

# Что такое графы?

---

Владимир Подольский

Факультет компьютерных наук, Высшая Школа Экономики

# Что такое графы?

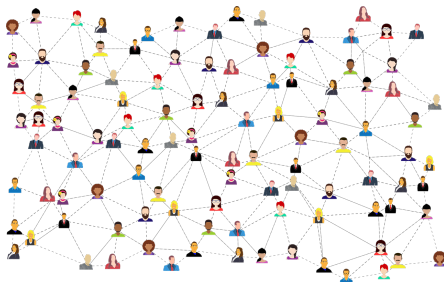
Понятие графа

Применение графов

Степени вершин и число ребер

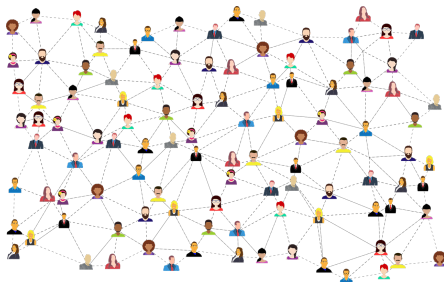
# Что такое граф?

- Частая ситуация: у нас есть объекты, между которыми задано какое-то отношение



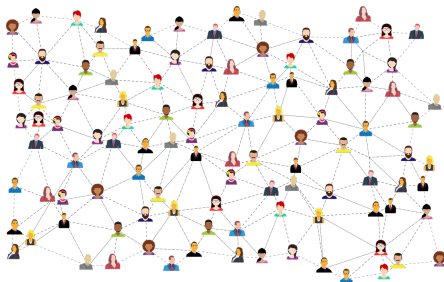
# Что такое граф?

- Частая ситуация: у нас есть объекты, между которыми задано какое-то отношение
- Такая ситуация описывается с помощью графов



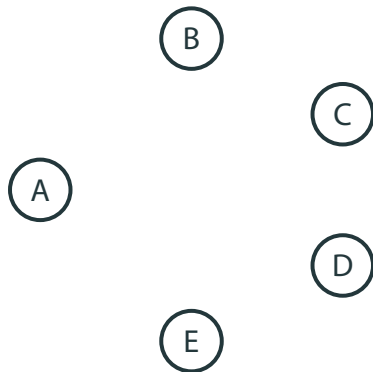
# Что такое граф?

- Частая ситуация: у нас есть объекты, между которыми задано какое-то отношение
- Такая ситуация описывается с помощью графов
- Встречается повсюду, так что графы оказываются очень полезными



# Социальные сети

У нас есть 5 человек:  
 $A, B, C, D, E$ .



# Социальные сети

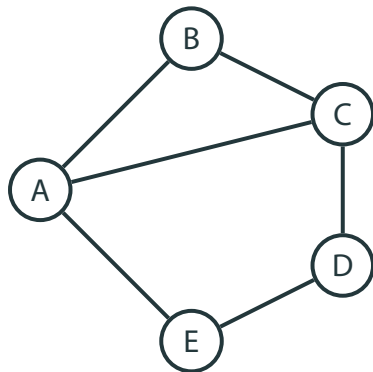
У нас есть 5 человек:

*A, B, C, D, E.*

Некоторые из них  
друзья:

*A и B, A и C, A и E,*

*B и C, C и D, D и E.*



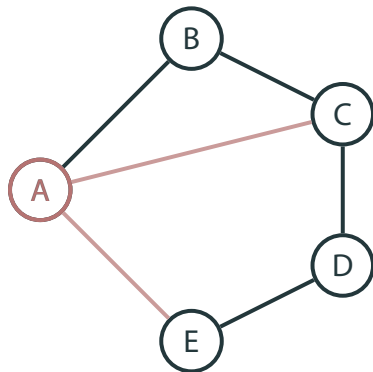
# Социальные сети

У нас есть 5 человек:  
*A, B, C, D, E.*

Некоторые из них  
друзья:

*A и B, A и C, A и E,  
B и C, C и D, D и E.*

Есть ли общие дру-  
зья у C и E?





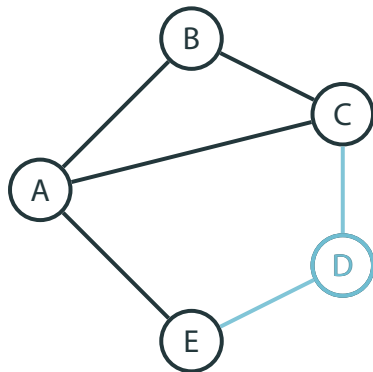
# Социальные сети

У нас есть 5 человек:  
*A, B, C, D, E.*

Некоторые из них  
друзья:

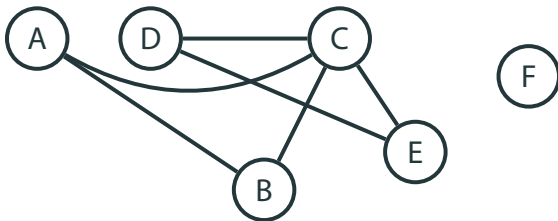
*A и B, A и C, A и E,  
B и C, C и D, D и E.*

Есть ли общие дру-  
зья у C и E?



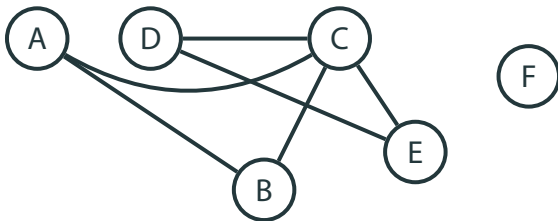
# Графы

- Объекты изображаем точками — **вершинами**



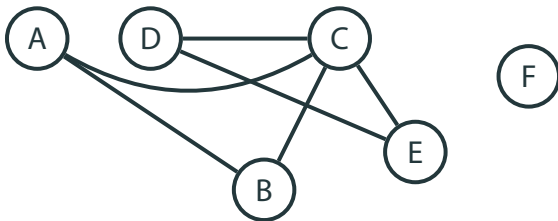
# Графы

- Объекты изображаем точками — **вершинами**
- Связанные отношением соединяем линиями — **ребрами**



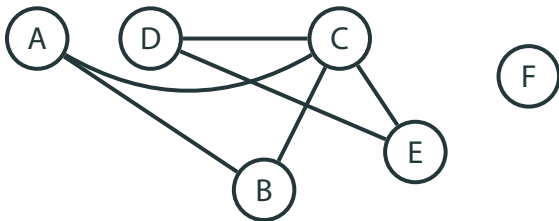
# Графы

- Объекты изображаем точками — **вершинами**
- Связанные отношением соединяем линиями — **ребрами**
- Не связанные не соединяем



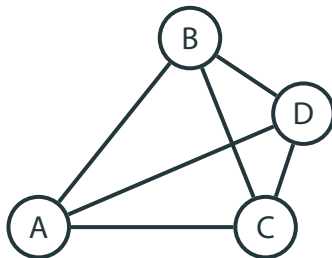
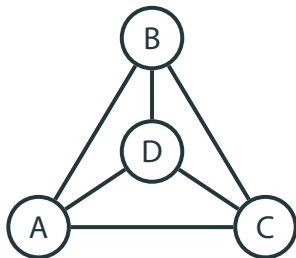
# Графы

- Объекты изображаем точками — **вершинами**
- Связанные отношением соединяем линиями — **ребрами**
- Не связанные не соединяем
- При изображении ребра могут пересекаться, это не страшно



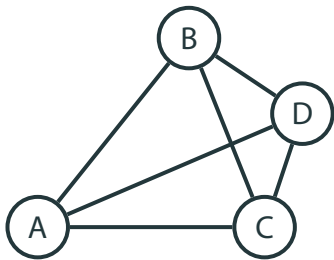
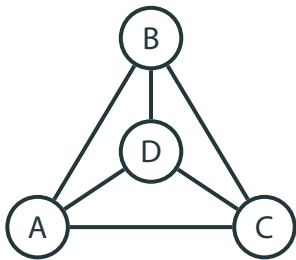
# Графы

- Граф — это множество вершин, некоторые из которых соединены ребрами



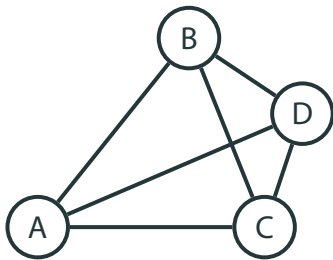
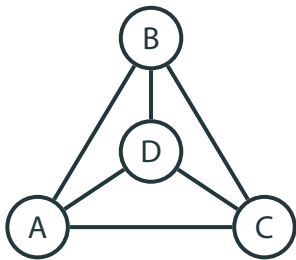
# Графы

- **Граф** — это множество вершин, некоторые из которых соединены ребрами
- Важно, какие вершины соединены, а какие нет



# Графы

- **Граф** — это множество вершин, некоторые из которых соединены ребрами
- Важно, какие вершины соединены, а какие нет
- Конкретное изображение может быть разным





# Обозначения

- Множество вершин графа обычно обозначают буквой  $V$

# Обозначения

- Множество вершин графа обычно обозначают буквой  $V$
- Отдельные вершины часто обозначают буквами  $v$  и  $u$

# Обозначения

- Множество вершин графа обычно обозначают буквой  $V$
- Отдельные вершины часто обозначают буквами  $v$  и  $u$
- Множество ребер графа обозначают буквой  $E$

# Обозначения

- Множество вершин графа обычно обозначают буквой  $V$
- Отдельные вершины часто обозначают буквами  $v$  и  $u$
- Множество ребер графа обозначают буквой  $E$
- Отдельные ребра часто обозначают буквой  $e$

# Где могут возникать графы

- Карты и маршруты

# Где могут возникать графы

- Карты и маршруты
- Социальные сети

# Где могут возникать графы

- Карты и маршруты
- Социальные сети
- Структуры данных

# Где могут возникать графы

- Карты и маршруты
- Социальные сети
- Структуры данных
- Расстояния между объектами в пространстве признаков



# Что разрешается?



- Допускаются ли петли?

# Что разрешается?



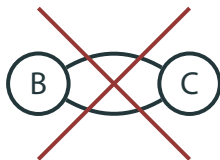
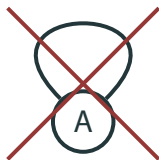
- Допускаются ли петли?
- Допускаются ли кратные ребра?

# Что разрешается?



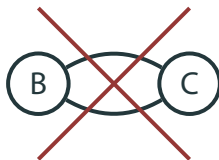
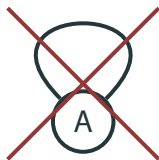
- Допускаются ли петли?
- Допускаются ли кратные ребра?
- Можно допускать, можно нет

# Что разрешается?



- Допускаются ли петли?
- Допускаются ли кратные ребра?
- Можно допускать, можно нет
- По умолчанию не допускаем

# Что разрешается?



- Допускаются ли петли?
- Допускаются ли кратные ребра?
- Можно допускать, можно нет
- По умолчанию не допускаем
- Но большинство рассуждений переносится и на эти случаи

# Тоже графы?

- Бывают ситуации, когда связи между объектами односторонние

# Тоже графы?

- Бывают ситуации, когда связи между объектами односторонние
- Ссылки между сайтами

# Тоже графы?

- Бывают ситуации, когда связи между объектами односторонние
- Ссылки между сайтами
- Пользователи, следящие за постами других



# Тоже графы?

- Бывают ситуации, когда связи между объектами односторонние
- Ссылки между сайтами
- Пользователи, следящие за постами других
- Односторонние дороги

# Тоже графы?

- Бывают ситуации, когда связи между объектами односторонние
- Ссылки между сайтами
- Пользователи, следящие за постами других
- Односторонние дороги
- Эта ситуация тоже описывается графами

# Тоже графы?

- Бывают ситуации, когда связи между объектами односторонние
- Ссылки между сайтами
- Пользователи, следящие за постами других
- Односторонние дороги
- Эта ситуация тоже описывается графами
- Но мы обсудим это позже

# Что такое графы?

Понятие графа

Применение графов

Степени вершин и число ребер

# Применение графов

- Графы являются очень универсальной моделью

# Применение графов

- Графы являются очень универсальной моделью
- Позволяют в общем виде изучать ситуации, возникающие в самых разных задачах

# Применение графов

- Графы являются очень универсальной моделью
- Позволяют в общем виде изучать ситуации, возникающие в самых разных задачах
- Мы подробно обсудим разные универсальные факты о графах

# Применение графов

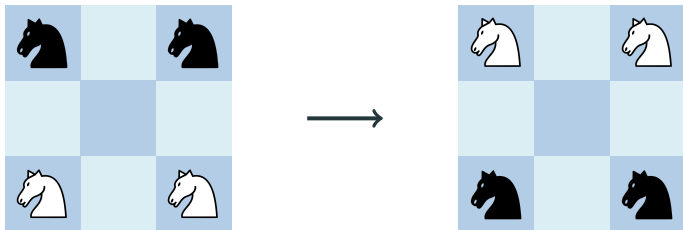
- Графы являются очень универсальной моделью
- Позволяют в общем виде изучать ситуации, возникающие в самых разных задачах
- Мы подробно обсудим разные универсальные факты о графах
- Но иногда бывает полезно даже просто изобразить задачу в виде графа



# Задача о конях

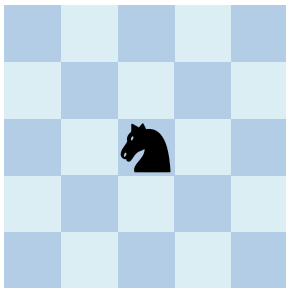
## Задача о конях

Можно ли переставить коней на поле 3x3 на картинке так, чтобы белые и черные кони поменялись местами?



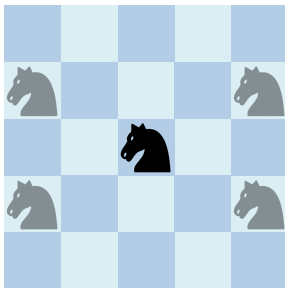
# Шахматный конь

Шахматный конь ходит буквой Г в любом направлении. Он может сместиться либо на 2 поля по горизонтали и на одно поле по вертикали, либо на 2 поля по вертикали и на одно поле по горизонтали



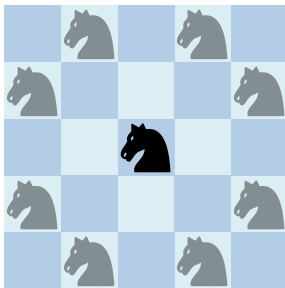
# Шахматный конь

Шахматный конь ходит буквой Г в любом направлении. Он может сместиться либо на 2 поля по горизонтали и на одно поле по вертикали, либо на 2 поля по вертикали и на одно поле по горизонтали

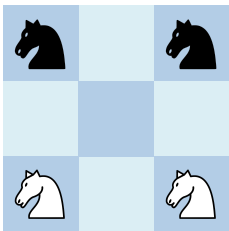


# Шахматный конь

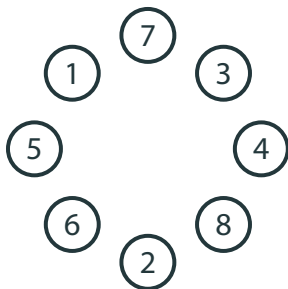
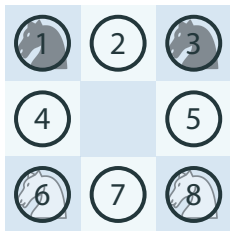
Шахматный конь ходит буквой Г в любом направлении. Он может сместиться либо на 2 поля по горизонтали и на одно поле по вертикали, либо на 2 поля по вертикали и на одно поле по горизонтали



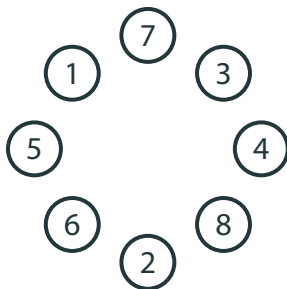
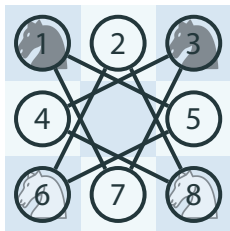
# Задача о конях



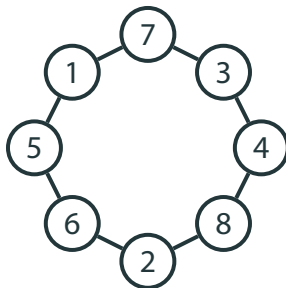
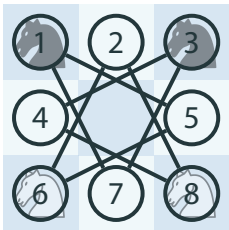
# Задача о конях



# Задача о конях

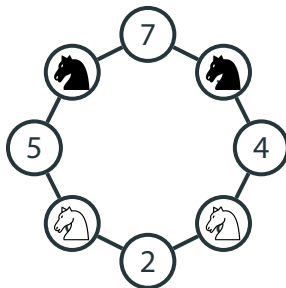
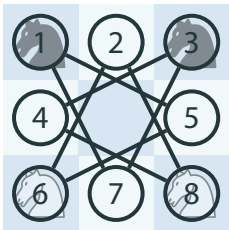


# Задача о конях

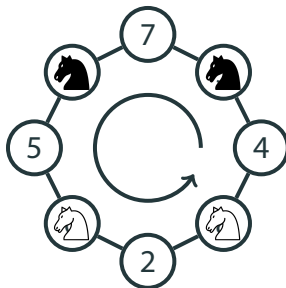
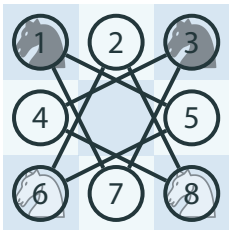




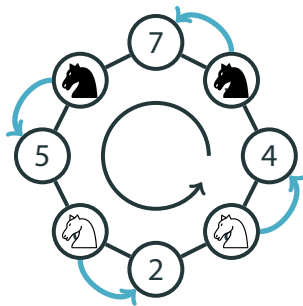
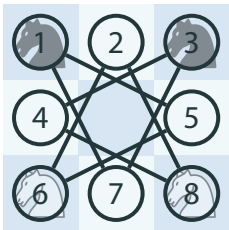
# Задача о конях



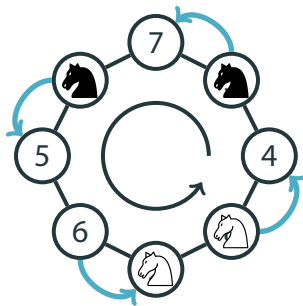
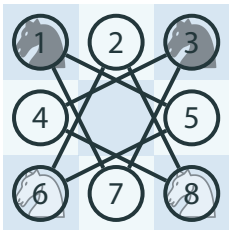
# Задача о конях



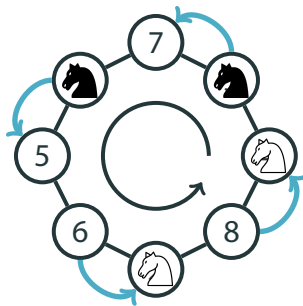
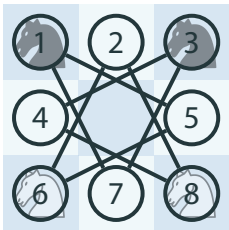
# Задача о конях



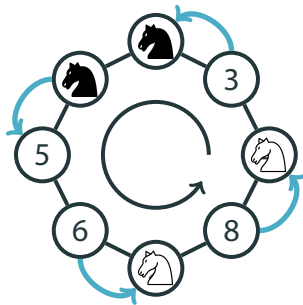
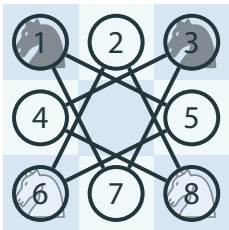
# Задача о конях



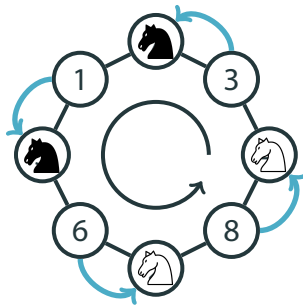
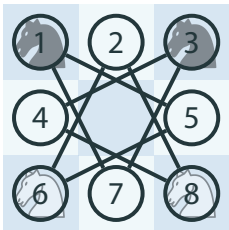
# Задача о конях



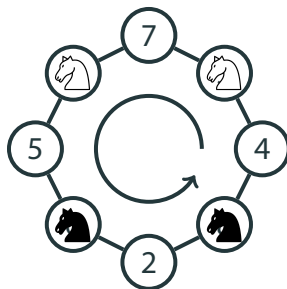
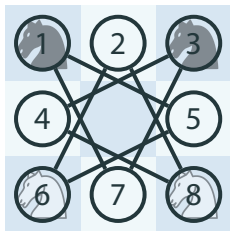
# Задача о конях



# Задача о конях



# Задача о конях

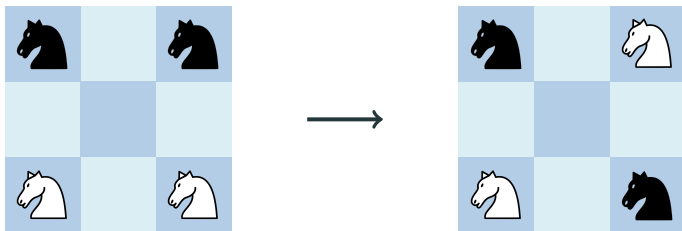




# Задача о конях

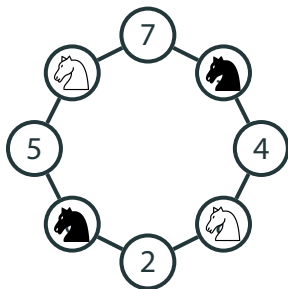
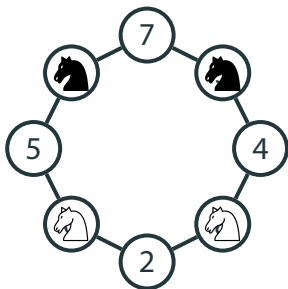
## Задача о конях

Можно ли переставить коней на поле 3x3 так, как показано на картинке?



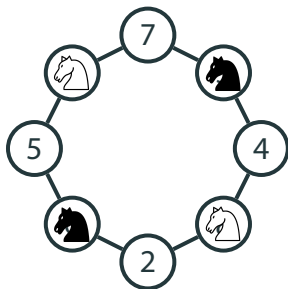
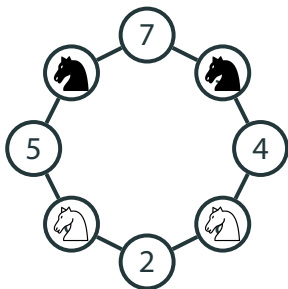
# Задача о конях

Посмотрим на граф



# Задача о конях

Посмотрим на граф



Это невозможно, кони не могут поменяться местами

# Что такое графы?

Понятие графа

Применение графов

Степени вершин и число ребер

# Параметры графов

- Как только мы свели задачу к графам, мы можем забыть детали постановки и изучать только графы

# Параметры графов

- Как только мы свели задачу к графам, мы можем забыть детали постановки и изучать только графы
- У графов есть важные параметры, анализ которых может помочь в решении наших задач

# Параметры графов

- Как только мы свели задачу к графам, мы можем забыть детали постановки и изучать только графы
- У графов есть важные параметры, анализ которых может помочь в решении наших задач
- Мы начнем с самых базовых

# Параметры графов

- Как только мы свели задачу к графам, мы можем забыть детали постановки и изучать только графы
- У графов есть важные параметры, анализ которых может помочь в решении наших задач
- Мы начнем с самых базовых
- Есть совсем простые параметры: число вершин  $|V|$  и число ребер  $|E|$

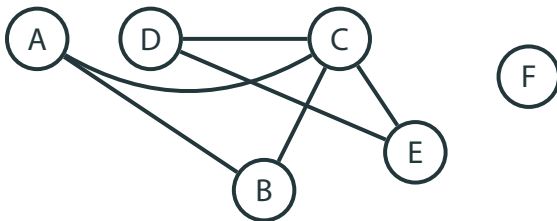


# Параметры графов

- Как только мы свели задачу к графам, мы можем забыть детали постановки и изучать только графы
- У графов есть важные параметры, анализ которых может помочь в решении наших задач
- Мы начнем с самых базовых
- Есть совсем простые параметры: число вершин  $|V|$  и число ребер  $|E|$
- Они характеризуют размер графа, а соотношение между ними — его плотность

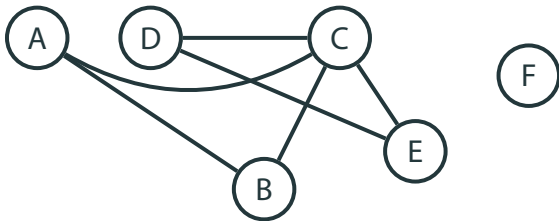
# Степень вершины

- Пусть  $v$  вершина графа



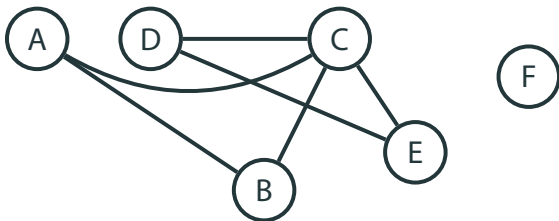
# Степень вершины

- Пусть  $v$  вершина графа
- **Степенью**  $v$  называется число ребер, входящих в  $v$



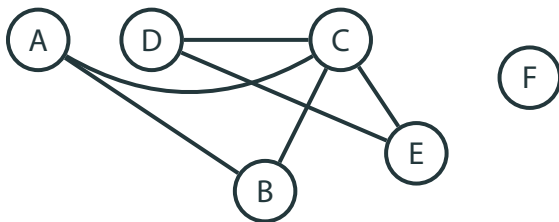
# Степень вершины

- Пусть  $v$  вершина графа
- **Степенью**  $v$  называется число ребер, входящих в  $v$
- Обозначение:  $d(v)$



# Степень вершины

- Пусть  $v$  вершина графа
- **Степенью**  $v$  называется число ребер, входящих в  $v$
- Обозначение:  $d(v)$
- На картинке  $d(A) = 2, d(C) = 4, d(F) = 0$



# Степень вершины

- Степень вершины важный параметр

# Степень вершины

- Степень вершины важный параметр
- В социальных сетях он характеризует активность пользователя

# Степень вершины

- Степень вершины важный параметр
- В социальных сетях он характеризует активность пользователя
- В транспортных сетях — загруженность узла



# Степень вершины

- Степень вершины важный параметр
- В социальных сетях он характеризует активность пользователя
- В транспортных сетях — загруженность узла
- Есть ли связь степеней вершин с другими параметрами графов?

# Степени вершин и число ребер

## Лемма

Сумма степеней всех вершин в графе равна удвоенному числу ребер

Или в виде формулы

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$$

# Степени вершин и число ребер

## Лемма

Сумма степеней всех вершин в графе равна удвоенному числу ребер

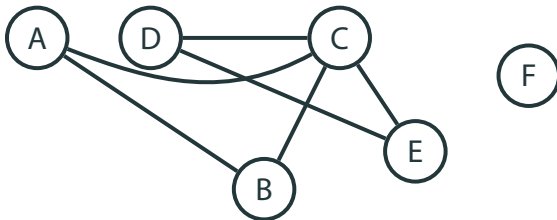
Или в виде формулы

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$$

Давайте докажем эту лемму

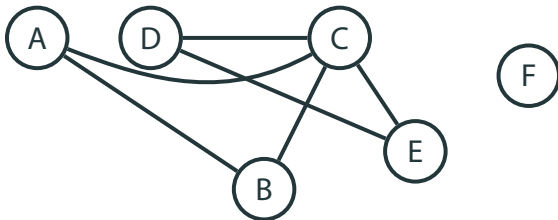
# Степени вершин и число ребер

- Давайте посчитаем двумя способами число **концов ребер**



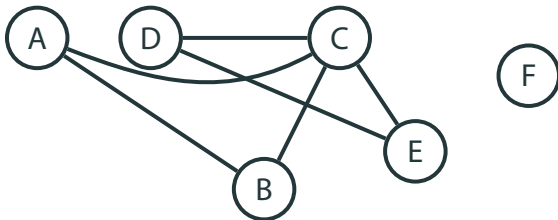
# Степени вершин и число ребер

- Давайте посчитаем двумя способами число **концов ребер**
- С одной стороны, у каждого ребра два конца, то есть концов ребер  $2|E|$



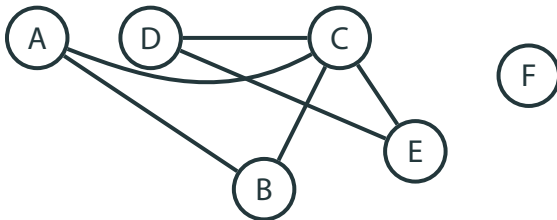
# Степени вершин и число ребер

- С другой стороны, каждый конец ребра входит в какую-то вершину



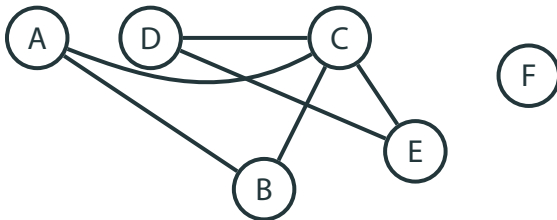
# Степени вершин и число ребер

- С другой стороны, каждый конец ребра входит в какую-то вершину
- В вершину  $v$  входит  $d(v)$  концов, так что всего концов  $\sum_{v \in V} d(v)$



# Степени вершин и число ребер

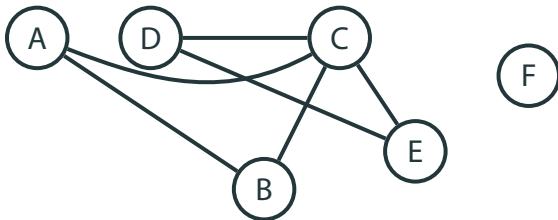
- Мы посчитали одну и ту же величину два раза





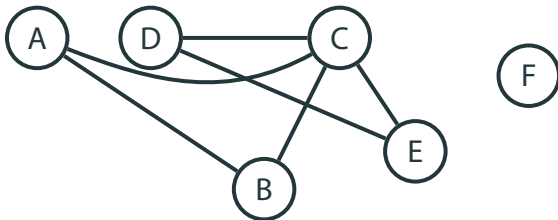
# Степени вершин и число ребер

- Мы посчитали одну и ту же величину два раза
- Результаты должны быть равны



# Степени вершин и число ребер

- Мы посчитали одну и ту же величину два раза
- Результаты должны быть равны
- Получаем  $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$



# Степени вершин и число ребер

## Задача

Бывает ли граф на 5 вершинах, степени вершин которого равны 1, 2, 2, 3, 3?

# Степени вершин и число ребер

## Задача

Бывает ли граф на 5 вершинах, степени вершин которого равны 1, 2, 2, 3, 3?

- Если такой граф есть, то сумма степеней его вершин равна  $1 + 2 + 2 + 3 + 3 = 11$

# Степени вершин и число ребер

## Задача

Бывает ли граф на 5 вершинах, степени вершин которого равны 1, 2, 2, 3, 3?

- Если такой граф есть, то сумма степеней его вершин равна  $1 + 2 + 2 + 3 + 3 = 11$
- Это равно удвоенному числу ребер

# Степени вершин и число ребер

## Задача

Бывает ли граф на 5 вершинах, степени вершин которого равны 1, 2, 2, 3, 3?

- Если такой граф есть, то сумма степеней его вершин равна  $1 + 2 + 2 + 3 + 3 = 11$
- Это равно удвоенному числу ребер
- Но удвоенное число ребер четно!

# Степени вершин и число ребер

## Задача

Бывает ли граф на 5 вершинах, степени вершин которого равны 1, 2, 2, 3, 3?

- Если такой граф есть, то сумма степеней его вершин равна  $1 + 2 + 2 + 3 + 3 = 11$
- Это равно удвоенному числу ребер
- Но удвоенное число ребер чётно!
- Противоречие

# Степени вершин и число ребер

В целом, из равенства  $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$  следует, что левая часть четна



# Степени вершин и число ребер

В целом, из равенства  $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$  следует, что левая часть четна

## Следствие

В любом графе число вершин нечетной степени четно

# Что мы узнали

- Графы полезны в тех ситуациях, когда у нас есть объекты, связанные отношениями

# Что мы узнали

- Графы полезны в тех ситуациях, когда у нас есть объекты, связанные отношениями
- Даже нарисовать граф бывает полезно

# Что мы узнали

- Графы полезны в тех ситуациях, когда у нас есть объекты, связанные отношениями
- Даже нарисовать граф бывает полезно
- Уже очень простые наблюдения могут помочь

# Что мы узнали

- Графы полезны в тех ситуациях, когда у нас есть объекты, связанные отношениями
- Даже нарисовать граф бывает полезно
- Уже очень простые наблюдения могут помочь
- В следующем уроке обсудим пути в графах