Двудольные графы

Владимир Подольский

Факультет компьютерных наук, Высшая Школа Экономики

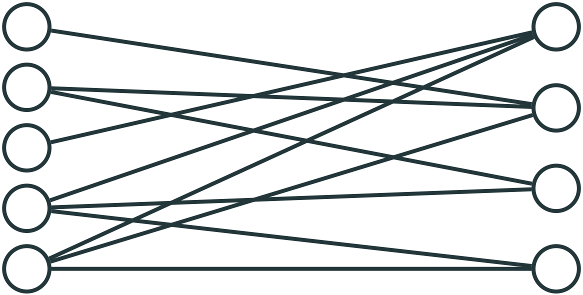
Двудольные графы

Двудольные графы

Примеры двудольных графов

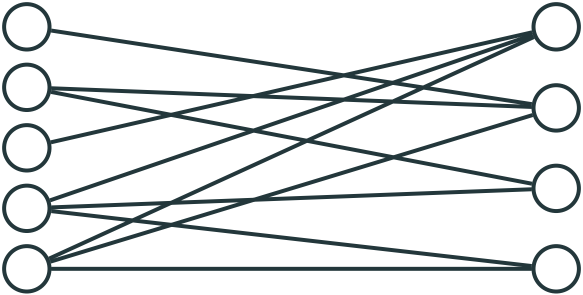
Двудольные графы

- В некоторых графах вершины естественным образом разбиваются на две части



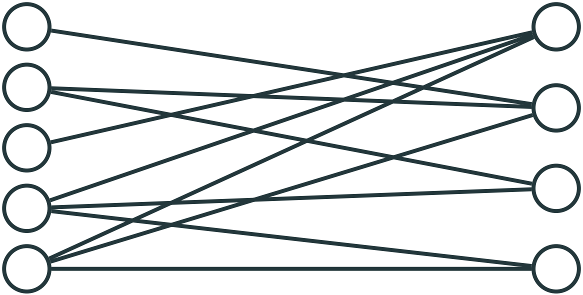
Двудольные графы

- В некоторых графах вершины естественным образом разбиваются на две части
- И все ребра соединяют вершины одной части с вершинами другой части



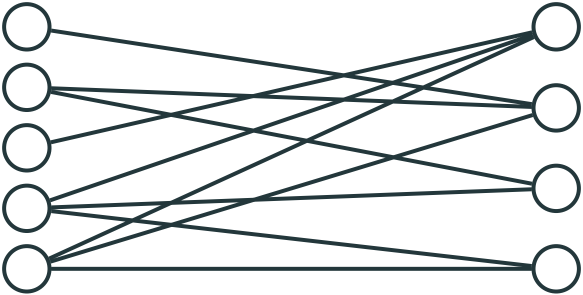
Двудольные графы

- Например: вершины — пользователи и видеоролики, ребра — просмотрел ли пользователь видеоролик



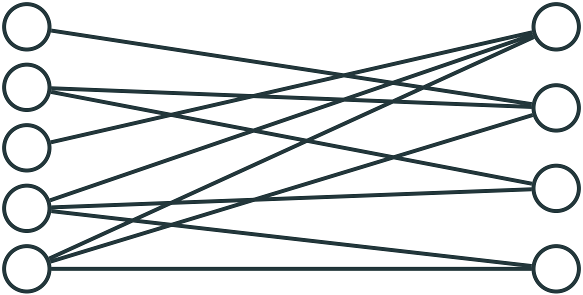
Двудольные графы

- Например: вершины — пользователи и видеоролики, ребра — просмотрел ли пользователь видеоролик
- Или вершины — абитуриенты и университеты, ребра — поступил ли абитуриент в университет



Двудольные графы

- Например: вершины — пользователи и видеоролики, ребра — просмотрел ли пользователь видеоролик
- Или вершины — абитуриенты и университеты, ребра — поступил ли абитуриент в университет
- Такие графы называются двудольными



Двудольные графы

- Более формально, граф двудольный, если

Двудольные графы

- Более формально, граф двудольный, если
- его вершины можно разбить на два непересекающихся подмножества A и B так, что

Двудольные графы

- Более формально, граф двудольный, если
- его вершины можно разбить на два непересекающихся подмножества A и B так, что
- у каждого ребра один конец лежит в A, а второй в B

Двудольные графы

- Более формально, граф двудольный, если
- его вершины можно разбить на два непересекающихся подмножества A и B так, что
- у каждого ребра один конец лежит в A, а второй в B
- Множества A и B называются долями

Двудольные графы

Лемма

В двудольном графе нет циклов нечетной длины

Двудольные графы

Лемма

В двудольном графе нет циклов нечетной длины

- Пусть A и B — доли

Двудольные графы

Лемма

В двудольном графе нет циклов нечетной длины

- Пусть A и B — доли
- Каждое ребро ведет из A в B или наоборот

Двудольные графы

Лемма

В двудольном графе нет циклов нечетной длины

- Пусть A и B — доли
- Каждое ребро ведет из A в B или наоборот
- Чтобы вернуться в начальную вершину придется сделать четное число шагов

Двудольные графы

Лемма

В двудольном графе нет циклов нечетной длины

- Пусть A и B — доли
- Каждое ребро ведет из A в B или наоборот
- Чтобы вернуться в начальную вершину придется сделать четное число шагов
- Оказывается верно и обратное!

Двудольные графы

Теорема

Граф двудольный тогда и только тогда, когда в нем нет циклов нечетной длины

Двудольные графы

Теорема

Граф двудольный тогда и только тогда, когда в нем нет циклов нечетной длины

- Мы уже доказали, что в двудольных графах нет циклов нечетной длины

Двудольные графы

Теорема

Граф двудольный тогда и только тогда, когда в нем нет циклов нечетной длины

- Мы уже доказали, что в двудольных графах нет циклов нечетной длины
- Осталось убедиться, что всякий граф без циклов нечетной длины является двудольным

Двудольные графы

Теорема

Граф двудольный тогда и только тогда, когда в нем нет циклов нечетной длины

- Мы уже доказали, что в двудольных графах нет циклов нечетной длины
- Осталось убедиться, что всякий граф без циклов нечетной длины является двудольным
- Идея: возьмем произвольную вершину v и покрасим ее в красный цвет

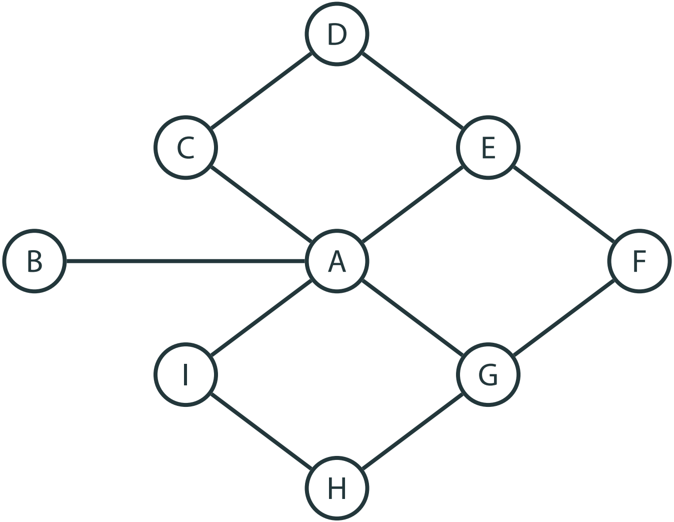
Двудольные графы

Теорема

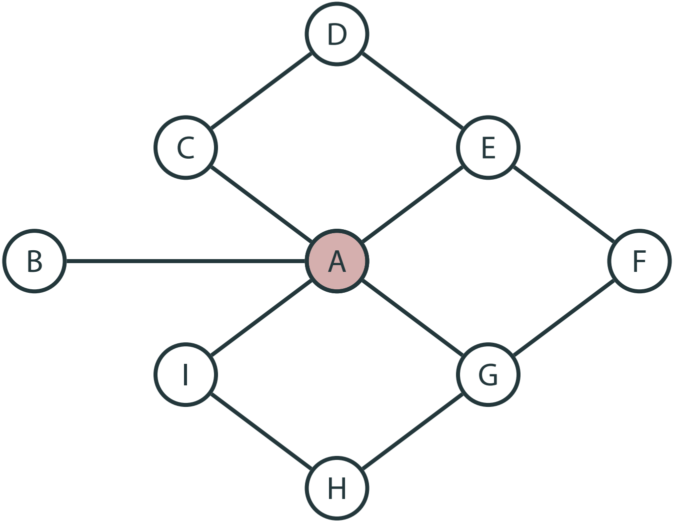
Граф двудольный тогда и только тогда, когда в нем нет циклов нечетной длины

- Мы уже доказали, что в двудольных графах нет циклов нечетной длины
- Осталось убедиться, что всякий граф без циклов нечетной длины является двудольным
- Идея: возьмем произвольную вершину v и покрасим ее в красный цвет
- Для вершины u, если в нее из v ведет путь четной длины, красим ее тоже в красный цвет, а иначе в синий цвет

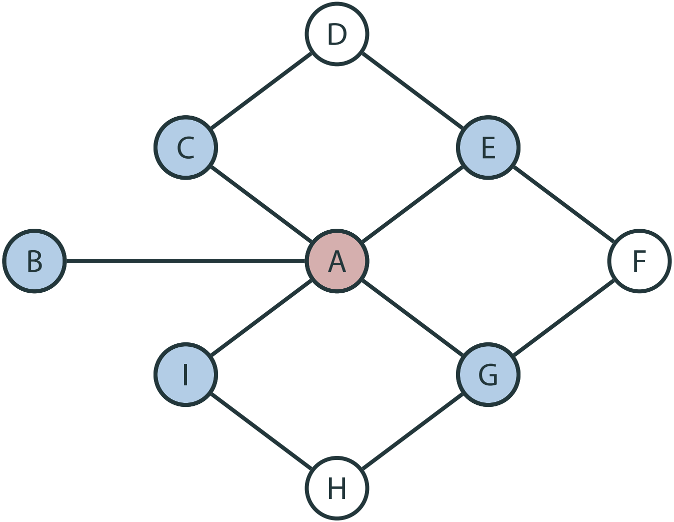
Двудольные графы



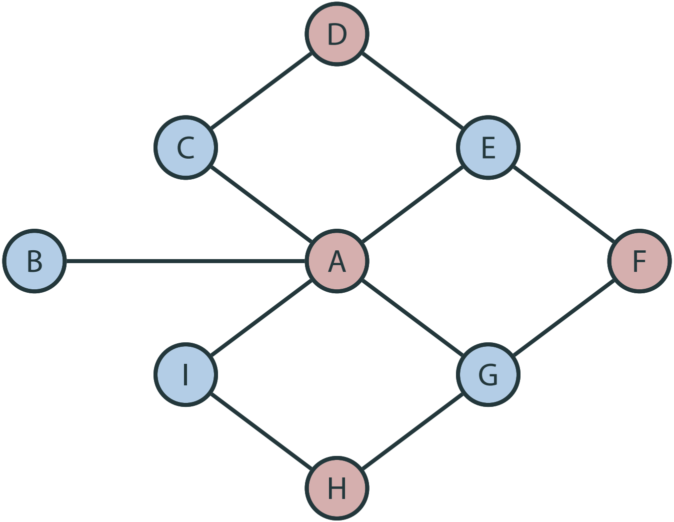
Двудольные графы



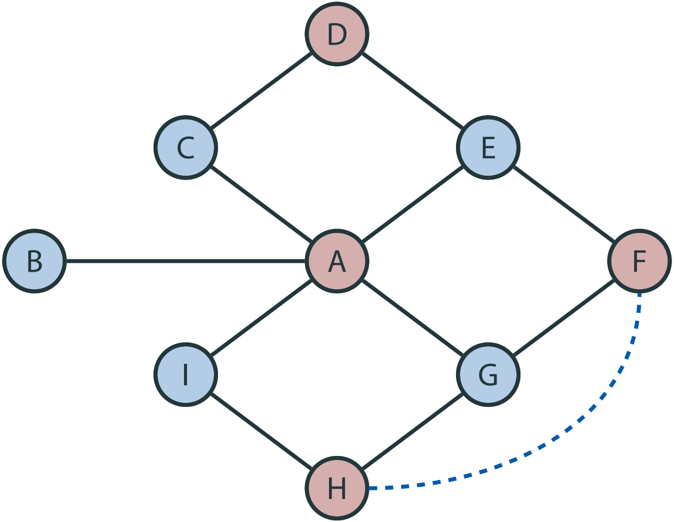
Двудольные графы



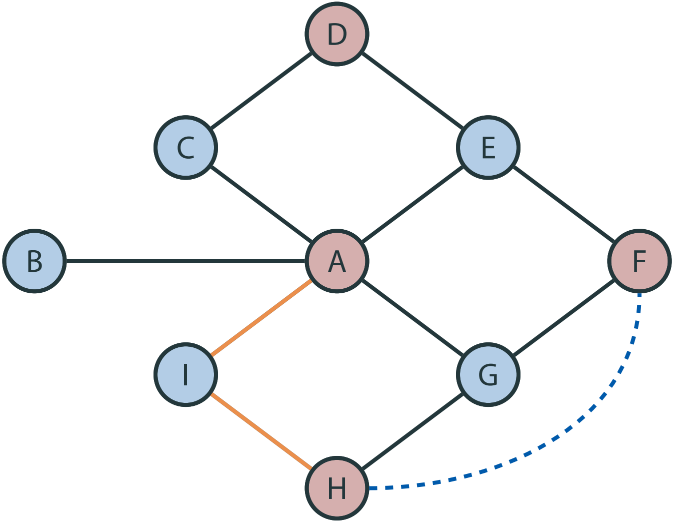
Двудольные графы



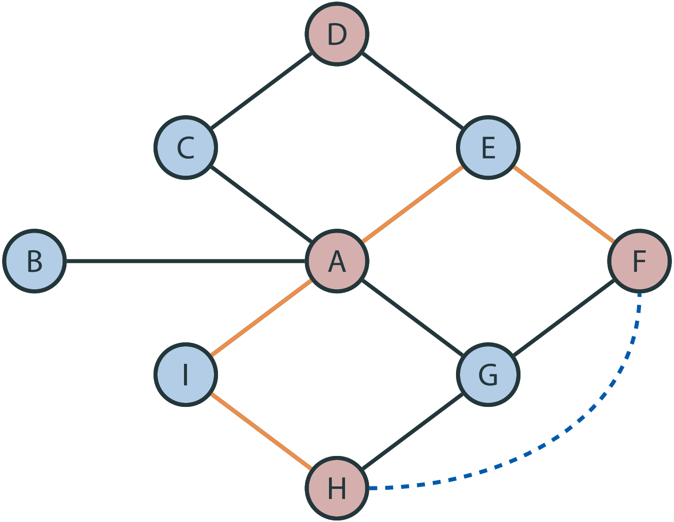
Двудольные графы



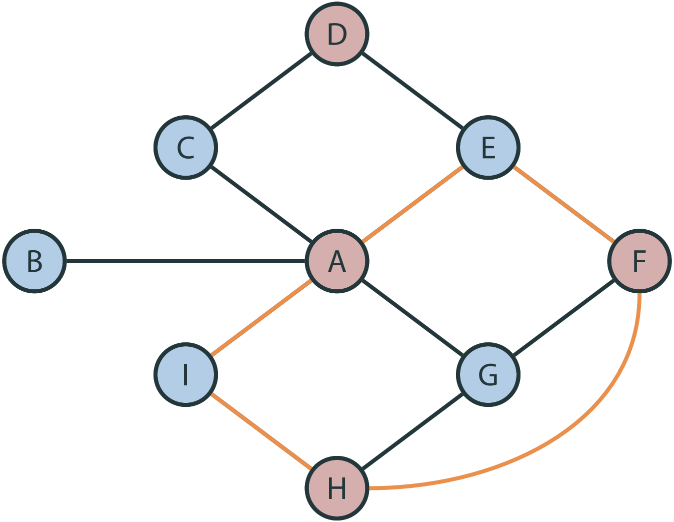
Двудольные графы



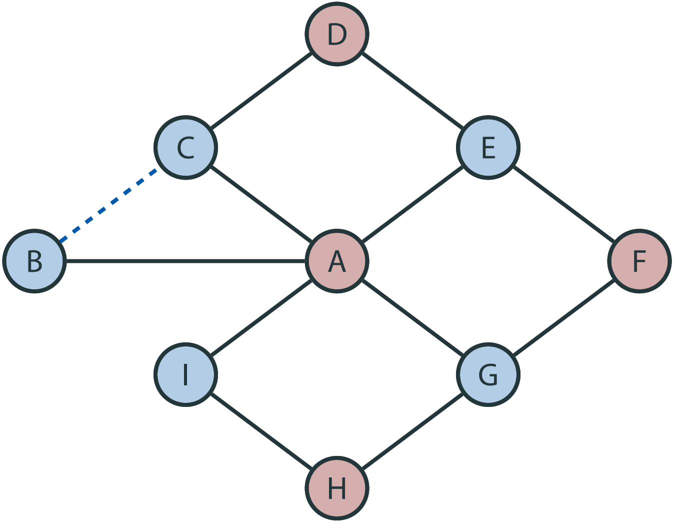
Двудольные графы



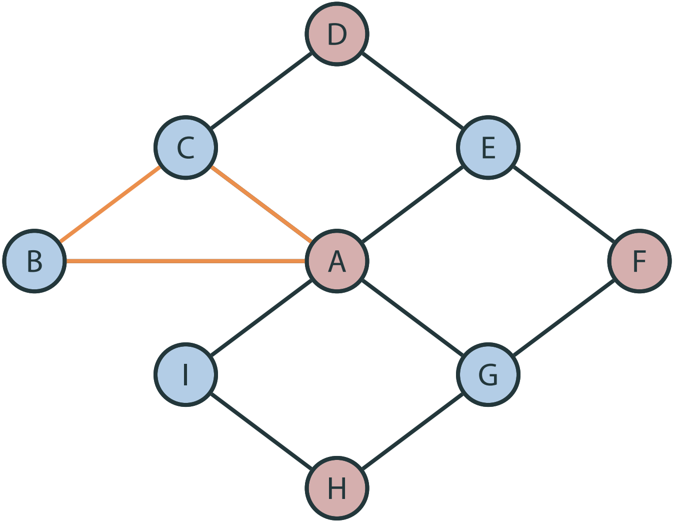
Двудольные графы



Двудольные графы



Двудольные графы



Двудольные графы

- Раскраска образует разбиение вершин на доли

Двудольные графы

- Раскраска образует разбиение вершин на доли
- Теорема доказана?

Двудольные графы

- Раскраска образует разбиение вершин на доли
- Теорема доказана?
- Нет, есть одна тонкость

Двудольные графы

- Раскраска образует разбиение вершин на доли
- Теорема доказана?
- Нет, есть одна тонкость
- Покрасили все вершины, в которые есть путь из A

Двудольные графы

- Раскраска образует разбиение вершин на доли
- Теорема доказана?
- Нет, есть одна тонкость
- Покрасили все вершины, в которые есть путь из A
- А что если в некоторые вершины нет пути из A?

Двудольные графы

- Раскраска образует разбиение вершин на доли
- Теорема доказана?
- Нет, есть одна тонкость
- Покрасили все вершины, в которые есть путь из A
- А что если в некоторые вершины нет пути из A?
- Мы разбили на доли только компоненту связности, в которой лежит A

Двудольные графы

- Раскраска образует разбиение вершин на доли
- Теорема доказана?
- Нет, есть одна тонкость
- Покрасили все вершины, в которые есть путь из A
- А что если в некоторые вершины нет пути из A?
- Мы разбили на доли только компоненту связности, в которой лежит A
- Но можно отдельно провести разбиение для остальных компонент!

Двудольные графы

Двудольные графы

Примеры двудольных графов

Двудольные графы

- Часто вершины двудольного графа заранее разбиты на доли

Двудольные графы

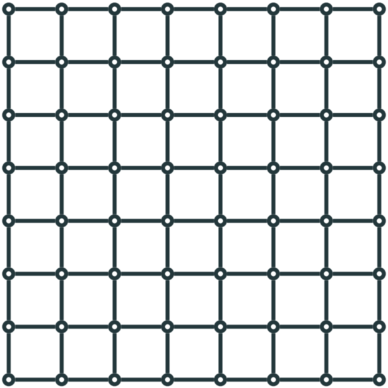
- Часто вершины двудольного графа заранее разбиты на доли
- Но это не всегда так

Двудольные графы

- Часто вершины двудольного графа заранее разбиты на доли
- Но это не всегда так
- Мы разберем пару примеров двудольных графов, в которых двудольность не сразу очевидна

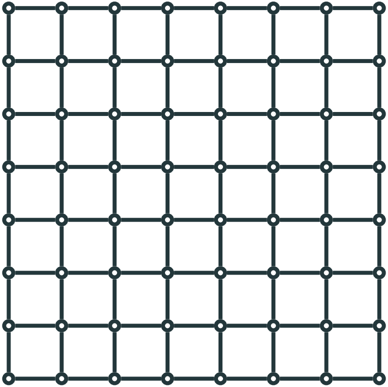
Двумерная решетка

- Такой граф называется двумерной решеткой



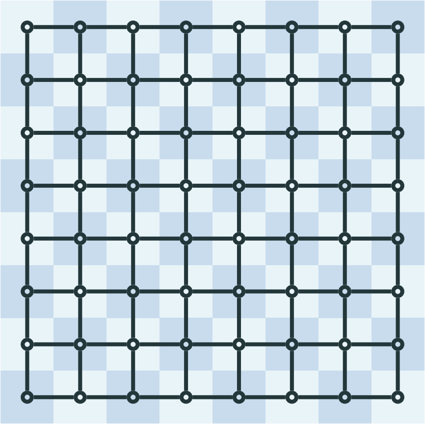
Двумерная решетка

- Такой граф называется двумерной решеткой
- Он двудольный!



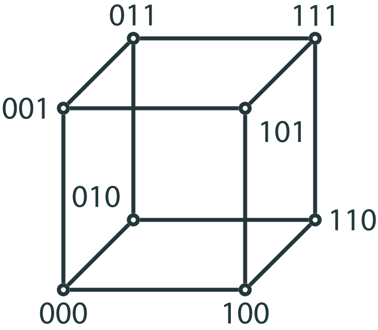
Двумерная решетка

- Такой граф называется двумерной решеткой
- Он двудольный!



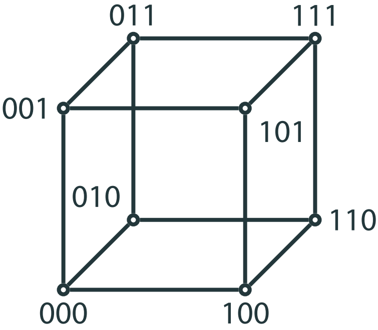
Булев куб

- В качестве V возьмем множество $\{0, 1\}^n$ всех последовательностей из нулей и единиц длины n



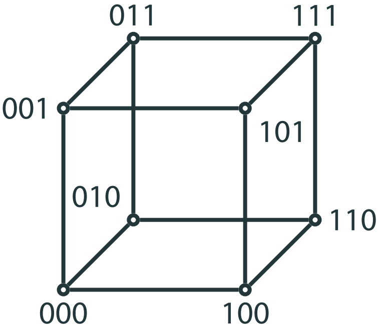
Булев куб

- В качестве V возьмем множество $\{0, 1\}^n$ всех последовательностей из нулей и единиц длины n
- Ребрами соединим те последовательности, которые отличаются только в одной координате



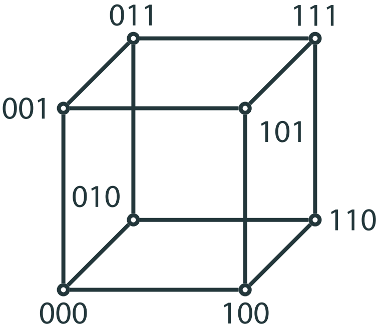
Булев куб

- Это вершины и ребра единичного куба в n-мерном пространстве



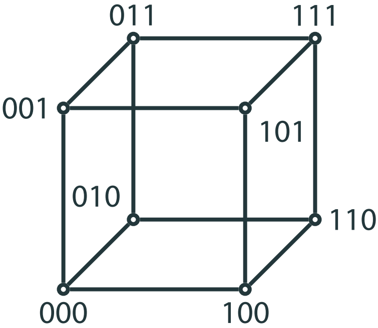
Булев куб

- Это вершины и ребра единичного куба в n-мерном пространстве
- Но это же и частый объект в computer science



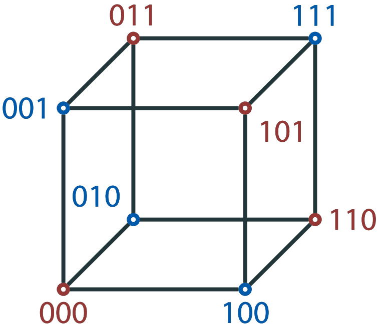
Булев куб

- Это двудольный граф



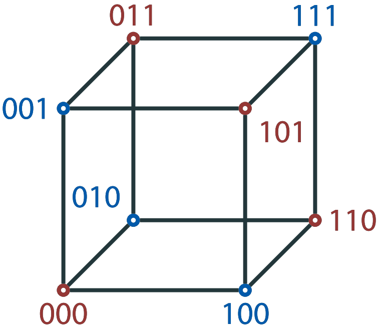
Булев куб

- Это двудольный граф
- В одной доле те вершины, в которых четно единиц, в другой те, в которых нечетно



Булев куб

- Это двудольный граф
- В одной доле те вершины, в которых четно единиц, в другой те, в которых нечетно
- Ребра только между долями



Что мы узнали

- На этой неделе мы начали обсуждать графы

Что мы узнали

- На этой неделе мы начали обсуждать графы
- Обсудили откуда они берутся

Что мы узнали

- На этой неделе мы начали обсуждать графы
- Обсудили откуда они берутся
- Обсудили базовые свойства и параметры

Что мы узнали

- На этой неделе мы начали обсуждать графы
- Обсудили откуда они берутся
- Обсудили базовые свойства и параметры
- На следующей неделе обсудим важный класс графов — деревья

Что мы узнали

- На этой неделе мы начали обсуждать графы
- Обсудили откуда они берутся
- Обсудили базовые свойства и параметры
- На следующей неделе обсудим важный класс графов — деревья
- Обсудим ориентированные графы

Что мы узнали

- На этой неделе мы начали обсуждать графы
- Обсудили откуда они берутся
- Обсудили базовые свойства и параметры
- На следующей неделе обсудим важный класс графов — деревья
- Обсудим ориентированные графы
- На последней неделе применим знания к анализу социальных сетей