Ориентированные графы

Владимир Подольский

Факультет компьютерных наук, Высшая Школа Экономики

Ориентированные графы

Ориентированные графы

Пути в ориентированных графах

Ориентированные ациклические графы

Сильная связность

Ориентированные графы

- Не все задачи можно естественно описать теми графами, которые мы обсуждали

Ориентированные графы

- Не все задачи можно естественно описать теми графами, которые мы обсуждали
- Если в социальной сети отношение «быть другом» взаимно, то описывается нашими графами

Ориентированные графы

- Не все задачи можно естественно описать теми графами, которые мы обсуждали
- Если в социальной сети отношение «быть другом» взаимно, то описывается нашими графами
- А что если отношение не симметрично, например «быть подписанным»?

Ориентированные графы

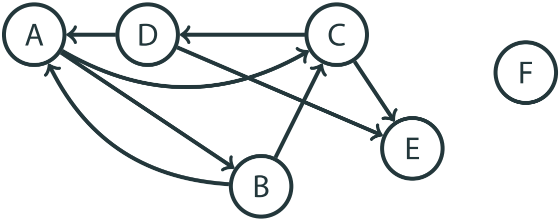
- Не все задачи можно естественно описать теми графами, которые мы обсуждали
- Если в социальной сети отношение «быть другом» взаимно, то описывается нашими графами
- А что если отношение не симметрично, например «быть подписанным»?
- Что если в нашей транспортной сети есть односторонние дороги?

Ориентированные графы

- Не все задачи можно естественно описать теми графами, которые мы обсуждали
- Если в социальной сети отношение «быть другом» взаимно, то описывается нашими графами
- А что если отношение не симметрично, например «быть подписанным»?
- Что если в нашей транспортной сети есть односторонние дороги?
- Есть много других случаев, в которых отношения между объектами не симметричны

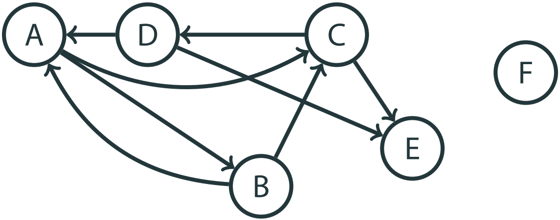
Ориентированные графы

- Объекты изображаем точками — вершинами



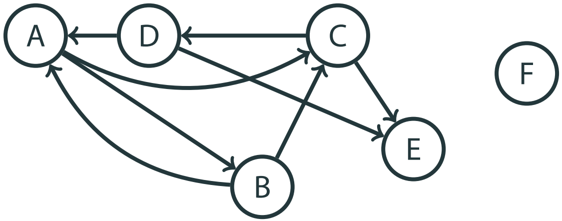
Ориентированные графы

- Объекты изображаем точками — вершинами
- Связанные отношением соединяем стрелками — ребрами



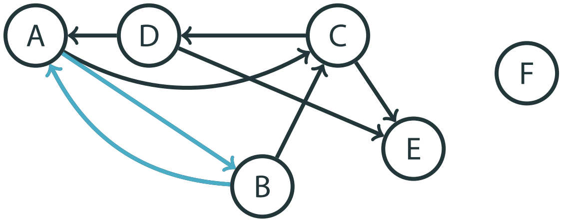
Ориентированные графы

- Объекты изображаем точками — вершинами
- Связанные отношением соединяем стрелками — ребрами
- При изображении ребра могут пересекаться



Ориентированные графы

- Объекты изображаем точками — вершинами
- Связанные отношением соединяем стрелками — ребрами
- При изображении ребра могут пересекаться
- Возможны ребра сразу в обе стороны



Ориентированные графы

- Ориентированный граф — множество вершин, соединенных ориентированными ребрами

Ориентированные графы

- Ориентированный граф — множество вершин, соединенных ориентированными ребрами
- Множество вершин графа обычно обозначают буквой V

Ориентированные графы

- Ориентированный граф — множество вершин, соединенных ориентированными ребрами
- Множество вершин графа обычно обозначают буквой V
- Отдельные вершины часто обозначают буквами v и u

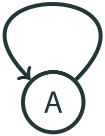
Ориентированные графы

- Ориентированный граф — множество вершин, соединенных ориентированными ребрами
- Множество вершин графа обычно обозначают буквой V
- Отдельные вершины часто обозначают буквами v и u
- Множество ребер графа обозначают буквой E

Ориентированные графы

- Ориентированный граф — множество вершин, соединенных ориентированными ребрами
- Множество вершин графа обычно обозначают буквой V
- Отдельные вершины часто обозначают буквами v и u
- Множество ребер графа обозначают буквой E
- Отдельные ребра часто обозначают буквой e

Что разрешается?



- Допускаются ли петли?

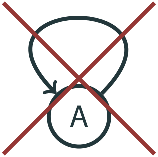
Что разрешается?

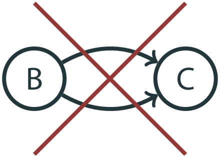
- Допускаются ли петли?
- Допускаются ли кратные ребра?

Что разрешается?

- Допускаются ли петли?
- Допускаются ли кратные ребра?
- Можно допускать, можно нет

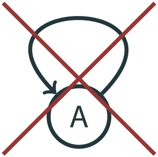
Что разрешается?

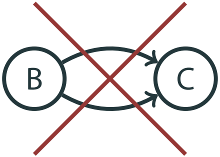




- Допускаются ли петли?
- Допускаются ли кратные ребра?
- Можно допускать, можно нет
- По умолчанию не допускаем

Что разрешается?

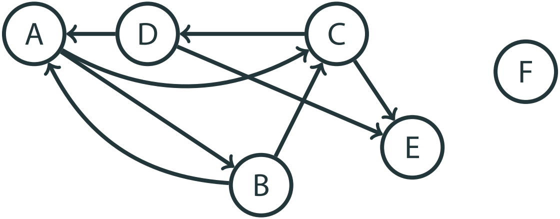




- Допускаются ли петли?
- Допускаются ли кратные ребра?
- Можно допускать, можно нет
- По умолчанию не допускаем
- Большинство результатов переносится и на эти случаи

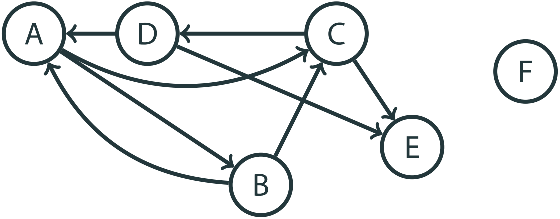
Степени вершин

- Пусть v вершина графа



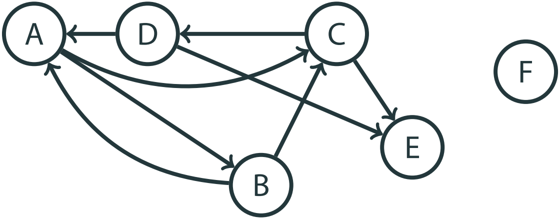
Степени вершин

- Пусть v вершина графа
- Входящей степенью v называется число ребер, входящих в v; обозначение: $d_+(v)$



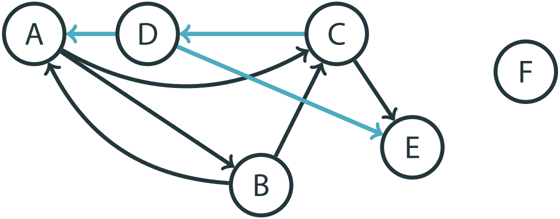
Степени вершин

- Пусть v вершина графа
- Входящей степенью v называется число ребер, входящих в v; обозначение: $d_+(v)$
- Исходящей степенью v называется число ребер, исходящих из v; обозначение: $d\_(v)$



Степени вершин

- Пусть v вершина графа
- Входящей степенью v называется число ребер, входящих в v; обозначение: $d_+(v)$
- Исходящей степенью v называется число ребер, исходящих из v; обозначение: $d\_(v)$
- Например, $d_+(D) = 1, d\_(D) = 2$



Степени вершин и число ребер

Лемма

Сумма всех исходящих степеней вершин в графе равна сумме всех входящих степеней вершин и равна числу ребер

Или в виде формулы

$$\sum_{v \in V} d_+(v) = \sum_{v \in V} d_-(v) = |E|$$

Степени вершин и число ребер

Лемма

Сумма всех исходящих степеней вершин в графе равна сумме всех входящих степеней вершин и равна числу ребер

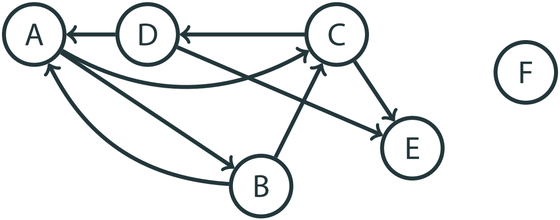
Или в виде формулы

$$\sum_{v \in V} d_+(v) = \sum_{v \in V} d_-(v) = |E|$$

Доказательство почти такое же, как для неориентированных графов

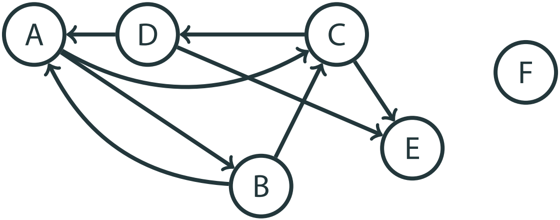
Степени вершин и число ребер

- Давайте посчитаем двумя способами число концов ребер



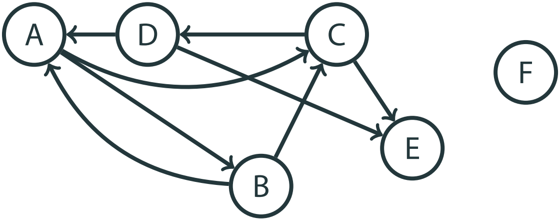
Степени вершин и число ребер

- Давайте посчитаем двумя способами число концов ребер
- С одной стороны, концов ребер столько же, сколько ребер



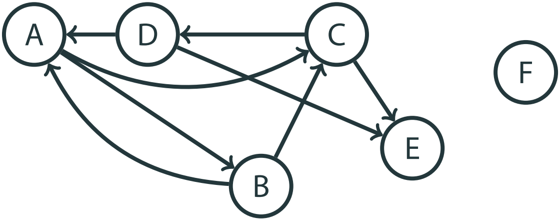
Степени вершин и число ребер

- С другой стороны, каждый конец ребра входит в какую-то вершину



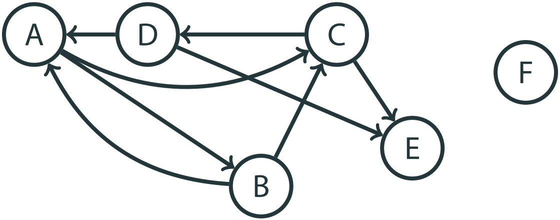
Степени вершин и число ребер

- С другой стороны, каждый конец ребра входит в какую-то вершину
- В вершину v входит $d_+(v)$ концов, так что всего концов $\sum_{v \in V} d_+(v)$



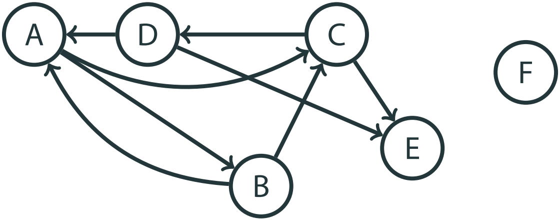
Степени вершин и число ребер

- Получаем $\sum_{v \in V} d_+(v) = |E|$



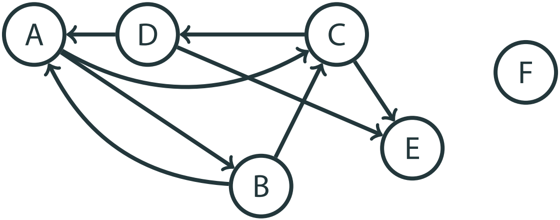
Степени вершин и число ребер

- Получаем $\sum_{v \in V} d_+(v) = |E|$
- Аналогично можно посчитать двумя способами число начал ребер



Степени вершин и число ребер

- Получаем $\sum_{v \in V} d_+(v) = |E|$
- Аналогично можно посчитать двумя способами число начал ребер
- Получаем $\sum_{v \in V} d_-(v) = |E|$



Ориентированные графы

Ориентированные графы

Пути в ориентированных графах

Ориентированные ациклические графы

Сильная связность

Ориентированные пути

- Ориентированный путь это последовательность вершин в графе:

$$v_0, v_1, \ldots, v_k$$

Ориентированные пути

- Ориентированный путь это последовательность вершин в графе:

$$v_0, v_1, \ldots, v_k$$

- Из каждой вершины есть ребро в следующую

Ориентированные пути

- Ориентированный путь это последовательность вершин в графе:

$$v_0, v_1, \ldots, v_k$$

- Из каждой вершины есть ребро в следующую
- Длина пути — число шагов в нем, у нас k

Ориентированные пути

- Ориентированный путь это последовательность вершин в графе:

$$v_0, v_1, \dots, v_k$$

- Из каждой вершины есть ребро в следующую
- Длина пути — число шагов в нем, у нас k
- Вершины могут повторяться

Ориентированные пути

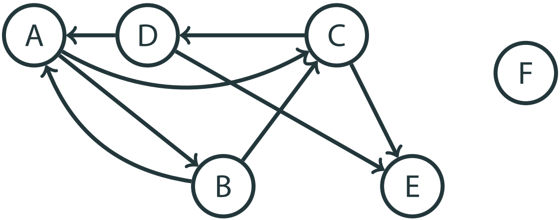
- Ориентированный путь это последовательность вершин в графе:

$$v_0, v_1, \dots, v_k$$

- Из каждой вершины есть ребро в следующую
- Длина пути — число шагов в нем, у нас k
- Вершины могут повторяться
- Если вершины не повторяются, то это простой путь

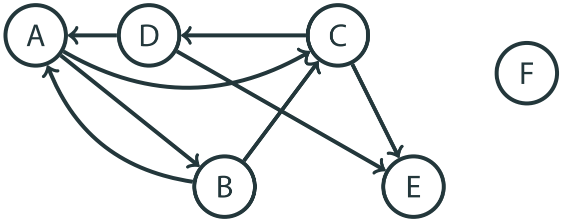
Ориентированные пути

- Например, A, B, C, D, A, C — это ориентированный путь, но не простой путь



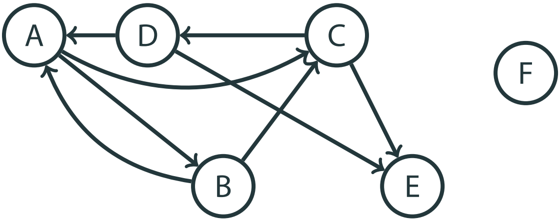
Ориентированные пути

- Например, A, B, C, D, A, C — это ориентированный путь, но не простой путь
- A, B, C, D, E — простой ориентированный путь



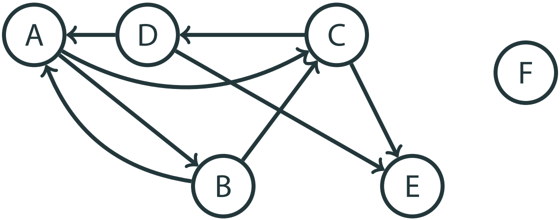
Ориентированные пути

- Например, A, B, C, D, A, C — это ориентированный путь, но не простой путь
- A, B, C, D, E — простой ориентированный путь
- A, C, E, D, A — не является ориентированным путем: нет ребра (E, D)



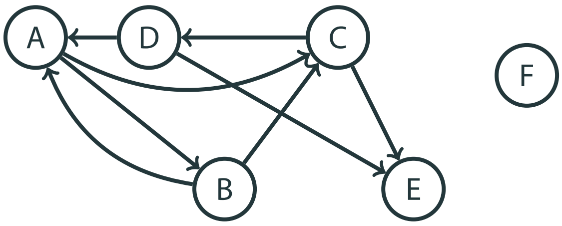
Ориентированные циклы

- Если начальная вершина ориентированного пути совпадает с конечной, то это ориентированный цикл: $v_0, v_1, \ldots, v_k = v_0$



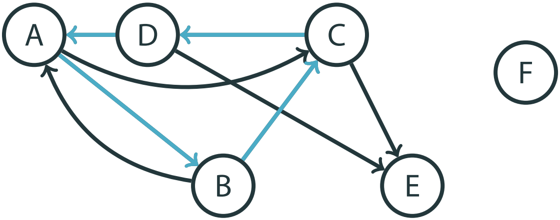
Ориентированные циклы

- Если начальная вершина ориентированного пути совпадает с конечной, то это ориентированный цикл: $v_0, v_1, \dots, v_k = v_0$
- Длина цикла — число шагов в нем (у нас k)



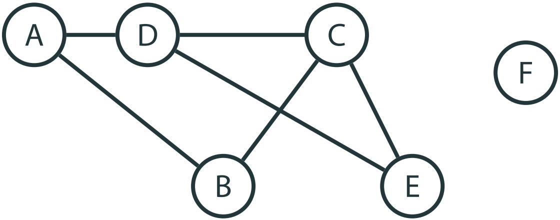
Ориентированные циклы

- Если начальная вершина ориентированного пути совпадает с конечной, то это ориентированный цикл: $v_0, v_1, \ldots, v_k = v_0$
- Длина цикла — число шагов в нем (у нас k)
- Например: A, B, C, D, A — ориентированный цикл



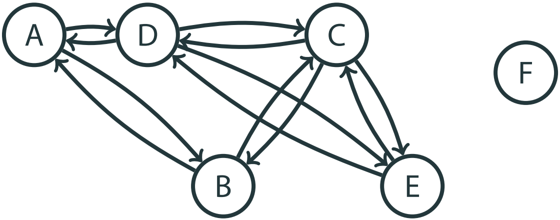
Ориентация ребер

- С точки зрения путей в графах, неориентированные графы можно задать как ориентированные



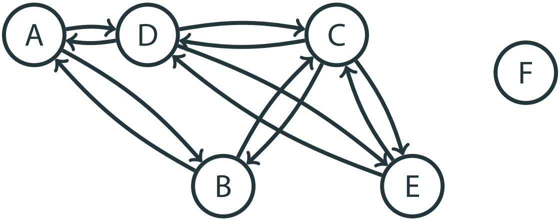
Ориентация ребер

- С точки зрения путей в графах, неориентированные графы можно задать как ориентированные
- Просто раздваиваем ребра



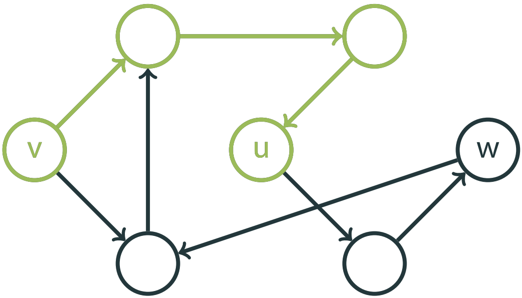
Ориентация ребер

- С точки зрения путей в графах, неориентированные графы можно задать как ориентированные
- Просто раздваиваем ребра
- Все пути изначального графа остаются путями в ориентированном



Достижимость

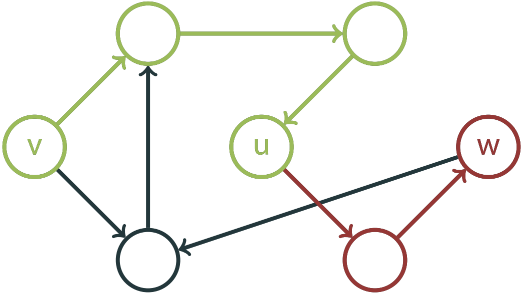
- Вершина u достижима из вершины v, если есть ориентированный путь из v в u



Достижимость

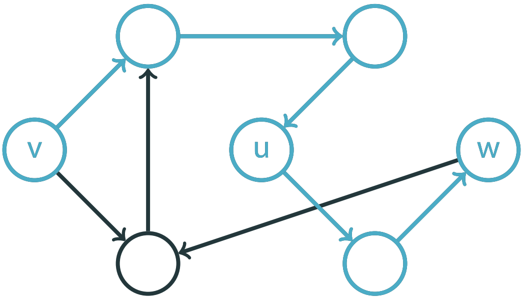
- Вершина u достижима из вершины v, если есть ориентированный путь из v в u

- Это транзитивно: если u достижима из v, а w достижима из u, то w достижима из u



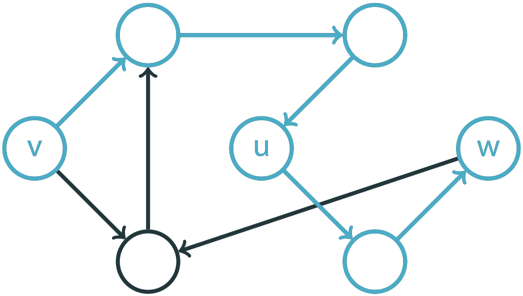
Достижимость

- Вершина u достижима из вершины v, если есть ориентированный путь из v в u
- Это транзитивно: если u достижима из v, а w достижима из u, то w достижима из u



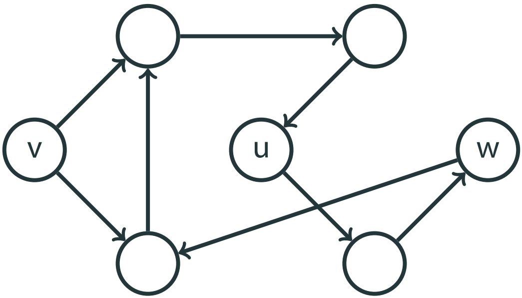
Достижимость

- Это несимметрично: w достижима из v, а v не достижима из w



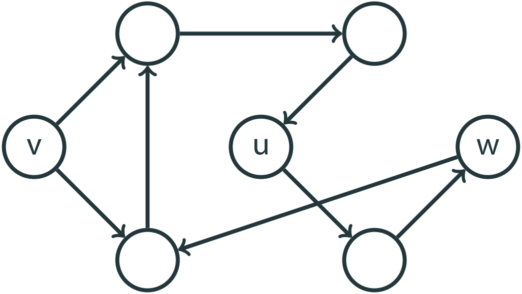
Достижимость

- Это несимметрично: w достижима из v, а v не достижима из w
- Действительно, нет ребер, входящих в v



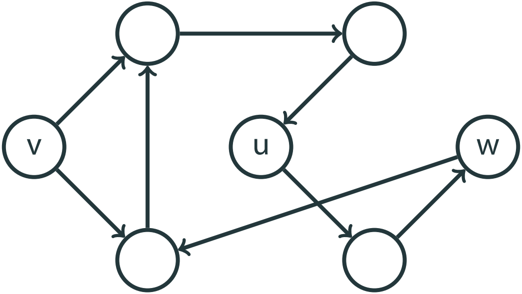
Достижимость

- Это отношение можно симметризовать!



Достижимость

- Это отношение можно симметризовать!
- Обсудим это чуть позже



Ориентированные графы

Ориентированные графы

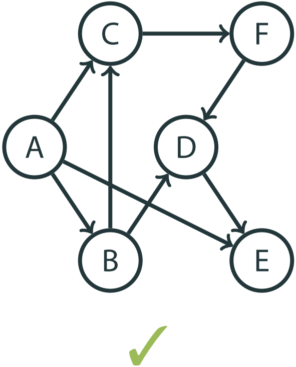
Пути в ориентированных графах

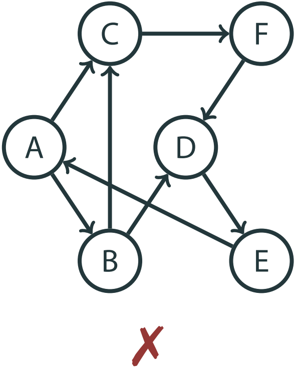
Ориентированные ациклические графы

Сильная связность

Ориентированные ациклические графы

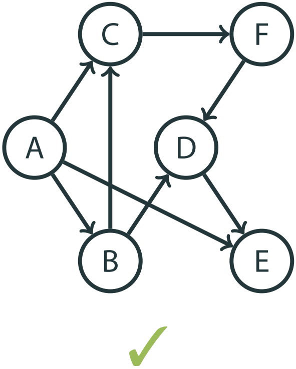
Граф называется ориентированным ациклическим, если в нем нет ориентированных циклов

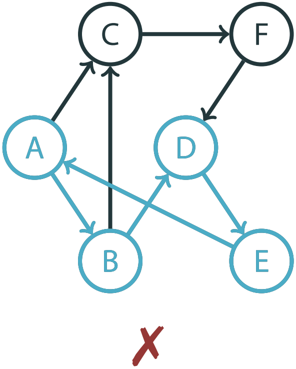




Ориентированные ациклические графы

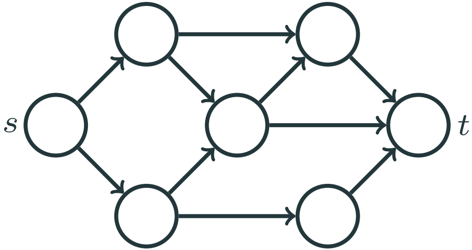
Граф называется ориентированным ациклическим, если в нем нет ориентированных циклов





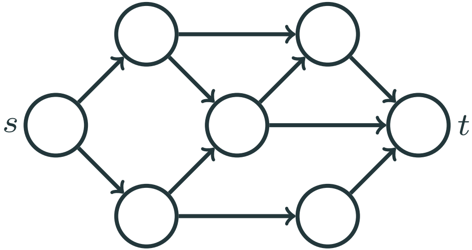
Примеры

- Уже видели пример в начале курса



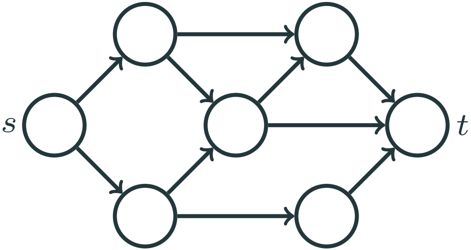
Примеры

- Уже видели пример в начале курса
- Граф зависимостей курсов в университете



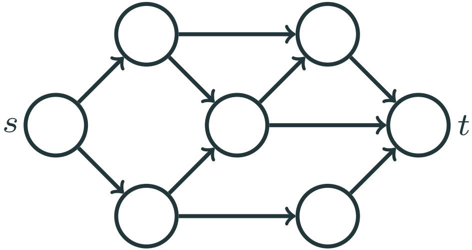
Примеры

- Уже видели пример в начале курса
- Граф зависимостей курсов в университете
- Граф зависимостей работ



Граф зависимостей

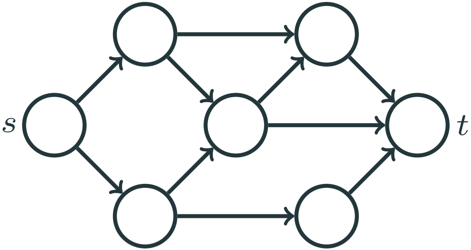
- Пусть у нас есть n дел, между которыми есть зависимости: для некоторых дел A и B известно, что A нужно выполнить до B



Граф зависимостей

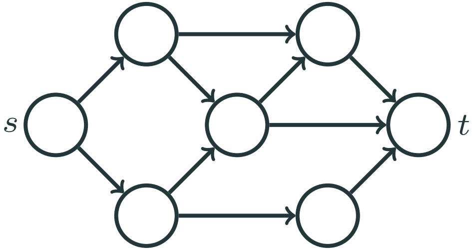
- Пусть у нас есть n дел, между которыми есть зависимости: для некоторых дел A и B известно, что A нужно выполнить до B

- Мы хотим выполнять работы одну за другой



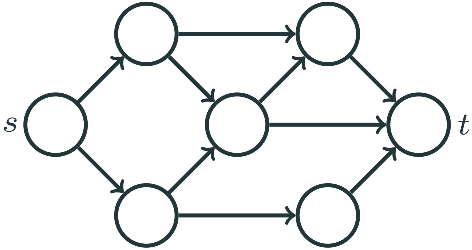
Граф зависимостей

- Пусть у нас есть n дел, между которыми есть зависимости: для некоторых дел A и B известно, что A нужно выполнить до B
- Мы хотим выполнять работы одну за другой
- Построим граф: вершины — работы, ориентированные ребра — зависимости



Граф зависимостей

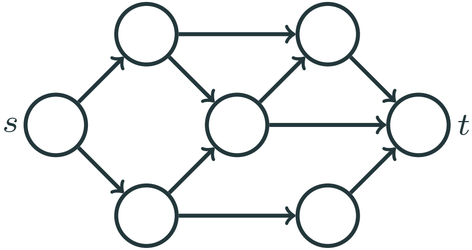
- Хотим перенумеровать вершины так, чтобы ребра вели из вершин с меньшим номером в вершины с большим номером



Граф зависимостей

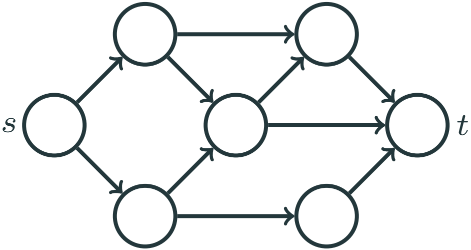
- Хотим перенумеровать вершины так, чтобы ребра вели из вершин с меньшим номером в вершины с большим номером

- Когда это возможно?



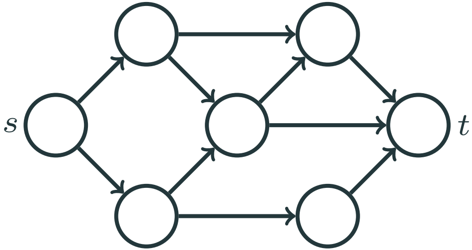
Граф зависимостей

- Очевидно, невозможно, если в графе есть ориентированный цикл



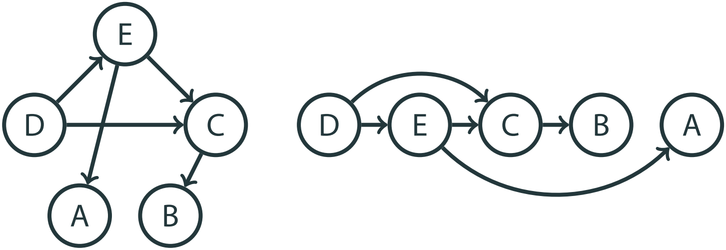
Граф зависимостей

- Очевидно, невозможно, если в графе есть ориентированный цикл
- Оказывается, это единственное препятствие



Топологическая сортировка

- Топологическая сортировка — сортировка вершин графа так, что все ребра ведут из вершин с меньшим номером, в вершины с большим



Сортировка ациклических графов

Теорема

Всякий ориентированный ациклический граф можно топологически отсортировать

Сортировка ациклических графов

Теорема

Всякий ориентированный ациклический граф можно топологически отсортировать

- Мы докажем, что в каждом ациклическом графе есть сток — вершина, из которой не выходит ребер

Сортировка ациклических графов

Теорема

Всякий ориентированный ациклический граф можно топологически отсортировать

- Мы докажем, что в каждом ациклическом графе есть сток — вершина, из которой не выходит ребер
- Дальше берем сток и объявляем его последней вершиной

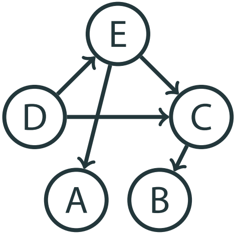
Сортировка ациклических графов

Теорема

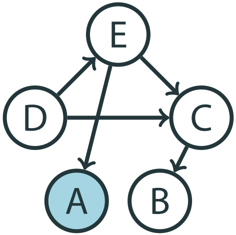
Всякий ориентированный ациклический граф можно топологически отсортировать

- Мы докажем, что в каждом ациклическом графе есть сток — вершина, из которой не выходит ребер
- Дальше берем сток и объявляем его последней вершиной
- Удаляем сток и повторяем

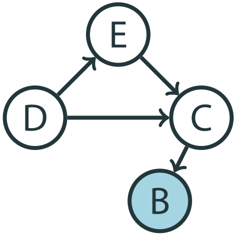
Пример



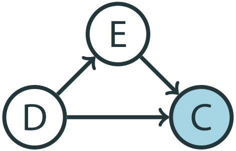
Пример



Пример

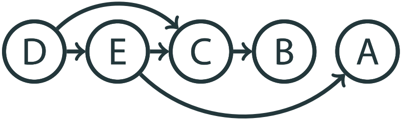


Пример



Пример

Пример



Почему есть сток?

- Пусть стока нет: из каждой вершины выходит хотя бы одно ребро

Почему есть сток?

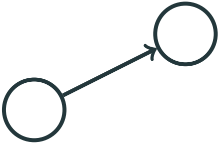
- Пусть стока нет: из каждой вершины выходит хотя бы одно ребро
- Начнем ходить по вершинам графа:

Почему есть сток?

- Пусть стока нет: из каждой вершины выходит хотя бы одно ребро
- Начнем ходить по вершинам графа:

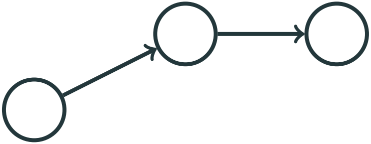
Почему есть сток?

- Пусть стока нет: из каждой вершины выходит хотя бы одно ребро
- Начнем ходить по вершинам графа:



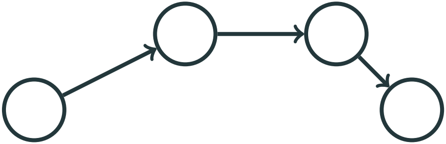
Почему есть сток?

- Пусть стока нет: из каждой вершины выходит хотя бы одно ребро
- Начнем ходить по вершинам графа:



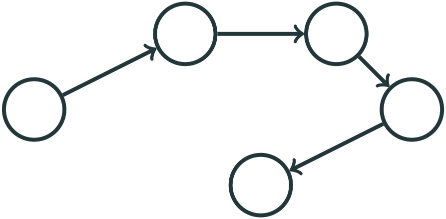
Почему есть сток?

- Пусть стока нет: из каждой вершины выходит хотя бы одно ребро
- Начнем ходить по вершинам графа:



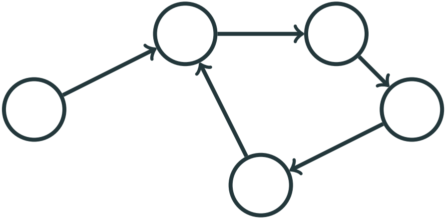
Почему есть сток?

- Пусть стока нет: из каждой вершины выходит хотя бы одно ребро
- Начнем ходить по вершинам графа:



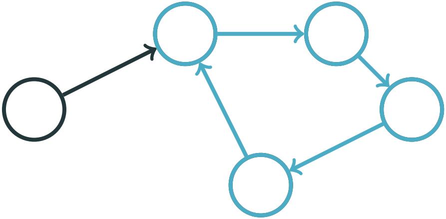
Почему есть сток?

- Пусть стока нет: из каждой вершины выходит хотя бы одно ребро
- Начнем ходить по вершинам графа:



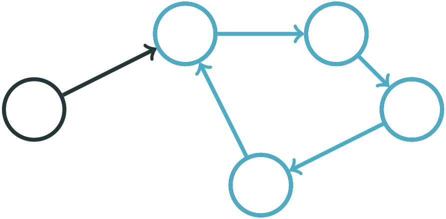
Почему есть сток?

- Пусть стока нет: из каждой вершины выходит хотя бы одно ребро
- Начнем ходить по вершинам графа:



Почему есть сток?

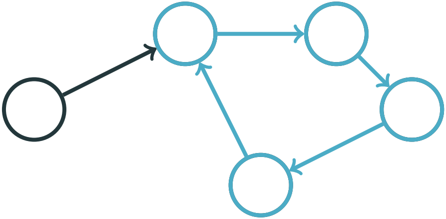
- Пусть стока нет: из каждой вершины выходит хотя бы одно ребро
- Начнем ходить по вершинам графа:



- Противоречие!

Почему есть сток?

- Пусть стока нет: из каждой вершины выходит хотя бы одно ребро
- Начнем ходить по вершинам графа:



- Противоречие!
- Итак, вершины ациклического графа можно топологически упорядочить

Ориентированные графы

Ориентированные графы

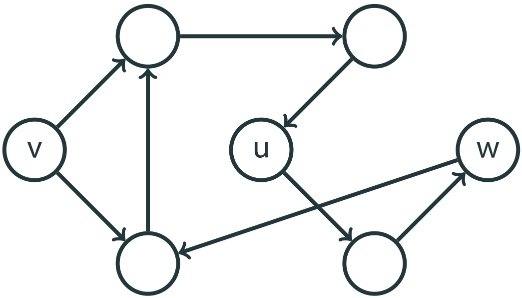
Пути в ориентированных графах

Ориентированные ациклические графы

Сильная связность

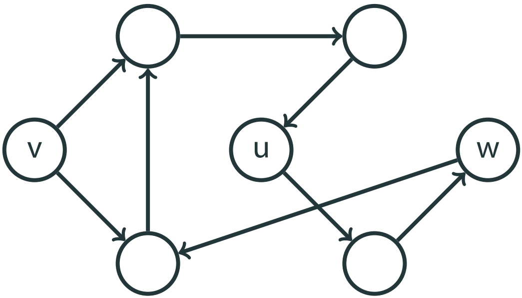
Достижимость

- Отношение достижимости несимметрично



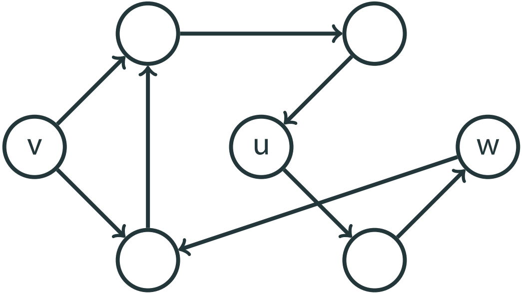
Достижимость

- Отношение достижимости несимметрично
- Но его можно симметризовать



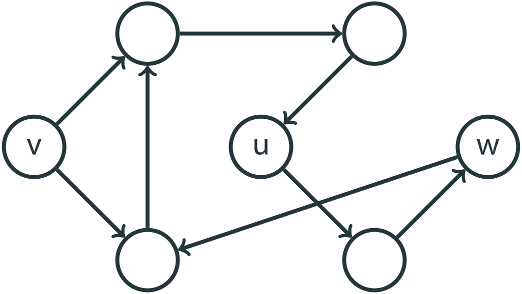
Достижимость

- Назовем вершину a сильно связанной с вершиной b, если из каждой из вершин есть путь в другую



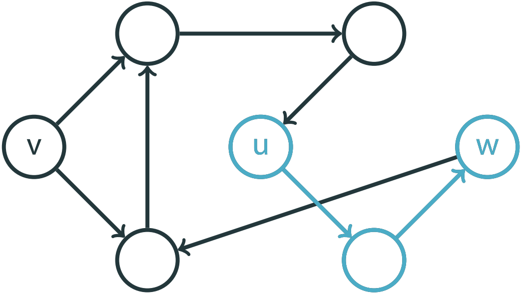
Достижимость

- Например, вершины u и w сильно связаны



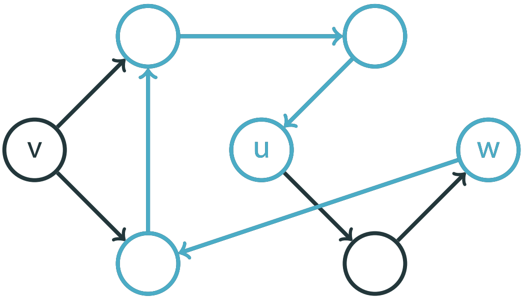
Достижимость

- Например, вершины u и w сильно связаны
- Есть путь из u в w



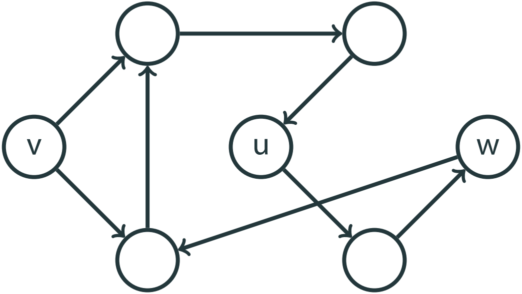
Достижимость

- Например, вершины u и w сильно связаны
- Есть путь из u в w
- Есть путь из w в u



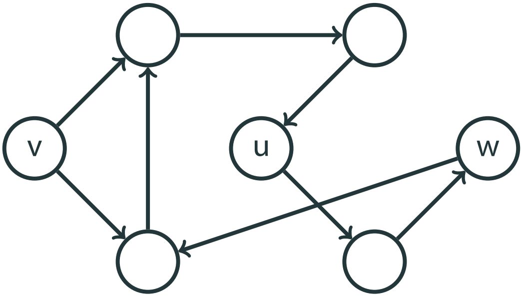
Достижимость

- А вершины v и u не сильно связаны



Достижимость

- А вершины v и u не сильно связаны
- Нет пути из u в v



Сильная связность

- Граф называется сильно связным, если из любой его вершины есть ориентированный путь в любую другую

Сильная связность

- Граф называется сильно связным, если из любой его вершины есть ориентированный путь в любую другую
- Сильная связность бывает очень важна

Сильная связность

- Граф называется сильно связным, если из любой его вершины есть ориентированный путь в любую другую
- Сильная связность бывает очень важна
- Для транспортной задачи говорит о ее разрешимости

Сильная связность

- Граф называется сильно связным, если из любой его вершины есть ориентированный путь в любую другую
- Сильная связность бывает очень важна
- Для транспортной задачи говорит о ее разрешимости
- А что делать если граф не сильно связный?

Компоненты связности

Если граф не сильно связен, все его вершины распадаются на компоненты сильной связности:

Компоненты связности

Если граф не сильно связен, все его вершины распадаются на компоненты сильной связности:

- Каждая вершина лежит ровно в одной компоненте

Компоненты связности

Если граф не сильно связен, все его вершины распадаются на компоненты сильной связности:

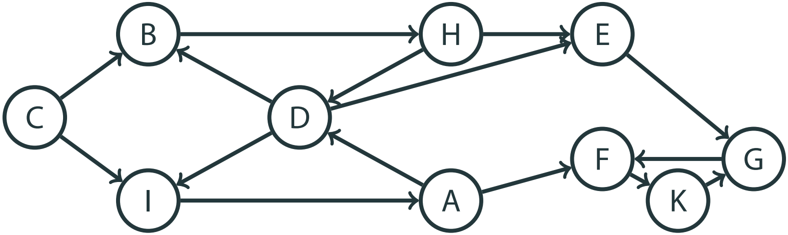
- Каждая вершина лежит ровно в одной компоненте
- Любые вершины в одной компоненте сильно связаны

Компоненты связности

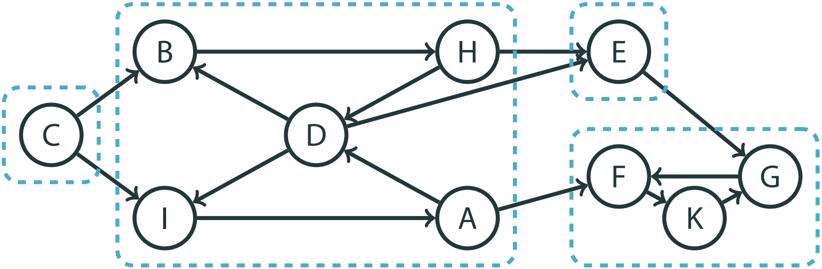
Если граф не сильно связен, все его вершины распадаются на компоненты сильной связности:

- Каждая вершина лежит ровно в одной компоненте
- Любые вершины в одной компоненте сильно связаны
- Вершины из разных компонент не сильно связаны

Пример

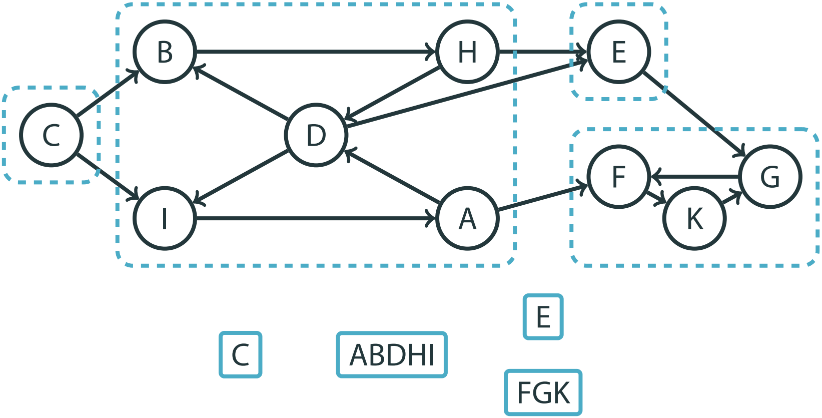


Пример



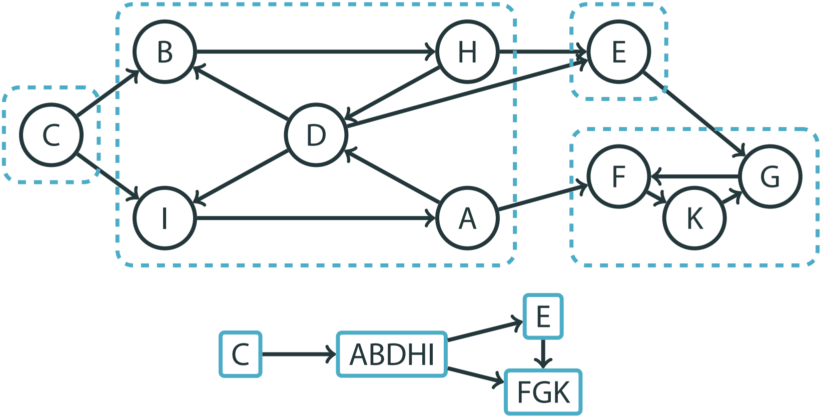
- Четыре компоненты связности

Пример



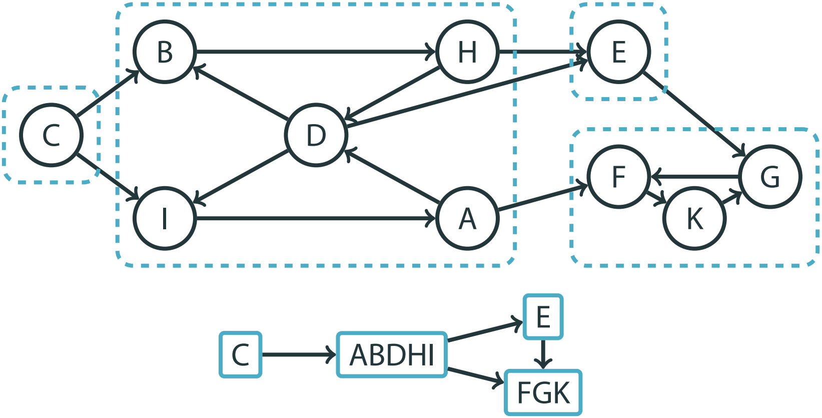
- Рассмотрим каждую компоненту как отдельную вершину

Пример



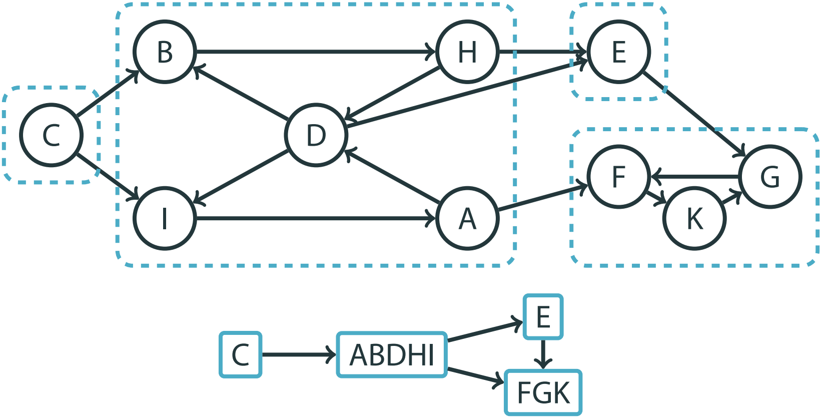
- Проведем ребра между компонентами, если есть хоть одно ребро между вершинами компонент

Пример



- Этот граф называется метаграфом

Пример



- Этот граф называется метаграфом
- Он ациклический!