

Спектральное разложение

Собственные числа и векторы

Краткий план:

- Собственные числа и собственные векторы матрицы.

Краткий план:

- Собственные числа и собственные векторы матрицы.
- Характеристический многочлен.

Краткий план:

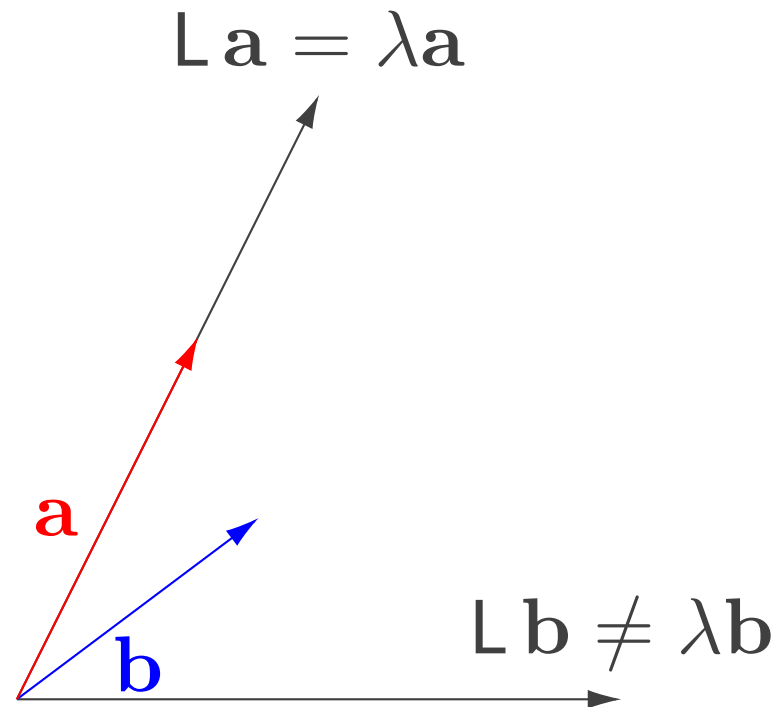
- Собственные числа и собственные векторы матрицы.
- Характеристический многочлен.
- Алгебраическая кратность.

От оператора к матрице

Определение

Если для оператора $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ найдётся такой ненулевой вектор \mathbf{v} , что $L \mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{v}$, где $\lambda \in \mathbb{R}$, то:

- вектор \mathbf{v} называется **собственным вектором**;
- число λ называется **собственным числом**.



Собственные числа и векторы матрицы

Определение

Собственными числами и собственными векторами матрицы размера $n \times n$ называются собственные числа и векторы соответствующего линейного оператора.

Собственные числа и векторы матрицы

Определение

Собственными числами и собственными векторами матрицы размера $n \times n$ называются собственные числа и векторы соответствующего линейного оператора.

Для абстрактного векторного пространства V матрица L_{ee} линейного оператора $L : V \rightarrow V$ зависит от выбора базиса e . При этом выбор базиса e никак не влияет на собственные числа и собственные векторы.

Количество собственных векторов

Из уравнения $L v = \lambda v$ находим вектор v и число λ .

Количество собственных векторов

Из уравнения $L v = \lambda v$ находим вектор v и число λ .

Если найдётся один собственный вектор $v \neq 0$, то любой вектор $v' = c \cdot v$ также будет собственным:

Количество собственных векторов

Из уравнения $L v = \lambda v$ находим вектор v и число λ .

Если найдётся один собственный вектор $v \neq 0$, то любой вектор $v' = c \cdot v$ также будет собственным:

$$L v' = L c v = c L v = c \lambda v = \lambda v'.$$

Количество собственных векторов

Из уравнения $L v = \lambda v$ находим вектор v и число λ .

Если найдётся один собственный вектор $v \neq 0$, то любой вектор $v' = c \cdot v$ также будет собственным:

$$L v' = L c v = c L v = c \lambda v = \lambda v'.$$

Система уравнений $L v = \lambda v$ должна иметь бесконечное количество решений!

Как найти собственные числа?

Перепишем систему $L \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$ в виде $(L - \lambda I) \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Как найти собственные числа?

Перепишем систему $L \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$ в виде $(L - \lambda I) \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Система имеет бесконечное количество решений, если и только если $\det(L - \lambda I) = 0$.

Как найти собственные числа?

Перепишем систему $L \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$ в виде $(L - \lambda I) \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Система имеет бесконечное количество решений, если и только если $\det(L - \lambda I) = 0$.

Алгоритм

1. Из уравнения $\det(L - \lambda I) = 0$ находим собственные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_k$.

Как найти собственные числа?

Перепишем систему $L \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$ в виде $(L - \lambda I) \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Система имеет бесконечное количество решений, если и только если $\det(L - \lambda I) = 0$.

Алгоритм

1. Из уравнения $\det(L - \lambda I) = 0$ находим собственные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_k$.
2. Для каждого λ_i решаем систему $(L - \lambda_i I) \mathbf{v} = \mathbf{0}$ относительно \mathbf{v} , то есть находим все собственные векторы.

Характеристический многочлен

Определение

Многочлен $\text{char}_L(\lambda) = \det(L - \lambda I)$ называется
характеристическим многочленом линейного оператора L .

Характеристический многочлен

Определение

Многочлен $\text{char}_L(\lambda) = \det(L - \lambda I)$ называется **характеристическим многочленом** линейного оператора L .

Характеристическим многочленом матрицы называется характеристический многочлен соответствующего линейного оператора.

Характеристический многочлен: пример

Рассмотрим матрицу $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

Характеристический многочлен: пример

Рассмотрим матрицу $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

$$\text{char}_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 6 & 0 \\ 6 & 4 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 7 - \lambda \end{vmatrix} =$$

Характеристический многочлен: пример

Рассмотрим матрицу $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \text{char}_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 6 & 0 \\ 6 & 4 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 7 - \lambda \end{vmatrix} = \\ &= (7 - \lambda) \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 6 \\ 6 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = (7 - \lambda)((4 - \lambda)^2 - 36) = \end{aligned}$$

Характеристический многочлен: пример

Рассмотрим матрицу $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

$$\text{char}_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 6 & 0 \\ 6 & 4 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 7 - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (7 - \lambda) \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 6 \\ 6 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = (7 - \lambda)((4 - \lambda)^2 - 36) =$$

$$= -(\lambda - 7)(\lambda + 2)(\lambda - 10) = -\lambda^3 + 15\lambda^2 - 36\lambda - 140$$

Характеристический многочлен

По характеристическому многочлену можно найти:

Характеристический многочлен

По характеристическому многочлену можно найти:

1. Собственные числа A из уравнения $\text{char}_A(\lambda) = 0$.

$$\text{char}_A(\lambda) = -(\lambda - 7)(\lambda + 2)(\lambda - 10)$$

$$\lambda_1 = 7, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 10.$$

Характеристический многочлен

По характеристическому многочлену можно найти:

1. Собственные числа A из уравнения $\text{char}_A(\lambda) = 0$.

$$\text{char}_A(\lambda) = -(\lambda - 7)(\lambda + 2)(\lambda - 10)$$

$$\lambda_1 = 7, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 10.$$

2. Определитель A из равенства $\text{char}_A(0) = \det(A - 0 \cdot I)$.

$$\text{char}_A(\lambda) = -\lambda^3 + 15\lambda^2 - 36\lambda - 140$$

$$\det A = \text{char}_A(0) = -140.$$

Алгебраическая кратность

Утверждение

По основной теореме алгебры любой многочлен f с действительными коэффициентами можно единственным образом представить в виде:

$$f(x) = (x - x_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (x - x_p)^{k_p} g(x),$$

где $x_1, \dots, x_p \in \mathbb{R}$ — различные корни многочлена f , а многочлен g действительных корней не имеет.

Алгебраическая кратность

Утверждение

По основной теореме алгебры любой многочлен f с действительными коэффициентами можно единственным образом представить в виде:

$$f(x) = (x - x_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (x - x_p)^{k_p} g(x),$$

где $x_1, \dots, x_p \in \mathbb{R}$ — различные корни многочлена f , а многочлен g действительных корней не имеет.

Определение

Число k_i называется **алгебраической кратностью** корня x_i .

Алгебраическая кратность: пример

Если $\text{char}_A(\lambda) = -(\lambda - 7)^2(\lambda + 3)$, то собственное число $\lambda = 7$ имеет алгебраическую кратность 2, а собственное число $\lambda = -3$ имеет алгебраическую кратность 1.

Алгебраическая кратность: пример

Если $\text{char}_A(\lambda) = -(\lambda - 7)^2(\lambda + 3)$, то собственное число $\lambda = 7$ имеет алгебраическую кратность 2, а собственное число $\lambda = -3$ имеет алгебраическую кратность 1.

Если $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, то сумма алгебраических кратностей k_i действительных собственных чисел $\lambda_i \in \mathbb{R}$ не превосходит n :

$$\sum_{i=1}^p k_i \leq n.$$

Теорема Гамильтона-Кэли

Утверждение

Если подставить матрицу A в характеристический многочлен $\text{char}_A(\lambda)$, то получится матрица из нулей,

$$\text{char}_A(A) = 0;$$

Теорема Гамильтона-Кэли

Утверждение

Если подставить матрицу A в характеристический многочлен $\text{char}_A(\lambda)$, то получится матрица из нулей,

$$\text{char}_A(A) = \mathbf{0};$$

Пример. Если $\text{char}_A(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 8$, то $A^2 - 3A + 8I = \mathbf{0}$ и $A^2 = 3A - 8I$.

Нахождение собственных чисел и векторов

Это видеофрагмент с доской, слайдов здесь нет :)

Диагонализация матрицы

Краткий план:

- Собственные векторы как линейное пространство.

Краткий план:

- Собственные векторы как линейное пространство.
- Геометрическая кратность собственных чисел.

Краткий план:

- Собственные векторы как линейное пространство.
- Геометрическая кратность собственных чисел.
- Диагонализация матрицы.

Множество собственных векторов

Оператор $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ имеет собственное число $\lambda \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим множество $\text{Eig}_\lambda L$ — множество всех собственных векторов, растягивающихся в λ раз, дополненное нулевым вектором 0 :

$$\text{Eig}_\lambda L = \{ \mathbf{v} \mid L \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v} \}.$$

Множество собственных векторов

Оператор $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ имеет собственное число $\lambda \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим множество $\text{Eig}_\lambda L$ — множество всех собственных векторов, растягивающихся в λ раз, дополненное нулевым вектором 0 :

$$\text{Eig}_\lambda L = \{ \mathbf{v} \mid L \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v} \}.$$

Утверждение

Множество $\text{Eig}_\lambda L$ является векторным пространством:

Множество собственных векторов

Оператор $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ имеет собственное число $\lambda \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим множество $\text{Eig}_\lambda L$ — множество всех собственных векторов, растягивающихся в λ раз, дополненное нулевым вектором 0 :

$$\text{Eig}_\lambda L = \{v \mid Lv = \lambda v\}.$$

Утверждение

Множество $\text{Eig}_\lambda L$ является векторным пространством:

Если вектор v растягивается в λ раз, то и вектор tv растягивается в λ раз.

Множество собственных векторов

Оператор $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ имеет собственное число $\lambda \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим множество $\text{Eig}_\lambda L$ — множество всех собственных векторов, растягивающихся в λ раз, дополненное нулевым вектором 0 :

$$\text{Eig}_\lambda L = \{v \mid Lv = \lambda v\}.$$

Утверждение

Множество $\text{Eig}_\lambda L$ является векторным пространством:

Если вектор v растягивается в λ раз, то и вектор tv растягивается в λ раз.

Если векторы a и b растягиваются в λ раз, то и их сумма $c = a + b$ растягивается в λ раз.

Геометрическая кратность

Определение

Размерность пространства $\text{Eig}_\lambda L$ называется
геометрической кратностью собственного числа $\lambda \in \mathbb{R}$.

Геометрическая кратность

Определение

Размерность пространства $\text{Eig}_\lambda L$ называется **геометрической кратностью** собственного числа $\lambda \in \mathbb{R}$.

Эквивалентное определение

Максимальное количество линейно независимых собственных векторов, соответствующих собственному числу $\lambda \in \mathbb{R}$, называют его **геометрической кратностью**.

Разные кратности связаны!

Утверждение

Геометрическая кратность собственного числа $\lambda \in \mathbb{R}$ не превосходит его алгебраической кратности и не меньше единицы.

Разные кратности связаны!

Утверждение

Геометрическая кратность собственного числа $\lambda \in \mathbb{R}$ не превосходит его алгебраической кратности и не меньше единицы.

Пример. У матрицы A характеристический многочлен равен $\text{char}_A(\lambda) = -(\lambda - 7)(\lambda - 9)^2$.

Разные кратности связаны!

Утверждение

Геометрическая кратность собственного числа $\lambda \in \mathbb{R}$ не превосходит его алгебраической кратности и не меньше единицы.

Пример. У матрицы A характеристический многочлен равен $\text{char}_A(\lambda) = -(\lambda - 7)(\lambda - 9)^2$.

Числу $\lambda = 7$ соответствует ровно один линейно независимый собственный вектор.

Разные кратности связаны!

Утверждение

Геометрическая кратность собственного числа $\lambda \in \mathbb{R}$ не превосходит его алгебраической кратности и не меньше единицы.

Пример. У матрицы A характеристический многочлен равен $\text{char}_A(\lambda) = -(\lambda - 7)(\lambda - 9)^2$.

Числу $\lambda = 7$ соответствует ровно один линейно независимый собственный вектор.

Числу $\lambda = 9$ соответствуют один или два линейно независимых собственных вектора.

Независимость собственных векторов

Утверждение

Если векторы набора $A = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ относятся к различным собственным числам, то набор A линейно независимый.

Независимость собственных векторов

Утверждение

Если векторы набора $A = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ относятся к различным собственным числам, то набор A линейно независимый.

Идея доказательства

Пусть вектора v_1, v_2 и v_3 растягиваются в 2, 3 и 8 раз соответственно, и $v_3 = 7v_1 - 4v_2$.

Независимость собственных векторов

Утверждение

Если векторы набора $A = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ относятся к различным собственным числам, то набор A линейно независимый.

Идея доказательства

Пусть вектора v_1, v_2 и v_3 растягиваются в 2, 3 и 8 раз соответственно, и $v_3 = 7v_1 - 4v_2$.

Домножим A на обе части равенства, $8v_3 = 2 \cdot 7v_1 - 3 \cdot 4v_2$.

Независимость собственных векторов

Утверждение

Если векторы набора $A = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ относятся к различным собственным числам, то набор A линейно независимый.

Идея доказательства

Пусть вектора v_1, v_2 и v_3 растягиваются в 2, 3 и 8 раз соответственно, и $v_3 = 7v_1 - 4v_2$.

Домножим A на обе части равенства, $8v_3 = 2 \cdot 7v_1 - 3 \cdot 4v_2$.

Поделим на большее собственное число,

$$v_3 = \frac{2}{8} \cdot 7v_1 - \frac{3}{8} \cdot 4v_2.$$

Независимость собственных векторов

Утверждение

Если векторы набора $A = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ относятся к различным собственным числам, то набор A линейно независимый.

Идея доказательства

Пусть вектора v_1, v_2 и v_3 растягиваются в 2, 3 и 8 раз соответственно, и $v_3 = 7v_1 - 4v_2$.

Домножим A на обе части равенства, $8v_3 = 2 \cdot 7v_1 - 3 \cdot 4v_2$.

Поделим на большее собственное число,

$$v_3 = \frac{2}{8} \cdot 7v_1 - \frac{3}{8} \cdot 4v_2.$$

Повторим бесконечно много раз, $v_3 = 0$. Противоречие.

Базис из собственных векторов

Векторы, отвечающие различным собственным числам, независимы.

Базис из собственных векторов

Векторы, отвечающие различным собственным числам, независимы.

В каждом пространстве $\text{Eig}_{\lambda_i} L$ найдётся базис из $\gamma_i = \dim \text{Eig}_{\lambda_i} L$ собственных векторов.

Базис из собственных векторов

Векторы, отвечающие различным собственным числам, независимы.

В каждом пространстве $\text{Eig}_{\lambda_i} L$ найдётся базис из $\gamma_i = \dim \text{Eig}_{\lambda_i} L$ собственных векторов.

Утверждение

Если $\sum_i \gamma_i = n$, то в \mathbb{R}^n существует базис из n векторов, являющихся собственными векторами оператора L .

Диагонализация: обозначения

Допустим, у оператора $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ нашлось n линейно независимых собственных векторов $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$, которым соответствуют собственные числа $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$.

Диагонализация: обозначения

Допустим, у оператора $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ нашлось n линейно независимых собственных векторов $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$, которым соответствуют собственные числа $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$.

Запишем все собственные векторы в матрицу P столбцами друг за другом.

А в матрицу D поместим все собственные числа на главную диагональ.

$$P = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{v}_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Диагонализация: мне повезёт!

Утверждение

Если у оператора $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ нашлось n линейно независимых собственных векторов $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, то L представим в виде

$$L = PDP^{-1}.$$

Диагонализация: мне повезёт!

Утверждение

Если у оператора $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ нашлось n линейно независимых собственных векторов $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$, то L представим в виде

$$L = PDP^{-1}.$$

Доказательство

Заметим, что $P\mathbf{e}_i = \mathbf{v}_i$, и $L P\mathbf{e}_i = \lambda_i P\mathbf{e}_i$.

Диагонализация: мне повезёт!

Утверждение

Если у оператора $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ нашлось n линейно независимых собственных векторов $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$, то L представим в виде

$$L = PDP^{-1}.$$

Доказательство

Заметим, что $P\mathbf{e}_i = \mathbf{v}_i$, и $L P\mathbf{e}_i = \lambda_i P\mathbf{e}_i$.

Домножаем на P^{-1} и получаем $P^{-1} L P\mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{e}_i$.

Диагонализация: мне повезёт!

Утверждение

Если у оператора $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ нашлось n линейно независимых собственных векторов $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$, то L представим в виде

$$L = PDP^{-1}.$$

Доказательство

Заметим, что $P\mathbf{e}_i = \mathbf{v}_i$, и $L P\mathbf{e}_i = \lambda_i P\mathbf{e}_i$.

Домножаем на P^{-1} и получаем $P^{-1} L P\mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{e}_i$.

Диагональная матрица растягивает базисные вектора,
 $P^{-1} L P\mathbf{e}_i = D\mathbf{e}_i$.

Диагонализация: мне повезёт!

Утверждение

Если у оператора $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ нашлось n линейно независимых собственных векторов $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$, то L представим в виде

$$L = PDP^{-1}.$$

Доказательство

Заметим, что $P\mathbf{e}_i = \mathbf{v}_i$, и $L P\mathbf{e}_i = \lambda_i P\mathbf{e}_i$.

Домножаем на P^{-1} и получаем $P^{-1} L P\mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{e}_i$.

Диагональная матрица растягивает базисные вектора,
 $P^{-1} L P\mathbf{e}_i = D\mathbf{e}_i$.

$$D = P^{-1} L P, \text{ или } L = PDP^{-1}$$

Диагонализация матрицы

Это видеофрагмент с доской, слайдов здесь нет :)

След матрицы

Краткий план:

- Сумма диагональных элементов.

Краткий план:

- Сумма диагональных элементов.
- Свойства следа.

След квадратной матрицы

Определение

Следом квадратной матрицы L называют сумму её диагональных элементов.

$$\text{tr } L = \ell_{11} + \ell_{22} + \dots + \ell_{nn}$$

След квадратной матрицы

Определение

Следом квадратной матрицы L называют сумму её диагональных элементов.

$$\text{tr } L = \ell_{11} + \ell_{22} + \dots + \ell_{nn}$$

Пример. $\text{tr} \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 9 & 1 \end{pmatrix} = 4 + 1 = 5.$

Основное свойство следа

Утверждение

Если матрицы A и B имеют размер $n \times k$, то

$$\operatorname{tr} A^T B = \sum_{ij} a_{ij} b_{ij} = \operatorname{tr} B^T A$$

Основное свойство следа

Утверждение

Если матрицы A и B имеют размер $n \times k$, то

$$\operatorname{tr} A^T B = \sum_{ij} a_{ij} b_{ij} = \operatorname{tr} B^T A$$

Пример. $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$.

$$\operatorname{tr} A^T B = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4$$

Основное свойство следа

Утверждение

Если матрицы A и B имеют размер $n \times k$, то

$$\operatorname{tr} A^T B = \sum_{ij} a_{ij} b_{ij} = \operatorname{tr} B^T A$$

Доказательство

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} A^T B &= \sum_i \langle \operatorname{row}_i A^T, \operatorname{col}_i B \rangle = \\ &= \sum_i \langle \operatorname{col}_i A, \operatorname{col}_i B \rangle = \sum_{ij} a_{ij} b_{ij} \end{aligned}$$

И ещё немного свойств

Если A имеет размер $n \times k$, а B — размер $k \times n$, то:

$$\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$$

И ещё немного свойств

Если A имеет размер $n \times k$, а B — размер $k \times n$, то:

$$\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$$

След — линейный оператор, превращающий матрицы размера $n \times n$ в числа!

И ещё немного свойств

Если A имеет размер $n \times k$, а B — размер $k \times n$, то:

$$\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$$

След — линейный оператор, превращающий матрицы размера $n \times n$ в числа!

$$\operatorname{tr} \lambda A = \lambda \operatorname{tr} A$$

$$\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$$

Зачем нужен след?

Зачем нужен след?

Элегантно позволяет записывать сложные выражения.

$$\sum_{ij} a_{ij}^2 = \text{tr } A^T A$$

Зачем нужен след?

Элегантно позволяет записывать сложные выражения.

$$\sum_{ij} a_{ij}^2 = \text{tr } A^T A$$

Упрощает теоретические выкладки.

Вокруг собственных чисел

Краткий план:

- Реинкарнация теоремы Виета.

Краткий план:

- Реинкарнация теоремы Виета.
- Обратимость и собственные числа.

Краткий план:

- Реинкарнация теоремы Виета.
- Обратимость и собственные числа.
- Собственные числа проектора.

Характеристический многочлен и след

Рассмотрим пример характеристического многочлена:

$$\text{char}_B(\lambda) = \det(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 5 & 6 \\ 1 & 2 - \lambda & 2 \\ 4 & 3 & 7 - \lambda \end{vmatrix} =$$

Характеристический многочлен и след

Рассмотрим пример характеристического многочлена:

$$\text{char}_B(\lambda) = \det(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 5 & 6 \\ 1 & 2 - \lambda & 2 \\ 4 & 3 & 7 - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (4 - \lambda)(2 - \lambda)(7 - \lambda) + \dots = -\lambda^3 + \lambda^2(4 + 2 + 7) + \dots$$

Характеристический многочлен и след

Рассмотрим пример характеристического многочлена:

$$\text{char}_B(\lambda) = \det(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 5 & 6 \\ 1 & 2 - \lambda & 2 \\ 4 & 3 & 7 - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (4 - \lambda)(2 - \lambda)(7 - \lambda) + \dots = -\lambda^3 + \lambda^2(4 + 2 + 7) + \dots$$

$$= -\lambda^3 + \text{tr } A \cdot \lambda^2 + \dots$$

Характеристический многочлен и след

Утверждение

В характеристическом многочлене $\text{char}_A(\lambda)$ матрицы A размера $n \times n$ перед λ^{n-1} стоит $(-1)^{n-1} \text{tr } A$:

$$\text{char}_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \text{tr } A \lambda^{n-1} + \dots$$

Характеристический многочлен и след

Утверждение

В характеристическом многочлене $\text{char}_A(\lambda)$ матрицы A размера $n \times n$ перед λ^{n-1} стоит $(-1)^{n-1} \text{tr } A$:

$$\text{char}_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \text{tr } A \lambda^{n-1} + \dots$$

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{char}_A(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 3$$

Характеристический многочлен и след

Утверждение

В характеристическом многочлене $\text{char}_A(\lambda)$ матрицы A размера $n \times n$ перед λ^{n-1} стоит $(-1)^{n-1} \text{tr } A$:

$$\text{char}_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \text{tr } A \lambda^{n-1} + \dots$$

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \text{char}_A(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 3$$

Пример.

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}, \text{char}_B(\lambda) = -\lambda^3 + 13\lambda^2 + \dots$$

Реинкарнация теоремы Виета

Утверждение

Если у матрицы A размера $n \times n$ ровно n действительных собственных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, то

Реинкарнация теоремы Виета

Утверждение

Если у матрицы A размера $n \times n$ ровно n действительных собственных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, то

$$\text{char}_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \cdot \dots \cdot (\lambda_n - \lambda)$$

Реинкарнация теоремы Виета

Утверждение

Если у матрицы A размера $n \times n$ ровно n действительных собственных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, то

$$\text{char}_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \cdot \dots \cdot (\lambda_n - \lambda)$$

Следствия

$$\det A = \prod_{i=1}^n \lambda_i;$$

Реинкарнация теоремы Виета

Утверждение

Если у матрицы A размера $n \times n$ ровно n действительных собственных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, то

$$\text{char}_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \cdot \dots \cdot (\lambda_n - \lambda)$$

Следствия

$$\det A = \prod_{i=1}^n \lambda_i;$$

$$\text{tr } A = \sum_{i=1}^n \lambda_i;$$

Пополним критерий вырожденности!

Матрица A размера $n \times n$ называется **вырожденной**, если:

1. $\det A = 0$;
2. Система $Ax = 0$ имеет бесконечное количество решений;
3. Система $Ax = b$ имеет ноль или бесконечное количество решений;
4. $\text{rank } A < n$;
5. Столбцы A линейно зависимы;
6. Строки A линейно зависимы;
7. A^{-1} не существует;
8. У матрицы A есть $\lambda = 0$.

Собственные числа проектора

Оператор $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ проецирует \mathbb{R}^n на некоторую линейную оболочку M .

Собственные числа проектора

Оператор $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ проецирует \mathbb{R}^n на некоторую линейную оболочку M .

Утверждение

Собственные числа проектора H равны 0 или 1.

Собственные числа проектора

Оператор $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ проецирует \mathbb{R}^n на некоторую линейную оболочку M .

Утверждение

Собственные числа проектора H равны 0 или 1.

Собственными векторами с $\lambda = 0$ будут векторы, ортогональные M .

Собственные числа проектора

Оператор $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ проецирует \mathbb{R}^n на некоторую линейную оболочку M .

Утверждение

Собственные числа проектора H равны 0 или 1.

Собственными векторами с $\lambda = 0$ будут векторы, ортогональные M .

Собственными векторами с $\lambda = 1$ будут векторы из M .

Собственные числа проектора

Оператор $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ проецирует \mathbb{R}^n на некоторую линейную оболочку M .

Утверждение

Собственные числа проектора H равны 0 или 1.

Собственными векторами с $\lambda = 0$ будут векторы, ортогональные M .

Собственными векторами с $\lambda = 1$ будут векторы из M .

У проектора ровно n линейно независимых собственных векторов.

Ранг и след проектора

Оператор $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ проецирует \mathbb{R}^n на некоторую линейную оболочку M .

Ранг и след проектора

Оператор $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ проецирует \mathbb{R}^n на некоторую линейную оболочку M .

Ранг проектора — число элементов в базисе M .

Ранг и след проектора

Оператор $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ проецирует \mathbb{R}^n на некоторую линейную оболочку M .

Ранг проектора — число элементов в базисе M .

След проектора — кратность собственного числа $\lambda = 1$:

$$\operatorname{tr} H = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$$

Ранг и след проектора

Оператор $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ проецирует \mathbb{R}^n на некоторую линейную оболочку M .

Ранг проектора — число элементов в базисе M .

След проектора — кратность собственного числа $\lambda = 1$:

$$\operatorname{tr} H = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$$

Утверждение

Для проектора H след и ранг равны размерности множества, на которое проецирует H ,

$$\operatorname{rank} H = \operatorname{tr} H.$$

Комплексные собственные числа

Краткий план:

- Комплексные числа.

Краткий план:

- Комплексные числа.
- Основная теорема алгебры.

Краткий план:

- Комплексные числа.
- Основная теорема алгебры.
- Снова след и определитель.

Комплексные числа как мистика

Множество \mathbb{C} вида

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

с естественным сложением и умножением по правилу $i^2 = -1$ называется множеством **комплексных чисел**.

Комплексные числа как мистика

Множество \mathbb{C} вида

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

с естественным сложением и умножением по правилу $i^2 = -1$ называется множеством **комплексных чисел**.

Пример.

$$(5 + 6i) + (2 + i) = 7 + 7i$$

Комплексные числа как мистика

Множество \mathbb{C} вида

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

с естественным сложением и умножением по правилу $i^2 = -1$ называется множеством **комплексных чисел**.

Пример.

$$(5 + 6i) + (2 + i) = 7 + 7i$$

$$(5 + 6i)(2 + i) = 10 + 17i + 6i^2 = 10 - 6 + 17i = 4 + 17i$$

Комплексные числа как мистика

Множество \mathbb{C} вида

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

с естественным сложением и умножением по правилу $i^2 = -1$ называется множеством **комплексных чисел**.

Пример.

$$(5 + 6i) + (2 + i) = 7 + 7i$$

$$(5 + 6i)(2 + i) = 10 + 17i + 6i^2 = 10 - 6 + 17i = 4 + 17i$$

$$\frac{5 + 6i}{2 - i} = \frac{(5 + 6i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{4 + 17i}{4 - i^2} = \frac{4}{5} + \frac{17}{5}i$$

Комплексные числа как операторы

Идея

Комплексное число $a + bi$ — способ записывать повороты плоскости, растяжения плоскости и композиции этих действий.

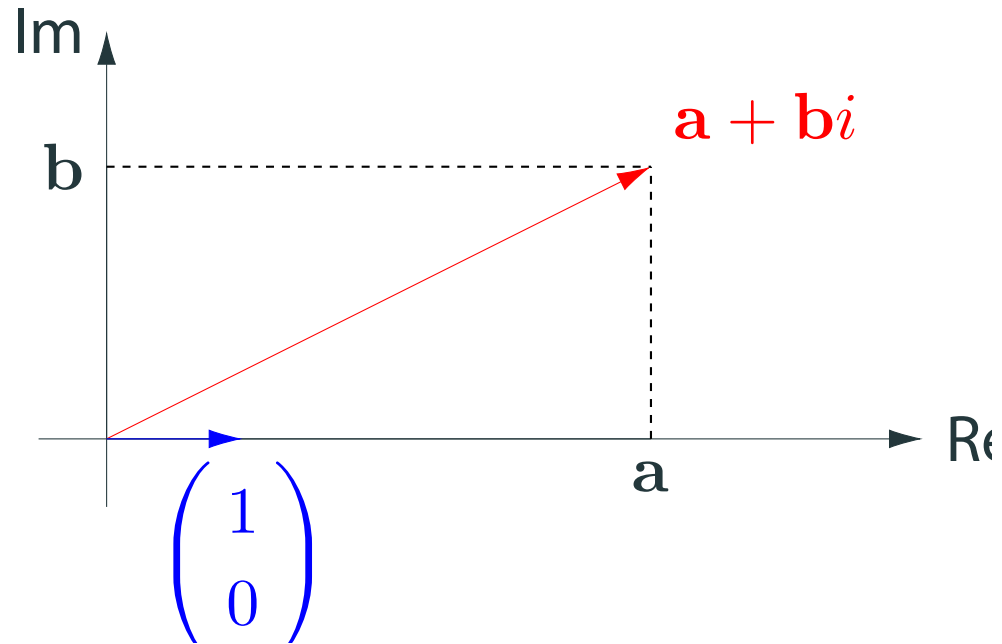
Комплексные числа как операторы

Идея

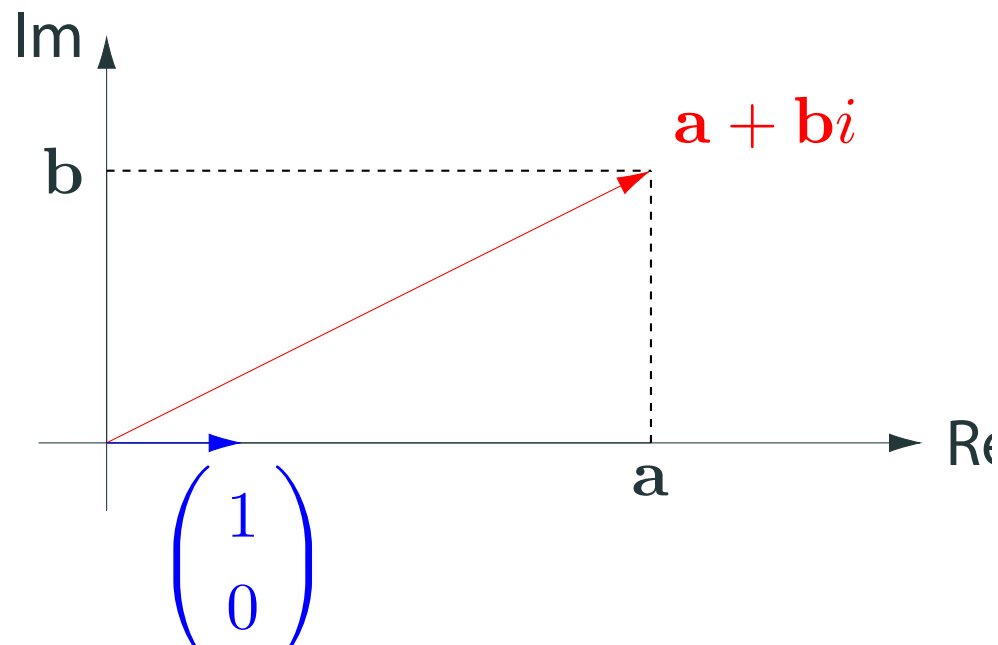
Комплексное число $a + bi$ — способ записывать повороты плоскости, растяжения плоскости и композиции этих действий.

$a + bi \leftrightarrow$ преобразование плоскости!

Комплексные числа как операторы



Комплексные числа как операторы



Число $a + bi$ кодирует преобразование плоскости

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Никакой мистики!

Поворот на 90° :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 0 + 1 \cdot i = i$$

Никакой мистики!

Поворот на 90° :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 0 + 1 \cdot i = i$$

Растягивание в 7 раз:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 7 + 0 \cdot i = 7$$

Никакой мистики!

Поворот на 90° :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 0 + 1 \cdot i = i$$

Растягивание в 7 раз:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 7 + 0 \cdot i = 7$$

Растягивание в $\sqrt{2}$ раз и вращение на 45° :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 1 + 1 \cdot i = 1 + i$$

Никакой мистики!

Поворот на 90° :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 0 + 1 \cdot i = i$$

Два поворота подряд на 90° :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow -1 + 0i = -1$$

Никакой мистики!

Поворот на 90° :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 0 + 1 \cdot i = i$$

Два поворота подряд на 90° :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow -1 + 0i = -1$$

Если повернуться на 90° , а затем повернуться ещё на 90° , то развернёшься в обратную сторону, $i \cdot i = -1$.

Комплексные числа как операторы

Определение

Множество \mathbb{C} преобразований плоскости, включающее повороты плоскости, растяжения плоскости в произвольное количество раз и композиции этих двух действий, называется множеством **комплексных чисел**.

Комплексные числа как операторы

Определение

Множество \mathbb{C} преобразований плоскости, включающее повороты плоскости, растяжения плоскости в произвольное количество раз и композиции этих двух действий, называется множеством **комплексных чисел**.

Растягивание в 7 раз $\leftrightarrow 7$.

Комплексные числа как операторы

Определение

Множество \mathbb{C} преобразований плоскости, включающее повороты плоскости, растяжения плоскости в произвольное количество раз и композиции этих двух действий, называется множеством **комплексных чисел**.

Растягивание в 7 раз $\leftrightarrow 7$.

Поворот на $90^\circ \leftrightarrow i$.

Комплексные числа как операторы

Определение

Множество \mathbb{C} преобразований плоскости, включающее повороты плоскости, растяжения плоскости в произвольное количество раз и композиции этих двух действий, называется множеством **комплексных чисел**.

Растягивание в 7 раз $\leftrightarrow 7$.

Поворот на $90^\circ \leftrightarrow i$.

Для $z \in \mathbb{C}$ определяют:

Модуль $|z|$ — во сколько раз изменяется длина вектора.

Аргумент $\arg z$ — на сколько изменяется угол вектора.

Основная теорема алгебры

Утверждение

Любой многочлен $f(z)$ степени n имеет ровно n корней, если считать корни $z \in \mathbb{C}$ с учётом алгебраической кратности.

Основная теорема алгебры

Утверждение

Любой многочлен $f(z)$ степени n имеет ровно n корней, если считать корни $z \in \mathbb{C}$ с учётом алгебраической кратности.

$$f(z) = a(z - z_1)(z - z_2) \cdot \dots \cdot (z - z_n)$$

Основная теорема алгебры

Утверждение

Любой многочлен $f(z)$ степени n имеет ровно n корней, если считать корни $z \in \mathbb{C}$ с учётом алгебраической кратности.

$$f(z) = a(z - z_1)(z - z_2) \cdot \dots \cdot (z - z_n)$$

Следствие

У любой квадратной матрицы размера $n \times n$ найдётся ровно n комплексных собственных чисел $\lambda \in \mathbb{C}$ с учётом алгебраической кратности.

След линейного оператора

Определение

Следом линейного оператора $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ называют сумму всех его комплексных собственных чисел $\lambda_i \in \mathbb{C}$,

$$\operatorname{tr} L = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n.$$

След линейного оператора

Определение

Следом линейного оператора $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ называют сумму всех его комплексных собственных чисел $\lambda_i \in \mathbb{C}$,

$$\operatorname{tr} L = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n.$$

Пример. Если $\operatorname{char}_A(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda - 5)^2$, то $\operatorname{tr} A = 1 + 5 + 5 = 11$.

След линейного оператора

Определение

Следом линейного оператора $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ называют сумму всех его комплексных собственных чисел $\lambda_i \in \mathbb{C}$,

$$\operatorname{tr} L = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n.$$

Пример. Если $\operatorname{char}_A(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda - 5)^2$, то
 $\operatorname{tr} A = 1 + 5 + 5 = 11$.

Пример. Если $\operatorname{char}_A(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda - 2 + 3i)(\lambda - 2 - 3i)$, то
 $\operatorname{tr} A = 1 + (2 - 3i) + (2 + 3i) = 5$.

Определитель линейного оператора

Утверждение

Определитель линейного оператора $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ равен произведению всех его комплексных собственных чисел $\lambda_i \in \mathbb{C}$,

$$\det L = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n.$$

Нахождение проектора

Это видеофрагмент с доской, слайдов здесь нет :)

Прогнозирование с помощью мнк

Это скринкаст, слайдов здесь нет :)

Бонус: задача про Чабана и 101 овцу

Это видеофрагмент с доской, слайдов здесь нет :)