Вероятности

Владимир Подольский

Факультет компьютерных наук, Высшая Школа Экономики

Вероятности

Что такое вероятность?

Исходы, события, вероятность

Комбинаторика и подсчет вероятностей

Неравновероятная модель

Многошаговое задание распределений

Что такое вероятность?

- Что происходит, когда мы подбрасываем монетку?

wikimedia.org

Что такое вероятность?

- Что происходит, когда мы подбрасываем монетку?
- Теоретически мы можем все рассчитать и узнать, как она упадет

wikimedia.org

Что такое вероятность?

- Что происходит, когда мы подбрасываем монетку?
- Теоретически мы можем все рассчитать и узнать, как она упадет
- На практике это очень тяжело

wikimedia.org

Что такое вероятность?

- В такой ситуации мы говорим, что каждый исход происходит с той или иной вероятностью

wikimedia.org

Что такое вероятность?

- В такой ситуации мы говорим, что каждый исход происходит с той или иной вероятностью
- Это удобная модель в тех случаях, когда мы не можем просчитать все полностью

wikimedia.org

Что такое вероятность?

- Не всегда все так просто

wikimedia.org

Что такое вероятность?

- Не всегда все так просто
- В современных физических моделях положение электрона в пространстве считается принципиально случайным

wikimedia.org

Что такое вероятность?

Вероятность встречается повсюду в Computer Science и в Data Science:

Что такое вероятность?

Вероятность встречается повсюду в Computer Science и в Data Science:

- Это важнейший элемент в моделях, описывающих разные процессы и явления

Что такое вероятность?

Вероятность встречается повсюду в Computer Science и в Data Science:

- Это важнейший элемент в моделях, описывающих разные процессы и явления
- Это сильный инструмент в построении алгоритмов

Что такое вероятность?

Вероятность встречается повсюду в Computer Science и в Data Science:

- Это важнейший элемент в моделях, описывающих разные процессы и явления
- Это сильный инструмент в построении алгоритмов
- Это важный метод для анализа, в том числе ситуаций, где изначально никакой случайности нет

Вероятность как часть модели

Вероятностная выборка в задачах машинного обучения:

- Трудно описать, как формируется обучающая выборка и что модель получит на вход при использовании

Вероятность как часть модели

Вероятностная выборка в задачах машинного обучения:

- Трудно описать, как формируется обучающая выборка и что модель получит на вход при использовании
- Распространенный подход: выборка выбирается случайно по неизвестному вероятностному распределению

Вероятность как часть модели

Вероятностная выборка в задачах машинного обучения:

- Трудно описать, как формируется обучающая выборка и что модель получит на вход при использовании
- Распространенный подход: выборка выбирается случайно по неизвестному вероятностному распределению
- При использовании модель получает входы, распределенные по тому же самому распределению

Вероятность как часть модели

Вероятностная выборка в задачах машинного обучения:

- Трудно описать, как формируется обучающая выборка и что модель получит на вход при использовании
- Распространенный подход: выборка выбирается случайно по неизвестному вероятностному распределению
- При использовании модель получает входы, распределенные по тому же самому распределению
- Распределение неизвестно, оно одинаково при обучении и при запуске

Вероятность как часть модели

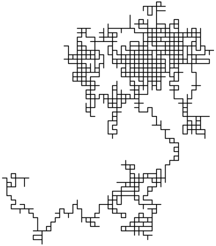
Вероятностная выборка в задачах машинного обучения:

- Трудно описать, как формируется обучающая выборка и что модель получит на вход при использовании
- Распространенный подход: выборка выбирается случайно по неизвестному вероятностному распределению
- При использовании модель получает входы, распределенные по тому же самому распределению
- Распределение неизвестно, оно одинаково при обучении и при запуске
- Это позволяет анализировать качество модели

Вероятность как алгоритмический метод

Случайные блуждания:

- Моделируют многие естественные процессы

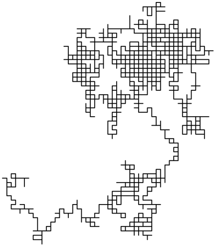


wikimedia.org

Вероятность как алгоритмический метод

Случайные блуждания:

- Моделируют многие естественные процессы
- Позволяют генерировать интересные распределения на объектах

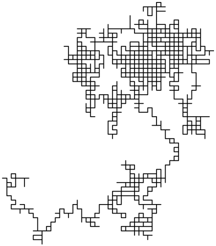


wikimedia.org

Вероятность как алгоритмический метод

Случайные блуждания:

- Моделируют многие естественные процессы
- Позволяют генерировать интересные распределения на объектах
- Позволяют эффективно анализировать свойства объектов



wikimedia.org

Вероятность как метод анализа

Вероятностный метод в математике:

- Позволяет доказывать существование объектов, не предъявляя их явно

Вероятность как метод анализа

Вероятностный метод в математике:

- Позволяет доказывать существование объектов, не предъявляя их явно
- Нужен объект с определенными свойствами?

Вероятность как метод анализа

Вероятностный метод в математике:

- Позволяет доказывать существование объектов, не предъявляя их явно
- Нужен объект с определенными свойствами?
- Попробуем взять случайный объект

Вероятность как метод анализа

Вероятностный метод в математике:

- Позволяет доказывать существование объектов, не предъявляя их явно
- Нужен объект с определенными свойствами?
- Попробуем взять случайный объект
- Докажем, что он удовлетворяет свойствам с ненулевой вероятностью

Вероятности

Что такое вероятность?

Исходы, события, вероятность

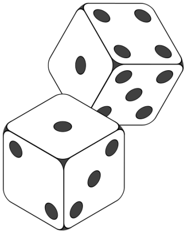
Комбинаторика и подсчет вероятностей

Неравновероятная модель

Многошаговое задание распределений

Основная модель

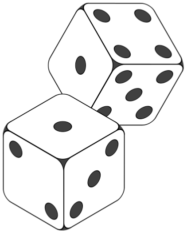
- Мы будем рассматривать случайные события с конечным множеством возможных исходов



wikimedia.org

Основная модель

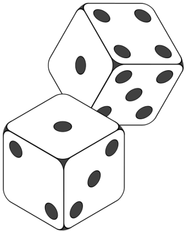
- Мы будем рассматривать случайные события с конечным множеством возможных исходов
- Это называется дискретной моделью



wikimedia.org

Основная модель

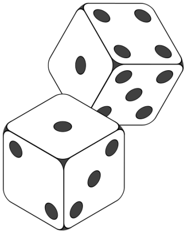
- Мы будем рассматривать случайные события с конечным множеством возможных исходов
- Это называется дискретной моделью
- Пример: подбрасывание монетки



wikimedia.org

Основная модель

- Мы будем рассматривать случайные события с конечным множеством возможных исходов
- Это называется дискретной моделью
- Пример: подбрасывание монетки
- Пример: бросание кубика



wikimedia.org

Подбрасывание монетки

- Два возможных исхода, орел и решка

Подбрасывание монетки

- Два возможных исхода, орел и решка
- Каждый происходит с вероятностью $1/2$

Бросание кубика

- У кубика 6 граней, на них написаны число от 1 до 6

Бросание кубика

- У кубика 6 граней, на них написаны число от 1 до 6
- Шесть возможных исходов: выпадает 1, 2, 3, 4, 5 или 6

Бросание кубика

- У кубика 6 граней, на них написаны число от 1 до 6
- Шесть возможных исходов: выпадает 1, 2, 3, 4, 5 или 6
- Каждый происходит с вероятностью $1/6$

Общая модель

- Конечное множество исходов $\Omega = \{u_1, \ldots, u_n\}$

Общая модель

- Конечное множество исходов $\Omega = \{u_1, \dots, u_n\}$
- Равновероятная модель: все исходы равноправны

Общая модель

- Конечное множество исходов $\Omega = \{u_1, \ldots, u_n\}$
- Равновероятная модель: все исходы равноправны
- Вероятность каждого исхода равна $1/n$

Общая модель

- Конечное множество исходов $\Omega = \{u_1, \dots, u_n\}$
- Равновероятная модель: все исходы равноправны
- Вероятность каждого исхода равна $1/n$
- Множество Ω с заданными вероятностями исходов называется вероятностным пространством

События

Задача

Пусть мы бросаем кубик. Какова вероятность того, что выпадет четное число?

События

Задача

Пусть мы бросаем кубик. Какова вероятность того, что выпадет четное число?

- Всего шесть исходов

События

Задача

Пусть мы бросаем кубик. Какова вероятность того, что выпадет четное число?

- Всего шесть исходов
- Половина из них годится: 2, 4, 6

События

Задача

Пусть мы бросаем кубик. Какова вероятность того, что выпадет четное число?

- Всего шесть исходов
- Половина из них годится: 2, 4, 6
- Разумно считать, что вероятность $1/2$

События

Задача

Пусть мы бросаем кубик. Какова вероятность того, что выпадет число, делящееся на 3?

События

Задача

Пусть мы бросаем кубик. Какова вероятность того, что выпадет число, делящееся на 3?

- Всего шесть исходов

События

Задача

Пусть мы бросаем кубик. Какова вероятность того, что выпадет число, делящееся на 3?

- Всего шесть исходов
- Треть из них годится: 3 и 6

События

Задача

Пусть мы бросаем кубик. Какова вероятность того, что выпадет число, делящееся на 3?

- Всего шесть исходов
- Треть из них годится: 3 и 6
- Разумно считать, что вероятность $1/3$

События

- Пусть задано вероятностное пространство Ω с равновероятными исходами

События

- Пусть задано вероятностное пространство Ω с равновероятными исходами
- **Событием** называется подмножество $A \subseteq \Omega$

События

- Пусть задано вероятностное пространство Ω с равновероятными исходами
- Событием называется подмножество $A \subseteq \Omega$
- Интуиция: событие это то, что может произойти или не произойти в результате случайного эксперимента

События

- Пусть задано вероятностное пространство Ω с равновероятными исходами
- Событием называется подмножество $A \subseteq \Omega$
- Интуиция: событие это то, что может произойти или не произойти в результате случайного эксперимента
- Пример события: выпадает число, делящееся на 3 при бросании кубика

События

- Пусть задано вероятностное пространство Ω с равновероятными исходами
- Событием называется подмножество $A \subseteq \Omega$
- Интуиция: событие это то, что может произойти или не произойти в результате случайного эксперимента
- Пример события: выпадает число, делящееся на 3 при бросании кубика
- A — это множество тех исходов, при которых событие происходит; в примере $A = \{3, 6\}$

Вероятность событий

- Пусть задано вероятностное пространство Ω с равновероятными исходами и событие $A \subseteq \Omega$

Вероятность событий

- Пусть задано вероятностное пространство Ω с равновероятными исходами и событие $A \subseteq \Omega$
- Как определяется вероятность события A?

Вероятность событий

- Пусть задано вероятностное пространство Ω с равновероятными исходами и событие $A \subseteq \Omega$
- Как определяется вероятность события A?
- Вероятность A равна

$$\Pr[A] = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Вероятность событий

- Пусть задано вероятностное пространство Ω с равновероятными исходами и событие $A \subseteq \Omega$
- Как определяется вероятность события A?
- Вероятность A равна

$$\Pr[A] = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

- Другими словами, $\Pr[A]$ равна доле исходов, лежащих в событии

Вероятность событий

- Наблюдение: вероятность события, равна сумме вероятностей исходов в нем

Вероятность событий

- Наблюдение: вероятность события, равна сумме вероятностей исходов в нем
- Пример: $\Omega = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$, $A = \{u_2, u_3, u_5\}$

Вероятность событий

- Наблюдение: вероятность события, равна сумме вероятностей исходов в нем
- Пример: $\Omega = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$, $A = \{u_2, u_3, u_5\}$
- $\Pr[A] = \frac{3}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$

Вероятность событий

- Наблюдение: вероятность события, равна сумме вероятностей исходов в нем
- Пример: $\Omega = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$, $A = \{u_2, u_3, u_5\}$
- $\Pr[A] = \frac{3}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$
- Если $A = \{a\}$, то сокращаем обозначение: вместо $\Pr[\{a\}]$ пишем $\Pr[a]$

Вероятность событий

Подбрасывание монеты три раза

Пусть мы подбрасываем монету три раза подряд. Какова вероятность, что орел выпадет ровно один раз?

Вероятность событий

Подбрасывание монеты три раза

Пусть мы подбрасываем монету три раза подряд. Какова вероятность, что орел выпадет ровно один раз?

- Сначала нужно формализовать задачу и указать вероятностное распределение

Вероятность событий

Подбрасывание монеты три раза

Пусть мы подбрасываем монету три раза подряд. Какова вероятность, что орел выпадет ровно один раз?

- Сначала нужно формализовать задачу и указать вероятностное распределение
- При каждом подбрасывании выпадает либо орел, либо решка

Вероятность событий

Подбрасывание монеты три раза

Пусть мы подбрасываем монету три раза подряд. Какова вероятность, что орел выпадет ровно один раз?

- Сначала нужно формализовать задачу и указать вероятностное распределение
- При каждом подбрасывании выпадает либо орел, либо решка
- Для удобства будем обозначать выпадение орла цифрой 1, а выпадение решки цифрой 0

Вероятность событий

Подбрасывание монеты три раза

Пусть мы подбрасываем монету три раза подряд. Какова вероятность, что орел выпадет ровно один раз?

- Сначала нужно формализовать задачу и указать вероятностное распределение
- При каждом подбрасывании выпадает либо орел, либо решка
- Для удобства будем обозначать выпадение орла цифрой 1, а выпадение решки цифрой 0
- Тогда $\Omega = \{0, 1\}^3$

Вероятность событий

Подбрасывание монеты три раза

Пусть мы подбрасываем монету три раза подряд. Какова вероятность, что орел выпадет ровно один раз?

- $\Omega = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$

Вероятность событий

Подбрасывание монеты три раза

Пусть мы подбрасываем монету три раза подряд. Какова вероятность, что орел выпадет ровно один раз?

- $\Omega = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$
- Всего 8 исходов

Вероятность событий

Подбрасывание монеты три раза

Пусть мы подбрасываем монету три раза подряд. Какова вероятность, что орел выпадет ровно один раз?

- $\Omega = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$
- Всего 8 исходов
- Нас интересует событие A — «Выпал ровно один орел»

Вероятность событий

Подбрасывание монеты три раза

Пусть мы подбрасываем монету три раза подряд. Какова вероятность, что орел выпадет ровно один раз?

- $\Omega = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$
- Всего 8 исходов
- Нас интересует событие A — «Выпал ровно один орел»
- $A = \{001, 010, 100\}$

Вероятность событий

Подбрасывание монеты три раза

Пусть мы подбрасываем монету три раза подряд. Какова вероятность, что орел выпадет ровно один раз?

- $\Omega = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$
- Всего 8 исходов
- Нас интересует событие A — «Выпал ровно один орел»
- $A = \{001, 010, 100\}$
- Получаем $\Pr[A] = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{8}$

Вероятности

Что такое вероятность?

Исходы, события, вероятность

Комбинаторика и подсчет вероятностей

Неравновероятная модель

Многошаговое задание распределений

Бросание кубика два раза

Задача

Пусть мы бросаем кубик два раза. Какова вероятность, что сумма выпавших чисел равна 5?

Бросание кубика два раза

Задача

Пусть мы бросаем кубик два раза. Какова вероятность, что сумма выпавших чисел равна 5?

- Множество исходов $\Omega = \{(i, j) \mid i, j = 1, \ldots, 6\}$

Бросание кубика два раза

Задача

Пусть мы бросаем кубик два раза. Какова вероятность, что сумма выпавших чисел равна 5?

- Множество исходов $\Omega = \{(i, j) \mid i, j = 1, \ldots, 6\}$
- Исходы равновероятны

Бросание кубика два раза

Задача

Пусть мы бросаем кубик два раза. Какова вероятность, что сумма выпавших чисел равна 5?

- Множество исходов $\Omega = \{(i, j) \mid i, j = 1, \dots, 6\}$
- Исходы равновероятны
- Исходов много, сложно выписать все

Бросание кубика два раза

Задача

Пусть мы бросаем кубик два раза. Какова вероятность, что сумма выпавших чисел равна 5?

- Множество исходов $\Omega = \{(i, j) \mid i, j = 1, \ldots, 6\}$
- Исходы равновероятны
- Исходов много, сложно выписать все
- Но можно посчитать!

Бросание кубика два раза

Задача

Пусть мы бросаем кубик два раза. Какова вероятность, что сумма выпавших чисел равна 5?

- Множество исходов $\Omega = \{(i, j) \mid i, j = 1, \dots, 6\}$
- Исходы равновероятны
- Исходов много, сложно выписать все
- Но можно посчитать!
- $|\Omega| = 6 \times 6 = 36$

Бросание кубика два раза

Задача

Пусть мы бросаем кубик два раза. Какова вероятность, что сумма выпавших чисел равна 5?

- $A = \{(i, j) \mid i, j = 1, \dots, 6,\ \ i + j = 5\}$

Бросание кубика два раза

Задача

Пусть мы бросаем кубик два раза. Какова вероятность, что сумма выпавших чисел равна 5?

- $A = \{(i, j) \mid i, j = 1, \dots, 6,\ \ i + j = 5\}$
- Сколько исходов в A?

Бросание кубика два раза

Задача

Пусть мы бросаем кубик два раза. Какова вероятность, что сумма выпавших чисел равна 5?

- $A = \{(i, j) \mid i, j = 1, \ldots, 6, \;\; i + j = 5\}$
- Сколько исходов в A?
- В качестве i подойдет любое число от 1 до 4; j определяется однозначно

Бросание кубика два раза

Задача

Пусть мы бросаем кубик два раза. Какова вероятность, что сумма выпавших чисел равна 5?

- $A = \{(i, j) \mid i, j = 1, \ldots, 6, \;\; i + j = 5\}$
- Сколько исходов в A?
- В качестве i подойдет любое число от 1 до 4; j определяется однозначно
- Получаем $|A| = 4$

Бросание кубика два раза

Задача

Пусть мы бросаем кубик два раза. Какова вероятность, что сумма выпавших чисел равна 5?

- $A = \{(i, j) \mid i, j = 1, \ldots, 6, \;\; i + j = 5\}$
- Сколько исходов в A?
- В качестве i подойдет любое число от 1 до 4; j определяется однозначно
- Получаем $|A| = 4$
- $\Pr[A] = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

Подбрасывание монетки шесть раз

Задача

Пусть мы подбрасываем монету шесть раз подряд.
Какова вероятность, что орел выпадет ровно три раза?

Подбрасывание монетки шесть раз

Задача

Пусть мы подбрасываем монету шесть раз подряд.
Какова вероятность, что орел выпадет ровно три раза?

- Множество исходов $\Omega = \{0, 1\}^6$

Подбрасывание монетки шесть раз

Задача

Пусть мы подбрасываем монету шесть раз подряд.
Какова вероятность, что орел выпадет ровно три раза?

- Множество исходов $\Omega = \{0, 1\}^6$
- Исходы равновероятны

Подбрасывание монетки шесть раз

Задача

Пусть мы подбрасываем монету шесть раз подряд.
Какова вероятность, что орел выпадет ровно три раза?

- Множество исходов $\Omega = \{0, 1\}^6$
- Исходы равновероятны
- $|\Omega| = 2^6 = 64$

Подбрасывание монетки шесть раз

Задача

Пусть мы подбрасываем монету шесть раз подряд.
Какова вероятность, что орел выпадет ровно три раза?

- $A = \{x \in \{0, 1\}^6 \mid \sum_i x_i = 3\}$, где $x = (x_1, \dots, x_6)$

Подбрасывание монетки шесть раз

Задача

Пусть мы подбрасываем монету шесть раз подряд. Какова вероятность, что орел выпадет ровно три раза?

- $A = \{x \in \{0,1\}^6 \mid \sum_i x_i = 3\}$, где $x = (x_1, \dots, x_6)$
- Сколько исходов в A? Перебирать уже сложно

Подбрасывание монетки шесть раз

Задача

Пусть мы подбрасываем монету шесть раз подряд.
Какова вероятность, что орел выпадет ровно три раза?

- $A = \{x \in \{0,1\}^6 \mid \sum_i x_i = 3\}$, где $x = (x_1, \ldots, x_6)$
- Сколько исходов в A? Перебирать уже сложно
- Мы хотим выбрать из шести позиций три, в которые поместим 1

Подбрасывание монетки шесть раз

Задача

Пусть мы подбрасываем монету шесть раз подряд. Какова вероятность, что орел выпадет ровно три раза?

- $A = \{x \in \{0,1\}^6 \mid \sum_i x_i = 3\}$, где $x = (x_1, \dots, x_6)$
- Сколько исходов в A? Перебирать уже сложно
- Мы хотим выбрать из шести позиций три, в которые поместим 1
- Это сочетания!

Подбрасывание монетки шесть раз

Задача

Пусть мы подбрасываем монету шесть раз подряд.
Какова вероятность, что орел выпадет ровно три раза?

- $A = \{x \in \{0,1\}^6 \mid \sum_i x_i = 3\}$, где $x = (x_1, \ldots, x_6)$
- Сколько исходов в A? Перебирать уже сложно
- Мы хотим выбрать из шести позиций три, в которые поместим 1
- Это сочетания!
- $|A| = \binom{6}{3} = 20$ и $\Pr[A] = \frac{20}{64} = \frac{5}{16}$

Подбрасывание монетки n раз

Задача

Пусть мы подбрасываем монету n раз подряд. Какова вероятность, что в i-ом подбрасывании выпадет орел?

Подбрасывание монетки n раз

Задача

Пусть мы подбрасываем монету n раз подряд. Какова вероятность, что в i-ом подбрасывании выпадет орел?

- Интуитивно кажется, что важно только i-е подбрасывание и вероятность $1/2$

Подбрасывание монетки n раз

Задача

Пусть мы подбрасываем монету n раз подряд. Какова вероятность, что в i-ом подбрасывании выпадет орел?

- Интуитивно кажется, что важно только i-е подбрасывание и вероятность $1/2$
- Но нужно быть аккуратными и разобраться формально

Подбрасывание монетки n раз

Задача

Пусть мы подбрасываем монету n раз подряд. Какова вероятность, что в i-ом подбрасывании выпадет орел?

- Интуитивно кажется, что важно только i-е подбрасывание и вероятность $1/2$
- Но нужно быть аккуратными и разобраться формально
- Множество исходов $\Omega = \{0, 1\}^n$, все равновероятны

Подбрасывание монетки n раз

Задача

Пусть мы подбрасываем монету n раз подряд. Какова вероятность, что в i-ом подбрасывании выпадет орел?

- Интуитивно кажется, что важно только i-е подбрасывание и вероятность $1/2$
- Но нужно быть аккуратными и разобраться формально
- Множество исходов $\Omega = \{0, 1\}^n$, все равновероятны
- $|\Omega| = 2^n$

Подбрасывание монетки n раз

Задача

Пусть мы подбрасываем монету n раз подряд. Какова вероятность, что в i-ом подбрасывании выпадет орел?

- $A = \{x \in \{0,1\}^n \mid x_i = 1\}$, где $x = (x_1, \dots, x_n)$}

Подбрасывание монетки n раз

Задача

Пусть мы подбрасываем монету n раз подряд. Какова вероятность, что в i-ом подбрасывании выпадет орел?

- $A = \{x \in \{0, 1\}^n \mid x_i = 1\}$, где $x = (x_1, \dots, x_n)\}$
- $|A| = 2^{n-1}$

Подбрасывание монетки n раз

Задача

Пусть мы подбрасываем монету n раз подряд. Какова вероятность, что в i-ом подбрасывании выпадет орел?

- $A = \{x \in \{0,1\}^n \mid x_i = 1\}$, где $x = (x_1, \ldots, x_n)$
- $|A| = 2^{n-1}$
- Получаем $\Pr[A] = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2}$

Подбрасывание монетки n раз

Задача

Пусть мы подбрасываем монету n раз подряд. Какова вероятность, что в i-ом подбрасывании выпадет орел?

- $A = \{x \in \{0,1\}^n \mid x_i = 1\}$, где $x = (x_1, \ldots, x_n)\}$
- $|A| = 2^{n-1}$
- Получаем $\Pr[A] = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2}$
- Интуиция была правильной, мы это проверили

Вероятности в картах

Задача

На стол случайно и равновероятно выкладывается последовательность из 4 карт из стандартной колоды из 36 карт. Какова вероятность, что две из них красные, а две черные?

Вероятности в картах

Задача

На стол случайно и равновероятно выкладывается последовательность из 4 карт из стандартной колоды из 36 карт. Какова вероятность, что две из них красные, а две черные?

- Ω — множество всех последовательностей из 4 карт

Вероятности в картах

Задача

На стол случайно и равновероятно выкладывается последовательность из 4 карт из стандартной колоды из 36 карт. Какова вероятность, что две из них красные, а две черные?

- Ω — множество всех последовательностей из 4 карт
- $|\Omega| = 36 \times 35 \times 34 \times 33$

Вероятности в картах

Задача

На стол случайно и равновероятно выкладывается последовательность из 4 карт из стандартной колоды из 36 карт. Какова вероятность, что две из них красные, а две черные?

- Ω — множество всех последовательностей из 4 карт
- $|\Omega| = 36 \times 35 \times 34 \times 33$
- A — множество последовательностей из двух красных и двух черных карт

Вероятности в картах

Задача

На стол случайно и равновероятно выкладывается последовательность из 4 карт из стандартной колоды из 36 карт. Какова вероятность, что две из них красные, а две черные?

- Способов выбрать две позиции для красных карт: $\binom{4}{2}$

Вероятности в картах

Задача

На стол случайно и равновероятно выкладывается последовательность из 4 карт из стандартной колоды из 36 карт. Какова вероятность, что две из них красные, а две черные?

- Способов выбрать две позиции для красных карт: $\binom{4}{2}$
- Способов выбрать последовательность из двух красных карт: 18×17

Вероятности в картах

Задача

На стол случайно и равновероятно выкладывается последовательность из 4 карт из стандартной колоды из 36 карт. Какова вероятность, что две из них красные, а две черные?

- Способов выбрать две позиции для красных карт: $\binom{4}{2}$
- Способов выбрать последовательность из двух красных карт: 18×17
- Способов выбрать последовательность из двух черных карт: 18×17

Вероятности в картах

Задача

На стол случайно и равновероятно выкладывается последовательность из 4 карт из стандартной колоды из 36 карт. Какова вероятность, что две из них красные, а две черные?

- Способов выбрать две позиции для красных карт: $\binom{4}{2}$
- Способов выбрать последовательность из двух красных карт: 18×17
- Способов выбрать последовательность из двух черных карт: 18×17
- $\Pr[A] = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{18 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 17 \cdot \binom{4}{2}}{36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33} = \frac{153}{385} \approx 0.397\ldots$

Вероятности

Что такое вероятность?

Исходы, события, вероятность

Комбинаторика и подсчет вероятностей

Неравновероятная модель

Многошаговое задание распределений

Сложность

- Мы везде предполагали, что исходы равновероятны

Сложность

- Мы везде предполагали, что исходы равновероятны
- Но равновероятной модели не всегда достаточно

Сложность

- Мы везде предполагали, что исходы равновероятны
- Но равновероятной модели не всегда достаточно
- Что если мы подбрасываем несбалансированную или погнутую монету?

Сложность

- Мы везде предполагали, что исходы равновероятны
- Но равновероятной модели не всегда достаточно
- Что если мы подбрасываем несбалансированную или погнутую монету?
- Как обсуждать вероятности, когда исходы, это выигрыш или не выигрыш в лотерею?

Несбалансированная монета

- Пусть наша монета не идеальна, и орел и решка неравноправны

Несбалансированная монета

- Пусть наша монета не идеальна, и орел и решка неравноправны
- Как моделировать такую ситуацию?

Несбалансированная монета

- Пусть наша монета не идеальна, и орел и решка неравноправны
- Как моделировать такую ситуацию?
- Исходы: $\Omega = \{0, 1\}$

Несбалансированная монета

- Пусть наша монета не идеальна, и орел и решка неравноправны
- Как моделировать такую ситуацию?
- Исходы: $\Omega = \{0, 1\}$
- $\mathsf{Pr}[1] = p$, $\mathsf{Pr}[0] = 1 - p$

Несбалансированная монета

- Пусть наша монета не идеальна, и орел и решка неравноправны
- Как моделировать такую ситуацию?
- Исходы: $\Omega = \{0, 1\}$
- $\Pr[1] = p$, $\Pr[0] = 1 - p$
- Здесь p может быть любым числом от 0 до 1

Несбалансированная монета

- Пусть наша монета не идеальна, и орел и решка неравноправны
- Как моделировать такую ситуацию?
- Исходы: $\Omega = \{0, 1\}$
- $\mathrm{Pr}[1] = p$, $\mathrm{Pr}[0] = 1 - p$
- Здесь p может быть любым числом от 0 до 1
- Случай $p = 1/2$ отвечает равновероятному случаю

Несбалансированная монета

- Пусть наша монета не идеальна, и орел и решка неравноправны
- Как моделировать такую ситуацию?
- Исходы: $\Omega = \{0, 1\}$
- $\Pr[1] = p$, $\Pr[0] = 1 - p$
- Здесь p может быть любым числом от 0 до 1
- Случай $p = 1/2$ отвечает равновероятному случаю
- Если $p > 1/2$, выпадение орла более вероятно

Неравновероятная модель

- Исходы $\Omega = \{u_1, \dots, u_n\}$

Неравновероятная модель

- Исходы $\Omega = \{u_1, \ldots, u_n\}$
- Каждому исходу u_i приписана его вероятность p_i

Неравновероятная модель

- Исходы $\Omega = \{u_1, \ldots, u_n\}$
- Каждому исходу u_i приписана его вероятность p_i
- При этом $0 \leq p_i \leq 1$ и $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

Неравновероятная модель

- Исходы $\Omega = \{u_1, \ldots, u_n\}$
- Каждому исходу u_i приписана его вероятность p_i
- При этом $0 \leq p_i \leq 1$ и $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$
- Множество Ω с заданными вероятностями исходов называется вероятностным пространством

События

- Событием называется подмножество $A \subseteq \Omega$

События

- Событием называется подмножество $A \subseteq \Omega$
- Вероятность A равна

$$\Pr[A] = \sum_{u_i \in A} p_i$$

События

- **Событием** называется подмножество $A \subseteq \Omega$
- Вероятность A равна

$$\Pr[A] = \sum_{u_i \in A} p_i$$

- Другими словами, $\Pr[A]$ равна сумме вероятностей исходов, лежащих в событии

Пример

Лотерея

Пусть вероятность выиграть в лотерее 1000 рублей равна 0.01, а вероятность выиграть 100 рублей равна 0.1. Какова вероятность выиграть хоть что-то?

Пример

Лотерея

Пусть вероятность выиграть в лотерее 1000 рублей равна 0.01, а вероятность выиграть 100 рублей равна 0.1. Какова вероятность выиграть хоть что-то?

- Обозначим через a, b, c исходы «выиграть 1000 р.», «выиграть 100 р.», «не выиграть ничего», соответственно

Пример

Лотерея

Пусть вероятность выиграть в лотерее 1000 рублей равна 0.01, а вероятность выиграть 100 рублей равна 0.1. Какова вероятность выиграть хоть что-то?

- Обозначим через a, b, c исходы «выиграть 1000 р.», «выиграть 100 р.», «не выиграть ничего», соответственно
- $\Omega = \{a, b, c\}$, $\Pr[a] = 0.01$, $\Pr[b] = 0.1$

Пример

Лотерея

Пусть вероятность выиграть в лотерее 1000 рублей равна 0.01, а вероятность выиграть 100 рублей равна 0.1. Какова вероятность выиграть хоть что-то?

- Обозначим через a, b, c исходы «выиграть 1000 р.», «выиграть 100 р.», «не выиграть ничего», соответственно
- $\Omega = \{a, b, c\}$, $\Pr[a] = 0.01$, $\Pr[b] = 0.1$
- $\Pr[c] = 1 - \Pr[a] - \Pr[b] = 0.89$

Пример

Лотерея

Пусть вероятность выиграть в лотерее 1000 рублей равна 0.01, а вероятность выиграть 100 рублей равна 0.1. Какова вероятность выиграть хоть что-то?

- Обозначим через a, b, c исходы «выиграть 1000 р.», «выиграть 100 р.», «не выиграть ничего», соответственно
- $\Omega = \{a, b, c\}$, $\Pr[a] = 0.01$, $\Pr[b] = 0.1$
- $\Pr[c] = 1 - \Pr[a] - \Pr[b] = 0.89$
- $A = \{a, b\}$

Пример

Лотерея

Пусть вероятность выиграть в лотерее 1000 рублей равна 0.01, а вероятность выиграть 100 рублей равна 0.1. Какова вероятность выиграть хоть что-то?

- Обозначим через a, b, c исходы «выиграть 1000 р.», «выиграть 100 р.», «не выиграть ничего», соответственно
- $\Omega = \{a, b, c\}$, $\Pr[a] = 0.01$, $\Pr[b] = 0.1$
- $\Pr[c] = 1 - \Pr[a] - \Pr[b] = 0.89$
- $A = \{a, b\}$
- $\Pr[A] = 0.01 + 0.1 = 0.11$

Вероятности

Что такое вероятность?

Исходы, события, вероятность

Комбинаторика и подсчет вероятностей

Неравновероятная модель

Многошаговое задание распределений

Сложные распределения

Задача

Случайная перестановка чисел 1, 2 и 3 выбирается следующим образом.

- Сначала выбирается случайно и равновероятно число на первую позицию
- Затем из двух оставшихся чисел случайно и равновероятно выбирается одно и ставится на вторую позицию
- Оставшееся число ставится на третью позицию

Какова вероятность, что на второй позиции стоит число 2?

Сложные распределения

- Прежде чем решать задачу, нам нужно разобраться, какое у нас задано вероятностное распределение

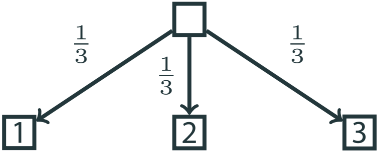
Сложные распределения

- Прежде чем решать задачу, нам нужно разобраться, какое у нас задано вероятностное распределение
- Распределение описано в виде процесса, с таким мы раньше не сталкивались

Распределение в виде дерева

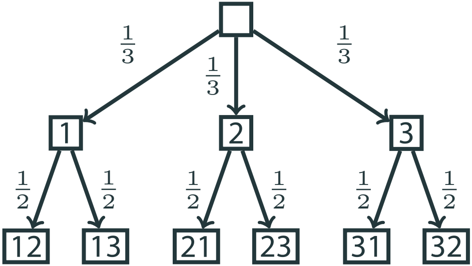
- Начинаем сверху

Распределение в виде дерева



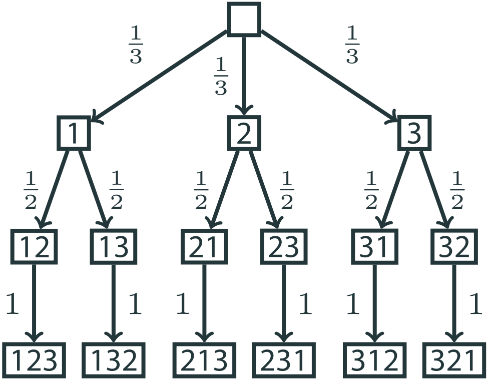
- Начинаем сверху
- Дальше три стрелки для шага 1

Распределение в виде дерева



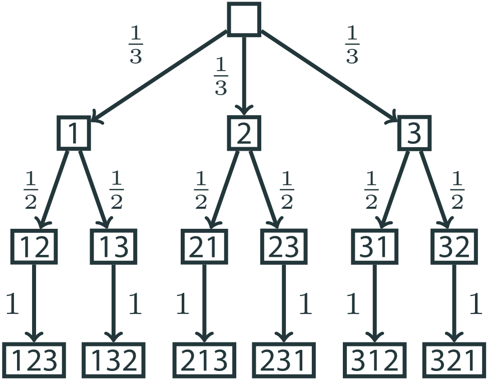
- Начинаем сверху
- Дальше три стрелки для шага 1
- Дальше по две стрелки для шага 2

Распределение в виде дерева



- Начинаем сверху
- Дальше три стрелки для шага 1
- Дальше по две стрелки для шага 2
- Дальше по одной стрелке для шага 3

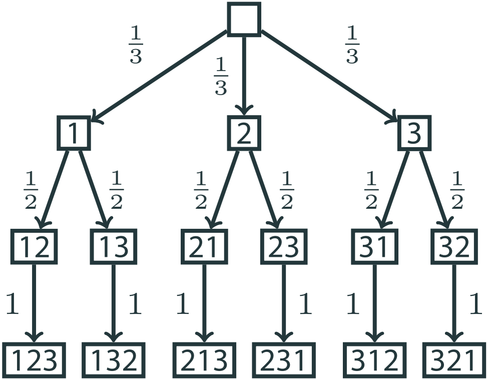
Распределение в виде дерева



- Начинаем сверху
- Дальше три стрелки для шага 1
- Дальше по две стрелки для шага 2
- Дальше по одной стрелке для шага 3

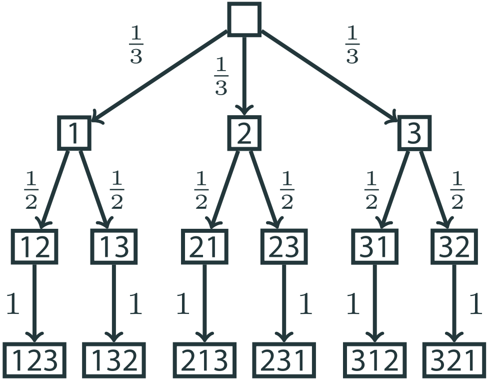
- Исходы — вершины внизу

Распределение в виде дерева



- Начинаем сверху
- Дальше три стрелки для шага 1
- Дальше по две стрелки для шага 2
- Дальше по одной стрелке для шага 3
- Исходы — вершины внизу
- Как посчитать вероятность каждого исхода?

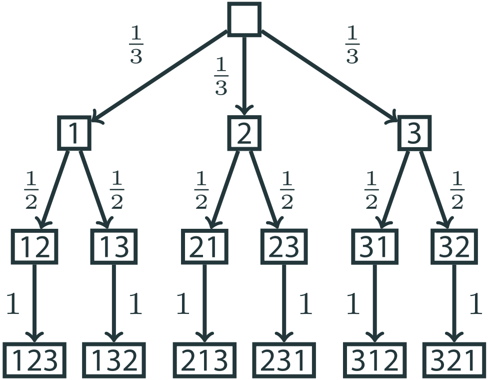
Распределение в виде дерева



- Начинаем сверху
- Дальше три стрелки для шага 1
- Дальше по две стрелки для шага 2
- Дальше по одной стрелке для шага 3

- Исходы — вершины внизу
- Как посчитать вероятность каждого исхода?
- Перемножить вероятности на стрелках

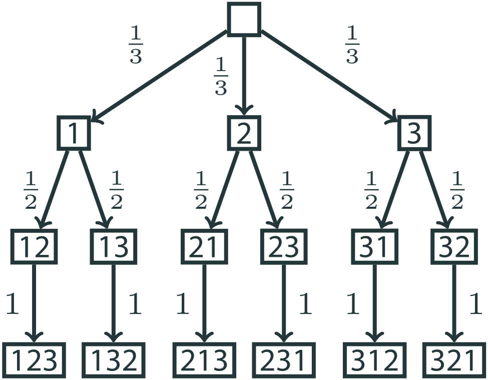
Распределение в виде дерева



- Начинаем сверху
- Дальше три стрелки для шага 1
- Дальше по две стрелки для шага 2
- Дальше по одной стрелке для шага 3

- Вероятность каждого исхода $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{6}$

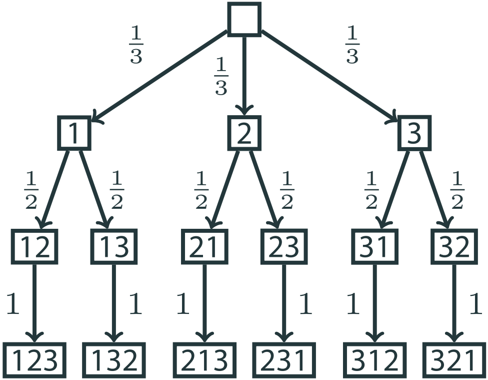
Распределение в виде дерева



- Начинаем сверху
- Дальше три стрелки для шага 1
- Дальше по две стрелки для шага 2
- Дальше по одной стрелке для шага 3

- Вероятность каждого исхода $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{6}$
- Такая диаграмма называется деревом событий

Распределение в виде дерева



- Начинаем сверху
- Дальше три стрелки для шага 1
- Дальше по две стрелки для шага 2
- Дальше по одной стрелке для шага 3

- Вероятность каждого исхода $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{6}$
- Такая диаграмма называется деревом событий
- Обсудим деревья подробнее позже в курсе

Сложные распределения

Задача

Случайная перестановка чисел 1, 2 и 3 выбирается следующим образом.

- Сначала выбирается случайно и равновероятно число на первую позицию
- Затем из двух оставшихся чисел случайно и равновероятно выбирается одно и ставится на вторую позицию
- Оставшееся число ставится на третью позицию

Какова вероятность, что на второй позиции стоит число 2?

Сложные распределения

- Вероятность каждого исхода равна $1/6$

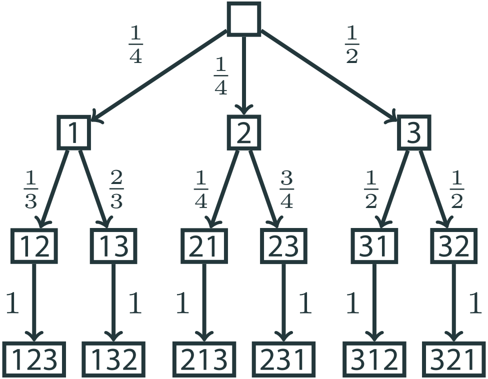
Сложные распределения

- Вероятность каждого исхода равна $1/6$
- Исходов в событии два: $123, 321$

Сложные распределения

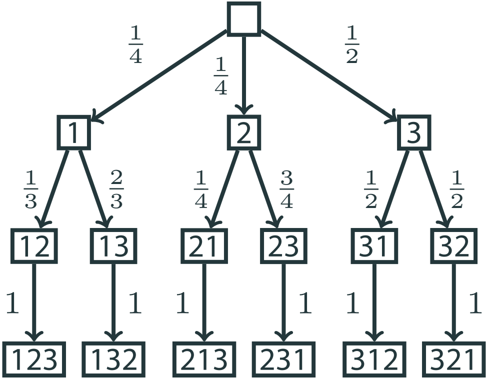
- Вероятность каждого исхода равна $1/6$
- Исходов в событии два: $123, 321$
- Вероятность события $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Распределение в виде дерева



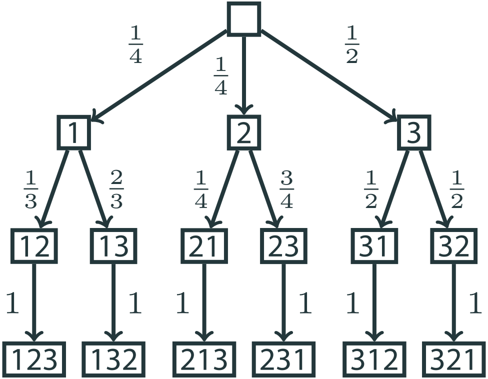
- Аналогично можно задавать и неравновероятные распределения

Распределение в виде дерева



- Аналогично можно задавать и неравновероятные распределения
- Вероятность получить 123 равна $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$

Распределение в виде дерева



- Аналогично можно задавать и неравновероятные распределения
- Вероятность получить 123 равна $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$
- Вероятность получить 231 равна $\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$

Случайные блуждания

- Как подобные распределения могут возникать на практике?

Случайные блуждания

- Как подобные распределения могут возникать на практике?
- Выбираем объект в данных

Случайные блуждания

- Как подобные распределения могут возникать на практике?
- Выбираем объект в данных
- Переходим к случайному «соседнему» объекту

Случайные блуждания

- Как подобные распределения могут возникать на практике?
- Выбираем объект в данных
- Переходим к случайному «соседнему» объекту
- Снова переходим к случайному «соседнему» объекту

Случайные блуждания

- Как подобные распределения могут возникать на практике?
- Выбираем объект в данных
- Переходим к случайному «соседнему» объекту
- Снова переходим к случайному «соседнему» объекту
- И так несколько раз

Случайные блуждания

- Как подобные распределения могут возникать на практике?
- Выбираем объект в данных
- Переходим к случайному «соседнему» объекту
- Снова переходим к случайному «соседнему» объекту
- И так несколько раз
- Получаем случайное распределение на объектах в наших данных

Случайные блуждания

- Как подобные распределения могут возникать на практике?
- Выбираем объект в данных
- Переходим к случайному «соседнему» объекту
- Снова переходим к случайному «соседнему» объекту
- И так несколько раз
- Получаем случайное распределение на объектах в наших данных
- Такой процесс называется случайным блужданием

Случайные блуждания

- Как подобные распределения могут возникать на практике?
- Выбираем объект в данных
- Переходим к случайному «соседнему» объекту
- Снова переходим к случайному «соседнему» объекту
- И так несколько раз
- Получаем случайное распределение на объектах в наших данных
- Такой процесс называется случайным блужданием
- Увидим примеры позже в курсе

Что мы узнали

- Мы разобрались как обсуждать вероятности

Что мы узнали

- Мы разобрались как обсуждать вероятности
- Комбинаторика полезна для подсчета вероятностей

Что мы узнали

- Мы разобрались как обсуждать вероятности
- Комбинаторика полезна для подсчета вероятностей
- Уже эти знания могут пригодиться на практике

Что мы узнали

- Мы разобрались как обсуждать вероятности
- Комбинаторика полезна для подсчета вероятностей
- Уже эти знания могут пригодиться на практике
- Дальше обсудим численные характеристики случайных объектов