Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт прикладной математики и механики
Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики

Разработка математической модели лямбда-механизма Чебышева в трехмерной постановке

Выполнила: ст. гр. 3630102/60201 А.Г. Митрофанова
Руководитель: к.ф.-м.н., доцент А.Н. Баженов

Санкт-Петербург
2020

Введение

Тут написан текст введения

Лямбда-механизм Чебышева

Лямбда-механизм Чебышева – это четырехзвенный механизм, преобразующий вращательное движение в движение, приближенное к прямолинейному.

$$l_1 : l_2 : l_3 : l_4 = 2 : 1 : 2.5 : 2.5$$

- два закреплённых шарнира в точках O и C
- незакреплённый шарнир в точке A
- ведомый шарнир в точке M
- кривошип OA
- коромысло CB
- шатун AM

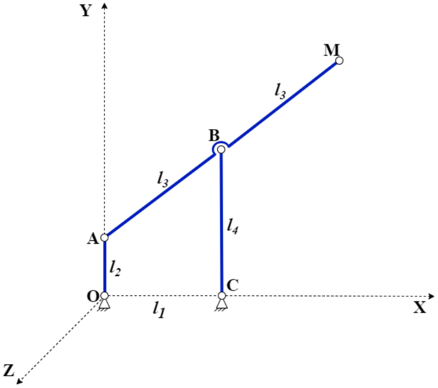

Рис.1. Исходная конфигурация механизма Чебышева в плоской постановке

Лямбда-механизм Чебышева

- В идеале $A = (l_2 \cdot \cos(\phi), l_2 \cdot \sin(\phi), 0)$ – окружность
- Ось двигателя наклонена $\Rightarrow$ эллипс
- Действительное положение точек на ободе – $A = rot(\alpha, n) \cdot A$, где

$$rot(\alpha, n) = \begin{pmatrix} c + n_1^2(1-c) & n_1 n_2(1-c) + n_3 s & n_1 n_3(1-c) - n_2 s \\ n_1 n_2(1-c) - n_3 s & c + n_2^2(1-c) & n_1 n_3(1-c) + n_1 s \\ n_1 n_3(1-c) + n_2 s & n_2 n_3(1-c) - n_1 s & c + n_3^2(1-c) \end{pmatrix}$$

где $n = (n_1, n_2, n_3)$, $c = \cos(\alpha)$ и $s = \sin(\alpha)$.

Лямбда-механизм Чебышева

- $A = rot(\alpha, n) \cdot A$
- $AC = \sqrt{(l_1 - A_x)^2 + A_y^2}$
- $\angle ACB = \arccos\left(\frac{AC^2 + l_4^2 - l_3^2}{2 \cdot AC \cdot l_4}\right)$
- $\angle OCA = \arctan\left(\frac{-A_y}{l_1 - A_x}\right)$
- $\angle OCB = \angle ACB - \angle OCA$
- $B = (l_1 - l_4 \cdot \cos\angle OCB, l_4 \cdot \sin\angle OCB, 0)$
- $M = 2 \cdot B - A$
- $\Delta B_n = (-BA_y, BA_x, 0)$
- $\angle(\Delta B_n) = \arctan\left(\frac{BA_z}{\sqrt{BA_x^2 + BA_y^2}}\right)$

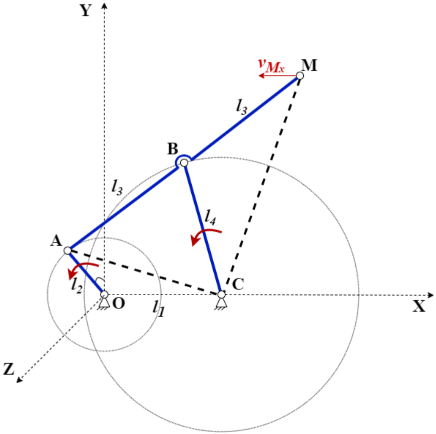

Рис.2. Конфигурация механизма Чебышева в произвольный момент времени

Нелинейный метод Кравчика. Постановка задачи

- На брусе $X \subseteq \mathbb{IR}^n$ задана система уравнений

$$F(x) = 0$$

  где $F(x) = (F_1(x), F_2(x), \ldots, F_n(x))^T$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ и $0 = (0, 0, \ldots, 0)^T$

- Необходимо найти объединенное множество решений $\Xi_{uni}(F)$, либо убедиться, что решений нет

$$\Xi_{uni}(F) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) = 0\}$$

Нелинейный метод Кравчика. Итерационный процесс

- Оператор Кравчика $\mathcal{K} : \mathbb{ID} \times \mathbb{R} \to \mathbb{IR}^n$

$$\mathcal{K}(\mathbf{X}, \overline{x}) \coloneqq \overline{x} - \Lambda \cdot F(\overline{x}) + (\mathbf{I} - \Lambda \cdot \mathbf{L}) \cdot (\mathbf{X} - \overline{x})$$

  - $\mathbf{L} \subset \mathbb{IR}^{n \times n}$ – интервальная матрица Липшица отображения F на брусе $\mathbf{X}$
  - $\Lambda = (\mathrm{mid}\, \mathbf{L})^{-1}$
- Положив $\mathbf{X}^{(0)} = \mathbf{X}$, строится итерационный процесс для последовательности точек $\overline{x}^{(k)} \in \mathbf{X}^{(k)}$

$$\mathbf{X}^{(k+1)} \leftarrow \mathbf{X}^{(k)} \cap \mathcal{K}(\mathbf{X}^{(k)}, \overline{x}^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

  - Условие сходимости : $\rho(|\mathbf{I} - \Lambda \cdot \mathbf{L}|) < 1$

Определение интервалов пересечения интервальных окружности и эллипса

- Имеем две окружности радиусами R_1 и R_2, центр в точке $(0, 0)$

$$x^2 + y^2 = R_1^2$$
$$x^2 + y^2 = R_2^2$$

- Окружность радиуса R_2 подвергается трансформации матрицей поворота P

$$x^2 + y^2 = R_2^2 \Rightarrow P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Определение интервалов пересечения интервальных окружности и эллипса

- Требуется найти пересечение окружности и эллипса, где ε – очень маленькое неотрицательное число, а $a > b$:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R_1^2 + [-\varepsilon, \varepsilon] \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + [-\varepsilon, \varepsilon] \end{cases}$$

- Нелинейный метод Кравчика
  - $X_0 = [0, R_1 + 5\varepsilon] \times [0, a + 5\varepsilon]$
  - Разбиваем $\boldsymbol{X}_0$ на N интервалов $\boldsymbol{X}_i$
  - Решаем задачу методом Кравчика на каждом из $\boldsymbol{X}_i$
    - Получен пустой интервал $\Rightarrow$ в $\boldsymbol{X}_i$ нет точек пересечения
    - Получен непустой интервал $\Rightarrow$ в $\boldsymbol{X}_i$ есть точки пересечения
  - Ответ: объединение полученных интервалов $\boldsymbol{x}_1 = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$
  - Другие интервалы пересечения: $\boldsymbol{x}_2 = [x_1, x_2] \times [-y_2, -y_1]$, $\boldsymbol{x}_3 = [-x_2, -x_1] \times [-y_2, -y_1]$ и $\boldsymbol{x}_4 = [-x_2, -x_1] \times [y_1, y_2]$

Формула Гаусса – поиск площади простого самонепересекающегося многоугольника с заданными вершинами (x_i, y_i), $i = 1, 2, \dots, n$

$$S = [S_1, S_2] = \frac{1}{2}\left|\sum_{i=1}^{n-1} x_i y_{i+1} + x_n y_1 - \sum_{i=1}^{n-1} y_i x_{i+1} - x_1 y_n\right|$$

Демонстрация работы на простом примере

Рис.3. Найденные интервалы пересечения

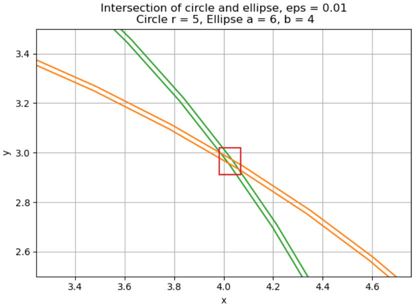

Рис.4. Один из найденных интервалов пересечения

Демонстрация работы на простом примере

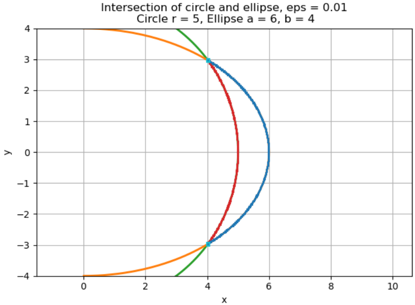

Рис.5. Нахождение области эллипса, не пересечённой с окружностью

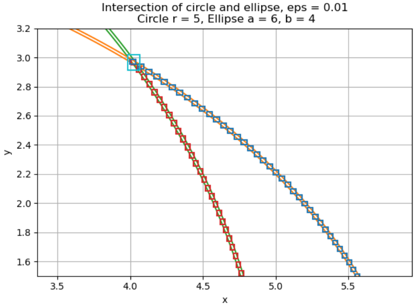

Рис.6. Нахождение области эллипса, не пересечённой с окружностью, увеличенное изображение

$$S = [S_1, S_2] = [42.517, 59.208]$$

Результаты работы

При вычислениях полагалось, что ось двигателя наклонена в направлении оси OX, т.е. $n = [1, 0, 0]$, на угол $\alpha = \frac{1}{30}$ радиан ≈ 2 градуса.

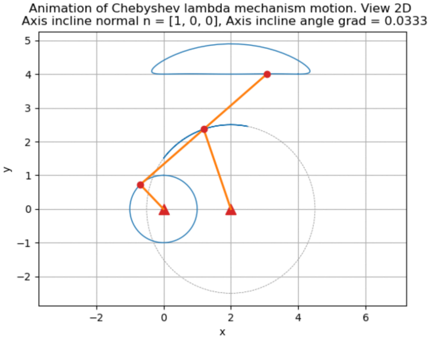

Рис.7. Движение лямбда-механизма Чебышева в $2D$, в начале движения

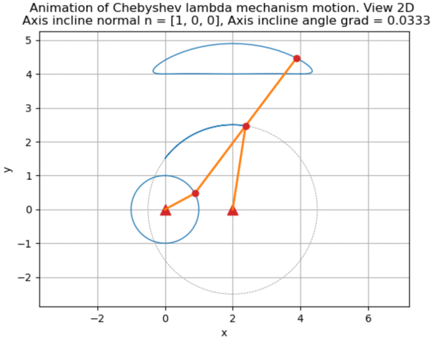

Рис.8. Движение лямбда-механизма Чебышева в $2D$, в конце движения

Результаты работы

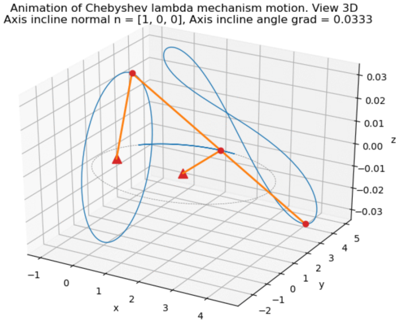

Рис.9. Движение лямбда-механизма Чебышева в $3D$, в начале движения

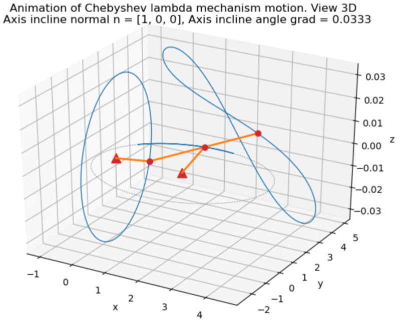

Рис.10. Движение лямбда-механизма Чебышева в $3D$, в конце движения

Результаты работы

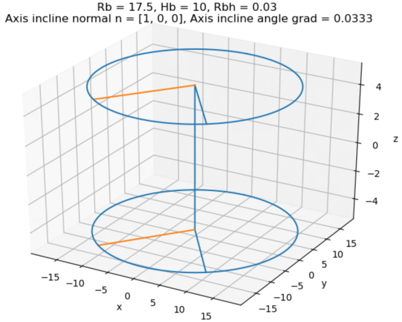

Рис.11. Взаимное положение цилиндра подшипника и отверстия шатуна. Положение без заклинивания

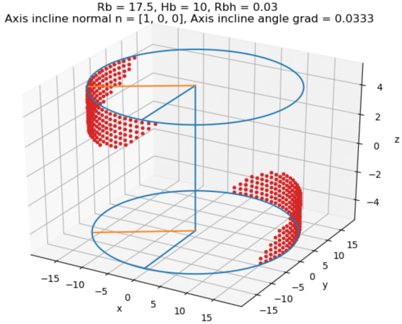

Рис.12. Взаимное положение цилиндра подшипника и отверстия шатуна. Положение с заклиниванием

Результаты работы

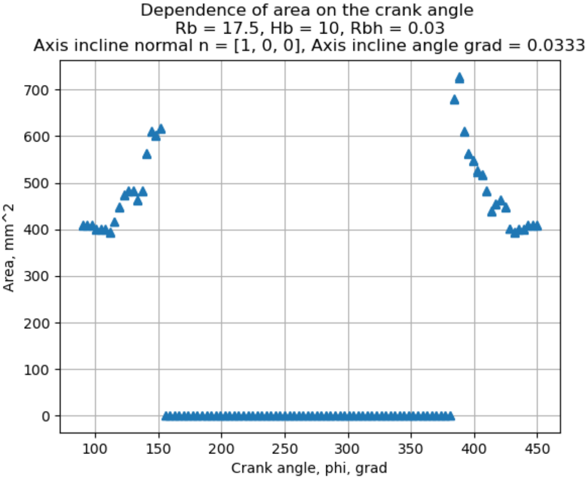

Рис.13. Зависимость площади части эллипса, не пересечённой с окружностью от угла наклона кривошипа

Результаты работы

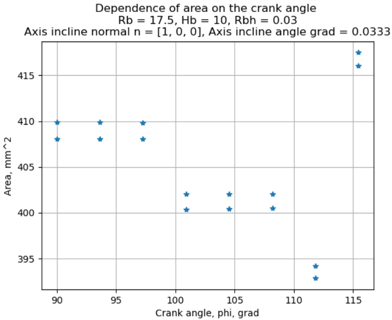

Рис.14. Зависимость площади части эллипса, не пересечённой с окружностью от угла наклона кривошипа. Промежуток $\phi = [0°, 115.5°]$

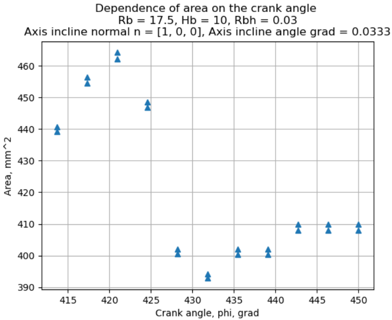

Рис.15. Зависимость площади части эллипса, не пересечённой с окружностью от угла наклона кривошипа. Промежуток $\phi = [414°, 450°]$

Выводы

Тут написан текст выводов

Спасибо за внимание!