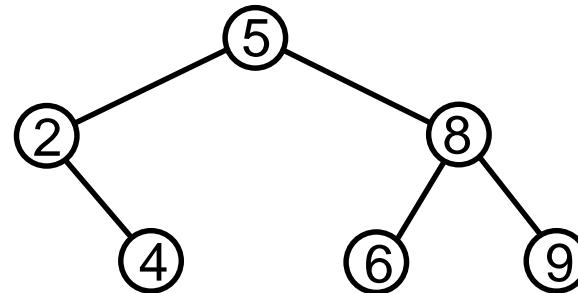
strom reprezentuje výraz
 $5 * (3 + 7)$

- Inorder: $5 * 3 + 7$
 - reprezentovaný výraz nelze určit
- Preorder: $* 5 + 3 7$
 - Lisp
- Postorder: $5 3 7 + *$
 - reverzní polská notace, zásobníkový kalkulátor

Zásobník implementuje rekurzi

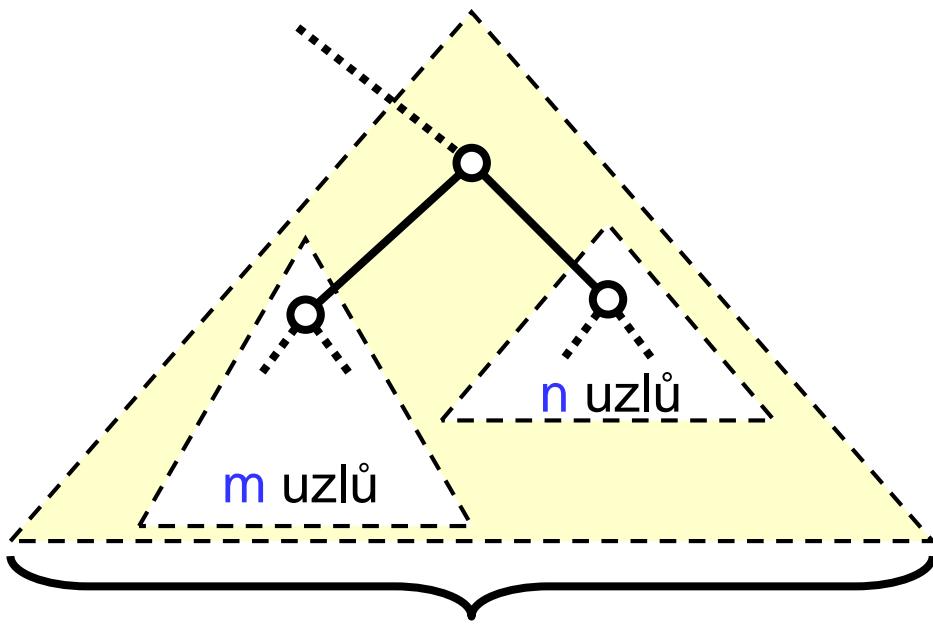
```
void inorderIterative(Node root) {  
    Stack<Node> stack = new Stack();  
    Node curr = root;  
    while (!stack.empty() || curr != null) {  
        if (curr != null) {  
            stack.push(curr);  
            curr = curr.left;  
        } else {  
            curr = stack.pop();  
            System.out.print(curr.key + " ");  
            curr = curr.right;  
        }  
    }  
}
```

Uzel uložíme na zásobník v okamžiku jeho objevení a odebereme jej po zpracování jeho levého podstromu.

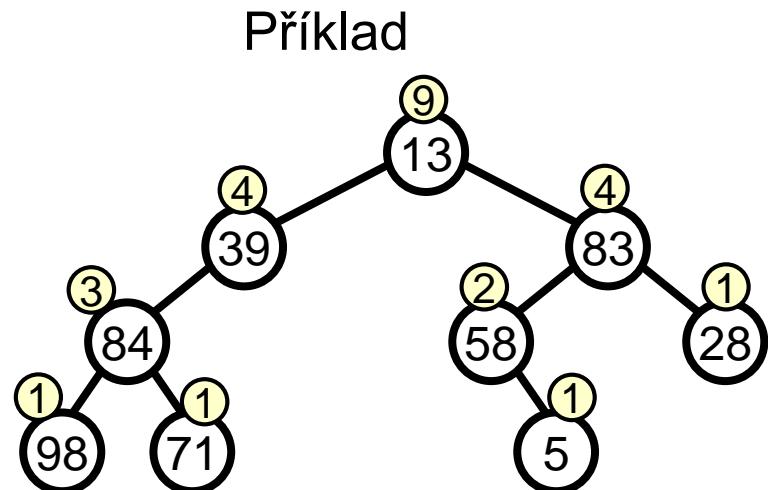


Počítání uzlů

Strom nebo podstrom



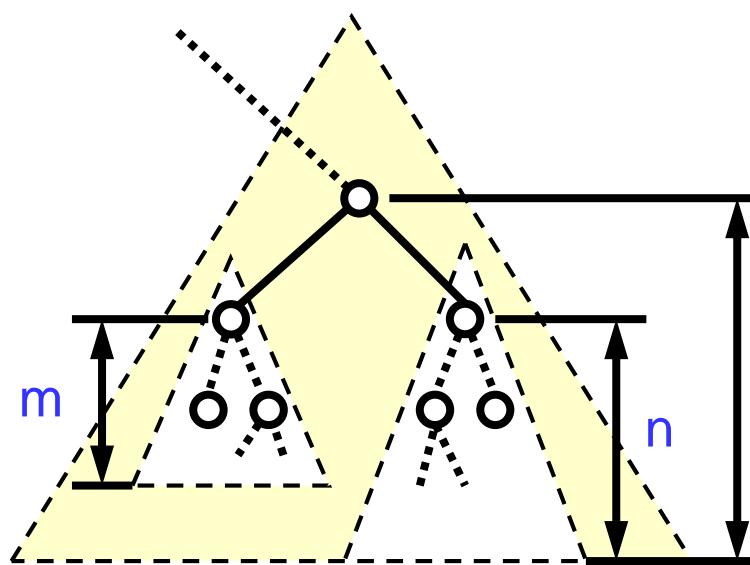
celkem ... $m+n+1$ uzlů



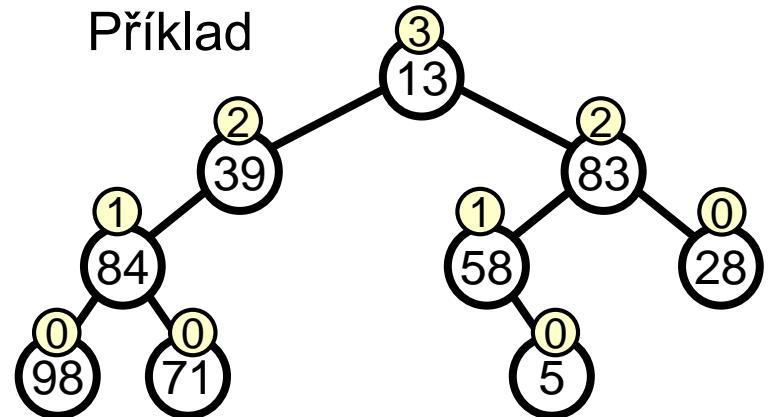
```
int count(Node node) {  
    if (node == null) return 0;  
    return (count(node.left) + count(node.right) + 1);  
}
```

Počítání hloubky

Strom nebo podstrom



Příklad



$\max(m,n)+1$

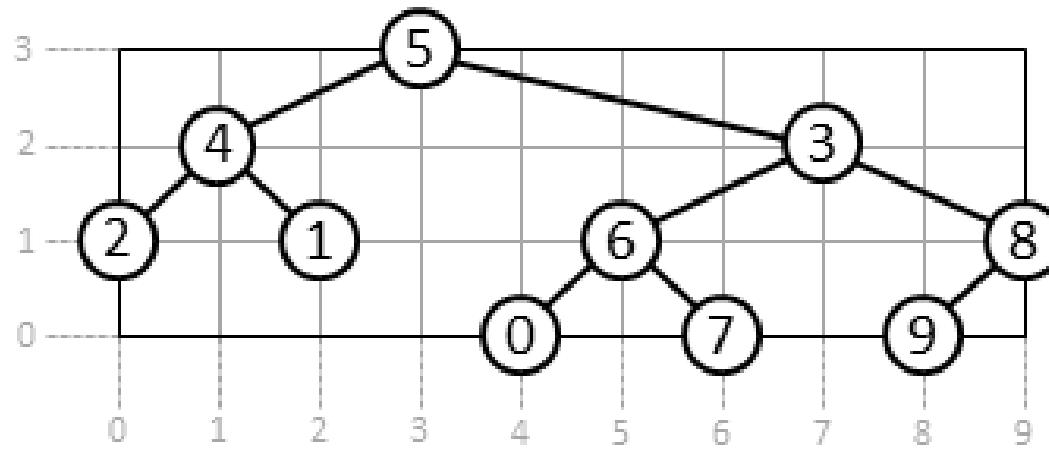
```
int depth(Node node) {  
    if (node == null) return -1;  
    return max(depth(node.left), depth(node.right)) + 1;  
}
```

Kreslení binárního stromu

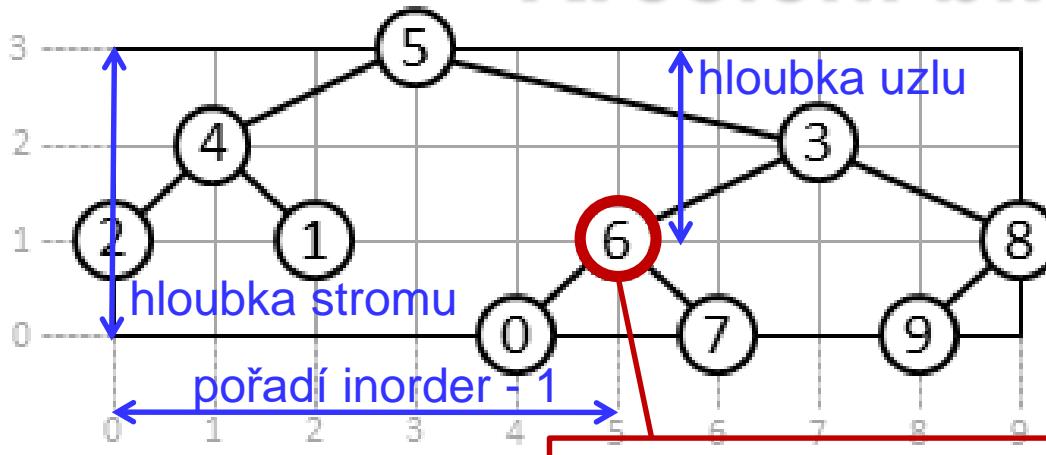
Vstup: binární strom T s n uzly.

Jak určíme souřadnice uzlů (středů kružnic), aby

- každý uzel měl celočíselnou y -ovou souřadnici o 1 větší než jeho potomci,
- všechny uzly měly navzájem různé celočíselné x -ové souřadnice od 0 do $n - 1$,
- každý levý (pravý) potomek měl x -ovou souřadnici menší (větší) než jeho rodič?



Kreslení binárního stromu



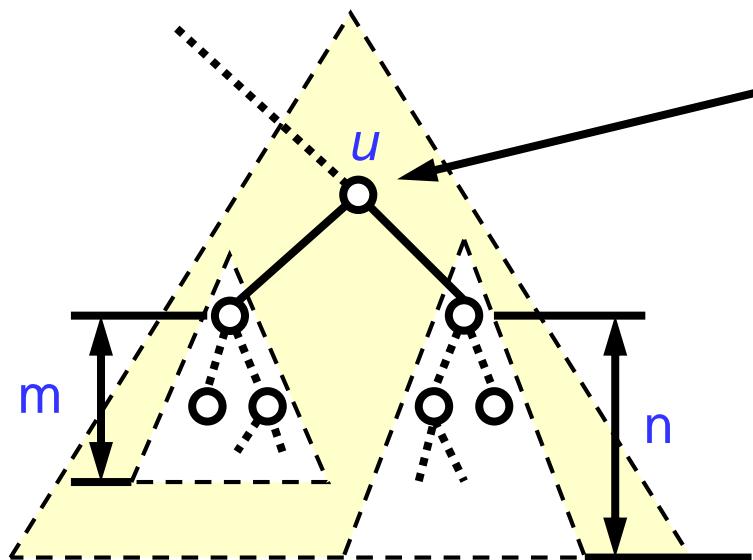
```
static int treeDepth = 0;  
static int counter = 0;  
  
class Node {  
  
    Node left, right;  
    int key;  
    int depth, inorder; }
```

```
void process(Node node, int depth) {  
  
    if (node == null) return;  
  
    node.depth = depth;  
  
    if (depth > treeDepth) treeDepth = depth;  
  
    process(node.left, depth + 1);  
  
    node.inorder = ++counter;  
  
    process(node.right, depth + 1); }
```

Call: process(root, 0);

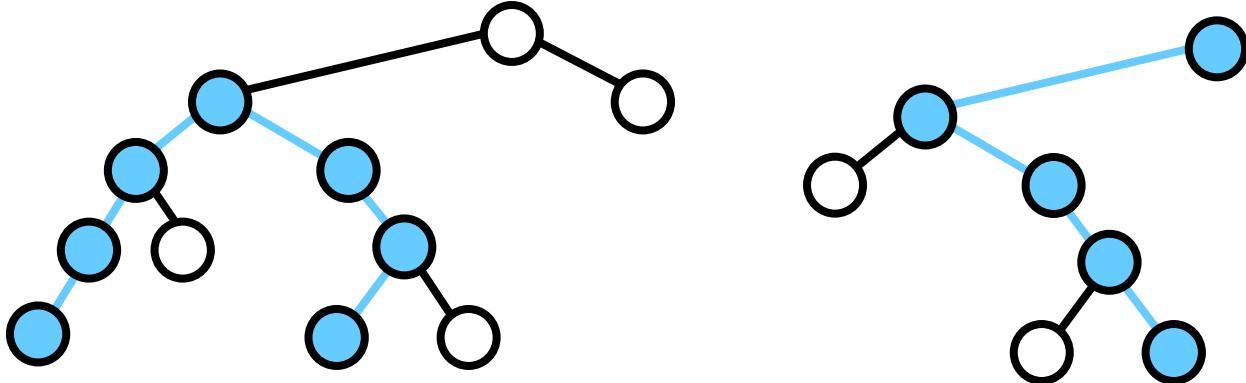
Počítání nejdelší cesty

Strom nebo podstrom



$m+n+2$... délka nejdelší cesty s
nejvyšším bodem v uzlu u

Příklady





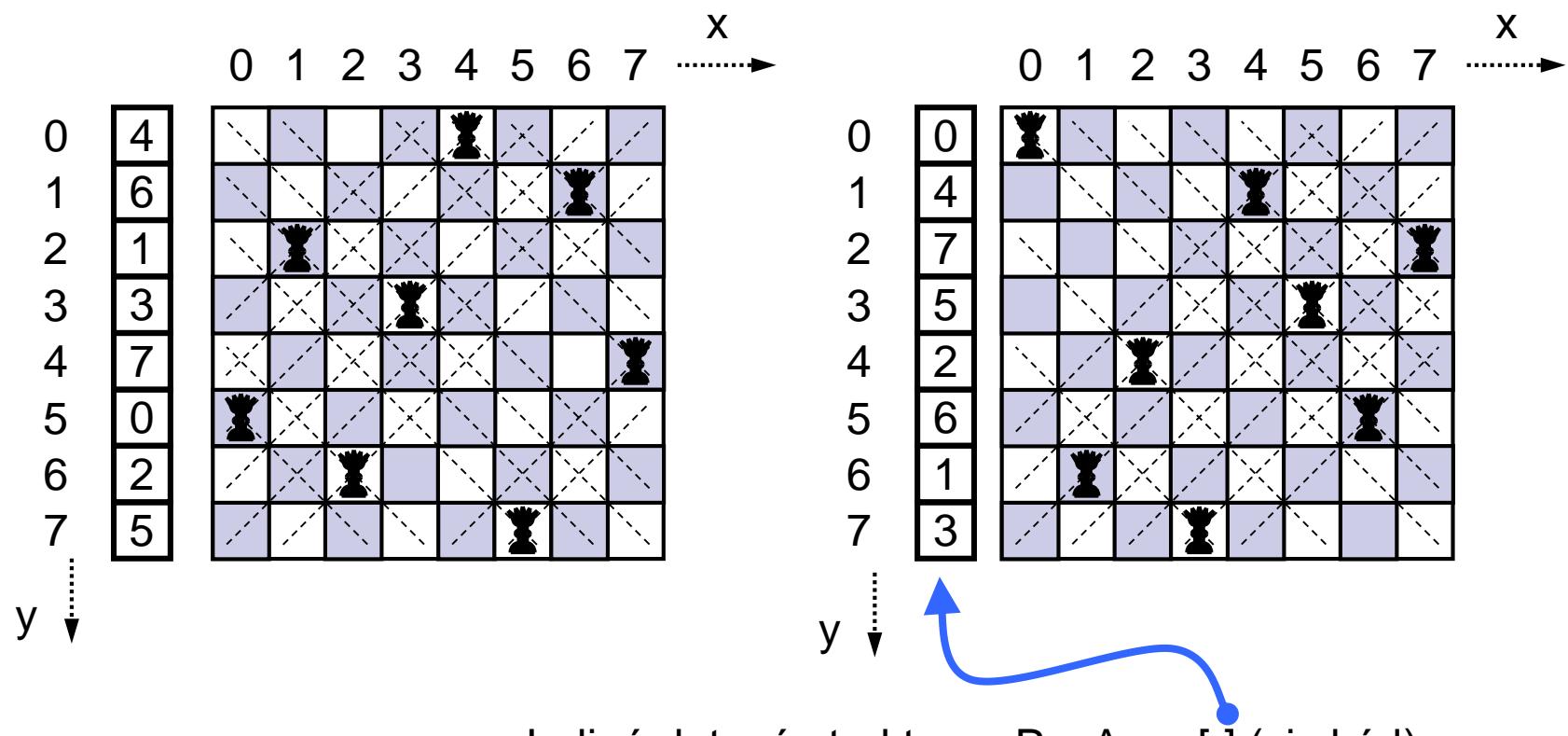
**Otázky, komentáře,
povzdechy...**

ⓘ Start presenting to display the poll results on this slide.

Prohledávání s návratem

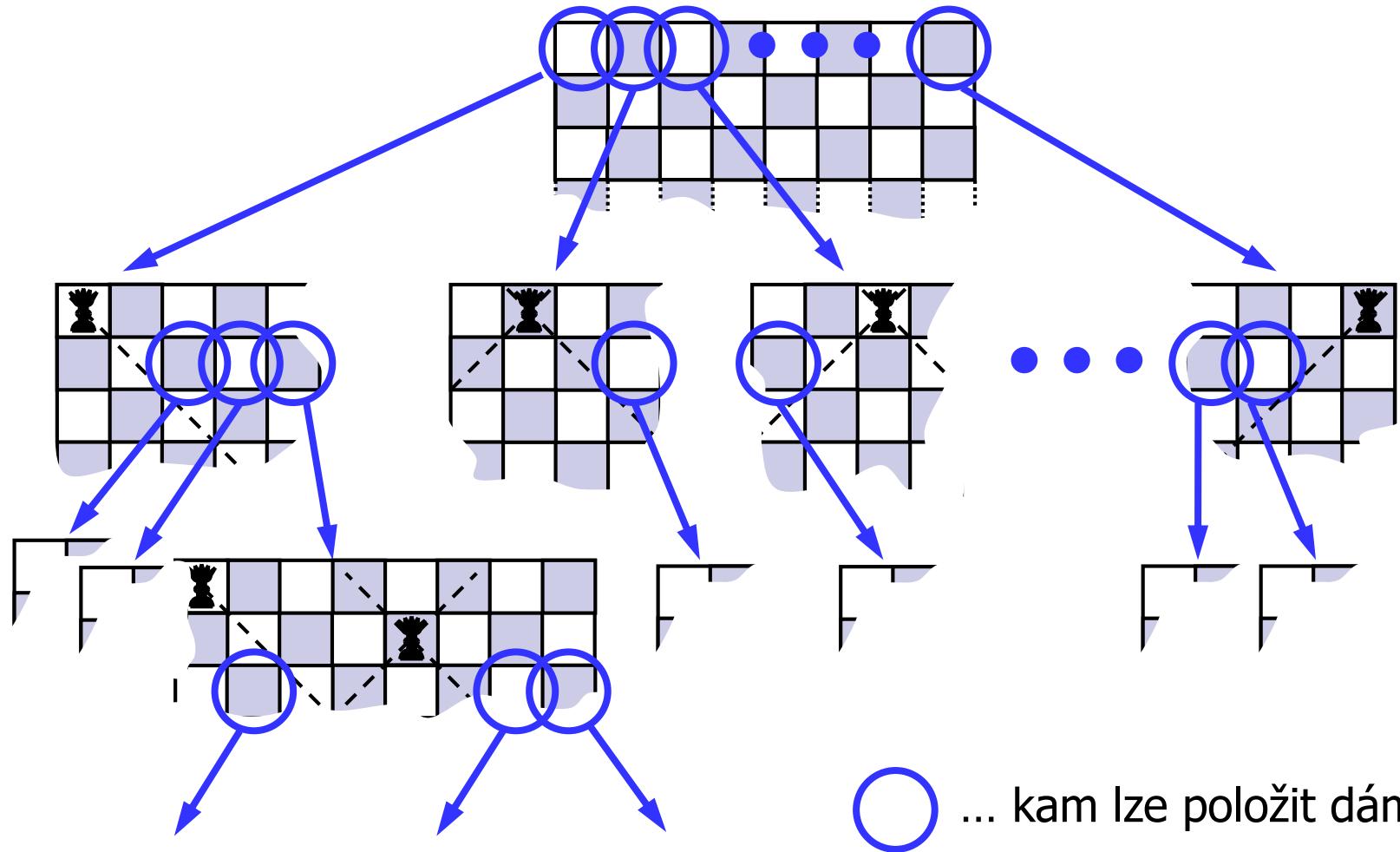
Problém osmi dam na šachovnici (obecně N dam na šachovnici NxN)

Některá řešení:



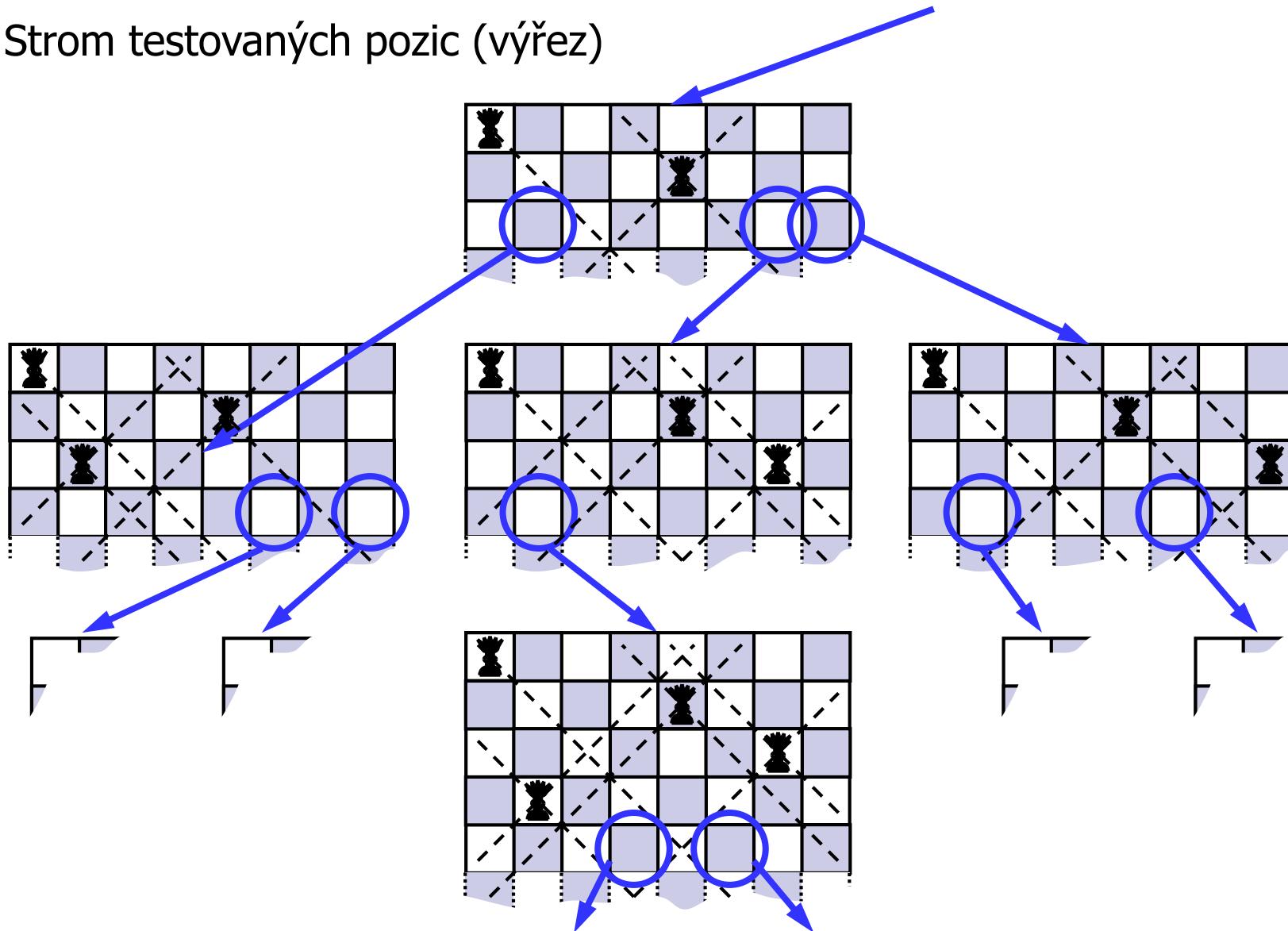
Prohledávání s návratem

Strom testovaných pozic (kořen a několik potomků)



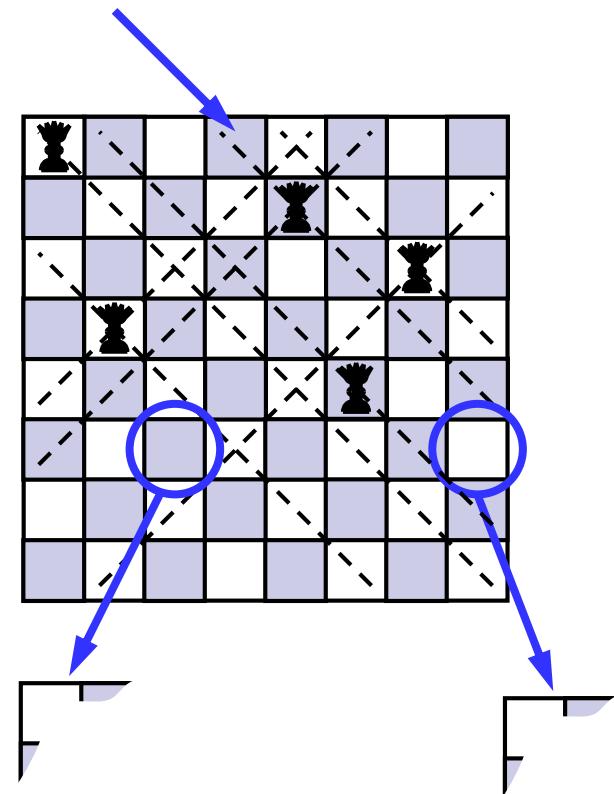
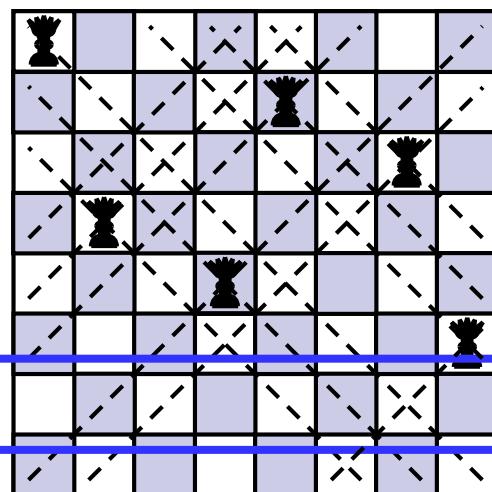
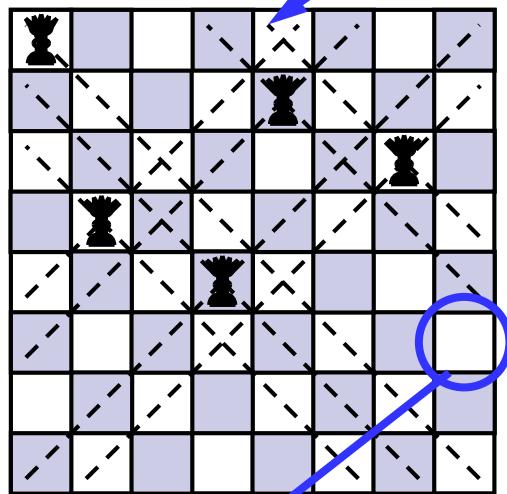
Prohledávání s návratem

Strom testovaných pozic (výřez)



Prohledávání s návratem

Strom testovaných pozic (výřez)



Prohledávání s návratem

```
boolean posOK(int x, int y) {  
    int i;  
    for (i = 0; i < y; i++)  
        if ((xPosArr[i] == x) || // stejný sloupec  
            (abs(y-i) == abs(xPosArr[i]-x))) // nebo diagonála  
            return false;  
    return true;  
}  
  
void tryPutColumn(int y) {  
    int x;  
    if (y >= N) print_xPosArr(); // řešení  
    else  
        for (x = 0; x < N; x++) // testuj sloupce  
            if (posOK(x, y)) { // když je volno,  
                xPosArr[y] = x; // dej tam dámu  
                tryPutColumn(y + 1); // a volej rekurzi  
            }  
}
```

Call: `tryPutColumn(0);`

Prohledávání s návratem

N poč. dam	Počet řešení	Počet testovaných pozic dámy		Zrychlení
		Hrubá síla (N^N)	Backtrack	
4	2	256	240	1.07
5	10	3 125	1 100	2.84
6	4	46 656	5 364	8.70
7	40	823 543	25 088	32.83
8	92	16 777 216	125 760	133.41
9	352	387 420 489	651 402	594.75
10	724	10 000 000 000	3 481 500	2 872.33
11	2 680	285 311 670 611	19 873 766	14 356.20
12	14 200	8 916 100 448 256	121 246 416	73 537.00

Úloha o nanorobotech

- Nanoroboti shromažďují vzorky v poli sektorů.
- Vzorky v sektorech mají různé hodnoty.
- Každý nanorobot má určen startovní a koncový sektor.
- Činnost nanorobota kontaminuje procházené sektory, jsou poté neprůchozí pro ostatní nanoroboty.
- V jakém pořadí nonoroboty sekvenčně aktivovat, aby hodnota sesbíraných vzorků byla maximální?

0	1	2	3	4	5
0	1	1	1	3	1
1	1	2	5	1	1
2	1	1	1	9	1
3	1	1	1	2	1
4	1	0	9	1	3
5	1	2	1	3	9

0	1	2	3	4	5
0	1	1	1	3	1
1	1	2	5	1	1
2	1	1	1	9	1
3	1	1	1	2	1
4	1	0	9	1	3
5	1	2	1	3	9

Zvolené pořadí:

3, 2, 0, 1

Hodnota vzorků:

$3+2+0+1=6$

Úloha o nanorobotech

■ Ořezávání stavového prostoru

- Pamatujeme si dosud nejlepší nalezené řešení.
- Pokud aktuálně prohledávané možnosti nemohou toto řešení vylepšit, provedeme návrat (k tomuto účelu stanovíme vhodný horní (dolní) odhad ceny řešení dosažitelného z aktuálního stavu).

Příklad: Je-li nanorobot 0 aktivován jako první, nebude hodnota nasbíraných vzorků větší než $16+(1+9+14)=40$.

	0	1	2	3	4	5
0	1	1	1	3	9	1
1	1	2	5	2	1	1
2	1	1	1	9	1	1
3	1	1	1	2	1	1
4	0	9	3	1	3	1
5	1	2	1	3	9	1

	0	1	2	3	4	5
0	1	1	1	3	9	1
1	1	2	5	2	1	1
2	1	1	1	9	1	1
3	1	1	1	2	1	1
4	0	9	3	1	3	1
5	1	2	1	3	9	1

Zvolené pořadí:

3, 2, 0, 1

Hodnota vzorků:

$31+17+3+3=54$

Úloha o nanorobotech

■ Heuristiky

- „Dobré“ řešení chceme naleznout co nejdříve, aby ořezávání bylo co nejefektivnější.

Příklad heuristiky: Zjistíme hodnotu vzorků, které jednotlivé nanoroboty sesbírají, pokud navštíví všechny sektory na jejich naplánované cestě.

Podle těchto hodnot nanoroboty uspořádáme sestupně. Stavový prostor procházíme podle získaného pořadí.

3 (31), 2 (17), 0 (16), 1 (14)

	0	1	2	3	4	5
0	1	1	1	3	9	1
1	1	2	5	1	2	1
2	1	1	1	9	1	1
3	1	1	1	2	1	1
4	1	0	9	1	3	1
5	1	2	1	3	9	1

	0	1	2	3	4	5
0	1	1	1	3	9	1
1	1	2	5	1	2	1
2	1	1	1	9	1	1
3	1	1	1	2	1	1
4	1	0	9	1	3	1
5	1	2	1	3	9	1

Zvolené pořadí:

3, 2, 0, 1

Hodnota vzorků:

$31+17+3+3=54$

Druhá domácí úloha

9	9	9	8	6	4
9	8	8	8	5	3
8	7	6	6	4	2
6	5	5	5	3	1



Audience Q&A Session

- ① Start presenting to display the audience questions on this slide.