

# Разбор избранных задач

---

Владимир Подольский

Факультет компьютерных наук, Высшая Школа Экономики

# Разбор избранных задач

Распределение заданий между людьми

Распределение конфет между детьми

Числа с фиксированной суммой цифр

Числа с невозрастающими цифрами

Распределение студентов по группам

# Распределение заданий между людьми

## Задача

Пусть есть 4 человека и 9 различных заданий. Каждому человеку нужно выдать ровно одно задание. Задания для разных людей должны быть различны. Сколько есть способов это сделать?

- Мы должны посчитать выборки заданий для 4 людей

# Распределение заданий между людьми

## Задача

Пусть есть 4 человека и 9 различных заданий. Каждому человеку нужно выдать ровно одно задание. Задания для разных людей должны быть различны. Сколько есть способов это сделать?

- Мы должны посчитать выборки заданий для 4 людей
- Люди различны, так что выборка упорядоченная

# Распределение заданий между людьми

## Задача

Пусть есть 4 человека и 9 различных заданий. Каждому человеку нужно выдать ровно одно задание. Задания для разных людей должны быть различны. Сколько есть способов это сделать?

- Мы должны посчитать выборки заданий для 4 людей
- Люди различны, так что выборка упорядоченная
- Одно задание нельзя выдать двум людям, так что выборка без повторений

# Распределение заданий между людьми

## Задача

Пусть есть 4 человека и 9 различных заданий. Каждому человеку нужно выдать ровно одно задание. Задания для разных людей должны быть различны. Сколько есть способов это сделать?

- Мы должны посчитать выборки заданий для 4 людей
- Люди различны, так что выборка упорядоченная
- Одно задание нельзя выдать двум людям, так что выборка без повторений
- Так что мы имеем дело с  $k$ -перестановками

# Распределение заданий между людьми

## Задача

Пусть есть 4 человека и 9 различных заданий. Каждому человеку нужно выдать ровно одно задание. Задания для разных людей должны быть различны. Сколько есть способов это сделать?

Люди	1	2	3	4
Число вариантов				

# Распределение заданий между людьми

## Задача

Пусть есть 4 человека и 9 различных заданий. Каждому человеку нужно выдать ровно одно задание. Задания для разных людей должны быть различны. Сколько есть способов это сделать?

Люди	1	2	3	4
Число вариантов	9			



# Распределение заданий между людьми

## Задача

Пусть есть 4 человека и 9 различных заданий. Каждому человеку нужно выдать ровно одно задание. Задания для разных людей должны быть различны. Сколько есть способов это сделать?

Люди	1	2	3	4
Число вариантов	9	8		

# Распределение заданий между людьми

## Задача

Пусть есть 4 человека и 9 различных заданий. Каждому человеку нужно выдать ровно одно задание. Задания для разных людей должны быть различны. Сколько есть способов это сделать?

Люди	1	2	3	4
Число вариантов	9	8	7	

# Распределение заданий между людьми

## Задача

Пусть есть 4 человека и 9 различных заданий. Каждому человеку нужно выдать ровно одно задание. Задания для разных людей должны быть различны. Сколько есть способов это сделать?

Люди	1	2	3	4
Число вариантов	9	8	7	6

# Распределение заданий между людьми

## Задача

Пусть есть 4 человека и 9 различных заданий. Каждому человеку нужно выдать ровно одно задание. Задания для разных людей должны быть различны. Сколько есть способов это сделать?

- Ответ в задаче  $9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3024$

# Распределение заданий между людьми

## Задача

Пусть есть 4 человека и 9 различных заданий. Каждому человеку нужно выдать ровно одно задание. Задания для разных людей должны быть различны. Сколько есть способов это сделать?

- Ответ в задаче  $9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3024$
- Нужно было подсчитать перестановки

# Распределение заданий между людьми

## Задача

Пусть есть 4 человека и 9 различных заданий. Нужно распределить все задания между людьми. Одно задание нельзя выдать двум людям. Каждый человек можем получить произвольное число заданий от 0 до 9. Сколько есть способов это сделать?

# Распределение заданий между людьми

## Задача

Пусть есть 4 человека и 9 различных заданий. Нужно распределить все задания между людьми. Одно задание нельзя выдать двум людям. Каждый человек можем получить произвольное число заданий от 0 до 9. Сколько есть способов это сделать?

- Каждый человек получает несколько заданий

# Распределение заданий между людьми

## Задача

Пусть есть 4 человека и 9 различных заданий. Нужно распределить все задания между людьми. Одно задание нельзя выдать двум людям. Каждый человек можем получить произвольное число заданий от 0 до 9. Сколько есть способов это сделать?

- Каждый человек получает несколько заданий
- Можем попробовать перебирать людей по очереди



# Распределение заданий между людьми

## Задача

Пусть есть 4 человека и 9 различных заданий. Нужно распределить все задания между людьми. Одно задание нельзя выдать двум людям. Каждый человек можем получить произвольное число заданий от 0 до 9. Сколько есть способов это сделать?

- Каждый человек получает несколько заданий
- Можем попробовать перебирать людей по очереди
- Первому человеку выдаем любое подмножество заданий; мы знаем, как это посчитать

# Распределение заданий между людьми

## Задача

Пусть есть 4 человека и 9 различных заданий. Нужно распределить все задания между людьми. Одно задание нельзя выдать двум людям. Каждый человек можем получить произвольное число заданий от 0 до 9. Сколько есть способов это сделать?

- Каждый человек получает несколько заданий
- Можем попробовать перебирать людей по очереди
- Первому человеку выдаем любое подмножество заданий; мы знаем, как это посчитать
- Второй человек: число вариантов зависит от выбора для первого человека

# Распределение заданий между людьми

## Задача

Пусть есть 4 человека и 9 различных заданий. Нужно распределить все задания между людьми. Одно задание нельзя выдать двум людям. Каждый человек можем получить произвольное число заданий от 0 до 9. Сколько есть способов это сделать?

- Выглядит сложно

# Распределение заданий между людьми

## Задача

Пусть есть 4 человека и 9 различных заданий. Нужно распределить все задания между людьми. Одно задание нельзя выдать двум людям. Каждый человек можем получить произвольное число заданий от 0 до 9. Сколько есть способов это сделать?

- Выглядит сложно
- **Идея:** давайте посмотрим с другой стороны!

# Распределение заданий между людьми

## Задача

Пусть есть 4 человека и 9 различных заданий. Нужно распределить все задания между людьми. Одно задание нельзя выдать двум людям. Каждый человек можем получить произвольное число заданий от 0 до 9. Сколько есть способов это сделать?

- Выглядит сложно
- **Идея:** давайте посмотрим с другой стороны!
- Не будем выдавать задания людям, будем распределять людей по заданиям

# Распределение заданий между людьми

## Задача

Пусть есть 4 человека и 9 различных заданий. Нужно распределить все задания между людьми. Одно задание нельзя выдать двум людям. Каждый человек можем получить произвольное число заданий от 0 до 9. Сколько есть способов это сделать?

Задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Число вариантов									



# Распределение заданий между людьми

## Задача

Пусть есть 4 человека и 9 различных заданий. Нужно распределить все задания между людьми. Одно задание нельзя выдать двум людям. Каждый человек можем получить произвольное число заданий от 0 до 9. Сколько есть способов это сделать?

- Таким образом, ответ  $4^9 = 262\,144$



# Распределение заданий между людьми

## Задача

Пусть есть 4 человека и 9 различных заданий. Нужно распределить все задания между людьми. Одно задание нельзя выдать двум людям. Каждый человек можем получить произвольное число заданий от 0 до 9. Сколько есть способов это сделать?

- Таким образом, ответ  $4^9 = 262\,144$
- Нужно было лишь посчитать слова

# Распределение заданий между людьми

## Задача

Пусть есть 4 человека и 9 различных заданий. Нужно распределить все задания между людьми. Одно задание нельзя выдать двум людям. Каждый человек можем получить произвольное число заданий от 0 до 9. Сколько есть способов это сделать?

- Таким образом, ответ  $4^9 = 262\,144$
- Нужно было лишь посчитать слова
- Но еще нужно было посмотреть с другой стороны

# Разбор избранных задач

Распределение заданий между людьми

Распределение конфет между детьми

Числа с фиксированной суммой цифр

Числа с невозрастающими цифрами

Распределение студентов по группам

# Распределение конфет между детьми

## Задача

У нас есть 15 одинаковых конфет. Сколькими способами их можно распределить между 7 детьми?

- Выдавая каждую конфету мы выбираем одного из 7 детей

# Распределение конфет между детьми

## Задача

У нас есть 15 одинаковых конфет. Сколькими способами их можно распределить между 7 детьми?

- Выдавая каждую конфету мы выбираем одного из 7 детей
- Повторы разрешены, один ребенок можно получить несколько конфет

# Распределение конфет между детьми

## Задача

У нас есть 15 одинаковых конфет. Сколькими способами их можно распределить между 7 детьми?

- Выдавая каждую конфету мы выбираем одного из 7 детей
- Повторы разрешены, один ребенок можно получить несколько конфет
- Конфеты одинаковые, так что порядок не важен

# Распределение конфет между детьми

## Задача

У нас есть 15 одинаковых конфет. Сколькими способами их можно распределить между 7 детьми?

- Выдавая каждую конфету мы выбираем одного из 7 детей
- Повторы разрешены, один ребенок можно получить несколько конфет
- Конфеты одинаковые, так что порядок не важен
- Мы имеем дело с сочетаниями с повторениями!

# Распределение конфет между детьми

## Задача

У нас есть 15 одинаковых конфет. Сколькими способами их можно распределить между 7 детьми?

- Число конфет — это число объектов в выборке



# Распределение конфет между детьми

## Задача

У нас есть 15 одинаковых конфет. Сколькими способами их можно распределить между 7 детьми?

- Число конфет — это число объектов в выборке
- Число детей — это число вариантов выбора

# Распределение конфет между детьми

## Задача

У нас есть 15 одинаковых конфет. Сколькими способами их можно распределить между 7 детьми?

- Число конфет — это число объектов в выборке
- Число детей — это число вариантов выбора
- Ответ  $\binom{15+(7-1)}{(7-1)} = \binom{21}{6} = 54\,264$

# Более честное распределение

## Задача

У нас есть 15 одинаковых конфет. Сколькими способами их можно распределить между 7 детьми так, что каждый ребенок получит хотя бы одну конфету?

- Предыдущее решение не работает, у нас есть дополнительное ограничение

# Более честное распределение

## Задача

У нас есть 15 одинаковых конфет. Сколькими способами их можно распределить между 7 детьми так, что каждый ребенок получит хотя бы одну конфету?

- Предыдущее решение не работает, у нас есть дополнительное ограничение
- Но мы можем свести задачу к предыдущей

# Более честное распределение

## Задача

У нас есть 15 одинаковых конфет. Сколькими способами их можно распределить между 7 детьми так, что каждый ребенок получит хотя бы одну конфету?

- Предыдущее решение не работает, у нас есть дополнительное ограничение
- Но мы можем свести задачу к предыдущей
- Мы должны каждому ребенку дать хотя бы одну конфету

# Более честное распределение

## Задача

У нас есть 15 одинаковых конфет. Сколькими способами их можно распределить между 7 детьми так, что каждый ребенок получит хотя бы одну конфету?

- Предыдущее решение не работает, у нас есть дополнительное ограничение
- Но мы можем свести задачу к предыдущей
- Мы должны каждому ребенку дать хотя бы одну конфету
- Давайте это сделаем!

# Более честное распределение

## Задача

У нас есть 15 одинаковых конфет. Сколькими способами их можно распределить между 7 детьми так, что каждый ребенок получит хотя бы одну конфету?

- У нас осталось  $15 - 7 = 8$  конфет

# Более честное распределение

## Задача

У нас есть 15 одинаковых конфет. Сколькими способами их можно распределить между 7 детьми так, что каждый ребенок получит хотя бы одну конфету?

- У нас осталось  $15 - 7 = 8$  конфет
- И мы можем распределять их как в предыдущей задаче!



# Более честное распределение

## Задача

У нас есть 15 одинаковых конфет. Сколькими способами их можно распределить между 7 детьми так, что каждый ребенок получит хотя бы одну конфету?

- У нас осталось  $15 - 7 = 8$  конфет
- И мы можем распределять их как в предыдущей задаче!
- Сочетания с повторениями, размер выборки 8, число вариантов 7

# Более честное распределение

## Задача

У нас есть 15 одинаковых конфет. Сколькими способами их можно распределить между 7 детьми так, что каждый ребенок получит хотя бы одну конфету?

- У нас осталось  $15 - 7 = 8$  конфет
- И мы можем распределять их как в предыдущей задаче!
- Сочетания с повторениями, размер выборки 8, число вариантов 7
- Ответ  $\binom{8+(7-1)}{(7-1)} = \binom{14}{6} = 3\,003$

# Более честное распределение

## Задача

У нас есть 15 одинаковых конфет. Сколькими способами их можно распределить между 7 детьми так, что каждый ребенок получит хотя бы одну конфету?

- Итак, ответ  $\binom{8+(7-1)}{(7-1)} = \binom{14}{6} = 3\,003$

# Более честное распределение

## Задача

У нас есть 15 одинаковых конфет. Сколькими способами их можно распределить между 7 детьми так, что каждый ребенок получит хотя бы одну конфету?

- Итак, ответ  $\binom{8+(7-1)}{(7-1)} = \binom{14}{6} = 3\,003$
- Сравним ответ с ответом в прошлой задаче: 54 264

# Более честное распределение

## Задача

У нас есть 15 одинаковых конфет. Сколькими способами их можно распределить между 7 детьми так, что каждый ребенок получит хотя бы одну конфету?

- Итак, ответ  $\binom{8+(7-1)}{(7-1)} = \binom{14}{6} = 3\,003$
- Сравним ответ с ответом в прошлой задаче: 54 264
- Подавляющее большинство распределений оставляет часть детей без конфет

# Разбор избранных задач

Распределение заданий между людьми

Распределение конфет между детьми

Числа с фиксированной суммой цифр

Числа с невозрастающими цифрами

Распределение студентов по группам

# Числа с фиксированной суммой цифр

## Задача

Сколько есть целых чисел между 0 и 9 999, таких что сумма их цифр равна 9?

- Будем смотреть на числа как на последовательности из 4 цифр

# Числа с фиксированной суммой цифр

## Задача

Сколько есть целых чисел между 0 и 9 999, таких что сумма их цифр равна 9?

- Будем смотреть на числа как на последовательности из 4 цифр
- Мы можем посмотреть на задачу со стороны цифр



# Числа с фиксированной суммой цифр

## Задача

Сколько есть целых чисел между 0 и 9 999, таких что сумма их цифр равна 9?

- Будем смотреть на числа как на последовательности из 4 цифр
- Мы можем посмотреть на задачу со стороны цифр
- 10 вариантов для первой цифры; но для второй число вариантов уже неясно

# Числа с фиксированной суммой цифр

## Задача

Сколько есть целых чисел между 0 и 9 999, таких что сумма их цифр равна 9?

- Будем смотреть на числа как на последовательности из 4 цифр
- Мы можем посмотреть на задачу со стороны цифр
- 10 вариантов для первой цифры; но для второй число вариантов уже неясно
- Идея: посмотрим с другой стороны

# Числа с фиксированной суммой цифр

\* \* \* \*

- У нас есть 4 разряда

# Числа с фиксированной суммой цифр

\* \* \* \*

- У нас есть 4 разряда
- Мы распределяем вес 9 между ними

# Числа с фиксированной суммой цифр

0 0 0 0

- У нас есть 4 разряда
- Мы распределяем вес 9 между ними
- Пусть в начале они все равны 0 и мы добавляем 1 девять раз

# Числа с фиксированной суммой цифр

0 0 0 0

- У нас есть 4 разряда
- Мы распределяем вес 9 между ними
- Пусть в начале они все равны 0 и мы добавляем 1 девять раз
- Каждый раз мы выбираем разряд, который увеличиваем

# Числа с фиксированной суммой цифр

\* \* \* \*

- У нас есть 4 разряда
- Мы распределяем вес 9 между ними
- Пусть в начале они все равны 0 и мы добавляем 1 девять раз
- Каждый раз мы выбираем разряд, который увеличиваем
- Порядок не важен; есть повторения

# Числа с фиксированной суммой цифр

\* \* \* \*

- У нас есть 4 разряда
- Мы распределяем вес 9 между ними
- Пусть в начале они все равны 0 и мы добавляем 1 девять раз
- Каждый раз мы выбираем разряд, который увеличиваем
- Порядок не важен; есть повторения
- Это сочетания размера 9 из 4 вариантов



# Числа с фиксированной суммой цифр

\* \* \* \*

- У нас есть 4 разряда
- Мы распределяем вес 9 между ними
- Пусть в начале они все равны 0 и мы добавляем 1 девять раз
- Каждый раз мы выбираем разряд, который увеличиваем
- Порядок не важен; есть повторения
- Это сочетания размера 9 из 4 вариантов
- Ответ  $\binom{9+(4-1)}{(4-1)} = \binom{12}{3} = 220$

# Числа с фиксированной суммой цифр

## Задача

Сколько есть целых чисел между 0 и 9 999, таких что сумма их цифр равна 10?

# Числа с фиксированной суммой цифр

## Задача

Сколько есть целых чисел между 0 и 9 999, таких что сумма их цифр равна 10?

- Задача очень похожа на предыдущую

# Числа с фиксированной суммой цифр

## Задача

Сколько есть целых чисел между 0 и 9 999, таких что сумма их цифр равна 10?

- Задача очень похожа на предыдущую
- Распределяем десять единиц между четырьмя разрядами

# Числа с фиксированной суммой цифр

## Задача

Сколько есть целых чисел между 0 и 9 999, таких что сумма их цифр равна 10?

- Задача очень похожа на предыдущую
- Распределяем десять единиц между четырьмя разрядами
- Сочетания размера 10 из 4 вариантов

# Числа с фиксированной суммой цифр

## Задача

Сколько есть целых чисел между 0 и 9 999, таких что сумма их цифр равна 10?

- Задача очень похожа на предыдущую
- Распределяем десять единиц между четырьмя разрядами
- Сочетания размера 10 из 4 вариантов
- Ответ  $\binom{10+(4-1)}{(4-1)} = \binom{13}{3} = 286$

# Числа с фиксированной суммой цифр

## Задача

Сколько есть целых чисел между 0 и 9 999, таких что сумма их цифр равна 10?

- Задача очень похожа на предыдущую
- Распределяем десять единиц между четырьмя разрядами
- Сочетания размера 10 из 4 вариантов
- Ответ  $\binom{10+(4-1)}{(4-1)} = \binom{13}{3} = 286$
- Все ли правильно?

# Числа с фиксированной суммой цифр

## Задача

Сколько есть целых чисел между 0 и 9 999, таких что сумма их цифр равна 10?

- Задача очень похожа на предыдущую
- Распределяем десять единиц между четырьмя разрядами
- Сочетания размера 10 из 4 вариантов
- Ответ  $\binom{10+(4-1)}{(4-1)} = \binom{13}{3} = 286$
- Все ли правильно? Давайте проверим!



# Числа с фиксированной суммой цифр

Код ниже перебирает все числа и считает нужные:

```
import itertools as it
count = 0
for d in it.product(range(10), repeat = 4):
    if sum(d) == 10:
        count += 1
print(count)
```

# Числа с фиксированной суммой цифр

Код ниже перебирает все числа и считает нужные:

```
import itertools as it
count = 0
for d in it.product(range(10), repeat = 4):
    if sum(d) == 10:
        count += 1
print(count)
```

Вот что он выдает

282

# Числа с фиксированной суммой цифр

Код ниже перебирает все числа и считает нужные:

```
import itertools as it
count = 0
for d in it.product(range(10), repeat = 4):
    if sum(d) == 10:
        count += 1
print(count)
```

Вот что он выдает

282

Наш ответ больше на 4!

# Числа с фиксированной суммой цифр

Код ниже перебирает все числа и считает нужные:

```
import itertools as it
count = 0
for d in it.product(range(10), repeat = 4):
    if sum(d) == 10:
        count += 1
print(count)
```

Вот что он выдает

282

Наш ответ больше на 4!

Что пошло не так?

# Числа с фиксированной суммой цифр

## Задача

Сколько есть целых чисел между 0 и 9 999, таких что сумма их цифр равна 10?

- В нашем подходе мы можем отправить все десять единиц в один и тот же разряд

# Числа с фиксированной суммой цифр

## Задача

Сколько есть целых чисел между 0 и 9 999, таких что сумма их цифр равна 10?

- В нашем подходе мы можем отправить все десять единиц в один и тот же разряд
- Но цифры должны быть не больше 9

# Числа с фиксированной суммой цифр

## Задача

Сколько есть целых чисел между 0 и 9 999, таких что сумма их цифр равна 10?

- В нашем подходе мы можем отправить все десять единиц в один и тот же разряд
- Но цифры должны быть не больше 9
- Что нам теперь делать?

# Числа с фиксированной суммой цифр

## Задача

Сколько есть целых чисел между 0 и 9 999, таких что сумма их цифр равна 10?

- В нашем подходе мы можем отправить все десять единиц в один и тот же разряд
- Но цифры должны быть не больше 9
- Что нам теперь делать?
- Просто вычтем количество тех объектов, которые мы не должны были считать!



# Числа с фиксированной суммой цифр

\* \* \* \*

- Что мы не должны были считать?

# Числа с фиксированной суммой цифр

\* \* \* \*

- Что мы не должны были считать?
- Распределения, в которых все десять единиц распределены в один и тот же разряд

# Числа с фиксированной суммой цифр

\* \* \* \*

- Что мы не должны были считать?
- Распределения, в которых все десять единиц распределены в один и тот же разряд
- Но таких распределений всего 4

# Числа с фиксированной суммой цифр

10 0 0 0

- Что мы не должны были считать?
- Распределения, в которых все десять единиц распределены в один и тот же разряд
- Но таких распределений всего 4

# Числа с фиксированной суммой цифр

0 10 0 0

- Что мы не должны были считать?
- Распределения, в которых все десять единиц распределены в один и тот же разряд
- Но таких распределений всего 4

# Числа с фиксированной суммой цифр

0   0   10   0

- Что мы не должны были считать?
- Распределения, в которых все десять единиц распределены в один и тот же разряд
- Но таких распределений всего 4

# Числа с фиксированной суммой цифр

0 0 0 10

- Что мы не должны были считать?
- Распределения, в которых все десять единиц распределены в один и тот же разряд
- Но таких распределений всего 4
- Так что в прошлом решении мы ошиблись на 4

# Числа с фиксированной суммой цифр

\* \* \* \*

- Что мы не должны были считать?
- Распределения, в которых все десять единиц распределены в один и тот же разряд
- Но таких распределений всего 4
- Так что в прошлом решении мы ошиблись на 4
- Правильный ответ  $286 - 4 = 282$



# Разбор избранных задач

Распределение заданий между людьми

Распределение конфет между детьми

Числа с фиксированной суммой цифр

Числа с невозрастающими цифрами

Распределение студентов по группам

# Числа с невозрастающими цифрами

## Задача

Сколько есть целых чисел от 0 до 9999, таких что их цифры невозрастают при чтении слева направо?

# Числа с невозрастающими цифрами

## Задача

Сколько есть целых чисел от 0 до 9999, таких что их цифры невозрастают при чтении слева направо?

- Если мы попробуем посчитать варианты для каждой позиции и воспользоваться правилом произведения, у нас возникнут проблемы

# Числа с невозрастающими цифрами

## Задача

Сколько есть целых чисел от 0 до 9999, таких что их цифры невозрастают при чтении слева направо?

- Если мы попробуем посчитать варианты для каждой позиции и воспользоваться правилом произведения, у нас возникнут проблемы
- 10 вариантов для первой позиции, но число вариантов для второй позиции уже зависит от первой цифры

# Числа с невозрастающими цифрами

## Задача

Сколько есть целых чисел от 0 до 9999, таких что их цифры невозрастают при чтении слева направо?

- Если мы попробуем посчитать варианты для каждой позиции и воспользоваться правилом произведения, у нас возникнут проблемы
- 10 вариантов для первой позиции, но число вариантов для второй позиции уже зависит от первой цифры
- Идея: посмотрим с другой стороны

# Числа с невозрастающими цифрами

\* \* \* \*

- Мы выбираем какие цифры от 0 до 9 войдут в число

# Числа с невозрастающими цифрами

\* \* \* \*

- Мы выбираем какие цифры от 0 до 9 войдут в число
- Как только мы выбрали четыре цифры, число определяется однозначно

# Числа с невозрастающими цифрами

\* \* \* \*

Выбрали 3, 4, 3, 7

- Мы выбираем какие цифры от 0 до 9 войдут в число
- Как только мы выбрали четыре цифры, число определяется однозначно



# Числа с невозрастающими цифрами

7    4    3    3

Выбрали 3, 4, 3, 7

- Мы выбираем какие цифры от 0 до 9 войдут в число
- Как только мы выбрали четыре цифры, число определяется однозначно

# Числа с невозрастающими цифрами

\* \* \* \*

- Мы выбираем какие цифры от 0 до 9 войдут в число
- Как только мы выбрали четыре цифры, число определяется однозначно
- Порядок выбора цифр не важен; повторения разрешаются

# Числа с невозрастающими цифрами

\* \* \* \*

- Мы выбираем какие цифры от 0 до 9 войдут в число
- Как только мы выбрали четыре цифры, число определяется однозначно
- Порядок выбора цифр не важен; повторения разрешаются
- Мы выбираем сочетания с повторениями размера 4 из 10 вариантов

# Числа с невозрастающими цифрами

\* \* \* \*

- Мы выбираем какие цифры от 0 до 9 войдут в число
- Как только мы выбрали четыре цифры, число определяется однозначно
- Порядок выбора цифр не важен; повторения разрешаются
- Мы выбираем сочетания с повторениями размера 4 из 10 вариантов
- Получаем  $\binom{4+(10-1)}{(10-1)} = \binom{13}{9} = 715$  вариантов выбора

# Разбор избранных задач

Распределение заданий между людьми

Распределение конфет между детьми

Числа с фиксированной суммой цифр

Числа с невозрастающими цифрами

Распределение студентов по группам

# Распределение студентов по группам

## Задача

В классе 12 студентов. Сколько есть способов разбить их на группы из двух человек для выполнения группового проекта?

# Распределение студентов по группам

## Задача

В классе 12 студентов. Сколько есть способов разбить их на группы из двух человек для выполнения группового проекта?

- Это задача более сложная

# Распределение студентов по группам

## Задача

В классе 12 студентов. Сколько есть способов разбить их на группы из двух человек для выполнения группового проекта?

- Это задача более сложная
- Есть несколько способов решения



# Распределение студентов по группам

## Задача

В классе 12 студентов. Сколько есть способов разбить их на группы из двух человек для выполнения группового проекта?

- Это задача более сложная
- Есть несколько способов решения
- Но в любом случае нам потребуется скомбинировать несколько идей

# Распределение студентов по группам

- Разберем решение, в котором будем смотреть с позиции групп

# Распределение студентов по группам

- Разберем решение, в котором будем смотреть с позиции групп
- Мы должны выбрать 2 людей из 12 в группу

# Распределение студентов по группам

- Разберем решение, в котором будем смотреть с позиции групп
- Мы должны выбрать 2 людей из 12 в группу
- Порядок в группе не важен, то есть это сочетания, и есть  $\binom{12}{2}$  варианта

# Распределение студентов по группам

- Разберем решение, в котором будем смотреть с позиции групп
- Мы должны выбрать 2 людей из 12 в группу
- Порядок в группе не важен, то есть это сочетания, и есть  $\binom{12}{2}$  варианта
- Для второй группы у нас осталось 10 людей, есть  $\binom{10}{2}$  вариантов

# Распределение студентов по группам

- Разберем решение, в котором будем смотреть с позиции групп
- Мы должны выбрать 2 людей из 12 в группу
- Порядок в группе не важен, то есть это сочетания, и есть  $\binom{12}{2}$  варианта
- Для второй группы у нас осталось 10 людей, есть  $\binom{10}{2}$  вариантов
- И так далее

# Распределение студентов по группам

- Разберем решение, в котором будем смотреть с позиции групп
- Мы должны выбрать 2 людей из 12 в группу
- Порядок в группе не важен, то есть это сочетания, и есть  $\binom{12}{2}$  варианта
- Для второй группы у нас осталось 10 людей, есть  $\binom{10}{2}$  вариантов
- И так далее
- Всего получаем  $\binom{12}{2} \times \binom{10}{2} \times \binom{8}{2} \times \binom{6}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{2}{2}$  вариантов

# Распределение студентов по группам

- Разберем решение, в котором будем смотреть с позиции групп
- Мы должны выбрать 2 людей из 12 в группу
- Порядок в группе не важен, то есть это сочетания, и есть  $\binom{12}{2}$  варианта
- Для второй группы у нас осталось 10 людей, есть  $\binom{10}{2}$  вариантов
- И так далее
- Всего получаем  $\binom{12}{2} \times \binom{10}{2} \times \binom{8}{2} \times \binom{6}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{2}{2}$  вариантов
- Готово?



# Распределение студентов по группам

- Разберем решение, в котором будем смотреть с позиции групп
- Мы должны выбрать 2 людей из 12 в группу
- Порядок в группе не важен, то есть это сочетания, и есть  $\binom{12}{2}$  варианта
- Для второй группы у нас осталось 10 людей, есть  $\binom{10}{2}$  вариантов
- И так далее
- Всего получаем  $\binom{12}{2} \times \binom{10}{2} \times \binom{8}{2} \times \binom{6}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{2}{2}$  вариантов
- Готово? Нет!

# Распределение студентов по группам

- Занумеруем людей числами от 1 до 12

# Распределение студентов по группам

$\{3, 7\}, \{1, 5\}, \{6, 9\}, \{11, 2\}, \{8, 12\}, \{4, 10\}$

- Занумеруем людей числами от 1 до 12
- Например, мы посчитали такие разбиение на группы

# Распределение студентов по группам

$\{3, 7\}, \{1, 5\}, \{6, 9\}, \{11, 2\}, \{8, 12\}, \{4, 10\}$

$\{1, 5\}, \{3, 7\}, \{6, 9\}, \{11, 2\}, \{8, 12\}, \{4, 10\}$

- Занумеруем людей числами от 1 до 12
- Например, мы посчитали такие разбиение на группы

# Распределение студентов по группам

$\{3, 7\}, \{1, 5\}, \{6, 9\}, \{11, 2\}, \{8, 12\}, \{4, 10\}$

$\{1, 5\}, \{3, 7\}, \{6, 9\}, \{11, 2\}, \{8, 12\}, \{4, 10\}$

- Занумеруем людей числами от 1 до 12
- Например, мы посчитали такие разбиение на группы

# Распределение студентов по группам

$\{3, 7\}, \{1, 5\}, \{6, 9\}, \{11, 2\}, \{8, 12\}, \{4, 10\}$

$\{1, 5\}, \{3, 7\}, \{6, 9\}, \{11, 2\}, \{8, 12\}, \{4, 10\}$

- Занумеруем людей числами от 1 до 12
- Например, мы посчитали такие разбиение на группы
- Порядок между **группами** тоже неважен!

# Распределение студентов по группам

$\{3, 7\}, \{1, 5\}, \{6, 9\}, \{11, 2\}, \{8, 12\}, \{4, 10\}$

$\{1, 5\}, \{3, 7\}, \{6, 9\}, \{11, 2\}, \{8, 12\}, \{4, 10\}$

- Занумеруем людей числами от 1 до 12
- Например, мы посчитали такие разбиение на группы
- Порядок между **группами** тоже неважен!
- Как же теперь делать?

# Распределение студентов по группам

$\{3, 7\}, \{1, 5\}, \{6, 9\}, \{11, 2\}, \{8, 12\}, \{4, 10\}$

$\{1, 5\}, \{3, 7\}, \{6, 9\}, \{11, 2\}, \{8, 12\}, \{4, 10\}$

- Занумеруем людей числами от 1 до 12
- Например, мы посчитали такие разбиение на группы
- Порядок между **группами** тоже неважен!
- Как же теперь делать?
- Воспользуемся старой идеей! Мы посчитали каждое разбиение  $6!$  раз, по разу для каждой перестановки 6 групп



# Распределение студентов по группам

- В первой попытке у нас получилось  $\binom{12}{2} \times \binom{10}{2} \times \binom{8}{2} \times \binom{6}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{2}{2}$  способов

# Распределение студентов по группам

- В первой попытке у нас получилось  $\binom{12}{2} \times \binom{10}{2} \times \binom{8}{2} \times \binom{6}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{2}{2}$  способов
- Каждое разбиение посчитано тут 6! раз

# Распределение студентов по группам

- В первой попытке у нас получилось  $\binom{12}{2} \times \binom{10}{2} \times \binom{8}{2} \times \binom{6}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{2}{2}$  способов
- Каждое разбиение посчитано тут  $6!$  раз
- Так что правильный ответ равен

$$\begin{aligned} & \binom{12}{2} \times \binom{10}{2} \times \binom{8}{2} \times \binom{6}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{2}{2} \times \frac{1}{6!} = \\ & \frac{12 \times 11}{2} \times \frac{10 \times 9}{2} \times \frac{8 \times 7}{2} \times \frac{6 \times 5}{2} \times \frac{4 \times 3}{2} \times \frac{2 \times 1}{2} \times \frac{1}{6!} = \\ & \frac{12!}{6! \times 2^6} = 10\,395 \end{aligned}$$

# Заключение

- Мы обсудили несколько самых стандартных постановок комбинаторики

# Заключение

- Мы обсудили несколько самых стандартных постановок комбинаторики
- Подавляющее большинство задач на подсчеты, которые встречаются на практике, попадают в одну из этих постановок

# Заключение

- Мы обсудили несколько самых стандартных постановок комбинаторики
- Подавляющее большинство задач на подсчеты, которые встречаются на практике, попадают в одну из этих постановок
- Бывают и более сложные ситуации, которые мы не обсуждали

# Заключение

- Мы обсудили несколько самых стандартных постановок комбинаторики
- Подавляющее большинство задач на подсчеты, которые встречаются на практике, попадают в одну из этих постановок
- Бывают и более сложные ситуации, которые мы не обсуждали
- Бывают настолько сложные задачи, что никто не знает как их решать

# Заключение

- Мы обсудили несколько самых стандартных постановок комбинаторики
- Подавляющее большинство задач на подсчеты, которые встречаются на практике, попадают в одну из этих постановок
- Бывают и более сложные ситуации, которые мы не обсуждали
- Бывают настолько сложные задачи, что никто не знает как их решать
- На следующей неделе мы применим полученные знания при изучении вероятностей