

Случайные величины и их матожидания

Владимир Подольский

Факультет компьютерных наук, Высшая Школа Экономики

Случайные величины и их матожидания

Случайные величины

Среднее

Математическое ожидание

Случайные величины

- Мы обсудили вероятностные распределения

Случайные величины

- Мы обсудили вероятностные распределения
- Мы обсудили **события** (подмножества исходов) и их вероятности

Случайные величины

- Мы обсудили вероятностные распределения
- Мы обсудили **события** (подмножества исходов) и их вероятности
- События соответствуют вопросам с ответом **да или нет**

Случайные величины

- Мы обсудили вероятностные распределения
- Мы обсудили **события** (подмножества исходов) и их вероятности
- События соответствуют вопросам с ответом **да или нет**
- Но важно уметь работать с **численными характеристиками** вероятностных исходов

Случайные величины

- Мы обсудили вероятностные распределения
- Мы обсудили **события** (подмножества исходов) и их вероятности
- События соответствуют вопросам с ответом **да или нет**
- Но важно уметь работать с **численными характеристиками** вероятностных исходов
- Для этого мы введем **случайные величины**

Случайные величины

- Случайная величина f — это переменная, значение которой определяется вероятностным экспериментом

Случайные величины

- Случайная величина f — это переменная, значение которой определяется вероятностным экспериментом
- У нас есть вероятностное распределение $\Omega = \{u_1, \dots, u_n\}$

Случайные величины

- Случайная величина f — это переменная, значение которой определяется вероятностным экспериментом
- У нас есть вероятностное распределение $\Omega = \{u_1, \dots, u_n\}$
- Исходы имеют вероятности p_1, \dots, p_n

Случайные величины

- Случайная величина f — это переменная, значение которой определяется вероятностным экспериментом
- У нас есть вероятностное распределение $\Omega = \{u_1, \dots, u_n\}$
- Исходы имеют вероятности p_1, \dots, p_n
- Чтобы определить f мы задаем число a_i для каждого исхода u_i

Случайные величины

- Случайная величина f — это переменная, значение которой определяется вероятностным экспериментом
- У нас есть вероятностное распределение $\Omega = \{u_1, \dots, u_n\}$
- Исходы имеют вероятности p_1, \dots, p_n
- Чтобы определить f мы задаем число a_i для каждого исхода u_i
- Тогда f принимает значение a_i с вероятностью p_i

Случайные величины

- Выглядит знакомо

Случайные величины

- Выглядит знакомо
- Мы так уже делали!

Случайные величины

- Выглядит знакомо
- Мы так уже делали!
- Исходам при бросании кубика присвоены числа



Случайные величины

- Выглядит знакомо
- Мы так уже делали!
- Исходам при бросании кубика присвоены числа
- И мы оперировали с ними как с числами



Случайные величины

Другие примеры:

Случайные величины

Другие примеры:

- Подбрасывание монетки: решка=0, орел=1

Случайные величины

Другие примеры:

- Подбрасывание монетки: решка=0, орел=1
- Возраст случайного человек в классе

Случайные величины

Другие примеры:

- Подбрасывание монетки: решка=0, орел=1
- Возраст случайного человек в классе
- Оценка случайного слушателя на Курсере

Случайные величины

Другие примеры:

- Подбрасывание монетки: решка=0, орел=1
- Возраст случайного человек в классе
- Оценка случайного слушателя на Курсере
- Сумма исходов двух бросаний кубика

Случайные величины и их матожидания

Случайные величины

Среднее

Математическое ожидание

Среднее

- Что такое средний доход на душу населения?

Среднее

- Что такое средний доход на душу населения?
- Общий доход всего населения, поделенный на численность населения

Среднее

- Что такое средний доход на душу населения?
- Общий доход всего населения, поделенный на численность населения
- Это стандартное понятие **среднего**

Среднее

- Что такое средний доход на душу населения?
- Общий доход всего населения, поделенный на численность населения
- Это стандартное понятие **среднего**
- В математике это называется **средним арифметическим**

Пример

Задача

Студент получил 78, 72 и 87 баллов за три теста. Каков его средний балл?

Пример

Задача

Студент получил 78, 72 и 87 баллов за три теста. Каков его средний балл?

- Нужно сложить все оценки и поделить на их количество

Пример

Задача

Студент получил 78, 72 и 87 баллов за три теста. Каков его средний балл?

- Нужно сложить все оценки и поделить на их количество
- Вот результат:

$$\frac{78 + 72 + 87}{3} = \frac{237}{3} = 79$$

Пример

Задача

Студент получил 78, 72 и 87 баллов за три теста. Каков его средний балл?

- Нужно сложить все оценки и поделить на их количество
- Вот результат:

$$\frac{78 + 72 + 87}{3} = \frac{237}{3} = 79$$

- Нам повезло, и среднее оказалось целым; это не всегда так

Стратегия увольнения сотрудников

Задача

Руководство компании использует следующее правило: увольнять всякого, кто работает ниже среднего. Что получится в результате применения этой стратегии?

Стратегия увольнения сотрудников

Задача

Руководство компании использует следующее правило: увольнять всякого, кто работает ниже среднего. Что получится в результате применения этой стратегии?

- Это может звучать разумно, но ...

Стратегия увольнения сотрудников

Задача

Руководство компании использует следующее правило: увольнять всякого, кто работает ниже среднего. Что получится в результате применения этой стратегии?

- Это может звучать разумно, но ...
- Если не случилось, что все работают одинаково хорошо (что большая редкость) ...

Стратегия увольнения сотрудников

Задача

Руководство компании использует следующее правило: увольнять всякого, кто работает ниже среднего. Что получится в результате применения этой стратегии?

- Это может звучать разумно, но ...
- Если не случилось, что все работают одинаково хорошо (что большая редкость) ...
- Всегда есть кто-то, кто работает ниже среднего!

Стратегия увольнения сотрудников

Задача

Руководство компании использует следующее правило: увольнять всякого, кто работает ниже среднего. Что получится в результате применения этой стратегии?

- Это может звучать разумно, но ...
- Если не случилось, что все работают одинаково хорошо (что большая редкость) ...
- Всегда есть кто-то, кто работает ниже среднего!
- Если таких сотрудников уволить, среднее вырастет

Стратегия увольнения сотрудников

Задача

Руководство компании использует следующее правило: увольнять всякого, кто работает ниже среднего. Что получится в результате применения этой стратегии?

- Это может звучать разумно, но ...
- Если не случилось, что все работают одинаково хорошо (что большая редкость) ...
- Всегда есть кто-то, кто работает ниже среднего!
- Если таких сотрудников уволить, среднее вырастет
- И снова появятся люди, работающие ниже среднего!

Стратегия увольнения сотрудников

Задача

Руководство компании использует следующее правило: увольнять всякого, кто работает ниже среднего. Что получится в результате применения этой стратегии?

- Это может звучать разумно, но ...
- Если не случилось, что все работают одинаково хорошо (что большая редкость) ...
- Всегда есть кто-то, кто работает ниже среднего!
- Если таких сотрудников уволить, среднее вырастет
- И снова появятся люди, работающие ниже среднего!
- Мы уволим всех, кроме самого лучшего сотрудника

Среднее значение бросания кубика

Задача

Пусть мы бросаем кубик много раз. Каково будет среднее значение этих бросаний?

Среднее значение бросания кубика

Задача

Пусть мы бросаем кубик много раз. Каково будет среднее значение этих бросаний?

- Можем ли мы дать точный ответ?

Среднее значение бросания кубика

Задача

Пусть мы бросаем кубик много раз. Каково будет среднее значение этих бросаний?

- Можем ли мы дать точный ответ?
- Нет, это случайная величина

Среднее значение бросания кубика

Задача

Пусть мы бросаем кубик много раз. Каково будет среднее значение этих бросаний?

- Можем ли мы дать точный ответ?
- Нет, это случайная величина
- Но мы можем найти приближенное значение, которое будет хорошим приближением с большой вероятностью

Среднее значение бросания кубика

- Пусть мы бросили кубик n раз для очень большого n

Среднее значение бросания кубика

- Пусть мы бросили кубик n раз для очень большого n
- Тогда среди исходов будет примерно $n/6$ единиц, $n/6$ двоек, и так далее

Среднее значение бросания кубика

- Пусть мы бросили кубик n раз для очень большого n
- Тогда среди исходов будет примерно $n/6$ единиц, $n/6$ двоек, и так далее
- Сумма результатов тогда примерно равна

$$\begin{aligned} & \frac{n}{6} \times 1 + \frac{n}{6} \times 2 + \frac{n}{6} \times 3 + \frac{n}{6} \times 4 + \frac{n}{6} \times 5 + \frac{n}{6} \times 6 \\ &= \frac{n(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)}{6} = \frac{21n}{6} = 3.5n \end{aligned}$$

Среднее значение бросания кубика

- Пусть мы бросили кубик n раз для очень большого n
- Тогда среди исходов будет примерно $n/6$ единиц, $n/6$ двоек, и так далее
- Сумма результатов тогда примерно равна

$$\begin{aligned} \frac{n}{6} \times 1 + \frac{n}{6} \times 2 + \frac{n}{6} \times 3 + \frac{n}{6} \times 4 + \frac{n}{6} \times 5 + \frac{n}{6} \times 6 \\ = \frac{n(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)}{6} = \frac{21n}{6} = 3.5n \end{aligned}$$

- Средний результат можно получить делением на число бросаний n

Среднее значение бросания кубика

- Пусть мы бросили кубик n раз для очень большого n
- Тогда среди исходов будет примерно $n/6$ единиц, $n/6$ двоек, и так далее
- Сумма результатов тогда примерно равна

$$\begin{aligned} \frac{n}{6} \times 1 + \frac{n}{6} \times 2 + \frac{n}{6} \times 3 + \frac{n}{6} \times 4 + \frac{n}{6} \times 5 + \frac{n}{6} \times 6 \\ = \frac{n(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)}{6} = \frac{21n}{6} = 3.5n \end{aligned}$$

- Средний результат можно получить делением на число бросаний n
- Так что среднее примерно равно 3.5

Среднее значение бросания кубика

- Мы получили, что среднее примерно равно 3.5

Среднее значение бросания кубика

- Мы получили, что среднее примерно равно 3.5
- Это число не зависит от n !

Среднее значение бросания кубика

- Мы получили, что среднее примерно равно 3.5
- Это число не зависит от n !
- Оно называется **ожидаемым значением** или **математическим ожиданием** бросания кубика

Среднее значение бросания кубика

- Мы получили, что среднее примерно равно 3.5
- Это число не зависит от n !
- Оно называется **ожидаемым значением** или **математическим ожиданием** бросания кубика
- В следующем видео мы обобщим и формализуем это рассуждение

Случайные величины и их матожидания

Случайные величины

Среднее

Математическое ожидание

Математическое ожидание

- Рассмотрим случайную величину в общем виде

Математическое ожидание

- Рассмотрим случайную величину в общем виде
- Пусть случайная величина f задана на распределении с 4 исходами

Математическое ожидание

- Рассмотрим случайную величину в общем виде
- Пусть случайная величина f задана на распределении с 4 исходами
- Вероятности исходов равны p_1, p_2, p_3, p_4

Математическое ожидание

- Рассмотрим случайную величину в общем виде
- Пусть случайная величина f задана на распределении с 4 исходами
- Вероятности исходов равны p_1, p_2, p_3, p_4
- Значения f равны a_1, a_2, a_3, a_4 соответственно

Математическое ожидание

- Рассмотрим случайную величину в общем виде
- Пусть случайная величина f задана на распределении с 4 исходами
- Вероятности исходов равны p_1, p_2, p_3, p_4
- Значения f равны a_1, a_2, a_3, a_4 соответственно
- Повторим эксперимент много раз

Математическое ожидание

$$\overbrace{\quad}^{p_1} \quad \overbrace{\quad}^{p_2} \quad \overbrace{\quad}^{p_3} \quad \overbrace{\quad}^{p_4}$$

Математическое ожидание

$$\overbrace{p_1} \quad \overbrace{p_2} \quad \overbrace{\dot{p}_3} \quad \overbrace{p_4}$$

Математическое ожидание

$$\overline{p_1}$$

$$p_2$$

$$\overline{p_3}$$

$$p_4$$

Математическое ожидание

$$\begin{array}{cccc} \overbrace{}^{\bullet} & \overbrace{} & \overbrace{}^{\vdots} & \overbrace{} \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{array}$$

Математическое ожидание

$$\begin{array}{cccc} \overbrace{}^{\bullet} & \overbrace{}^{\bullet} & \overbrace{}^{\vdots} & \overbrace{} \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{array}$$

Математическое ожидание

$$\begin{array}{cccc} \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} \bullet \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} \hline \end{array} \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{array}$$

Математическое ожидание

$$\begin{array}{cccc} \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} \bullet \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} \hline \end{array} \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{array}$$

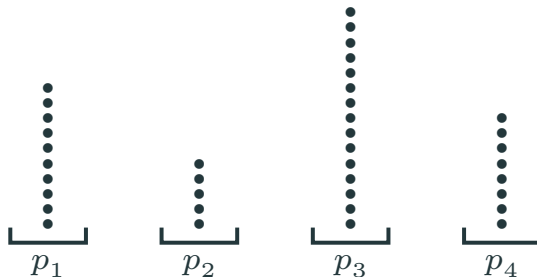
Математическое ожидание

$$\begin{array}{cccc} \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} \bullet \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} \bullet \\ \hline \end{array} \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{array}$$

Математическое ожидание

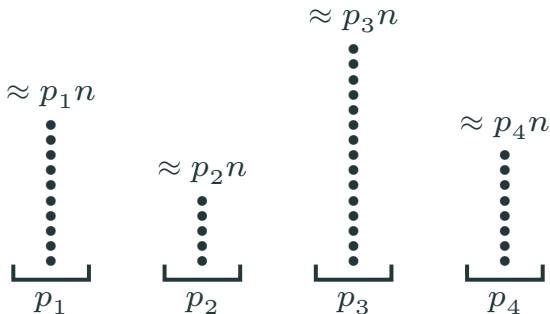
$$\begin{array}{cccc} \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} \bullet \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \hline \end{array} \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{array}$$

Математическое ожидание



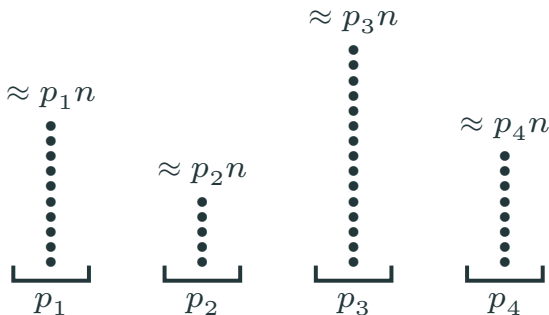
- Повторяем n раз для большого числа n

Математическое ожидание



- Повторяем n раз для большого числа n

Математическое ожидание



- Повторяем n раз для большого числа n
- Чему равно среднее значение f в этих экспериментах?

Математическое ожидание

- Мы провели n экспериментов, значение a_i встретилось примерно $p_i n$ раз

Математическое ожидание

- Мы провели n экспериментов, значение a_i встретилось примерно $p_i n$ раз
- В среднем мы получили

$$\approx \frac{a_1 p_1 n + a_2 p_2 n + a_3 p_3 n + a_4 p_4 n}{n}$$

$$= a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 + a_4 p_4$$

Математическое ожидание

- Мы провели n экспериментов, значение a_i встретилось примерно $p_i n$ раз

- В среднем мы получили

$$\approx \frac{a_1 p_1 n + a_2 p_2 n + a_3 p_3 n + a_4 p_4 n}{n}$$

$$= a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 + a_4 p_4$$

- Эта величина обозначается через $E f$ и называется **математическим ожиданием** f или **матожиданием** f

Математическое ожидание

- Мы провели n экспериментов, значение a_i встретилось примерно $p_i n$ раз

- В среднем мы получили

$$\approx \frac{a_1 p_1 n + a_2 p_2 n + a_3 p_3 n + a_4 p_4 n}{n}$$

$$= a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 + a_4 p_4$$

- Эта величина обозначается через $E f$ и называется **математическим ожиданием** f или **матожиданием** f
- Она не зависит от n

Математическое ожидание

- Мы провели n экспериментов, значение a_i встретилось примерно $p_i n$ раз

- В среднем мы получили

$$\approx \frac{a_1 p_1 n + a_2 p_2 n + a_3 p_3 n + a_4 p_4 n}{n}$$

$$= a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 + a_4 p_4$$

- Эта величина обозначается через $E f$ и называется **математическим ожиданием** f или **матожиданием** f
- Она не зависит от n
- Она равна тому, что мы ожидаем получить в среднем при многократном повторении эксперимента

Математическое ожидание

- В общем случае значения f равны a_1, \dots, a_k с вероятностями p_1, \dots, p_k

Математическое ожидание

- В общем случае значения f равны a_1, \dots, a_k с вероятностями p_1, \dots, p_k
- Все рассуждения аналогичны

Математическое ожидание

- В общем случае значения f равны a_1, \dots, a_k с вероятностями p_1, \dots, p_k
- Все рассуждения аналогичны
- Для вычисления математического ожидания надо перемножить $a_i \times p_i$ по всем i

Математическое ожидание

- В общем случае значения f равны a_1, \dots, a_k с вероятностями p_1, \dots, p_k
- Все рассуждения аналогичны
- Для вычисления математического ожидания надо перемножить $a_i \times p_i$ по всем i
- И сложить результаты по i от 1 до k

Математическое ожидание

- В общем случае значения f равны a_1, \dots, a_k с вероятностями p_1, \dots, p_k
- Все рассуждения аналогичны
- Для вычисления математического ожидания надо перемножить $a_i \times p_i$ по всем i
- И сложить результаты по i от 1 до k
- Математическое ожидание — это **число!**

Математическое ожидание

- В общем случае значения f равны a_1, \dots, a_k с вероятностями p_1, \dots, p_k
- Все рассуждения аналогичны
- Для вычисления математического ожидания надо перемножить $a_i \times p_i$ по всем i
- И сложить результаты по i от 1 до k
- Математическое ожидание — это **число**!
- Это важная характеристика случайной величины

Геометрический смысл матожидания

Пусть f принимает значения a_1, a_2, a_3, a_4 с вероятностями p_1, p_2, p_3, p_4

Геометрический смысл матожидания

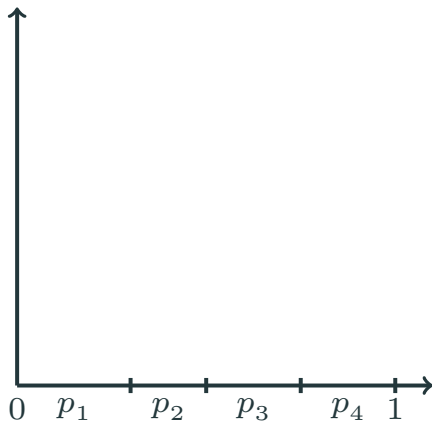
Пусть f принимает значения a_1, a_2, a_3, a_4 с вероятностями p_1, p_2, p_3, p_4

$$Ef = a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3 + a_4p_4$$

Геометрический смысл матожидания

Пусть f принимает значения a_1, a_2, a_3, a_4 с вероятностями p_1, p_2, p_3, p_4

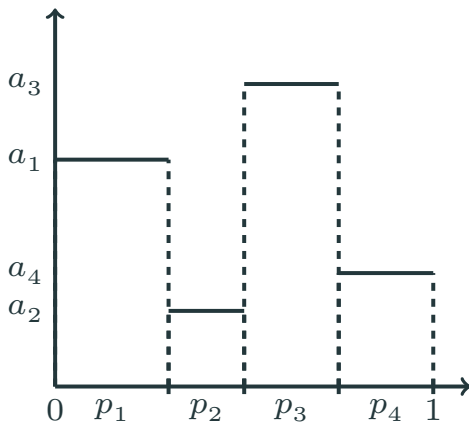
$$Ef = a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3 + a_4p_4$$



Геометрический смысл матожидания

Пусть f принимает значения a_1, a_2, a_3, a_4 с вероятностями p_1, p_2, p_3, p_4

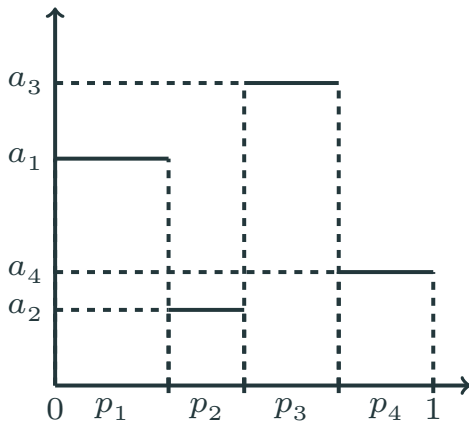
$$Ef = a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3 + a_4p_4$$



Геометрический смысл матожидания

Пусть f принимает значения a_1, a_2, a_3, a_4 с вероятностями p_1, p_2, p_3, p_4

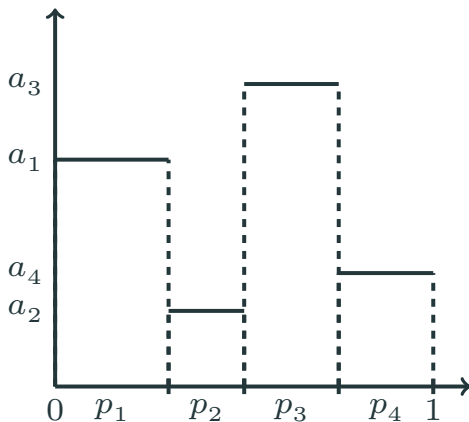
$$Ef = a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3 + a_4p_4$$



Геометрический смысл матожидания

Пусть f принимает значения a_1, a_2, a_3, a_4 с вероятностями p_1, p_2, p_3, p_4

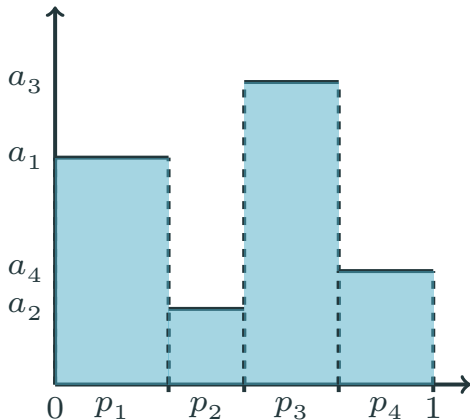
$$Ef = a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3 + a_4p_4$$



Геометрический смысл матожидания

Пусть f принимает значения a_1, a_2, a_3, a_4 с вероятностями p_1, p_2, p_3, p_4

$$Ef = a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3 + a_4p_4$$



- Ef — это площадь закрашенной области

Что мы узнали

- Математическое ожидание встречается повсюду в статистике и социологии

Что мы узнали

- Математическое ожидание встречается повсюду в статистике и социологии
- Средний возраст

Что мы узнали

- Математическое ожидание встречается повсюду в статистике и социологии
- Средний возраст
- Средняя продолжительность жизни

Что мы узнали

- Математическое ожидание встречается повсюду в статистике и социологии
- Средний возраст
- Средняя продолжительность жизни
- Средняя оценка за время обучения

Что мы узнали

- Математическое ожидание встречается повсюду в статистике и социологии
- Средний возраст
- Средняя продолжительность жизни
- Средняя оценка за время обучения
- В следующем уроке мы обсудим, почему с математическим ожиданием еще и удобно работать