

# Число сочетаний с повторениями

---

Владимир Подольский

Факультет компьютерных наук, Высшая Школа Экономики

# Число сочетаний с повторениями

Комбинаторные постановки

Число салатов

Число сочетаний с повторениями

# Комбинаторные постановки

Мы рассматриваем выборки  $k$  элементов из  $n$  вариантов

# Комбинаторные постановки

Мы рассматриваем выборки  $k$  элементов из  $n$  вариантов

	С повторениями	Без повторений
Упорядоченные		
Неупорядоченные		

# Комбинаторные постановки

Мы рассматриваем выборки  $k$  элементов из  $n$  вариантов  
Пусть  $k = 2$  и у нас есть  $n = 3$  вариантов: а, b, с

	С повторениями	Без повторений
Упорядоченные		
Неупорядоченные		

# Комбинаторные постановки

Мы рассматриваем выборки  $k$  элементов из  $n$  вариантов  
Пусть  $k = 2$  и у нас есть  $n = 3$  вариантов: a, b, c

	С повторениями	Без повторений
Упорядоченные	(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)	
Неупорядоченные		

# Комбинаторные постановки

Мы рассматриваем выборки  $k$  элементов из  $n$  вариантов  
Пусть  $k = 2$  и у нас есть  $n = 3$  вариантов:  $a, b, c$

	С повторениями	Без повторений
Упорядоченные	$(a, a), (a, b), (a, c),$ $(b, a), (b, b), (b, c),$ $(c, a), (c, b), (c, c)$	$(a, b), (a, c),$ $(b, a), (b, c),$ $(c, a), (c, b)$
Неупорядоченные		

# Комбинаторные постановки

Мы рассматриваем выборки  $k$  элементов из  $n$  вариантов  
Пусть  $k = 2$  и у нас есть  $n = 3$  вариантов:  $a, b, c$

	С повторениями	Без повторений
Упорядоченные	$(a, a), (a, b), (a, c),$ $(b, a), (b, b), (b, c),$ $(c, a), (c, b), (c, c)$	$(a, b), (a, c),$ $(b, a), (b, c),$ $(c, a), (c, b)$
Неупорядоченные		$\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$



# Комбинаторные постановки

Мы рассматриваем выборки  $k$  элементов из  $n$  вариантов  
Пусть  $k = 2$  и у нас есть  $n = 3$  вариантов:  $a, b, c$

	С повторениями	Без повторений
Упорядоченные	$(a, a), (a, b), (a, c),$ $(b, a), (b, b), (b, c),$ $(c, a), (c, b), (c, c)$	$(a, b), (a, c),$ $(b, a), (b, c),$ $(c, a), (c, b)$
Неупорядоченные	$\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$ $\{a, a\}, \{b, b\}, \{c, c\}$	$\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$

# Комбинаторные постановки

Мы рассматриваем выборки  $k$  элементов из  $n$  вариантов  
Текущее положение дел:

	С повторениями	Без повторений
Упорядоченные		
Неупорядоченные		

# Комбинаторные постановки

Мы рассматриваем выборки  $k$  элементов из  $n$  вариантов  
Текущее положение дел:

	С повторениями	Без повторений
Упорядоченные	Слова $n^k$	
Неупорядоченные		

# Комбинаторные постановки

Мы рассматриваем выборки  $k$  элементов из  $n$  вариантов  
Текущее положение дел:

	С повторениями	Без повторений
Упорядоченные	Слова $n^k$	$k$ -перестановки $\frac{n!}{(n-k)!}$
Неупорядоченные		

# Комбинаторные постановки

Мы рассматриваем выборки  $k$  элементов из  $n$  вариантов  
Текущее положение дел:

	С повторениями	Без повторений
Упорядоченные	Слова $n^k$	$k$ -перестановки $\frac{n!}{(n-k)!}$
Неупорядоченные		Сочетания $\binom{n}{k}$

# Комбинаторные постановки

Мы рассматриваем выборки  $k$  элементов из  $n$  вариантов  
Текущее положение дел:

	С повторениями	Без повторений
Упорядоченные	Слова $n^k$	$k$ -перестановки $\frac{n!}{(n-k)!}$
Неупорядоченные	?	Сочетания $\binom{n}{k}$

# Пример: задача классификации

## Пример

Пусть у нас есть  $k$  видео, каждое относится к одной из  $n$  различных категорий. Нас интересует только количество видео в каждой категории. Сколько есть разных распределений размеров категорий?

# Пример: задача классификации

## Пример

Пусть у нас есть  $k$  видео, каждое относится к одной из  $n$  различных категорий. Нас интересует только количество видео в каждой категории. Сколько есть разных распределений размеров категорий?

Пусть  $k = 2, n = 3$ .

Вот список всех возможных распределений:

$(2, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 2)$

$(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)$



# Пример: задача классификации

## Пример

Пусть у нас есть  $k$  видео, каждое относится к одной из  $n$  различных категорий. Нас интересует только количество видео в каждой категории. Сколько есть разных распределений размеров категорий?

- Для каждого из  $k$  видео мы выбираем одну из  $n$  категорий

# Пример: задача классификации

## Пример

Пусть у нас есть  $k$  видео, каждое относится к одной из  $n$  различных категорий. Нас интересует только количество видео в каждой категории. Сколько есть разных распределений размеров категорий?

- Для каждого из  $k$  видео мы выбираем одну из  $n$  категорий
- Каждое видео добавляет 1 к размеру одной из категорий

# Пример: задача классификации

## Пример

Пусть у нас есть  $k$  видео, каждое относится к одной из  $n$  различных категорий. Нас интересует только количество видео в каждой категории. Сколько есть разных распределений размеров категорий?

- Все видео равноправны, так что выборка неупорядоченная

# Пример: задача классификации

## Пример

Пусть у нас есть  $k$  видео, каждое относится к одной из  $n$  различных категорий. Нас интересует только количество видео в каждой категории. Сколько есть разных распределений размеров категорий?

- Все видео равноправны, так что выборка неупорядоченная
- Несколько видео могут попасть в одну и ту же категорию

# Пример: задача классификации

## Пример

Пусть у нас есть  $k$  видео, каждое относится к одной из  $n$  различных категорий. Нас интересует только количество видео в каждой категории. Сколько есть разных распределений размеров категорий?

- Все видео равноправны, так что выборка неупорядоченная
- Несколько видео могут попасть в одну и ту же категорию
- Так что распределяя видео мы выбираем  $k$  неупорядоченных категорий из  $n$  вариантов с повторениями

# Число сочетаний с повторениями

Комбинаторные постановки

Число салатов

Число сочетаний с повторениями

# Число салатов

## Задача

У нас есть неограниченное количество помидоров, огурцов и перцев. Мы хотим сделать салат из 4 овощей этих трех типов (мы не обязаны использовать все ингредиенты). Сколько разных салатов можно сделать?

# Число салатов

## Задача

У нас есть неограниченное количество помидоров, огурцов и перцев. Мы хотим сделать салат из 4 овощей этих трех типов (мы не обязаны использовать все ингредиенты). Сколько разных салатов можно сделать?

- Выбираем 4 объекта из 3 вариантов с повторениями



# Число салатов

## Задача

У нас есть неограниченное количество помидоров, огурцов и перцев. Мы хотим сделать салат из 4 овощей этих трех типов (мы не обязаны использовать все ингредиенты). Сколько разных салатов можно сделать?

- Выбираем 4 объекта из 3 вариантов с повторениями
- Порядок не важен

# Число салатов

## Задача

У нас есть неограниченное количество помидоров, огурцов и перцев. Мы хотим сделать салат из 4 овощей этих трех типов (мы не обязаны использовать все ингредиенты). Сколько разных салатов можно сделать?

- Выбираем 4 объекта из 3 вариантов с повторениями
- Порядок не важен
- Это наша постановка

# Число салатов

## Задача

У нас есть неограниченное количество помидоров, огурцов и перцев. Мы хотим сделать салат из 4 овощей этих трех типов (мы не обязаны использовать все ингредиенты). Сколько разных салатов можно сделать?

- Выбираем 4 объекта из 3 вариантов с повторениями
- Порядок не важен
- Это наша постановка
- Но мы пока не знаем как их посчитать

# Число салатов

## Задача

У нас есть неограниченное количество помидоров, огурцов и перцев. Мы хотим сделать салат из 4 овощей этих трех типов (мы не обязаны использовать все ингредиенты). Сколько разных салатов можно сделать?

- Выбираем 4 объекта из 3 вариантов с повторениями
- Порядок не важен
- Это наша постановка
- Но мы пока не знаем как их посчитать
- Мы перечислим все салаты, а затем уже посчитаем

# Число салатов

## Задача

У нас есть неограниченное количество помидоров, огурцов и перцев. Мы хотим сделать салат из 4 овощей этих трех типов (мы не обязаны использовать все ингредиенты). Сколько разных салатов можно сделать?

- Выбираем 4 объекта из 3 вариантов с повторениями
- Порядок не важен
- Это наша постановка
- Но мы пока не знаем как их посчитать
- Мы перечислим все салаты, а затем уже посчитаем
- Но мы хотим перечислить их разумно

# Число салатов



— помидор



— перец



— огурец



# Число салатов



— помидор



— перец



— огурец



# Число салатов



— помидор



— перец



— огурец



Один и тот же салат



# Число салатов



— помидор



— перец



— огурец



Один и тот же салат

- Порядок не важен

# Число салатов



— помидор



— перец



— огурец



Один и тот же салат



- Порядок не важен
- Давайте выпишем сначала помидоры, затем перцы, затем огурцы

## Число салатов



— помидор



— перец



— огурец



- Порядок не важен
- Давайте выпишем сначала помидоры, затем перцы, затем огурцы

# Число салатов



— помидор



— перец



— огурец



- Порядок не важен
- Давайте выпишем сначала помидоры, затем перцы, затем огурцы
- Переберем **все возможные количества помидоров** и посчитаем салаты в каждом из случаев

Число салатов



## Число салатов



Случай 1: 4 помидора

## Число салатов



Случай 1: 4 помидора

# Число салатов



Случай 1: 4 помидора

- 4 помидора: 1 салат



## Число салатов



Случай 2: 3 помидора

- 4 помидора: 1 салат

## Число салатов



Случай 2: 3 помидора

- 4 помидора: 1 салат

## Число салатов



Случай 2: 3 помидора

- 4 помидора: 1 салат

# Число салатов



Случай 2: 3 помидора

- 4 помидора: 1 салат
- 3 помидора: 2 салата

## Число салатов



Случай 3: 2 помидора

- 4 помидора: 1 салат
- 3 помидора: 2 салата

# Число салатов



Случай 3: 2 помидора

- 4 помидора: 1 салат
- 3 помидора: 2 салата

# Число салатов



Случай 3: 2 помидора

- 4 помидора: 1 салат
- 3 помидора: 2 салата

## Число салатов



Случай 3: 2 помидора

- 4 помидора: 1 салат
- 3 помидора: 2 салата



# Число салатов



Случай 3: 2 помидора

- 4 помидора: 1 салат
- 3 помидора: 2 салата
- 2 помидора: 3 салата

# Число салатов



Случай 4: 1 помидор

- 4 помидора: 1 салат
- 3 помидора: 2 салата
- 2 помидора: 3 салата

## Число салатов



Случай 4: 1 помидор

- 4 помидора: 1 салат
- 3 помидора: 2 салата
- 2 помидора: 3 салата

## Число салатов



Случай 4: 1 помидор

- 4 помидора: 1 салат
- 3 помидора: 2 салата
- 2 помидора: 3 салата

## Число салатов



Случай 4: 1 помидор

- 4 помидора: 1 салат
- 3 помидора: 2 салата
- 2 помидора: 3 салата

## Число салатов



Случай 4: 1 помидор

- 4 помидора: 1 салат
- 3 помидора: 2 салата
- 2 помидора: 3 салата

# Число салатов



Случай 4: 1 помидор

- 4 помидора: 1 салат
- 3 помидора: 2 салата
- 2 помидора: 3 салата
- 1 помидор: 4 салата

# Число салатов



Случай 5: 0 помидоров

- 4 помидора: 1 салат
- 3 помидора: 2 салата
- 2 помидора: 3 салата
- 1 помидор: 4 салата



# Число салатов



Случай 5: 0 помидоров

- 4 помидора: 1 салат
- 3 помидора: 2 салата
- 2 помидора: 3 салата
- 1 помидор: 4 салата

# Число салатов



Случай 5: 0 помидоров

- 4 помидора: 1 салат
- 3 помидора: 2 салата
- 2 помидора: 3 салата
- 1 помидор: 4 салата

# Число салатов



Случай 5: 0 помидоров

- 4 помидора: 1 салат
- 3 помидора: 2 салата
- 2 помидора: 3 салата
- 1 помидор: 4 салата

# Число салатов



Случай 5: 0 помидоров

- 4 помидора: 1 салат
- 3 помидора: 2 салата
- 2 помидора: 3 салата
- 1 помидор: 4 салата

# Число салатов



Случай 5: 0 помидоров

- 4 помидора: 1 салат
- 3 помидора: 2 салата
- 2 помидора: 3 салата
- 1 помидор: 4 салата

# Число салатов



Случай 5: 0 помидоров

- 4 помидора: 1 салат
- 3 помидора: 2 салата
- 2 помидора: 3 салата
- 1 помидор: 4 салата
- 0 помидоров: 5 салатов

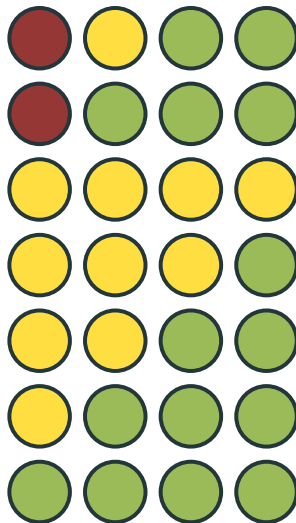
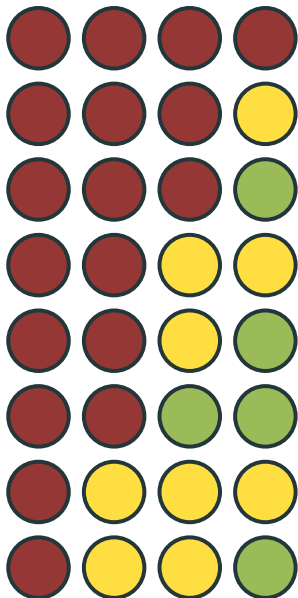
# Число салатов



Случай 5: 0 помидоров

- 4 помидора: 1 салат
- 3 помидора: 2 салата
- 2 помидора: 3 салата
- 1 помидор: 4 салата
- 0 помидоров: 5 салатов
- Всего: 15 салатов

## Список всех салатов





# Итоги

- Решение выглядит очень структурированным

# Итоги

- Решение выглядит очень структурированным
- Такая же структура для салатов большего размера

# Итоги

- Решение выглядит очень структурированным
- Такая же структура для салатов большего размера
- Но более сложная для большего числа ингредиентов

# Итоги

- Решение выглядит очень структурированным
- Такая же структура для салатов большего размера
- Но более сложная для большего числа ингредиентов
- Тем не менее, такая же стратегия рекурсивного подсчета работает для салатов любого размера из любого числа ингредиентов

# Число сочетаний с повторениями

Комбинаторные постановки

Число салатов

Число сочетаний с повторениями

# Большие салаты

## Задачи

У нас есть неограниченное количество помидоров, огурцов, перцев и баклажанов. Мы хотим сделать салат из 7 овощей этих четырех типов (мы не обязаны использовать все ингредиенты). Сколько разных салатов можно сделать?

# Большие салаты

## Задачи

У нас есть неограниченное количество помидоров, огурцов, перцев и баклажанов. Мы хотим сделать салат из 7 овощей этих четырех типов (мы не обязаны использовать все ингредиенты). Сколько разных салатов можно сделать?

- Мы снова можем использовать рекурсивный подсчет

# Большие салаты

## Задачи

У нас есть неограниченное количество помидоров, огурцов, перцев и баклажанов. Мы хотим сделать салат из 7 овощей этих четырех типов (мы не обязаны использовать все ингредиенты). Сколько разных салатов можно сделать?

- Мы снова можем использовать рекурсивный подсчет
- Но вместо этого мы выведем формулу



# Большие салаты

## Задачи

У нас есть неограниченное количество помидоров, огурцов, перцев и баклажанов. Мы хотим сделать салат из 7 овощей этих четырех типов (мы не обязаны использовать все ингредиенты). Сколько разных салатов можно сделать?

- Мы снова можем использовать рекурсивный подсчет
- Но вместо этого мы выведем формулу
- Это будет решением задачи и в общем виде тоже

# Большие салаты



— помидор



— перец



— огурец



— баклажан



# Большие салаты



— помидор



— перец



— огурец

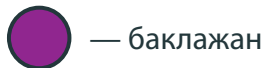
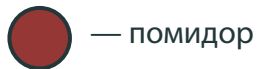


— баклажан



- Порядок не важен

# Большие салаты



- Порядок не важен
- Давайте сначала перечислим помидоры, затем перцы, затем огурцы, а затем баклажаны

## Большие салаты

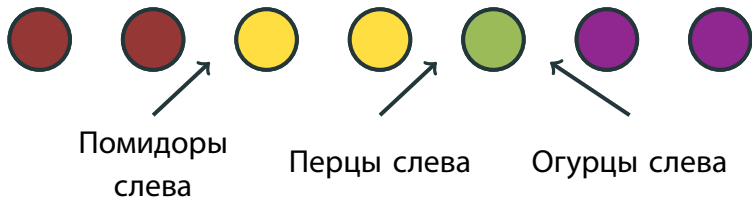


## Большие салаты



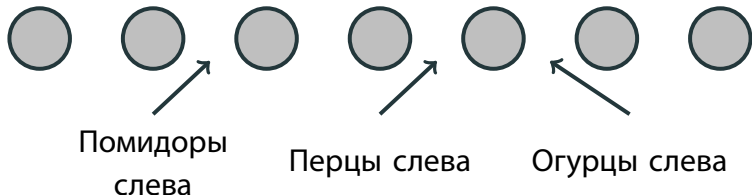
- **Идея 1:** чтобы указать конкретный салат, достаточно указать, где меняются ингредиенты

# Большие салаты



- **Идея 1:** чтобы указать конкретный салат, достаточно указать, где меняются ингредиенты

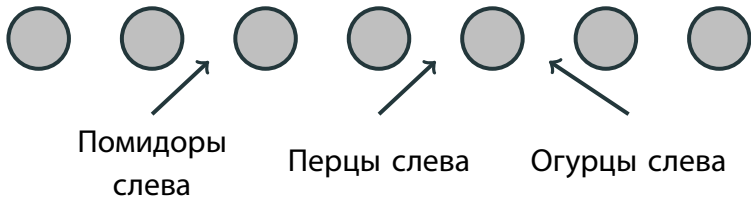
# Большие салаты



- **Идея 1:** чтобы указать конкретный салат, достаточно указать, где меняются ингредиенты



# Большие салаты



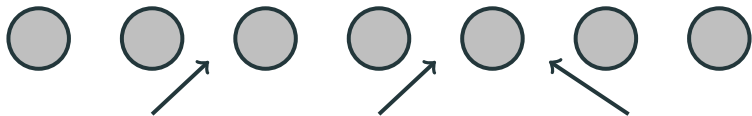
- **Идея 1:** чтобы указать конкретный салат, достаточно указать, где меняются ингредиенты
- **Идея 2:** даже текстовое описание не нужно

# Большие салаты



- **Идея 1:** чтобы указать конкретный салат, достаточно указать, где меняются ингредиенты
- **Идея 2:** даже текстовое описание не нужно

# Большие салаты



- **Идея 1:** чтобы указать конкретный салат, достаточно указать, где меняются ингредиенты
- **Идея 2:** даже текстовое описание не нужно
- **Идея 3:** Можем указать места смены ингредиентов перегородками

# Большие салаты



- **Идея 1:** чтобы указать конкретный салат, достаточно указать, где меняются ингредиенты
- **Идея 2:** даже текстовое описание не нужно
- **Идея 3:** Можем указать места смены ингредиентов перегородками

# Большие салаты



- **Идея 1:** чтобы указать конкретный салат, достаточно указать, где меняются ингредиенты
- **Идея 2:** даже текстовое описание не нужно
- **Идея 3:** Можем указать места смены ингредиентов перегородками
- Мы все еще можем восстановить салат: помидоры слева от первой перегородки, затем перцы и т.д.

## Большие салаты



- Что если в салате не было, например, перцев?

## Большие салаты



- Что если в салате не было, например, перцев?
- Ничего страшного

# Большие салаты



- Что если в салате не было, например, перцев?
- Ничего страшного
- Теперь, чтобы указать конкретный салат, достаточно выбрать три позиции из 10 и поставить в них перегородки



# Большие салаты



- Что если в салате не было, например, перцев?
- Ничего страшного
- Теперь, чтобы указать конкретный салат, достаточно выбрать три позиции из 10 и поставить в них перегородки
- Это обычные **сочетания**! Ответ в задаче  $\binom{10}{3} = 120!$

# Как мы до этого дошли

## Задача

У нас есть неограниченное количество помидоров, огурцов, перцев и баклажанов. Мы хотим сделать салат из 7 овощей этих четырех типов (мы не обязаны использовать все ингредиенты). Сколько разных салатов можно сделать?

Основные идеи:

# Как мы до этого дошли

## Задача

У нас есть неограниченное количество помидоров, огурцов, перцев и баклажанов. Мы хотим сделать салат из 7 овощей этих четырех типов (мы не обязаны использовать все ингредиенты). Сколько разных салатов можно сделать?

Основные идеи:

- Упорядочили салат удобным способом

# Как мы до этого дошли

## Задача

У нас есть неограниченное количество помидоров, огурцов, перцев и баклажанов. Мы хотим сделать салат из 7 овощей этих четырех типов (мы не обязаны использовать все ингредиенты). Сколько разных салатов можно сделать?

Основные идеи:

- Упорядочили салат удобным способом
- Салат определяется разделителями

# Как мы до этого дошли

## Задача

У нас есть неограниченное количество помидоров, огурцов, перцев и баклажанов. Мы хотим сделать салат из 7 овощей этих четырех типов (мы не обязаны использовать все ингредиенты). Сколько разных салатов можно сделать?

Основные идеи:

- Упорядочили салат удобным способом
- Салат определяется разделителями
- Поместили разделители в один ряд с ингредиентами

# Как мы до этого дошли

## Задача

У нас есть неограниченное количество помидоров, огурцов, перцев и баклажанов. Мы хотим сделать салат из 7 овощей этих четырех типов (мы не обязаны использовать все ингредиенты). Сколько разных салатов можно сделать?

Основные идеи:

- Упорядочили салат удобным способом
- Салат определяется разделителями
- Поместили разделители в один ряд с ингредиентами
- Осталось выбрать места для разделителей в списке — старая задача

# Общий случай

## Число сочетаний с повторениями

Число сочетаний с повторениями размера  $k$  из  $n$  объектов равно  $\binom{k+n-1}{n-1}$

# Общий случай

## Число сочетаний с повторениями

Число сочетаний с повторениями размера  $k$  из  $n$  объектов равно  $\binom{k+n-1}{n-1}$

- Размер выборки = размер салата



# Общий случай

## Число сочетаний с повторениями

Число сочетаний с повторениями размера  $k$  из  $n$  объектов равно  $\binom{k+n-1}{n-1}$

- Размер выборки = размер салата
- Число объектов = число ингредиентов

# Общий случай

## Число сочетаний с повторениями

Число сочетаний с повторениями размера  $k$  из  $n$  объектов равно  $\binom{k+n-1}{n-1}$

- Размер выборки = размер салата
- Число объектов = число ингредиентов
- Работает то же рассуждение

# Общий случай

## Число сочетаний с повторениями

Число сочетаний с повторениями размера  $k$  из  $n$  объектов равно  $\binom{k+n-1}{n-1}$

- Размер выборки = размер салата
- Число объектов = число ингредиентов
- Работает то же рассуждение
- Почему  $k+n-1$  и  $n-1$ ?

# Общий случай

## Число сочетаний с повторениями

Число сочетаний с повторениями размера  $k$  из  $n$  объектов равно  $\binom{k+n-1}{n-1}$

- Размер выборки = размер салата
- Число объектов = число ингредиентов
- Работает то же рассуждение
- Почему  $k+n-1$  и  $n-1$ ?
- $n$  ингредиентов означает  $n-1$  разделитель; выбираем  $(n-1)$  объект в списке из  $k+(n-1)$  объектов

# Стандартные комбинаторные постановки

Мы рассматриваем выборки  $k$  элементов из  $n$  вариантов

# Стандартные комбинаторные постановки

Мы рассматриваем выборки  $k$  элементов из  $n$  вариантов

	С повторениями	Без повторений
Упорядоченные	Слова $n^k$	$k$ -перестановки $\frac{n!}{(n-k)!}$
Неупорядоченные	Сочетания с повторениями $\binom{k+n-1}{n-1}$	Сочетания $\binom{n}{k}$