Бином Ньютона

Владимир Подольский

Факультет компьютерных наук, Высшая Школа Экономики

Бином Ньютона

Число сочетаний: рекурсия

Треугольник Паскаля

Бином Ньютона

Разбор некоторых задач

Число сочетаний: рекурсия

Задача

Пусть у нас есть обучающая выборка размера n для нашей модели. Мы хотим отделить из нее тестовую выборку размера k. Сколько есть способов это сделать?

Число сочетаний: рекурсия

Задача

Пусть у нас есть обучающая выборка размера n для нашей модели. Мы хотим отделить из нее тестовую выборку размера k. Сколько есть способов это сделать?

- Мы хотим выбрать подмножество размера k в n элементном множестве

Число сочетаний: рекурсия

Задача

Пусть у нас есть обучающая выборка размера n для нашей модели. Мы хотим отделить из нее тестовую выборку размера k. Сколько есть способов это сделать?

- Мы хотим выбрать подмножество размера k в n элементном множестве
- Мы уже знаем ответ:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Число сочетаний: рекурсия

Задача

Пусть у нас есть обучающая выборка размера n для нашей модели. Мы хотим отделить из нее тестовую выборку размера k. Сколько есть способов это сделать?

- Мы хотим выбрать подмножество размера k в n элементном множестве
- Мы уже знаем ответ:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- Посмотрим с другой стороны

Число сочетаний: рекурсия

- Пусть $n = 5$ и $k = 3$

Число сочетаний: рекурсия

- Пусть $n = 5$ и $k = 3$
- Тогда ответ $\binom{5}{3} = 10$

Число сочетаний: рекурсия

- Пусть $n = 5$ и $k = 3$
- Тогда ответ $\binom{5}{3} = 10$
- Пусть элементы выборки A, B, C, D, E

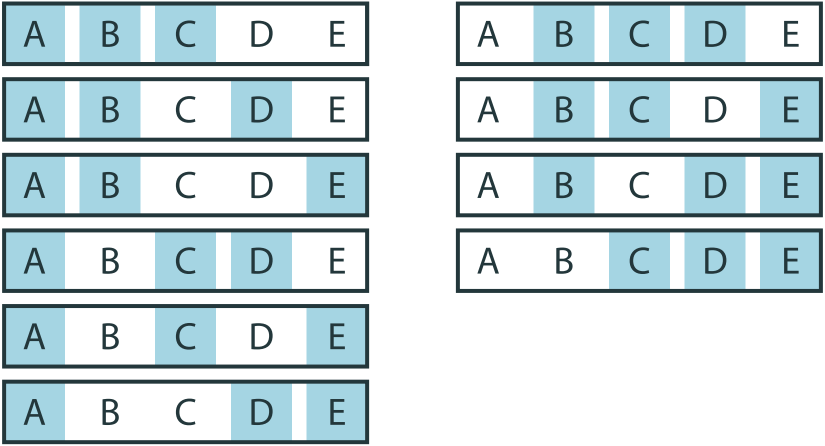
Число сочетаний: рекурсия

- Пусть $n = 5$ и $k = 3$
- Тогда ответ $\binom{5}{3} = 10$
- Пусть элементы выборки A, B, C, D, E
- Выпишем все возможные тестовые выборки

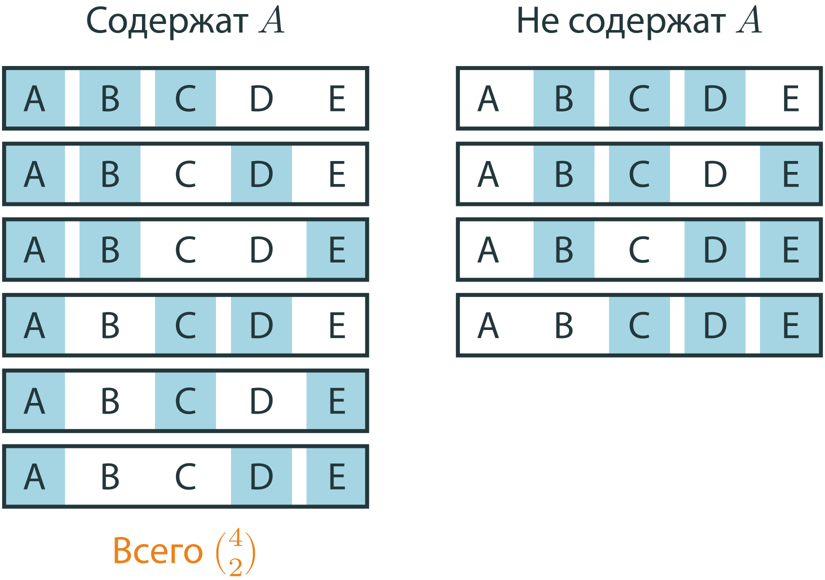
Число сочетаний: рекурсия

Содержат A

Не содержат A

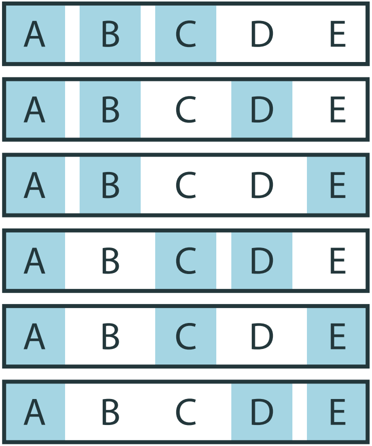


Число сочетаний: рекурсия



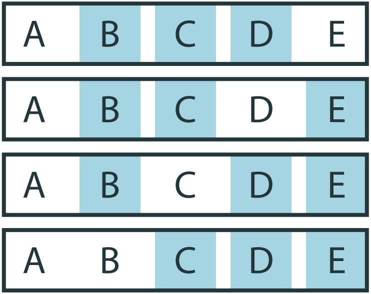
Число сочетаний: рекурсия

Содержат A



Всего $\binom{4}{2}$

Не содержат A



Всего $\binom{4}{3}$

Число сочетаний: рекурсия

- Мы знаем, что сочетаний $\binom{5}{3}$

Число сочетаний: рекурсия

- Мы знаем, что сочетаний $\binom{5}{3}$
- Тех, что содержат A: $\binom{4}{2}$

Число сочетаний: рекурсия

- Мы знаем, что сочетаний $\binom{5}{3}$
- Тех, что содержат A: $\binom{4}{2}$
- Тех, что не содержат A: $\binom{4}{3}$

Число сочетаний: рекурсия

- Мы знаем, что сочетаний $\binom{5}{3}$
- Тех, что содержат A: $\binom{4}{2}$
- Тех, что не содержат A: $\binom{4}{3}$
- По правилу суммы получаем $\binom{4}{2} + \binom{4}{3}$ выборок

Число сочетаний: рекурсия

- Мы знаем, что сочетаний $\binom{5}{3}$
- Тех, что содержат A: $\binom{4}{2}$
- Тех, что не содержат A: $\binom{4}{3}$
- По правилу суммы получаем $\binom{4}{2} + \binom{4}{3}$ выборок
- Получаем $\binom{5}{3} = \binom{4}{2} + \binom{4}{3}$

Число сочетаний: рекурсия

- То же самое работает в случае произвольных n и k

Число сочетаний: рекурсия

- То же самое работает в случае произвольных n и k
- Всего выборок $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Число сочетаний: рекурсия

- То же самое работает в случае произвольных n и k
- Всего выборок $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
- Рассмотрим элемент A в нашей выборке

Число сочетаний: рекурсия

- То же самое работает в случае произвольных n и k
- Всего выборок $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
- Рассмотрим элемент A в нашей выборке
- Можно поделить все тестовые выборки на два типа:

Число сочетаний: рекурсия

- То же самое работает в случае произвольных n и k
- Всего выборок $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
- Рассмотрим элемент A в нашей выборке
- Можно поделить все тестовые выборки на два типа:
    1. Выборки, содержащие A

Число сочетаний: рекурсия

- То же самое работает в случае произвольных n и k
- Всего выборок $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
- Рассмотрим элемент A в нашей выборке
- Можно поделить все тестовые выборки на два типа:
    1. Выборки, содержащие A
    2. Выборки, не содержащие A

Число сочетаний: рекурсия

- То же самое работает в случае произвольных n и k
- Всего выборок $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
- Рассмотрим элемент A в нашей выборке
- Можно поделить все тестовые выборки на два типа:
    1. Выборки, содержащие A
    2. Выборки, не содержащие A
- Есть $\binom{n-1}{k-1}$ выборок первого типа

Число сочетаний: рекурсия

- То же самое работает в случае произвольных n и k
- Всего выборок $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
- Рассмотрим элемент A в нашей выборке
- Можно поделить все тестовые выборки на два типа:
    1. Выборки, содержащие A
    2. Выборки, не содержащие A
- Есть $\binom{n-1}{k-1}$ выборок первого типа
- И есть $\binom{n-1}{k}$ выборок второго типа

Число сочетаний: рекурсия

- То же самое работает в случае произвольных n и k
- Всего выборок $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
- Рассмотрим элемент A в нашей выборке
- Можно поделить все тестовые выборки на два типа:
  1. Выборки, содержащие A
  2. Выборки, не содержащие A
- Есть $\binom{n-1}{k-1}$ выборок первого типа
- И есть $\binom{n-1}{k}$ выборок второго типа
- По правилу суммы всего получаем $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ тестовых выборок

Число сочетаний: рекурсия

Задача

Пусть у нас есть обучающая выборка размера n для нашей модели. Мы хотим отделить из нее тестовую выборку размера k. Сколько есть способов это сделать?

- С одной стороны, ответ $\binom{n}{k}$

Число сочетаний: рекурсия

Задача

Пусть у нас есть обучающая выборка размера n для нашей модели. Мы хотим отделить из нее тестовую выборку размера k. Сколько есть способов это сделать?

- С одной стороны, ответ $\binom{n}{k}$
- С другой стороны, ответ $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

Число сочетаний: рекурсия

Задача

Пусть у нас есть обучающая выборка размера n для нашей модели. Мы хотим отделить из нее тестовую выборку размера k. Сколько есть способов это сделать?

- С одной стороны, ответ $\binom{n}{k}$
- С другой стороны, ответ $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$
- Значит, мы получили равенство:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Прямое вычисление

- Мы также можем проверить равенство $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ прямым вычислением

Прямое вычисление

- Мы также можем проверить равенство $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ прямым вычислением
- $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Прямое вычисление

- Мы также можем проверить равенство $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ прямым вычислением
- $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
- $\binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$, $\binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}$

Прямое вычисление

- Мы также можем проверить равенство $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ прямым вычислением
- $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
- $\binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$, $\binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}$
- Получаем

$$\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} =$$

Прямое вычисление

- Мы также можем проверить равенство $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ прямым вычислением
- $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
- $\binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$, $\binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}$
- Получаем

$$\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} =$$

$$\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!}\left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k}\right) =$$

Прямое вычисление

- Мы также можем проверить равенство $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ прямым вычислением
- $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
- $\binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$, $\binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}$
- Получаем

$$\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} =$$

$$\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!}\left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k}\right) =$$

$$\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!}\left(\frac{k+(n-k)}{(n-k)k}\right) =$$

Прямое вычисление

- Мы также можем проверить равенство $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ прямым вычислением
- $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
- $\binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$, $\binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}$
- Получаем

$$\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} =$$

$$\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!}\left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k}\right) =$$

$$\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!}\left(\frac{k+(n-k)}{(n-k)k}\right) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Вычисление чисел сочетаний

- Мы знаем $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Вычисление чисел сочетаний

- Мы знаем $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
- Но это плохой способ вычисления

Вычисление чисел сочетаний

- Мы знаем $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
- Но это плохой способ вычисления
- Много операций, числа в вычислениях могут стать большими

Вычисление чисел сочетаний

- Мы знаем $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
- Но это плохой способ вычисления
- Много операций, числа в вычислениях могут стать большими
- Мы также знаем $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

Вычисление чисел сочетаний

- Мы знаем $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
- Но это плохой способ вычисления
- Много операций, числа в вычислениях могут стать большими
- Мы также знаем $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$
- Этот способ сильно лучше

Вычисление чисел сочетаний

- Мы знаем $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
- Но это плохой способ вычисления
- Много операций, числа в вычислениях могут стать большими
- Мы также знаем $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$
- Этот способ сильно лучше
- Другой хороший вариант: $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$

Бином Ньютона

Число сочетаний: рекурсия

Треугольник Паскаля

Бином Ньютона

Разбор некоторых задач

Треугольник Паскаля

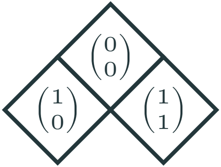
$n = 0$

$$\binom{0}{0}$$

Треугольник Паскаля

$n = 0$

$n = 1$

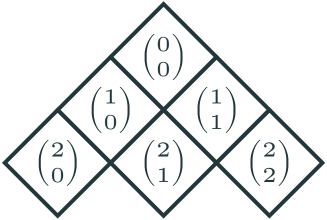


Треугольник Паскаля

$n = 0$

$n = 1$

$n = 2$



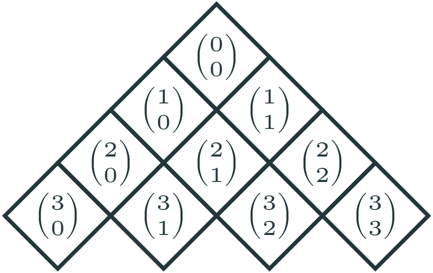
Треугольник Паскаля

$n = 0$

$n = 1$

$n = 2$

$n = 3$



Треугольник Паскаля

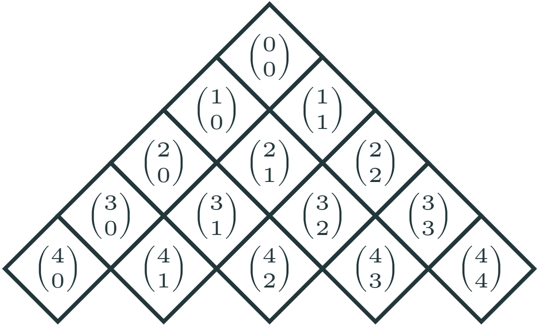
$n = 0$

$n = 1$

$n = 2$

$n = 3$

$n = 4$



Треугольник Паскаля

$$n = 0 \qquad \binom{0}{0}$$

$$n = 1 \qquad \binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$n = 2 \qquad \binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$n = 3 \qquad \binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$n = 4 \qquad \binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

$$n = 5 \qquad \binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}$$

Треугольник Паскаля

$n = 0$

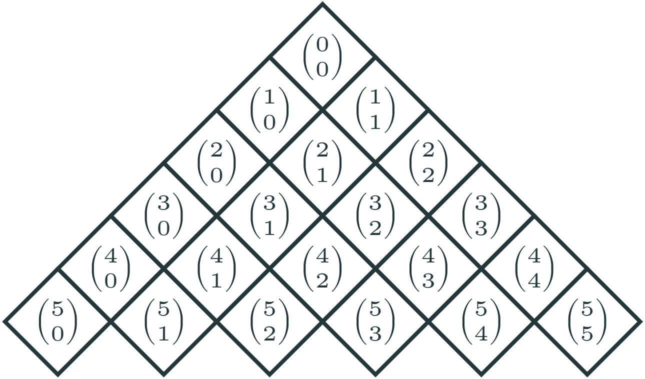
$n = 1$

$n = 2$

$n = 3$

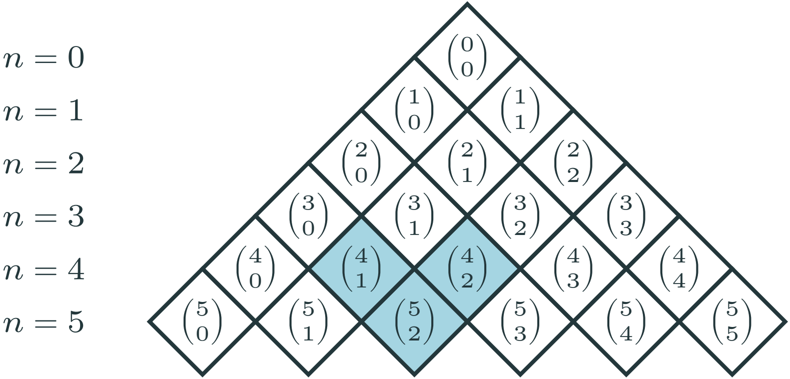
$n = 4$

$n = 5$



$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Треугольник Паскаля



$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Треугольник Паскаля

$n = 0$

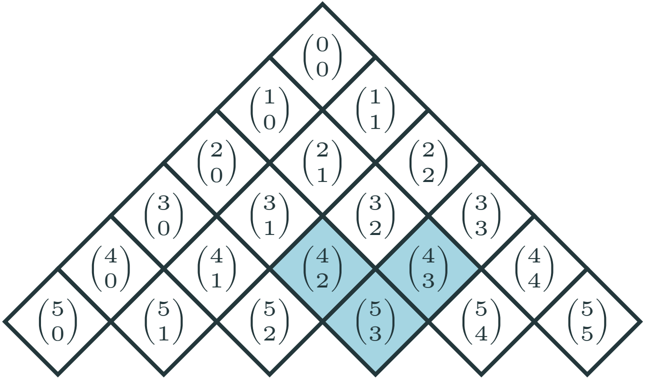
$n = 1$

$n = 2$

$n = 3$

$n = 4$

$n = 5$



$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Треугольник Паскаля

$n = 0$

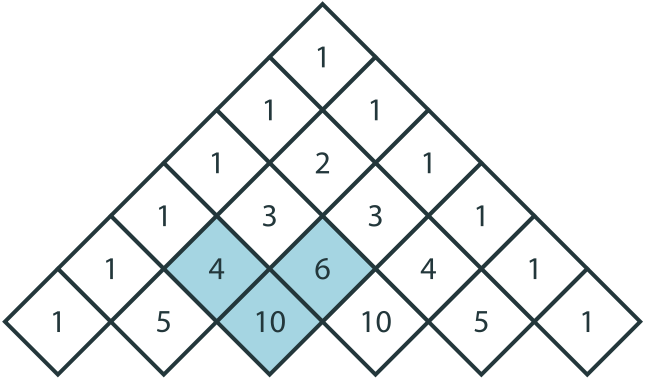
$n = 1$

$n = 2$

$n = 3$

$n = 4$

$n = 5$



$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Треугольник Паскаля

$n = 0$

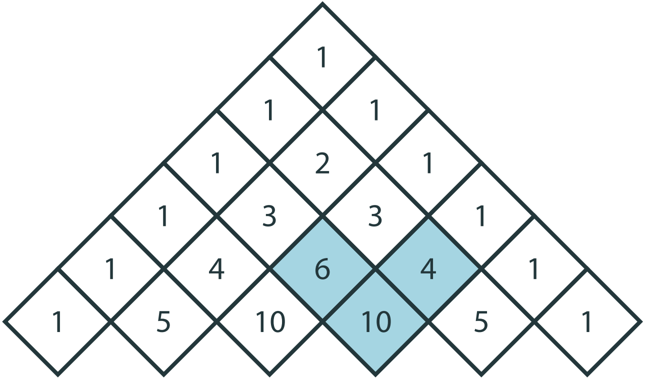
$n = 1$

$n = 2$

$n = 3$

$n = 4$

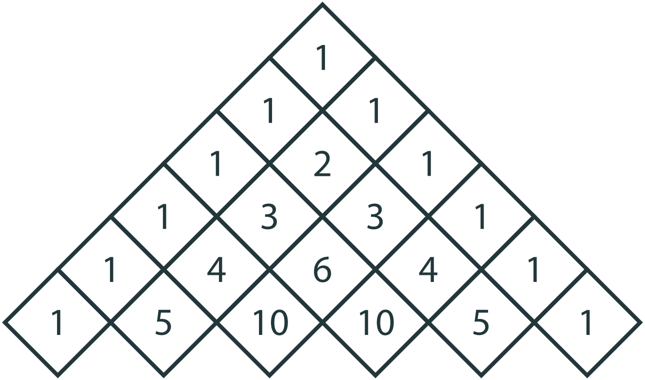
$n = 5$



$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

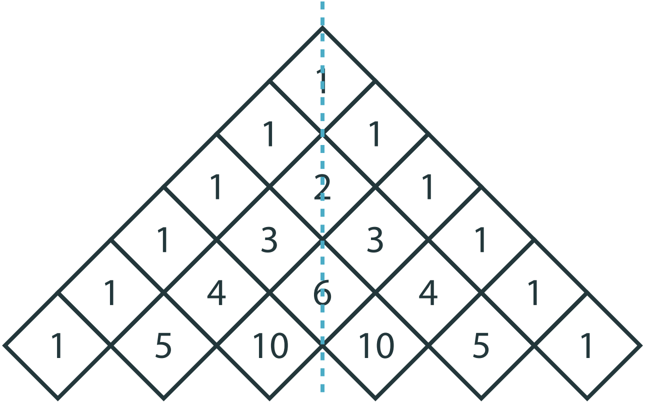
Симметрия

Треугольник Паскаля симметричен:



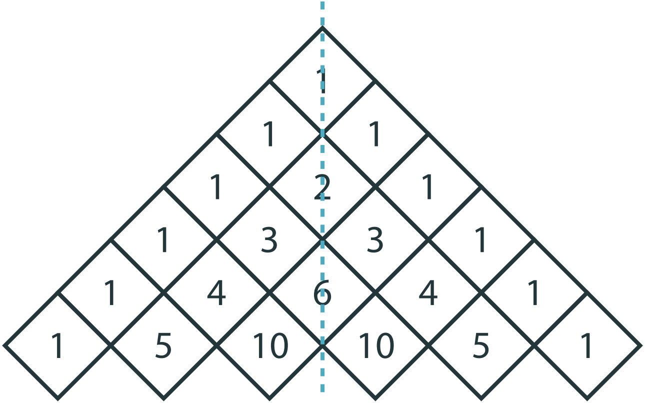
Симметрия

Треугольник Паскаля симметричен:



Симметрия

Треугольник Паскаля симметричен:



$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Симметрия

Теорема

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Симметрия

Теорема

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Доказательство

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{n-k}$$

Сравнение чисел сочетаний

Теорема

Если $k \le n/2$

$$\binom{n}{k-1} < \binom{n}{k}$$

Сравнение чисел сочетаний

Теорема

Если $k \leq n/2$

$$\binom{n}{k-1} < \binom{n}{k}$$

- Действительно,

$$\binom{n}{k-1} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} =$$

$$\frac{k}{n-k+1} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} < \binom{n}{k}$$

Сравнение чисел сочетаний

Теорема

Если $k \leq n/2$

$$\binom{n}{k-1} < \binom{n}{k}$$

- Действительно,

$$\binom{n}{k-1} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{k}{n-k+1} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} < \binom{n}{k}$$

- Неравенство следует из того, что $\frac{k}{n-k+1} < 1$

Сравнение чисел сочетаний

Теорема

Если $k \leq n/2$

$$\binom{n}{k-1} < \binom{n}{k}$$

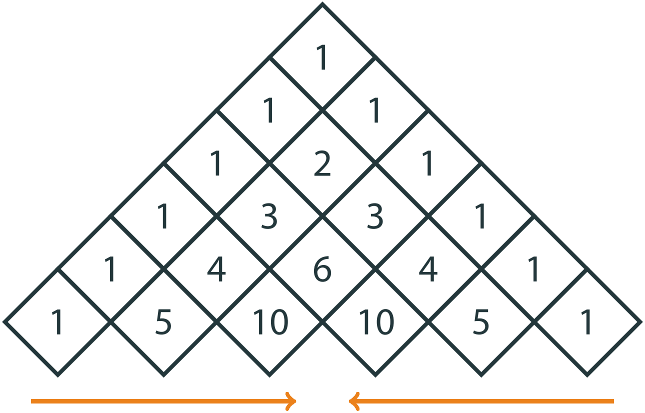
Следствие

Если $k \geq n/2$

$$\binom{n}{k} > \binom{n}{k+1}$$

Сравнение чисел сочетаний

Числа сочетаний растут к середине:



Бином Ньютона

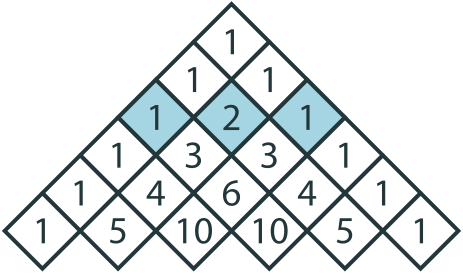
Число сочетаний: рекурсия

Треугольник Паскаля

Бином Ньютона

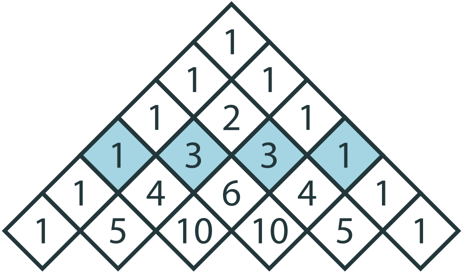
Разбор некоторых задач

Бином Ньютона



$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

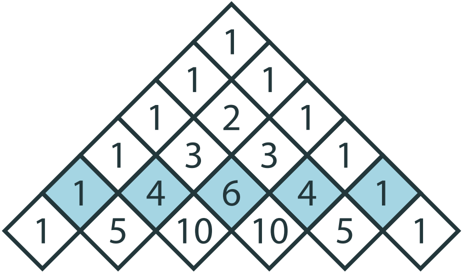
Бином Ньютона



$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Бином Ньютона



$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Бином Ньютона

Бином Ньютона

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \ldots + \binom{n}{n}b^n$$

Бином Ньютона

Бином Ньютона

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \ldots + \binom{n}{n}b^n$$

- Эквивалентно,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Бином Ньютона

Бином Ньютона

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \ldots + \binom{n}{n}b^n$$

- Эквивалентно,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

- Коэффициенты в этом выражении называются биномиальными коэффициентами

Бином Ньютона

Бином Ньютона

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \ldots + \binom{n}{n}b^n$$

- Эквивалентно,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

- Коэффициенты в этом выражении называются биномиальными коэффициентами
- Они совпадают с числами сочетаний

Бином Ньютона, доказательство

$$(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)$$

- Пусть $n = 5$

Бином Ньютона, доказательство

$$(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)$$

- Пусть $n = 5$
- Давайте раскроем скобки

Бином Ньютона, доказательство

$$(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)$$

- Пусть $n = 5$
- Давайте раскроем скобки
- Как мы это делаем?

Бином Ньютона, доказательство

$$(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)$$

- Пусть $n = 5$
- Давайте раскроем скобки
- Как мы это делаем?
- Выбираем по слагаемому в каждой скобке

Бином Ньютона, доказательство

$$(a + \boxed{b}) \cdot (\boxed{a} + b) \cdot (a + \boxed{b}) \cdot (\boxed{a} + b) \cdot (\boxed{a} + b)$$

- Пусть $n = 5$
- Давайте раскроем скобки
- Как мы это делаем?
- Выбираем по слагаемому в каждой скобке
- Например, будет такой множитель

Бином Ньютона, доказательство

$$(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)$$

- Как получить множитель a^2b^3?

Бином Ньютона, доказательство

$$(a + b) \cdot (a + b) \cdot (a + b) \cdot (a + b) \cdot (a + b)$$

- Как получить множитель a^2b^3?
- В трех скобках выбрать b

Бином Ньютона, доказательство

$$(\boxed{a} + b) \cdot (a + \boxed{b}) \cdot (a + \boxed{b}) \cdot (\boxed{a} + b) \cdot (a + \boxed{b})$$

- Как получить множитель a^2b^3?
- В трех скобках выбрать b
- Сколько есть способов это сделать?

Бином Ньютона, доказательство

$$(a + b) \cdot \boxed{(a + b)} \cdot \boxed{(a + b)} \cdot (a + b) \cdot \boxed{(a + b)}$$

- Как получить множитель a^2b^3?
- В трех скобках выбрать b
- Сколько есть способов это сделать?
- Это то же самое, что выбрать три скобки, в которых выберем b

Бином Ньютона, доказательство

$$(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)$$

- Нужно выбрать 3 скобки из 5

Бином Ньютона, доказательство

$$(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)$$

- Нужно выбрать 3 скобки из 5
- Это сочетания

Бином Ньютона, доказательство

$$(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)$$

- Нужно выбрать 3 скобки из 5
- Это сочетания
- есть $\binom{5}{3}$ способов!

Бином Ньютона, доказательство

$$\overbrace{(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\cdot\ldots\cdot(a+b)}^{n}$$

- Аналогично в общем случае

Бином Ньютона, доказательство

$$\overbrace{(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\cdot\ldots\cdot(a+b)}^{n}$$

- Аналогично в общем случае
- Раскрываем скобки

Бином Ньютона, доказательство

$$\overbrace{(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\cdot\ldots\cdot(a+b)}^{n}$$

- Аналогично в общем случае
- Раскрываем скобки
- В каждой скобке у нас два способа выбрать слагаемое

Бином Ньютона, доказательство

$$\overbrace{(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\cdot\ldots\cdot(a+b)}^{n}$$

- Аналогично в общем случае
- Раскрываем скобки
- В каждой скобке у нас два способа выбрать слагаемое
- Всего 2^n слагаемых

Бином Ньютона, доказательство

$$\overbrace{(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\cdot\ldots\cdot(a+b)}^{n}$$

- Аналогично в общем случае
- Раскрываем скобки
- В каждой скобке у нас два способа выбрать слагаемое
- Всего 2^n слагаемых
- Сколько слагаемых вида $a^{n-k}b^k$?

Бином Ньютона, доказательство

$$\overbrace{(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\cdot\ldots\cdot(a+b)}^{n}$$

- Чтобы получить $a^{n-k}b^k$ нам нужно выбрать b в ровно k скобках

Бином Ньютона, доказательство

$$\overbrace{(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\cdot\ldots\cdot(a+b)}^{n}$$

- Чтобы получить $a^{n-k}b^k$ нам нужно выбрать b в ровно k скобках

- Сколько есть способов выбрать k скобок из n в нашем выражении?

Бином Ньютона, доказательство

$$\overbrace{(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\cdot\ldots\cdot(a+b)}^{n}$$

- Чтобы получить $a^{n-k}b^k$ нам нужно выбрать b в ровно k скобках
- Сколько есть способов выбрать k скобок из n в нашем выражении?
- В точности $\binom{n}{k}$

Бином Ньютона, доказательство

$$\overbrace{(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\cdot\ldots\cdot(a+b)}^{n}$$

- Чтобы получить $a^{n-k}b^k$ нам нужно выбрать b в ровно k скобках
- Сколько есть способов выбрать k скобок из n в нашем выражении?
- В точности $\binom{n}{k}$
- У слагаемого $a^{n-k}b^k$ будет коэффициент $\binom{n}{k}$

Бином Ньютона, доказательство

$$\overbrace{(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\cdot\ldots\cdot(a+b)}^{n}$$

- Чтобы получить $a^{n-k}b^k$ нам нужно выбрать b в ровно k скобках
- Сколько есть способов выбрать k скобок из n в нашем выражении?
- В точности $\binom{n}{k}$
- У слагаемого $a^{n-k}b^k$ будет коэффициент $\binom{n}{k}$
- Мы получили $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$

Следствия

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \cdots + \binom{n}{n}b^n$$

Следствия

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \dots + \binom{n}{n} b^n$$

- Положим $a = b = 1$:

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{k} + \dots + \binom{n}{n}$$

Следствия

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \cdots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \cdots + \binom{n}{n} b^n$$

- Положим $a = b = 1$:

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{k} + \cdots + \binom{n}{n}$$

- Или эквивалентно, $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

Следствия

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \cdots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \cdots + \binom{n}{n} b^n$$

- Положим $a = b = 1$:

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{k} + \cdots + \binom{n}{n}$$

- Или эквивалентно, $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$
- Число всех подмножеств равно 2^n

Следствия

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \dots + \binom{n}{n} b^n$$

- Положим $a = 1, b = -1$.

$$0 = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n}$$

Следствия

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \dots + \binom{n}{n}b^n$$

- Положим $a = 1, b = -1$.

$$0 = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n\binom{n}{n}$$

- Или эквивалентно, $0 = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$

Следствия

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \cdots + \binom{n}{n}b^n$$

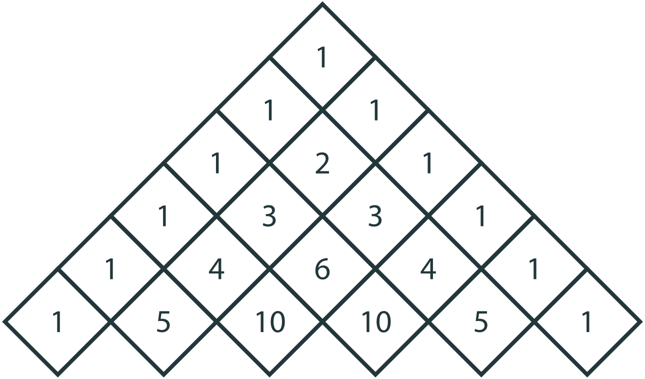
- Положим $a = 1, b = -1$.

$$0 = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n\binom{n}{n}$$

- Или эквивалентно, $0 = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$
- Число подмножеств нечетного размера равно числу подмножеств четного размера

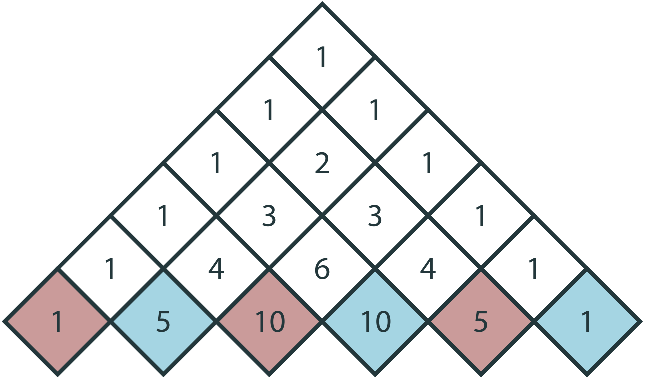
Следствия

Посмотрим на это на треугольнике Паскаля:



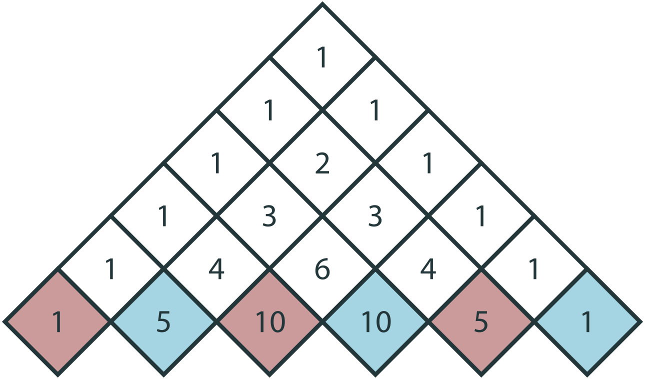
Следствия

Посмотрим на это на треугольнике Паскаля:



Следствия

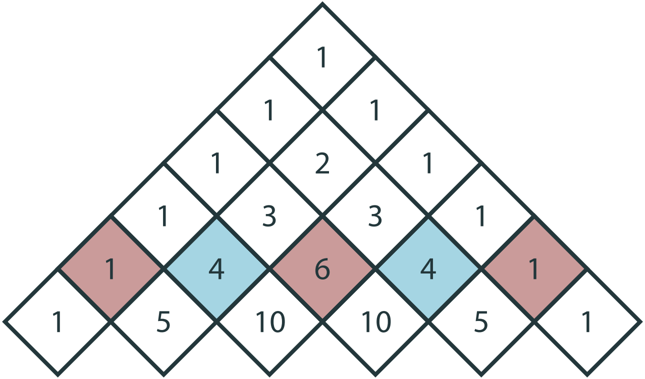
Посмотрим на это на треугольнике Паскаля:



Это легко видеть для нечетных n

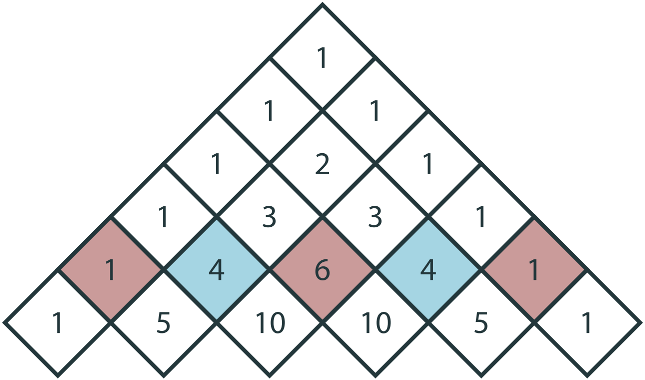
Следствия

Посмотрим на это на треугольнике Паскаля:



Следствия

Посмотрим на это на треугольнике Паскаля:



Но это совсем неочевидно для четных n

Бином Ньютона

Число сочетаний: рекурсия

Треугольник Паскаля

Бином Ньютона

Разбор некоторых задач

Число раздач карт

Задача

Сколькими способами можно выбрать 5 карт из стандартной колоды из 52 карт?

Число раздач карт

Задача

Сколькими способами можно выбрать 5 карт из стандартной колоды из 52 карт?

- Карты в выборке не упорядочены, так что мы выбираем подмножество

Число раздач карт

Задача

Сколькими способами можно выбрать 5 карт из стандартной колоды из 52 карт?

A ♣ 2 ♢ 7 ♠ 5 ♣ 4 ♡

- Карты в выборке не упорядочены, так что мы выбираем подмножество
- Получается $\binom{52}{5} = 2\,598\,960$ способов

Две черви и три пики

Задача

Сколькими способами можно выбрать 5 карт, среди которых две черви и три пики?

Две черви и три пики

Задача

Сколькими способами можно выбрать 5 карт, среди которых две черви и три пики?

- Нам нужно взять две карты из 13 червей и 3 карты из 13 пик

Две черви и три пики

Задача

Сколькими способами можно выбрать 5 карт, среди которых две черви и три пики?

$*\heartsuit$ $*\heartsuit$ $*\spadesuit$ $*\spadesuit$ $*\spadesuit$

- Нам нужно взять две карты из 13 червей и 3 карты из 13 пик
- Получаем $\binom{13}{2}\binom{13}{3} = 22\,308$ способов

4-значные числа, содержащие цифру 7

Задача

Сколько есть неотрицательных целых чисел меньших 10000, содержащих цифру 7?

4-значные числа, содержащие цифру 7

Задача

Сколько есть неотрицательных целых чисел меньших 10000, содержащих цифру 7?

- Попробуем стандартные способы

4-значные числа, содержащие цифру 7

Задача

Сколько есть неотрицательных целых чисел меньших 10000, содержащих цифру 7?

- Попробуем стандартные способы
- Каждую из первых трех цифр можно выбрать 10 способами

4-значные числа, содержащие цифру 7

Задача

Сколько есть неотрицательных целых чисел меньших 10000, содержащих цифру 7?

- Попробуем стандартные способы
- Каждую из первых трех цифр можно выбрать 10 способами
- Последнюю цифру можно выбрать 10 способами, если первые три содержали цифру 7, и одним способом, если иначе

4-значные числа, содержащие цифру 7

Задача

Сколько есть неотрицательных целых чисел меньших 10000, содержащих цифру 7?

- Попробуем стандартные способы
- Каждую из первых трех цифр можно выбрать 10 способами
- Последнюю цифру можно выбрать 10 способами, если первые три содержали цифру 7, и одним способом, если иначе
- Но как понять, какой ответ?

4-значные числа, содержащие цифру 7

Задача

Сколько есть неотрицательных целых чисел меньших 10000, содержащих цифру 7?

- Мы решали похожую задачу на прошлой неделе

4-значные числа, содержащие цифру 7

Задача

Сколько есть неотрицательных целых чисел меньших 10000, содержащих цифру 7?

- Мы решали похожую задачу на прошлой неделе
- Нужно было посчитать числа с ровно одной цифрой 7

4-значные числа, содержащие цифру 7

Задача

Сколько есть неотрицательных целых чисел меньших 10000, содержащих цифру 7?

- Мы решали похожую задачу на прошлой неделе
- Нужно было посчитать числа с ровно одной цифрой 7
- Попробуем повторить

4-значные числа, содержащие цифру 7

Задача

Сколько есть неотрицательных целых чисел меньших 10000, содержащих цифру 7?

- Позицию для цифры 7 можно выбрать 4 способами

4-значные числа, содержащие цифру 7

Задача

Сколько есть неотрицательных целых чисел меньших 10000, содержащих цифру 7?

- Позицию для цифры 7 можно выбрать 4 способами
- На каждую из остальных позиций можно поставить цифру 10 способами

4-значные числа, содержащие цифру 7

Задача

Сколько есть неотрицательных целых чисел меньших 10000, содержащих цифру 7?

- Позицию для цифры 7 можно выбрать 4 способами
- На каждую из остальных позиций можно поставить цифру 10 способами
- В чем проблема?

4-значные числа, содержащие цифру 7

Задача

Сколько есть неотрицательных целых чисел меньших 10000, содержащих цифру 7?

- Позицию для цифры 7 можно выбрать 4 способами
- На каждую из остальных позиций можно поставить цифру 10 способами
- В чем проблема?
- Число 7573 посчитали два раза!

4-значные числа, содержащие цифру 7

Задача

Сколько есть неотрицательных целых чисел меньших 10000, содержащих цифру 7?

- Не ясно, как это быстро посчитать

4-значные числа, содержащие цифру 7

Задача

Сколько есть неотрицательных целых чисел меньших 10000, содержащих цифру 7?

- Не ясно, как это быстро посчитать
- Но легко посчитать противоположное!

4-значные числа, содержащие цифру 7

Задача

Сколько есть неотрицательных целых чисел меньших 10000, содержащих цифру 7?

- Не ясно, как это быстро посчитать
- Но легко посчитать противоположное!
- Всего есть 9^4 чисел без цифры 7

4-значные числа, содержащие цифру 7

Задача

Сколько есть неотрицательных целых чисел меньших 10000, содержащих цифру 7?

- Не ясно, как это быстро посчитать
- Но легко посчитать противоположное!
- Всего есть 9^4 чисел без цифры 7
- Получаем $10^4 - 9^4 = 3\,439$ чисел, содержащих цифру 7

Числа с убывающими цифрами

Задача

Сколько есть целых чисел от 0 до 9999, таких что их цифры убывают при чтении слева направо?

Числа с убывающими цифрами

Задача

Сколько есть целых чисел от 0 до 9999, таких что их цифры убывают при чтении слева направо?

- Если мы попробуем посчитать варианты для каждой позиции и воспользоваться правилом произведения, у нас возникнут проблемы

Числа с убывающими цифрами

Задача

Сколько есть целых чисел от 0 до 9999, таких что их цифры убывают при чтении слева направо?

- Если мы попробуем посчитать варианты для каждой позиции и воспользоваться правилом произведения, у нас возникнут проблемы
- 10 вариантов для первой позиции, но число вариантов для второй позиции уже зависит от первой цифры

Числа с убывающими цифрами

Задача

Сколько есть целых чисел от 0 до 9999, таких что их цифры убывают при чтении слева направо?

- Если мы попробуем посчитать варианты для каждой позиции и воспользоваться правилом произведения, у нас возникнут проблемы
- 10 вариантов для первой позиции, но число вариантов для второй позиции уже зависит от первой цифры
- Идея: посмотрим с другой стороны

Числа с убывающими цифрами

* * * *

- Мы выбираем какие цифры от 0 до 9 войдут в наше число

Числа с убывающими цифрами

$$* \quad * \quad * \quad *$$

- Мы выбираем какие цифры от 0 до 9 войдут в наше число
- Как только мы выбрали четыре разные цифры, число определяется однозначно

Числа с убывающими цифрами

* * * *

Выбрали 3, 4 ,2, 7

- Мы выбираем какие цифры от 0 до 9 войдут в наше число
- Как только мы выбрали четыре разные цифры, число определяется однозначно

Числа с убывающими цифрами

7 4 3 2

Выбрали 3, 4 ,2, 7

- Мы выбираем какие цифры от 0 до 9 войдут в наше число
- Как только мы выбрали четыре разные цифры, число определяется однозначно

Числа с убывающими цифрами

$$* \quad * \quad * \quad *$$

- Мы выбираем какие цифры от 0 до 9 войдут в наше число
- Как только мы выбрали четыре разные цифры, число определяется однозначно
- Порядок выбора цифр не важен

Числа с убывающими цифрами

$$* \quad * \quad * \quad *$$

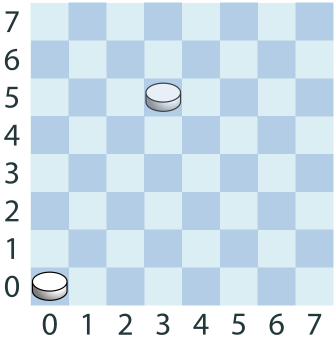
- Мы выбираем какие цифры от 0 до 9 войдут в наше число
- Как только мы выбрали четыре разные цифры, число определяется однозначно
- Порядок выбора цифр не важен
- Мы выбираем сочетания размера 4 из 10 вариантов

Числа с убывающими цифрами

$$* \quad * \quad * \quad *$$

- Мы выбираем какие цифры от 0 до 9 войдут в наше число
- Как только мы выбрали четыре разные цифры, число определяется однозначно
- Порядок выбора цифр не важен
- Мы выбираем сочетания размера 4 из 10 вариантов
- Получаем $\binom{10}{4} = 210$ вариантов выбора

Фишка на доске



Фишку на доске за один ход можно сдвинуть на одну клетку направо или вверх. Сколькими способами ее можно сдвинуть из клетки $[0, 0]$ (левый нижний угол) в клетку $[3, 5]$?

Решение

- Мы должны сделать ровно 8 ходов

Решение

- Мы должны сделать ровно 8 ходов
- Три хода должны быть сдвигом направо, а остальные 5 — вверх

Решение

- Мы должны сделать ровно 8 ходов
- Три хода должны быть сдвигом направо, а остальные 5 — вверх
- Более того, любая комбинация трех ходов направо и 5 ходов вверх приведет в нужную клетку $[3, 5]$

Решение

- Мы должны сделать ровно 8 ходов
- Три хода должны быть сдвигом направо, а остальные 5 — вверх
- Более того, любая комбинация трех ходов направо и 5 ходов вверх приведет в нужную клетку $[3, 5]$
- Нам нужно выбрать подмножество из 3 ходов среди 8 ходов

Решение

- Мы должны сделать ровно 8 ходов
- Три хода должны быть сдвигом направо, а остальные 5 — вверх
- Более того, любая комбинация трех ходов направо и 5 ходов вверх приведет в нужную клетку $[3, 5]$
- Нам нужно выбрать подмножество из 3 ходов среди 8 ходов
- Получаем $\binom{8}{3} = 56$ способов

Решение через треугольник Паскаля

Решение через треугольник Паскаля

1							
1							
1							
1							
1							
1							
1	2						
1	1	1	1	1	1	1	1

Решение через треугольник Паскаля

1							
1							
1							
1							
1							
1							
1	2	3					
1	1	1	1	1	1	1	1

Решение через треугольник Паскаля

1							
1							
1							
1							
1							
1	3						
1	2	3					
1	1	1	1	1	1	1	1

Решение через треугольник Паскаля

1							
1							
1							
1							
1							
1	3						
1	2	3	4				
1	1	1	1	1	1	1	1

Решение через треугольник Паскаля

1							
1							
1							
1							
1							
1	3	6					
1	2	3	4				
1	1	1	1	1	1	1	1

Решение через треугольник Паскаля

1							
1							
1							
1							
1	4						
1	3	6					
1	2	3	4				
1	1	1	1	1	1	1	1

Решение через треугольник Паскаля

1							
1							
1							
1							
1	4						
1	3	6					
1	2	3	4				
1	1	1	1	1	1	1	1

Это треугольник Паскаля!

Заключение

- Мы подробно обсудили биномиальные коэффициенты

Заключение

- Мы подробно обсудили биномиальные коэффициенты
- У них есть несколько математических и комбинаторных интерпретаций

Заключение

- Мы подробно обсудили биномиальные коэффициенты
- У них есть несколько математических и комбинаторных интерпретаций
- Мы попрактиковались в применении наших знаний

Заключение

- Мы подробно обсудили биномиальные коэффициенты
- У них есть несколько математических и комбинаторных интерпретаций
- Мы попрактиковались в применении наших знаний
- В следующем уроке мы обсудим еще одну стандартную комбинаторную постановку