

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого  
Институт прикладной математики и механики  
Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики

# Разработка математической модели лямбда-механизма Чебышева в трехмерной постановке

Выполнила: ст. гр. 3630102/60201 А.Г. Митрофанова

Руководитель: к.ф.-м.н., доцент А.Н. Баженов

Санкт-Петербург

2020

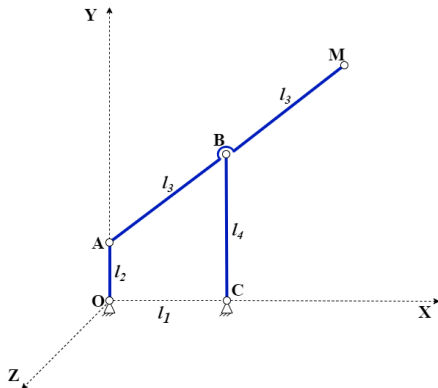
- Среди «классических» механизмов преобладают плоские
- Реальные механизмы конструируются в трехмерном мире
- Неучитывание этого факта приводит к непредвиденным эффектам
- Задачи:
  - Построение математической модели плоского лямбда-механизма Чебышева в трёхмерной постановке
  - Анализ причин избыточного трения в подшипнике методами интервального анализа путем решения системы нелинейных интервальных уравнений для шторочного устройства защиты оптических элементов в реакторе ITER

# Лямбда-механизм Чебышева. Геометрия 2D

**Лямбда-механизм Чебышева** – это четырехзвенный механизм, преобразующий вращательное движение в движение, приближенное к прямолинейному.

$$l_1 : l_2 : l_3 : l_4 = 2 : 1 : 2.5 : 2.5$$

- две закреплённых оси в точках  $O$  и  $C$
- кривошип  $OA$
- коромысло  $CB$
- шатун  $AM$
- в точке  $B$  – подшипник



Исходная конфигурация механизма Чебышева в плоской постановке

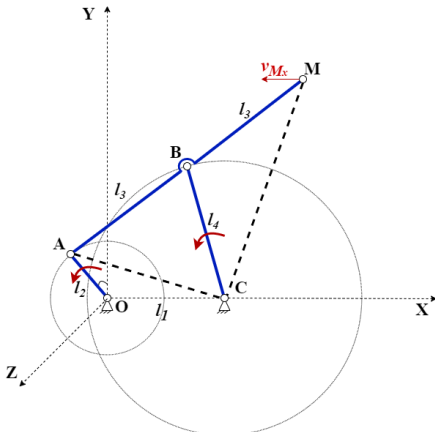
- В идеале  $A = (l_2 \cdot \cos(\phi), l_2 \cdot \sin(\phi), 0)$  – окружность
- Ось двигателя наклонена  $\Rightarrow$  эллипс
- Действительное положение точек на ободке –  $A = \text{rot}(\alpha, n) \cdot A$ , где

$$\text{rot}(\alpha, n) = \begin{pmatrix} c + n_1^2(1 - c) & n_1 n_2(1 - c) + n_3 s & n_1 n_3(1 - c) - n_2 s \\ n_1 n_2(1 - c) - n_3 s & c + n_2^2(1 - c) & n_1 n_3(1 - c) + n_1 s \\ n_1 n_3(1 - c) + n_2 s & n_2 n_3(1 - c) - n_1 s & c + n_3^2(1 - c) \end{pmatrix}$$

где  $n = (n_1, n_2, n_3)$ ,  $c = \cos(\alpha)$  и  $s = \sin(\alpha)$ .

# Лямбда-механизм Чебышева. Движение шатуна

- $A = \text{rot}(\alpha, n) \cdot A$
- $AC = \sqrt{(l_1 - A_x)^2 + A_y^2}$
- $\angle ACB = \arccos\left(\frac{AC^2 + l_4^2 - l_3^2}{2 \cdot AC \cdot l_4}\right)$
- $\angle OCA = \arctan\left(\frac{-A_y}{l_1 - A_x}\right)$
- $\angle OCB = \angle ACB - \angle OCA$
- $B = (l_1 - l_4 \cdot \cos \angle OCB, l_4 \cdot \sin \angle OCB, 0)$
- $M = 2 \cdot B - A$
- $\Delta B_n = (-BA_y, BA_x, 0)$
- $\angle(\Delta B_n) = \arctan\left(\frac{BA_z}{\sqrt{BA_x^2 + BA_y^2}}\right)$



Конфигурация механизма Чебышева в произвольный момент времени

- Данные подшипника:
  - Радиус подшипника  $Rb = 17.5$  мм
  - Высота подшипника  $Hb = 10$  мм
  - Допустимый зазор между цилиндром и обоймой  $Rbh = 0.03$  мм
  - Радиус обоймы  $Rh = Rb + Rbh = 17.53$  мм
- Условие заклинивания подшипника: проекция данной точки подшипника превышает допустимый зазор между цилиндром и обоймой

- На брусе  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  задана система интервальных уравнений

$$F(x) = 0$$

где  $F(x) = (F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x))^T$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  и  $0 = (0, 0, \dots, 0)^T$

- Необходимо найти объединенное множество решений  $\Xi_{uni}(F)$ , либо убедиться, что решений нет

$$\Xi_{uni}(F) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) = 0\}$$

# Нелинейный метод Кравчика. Итерационный процесс

- Оператор Кравчика  $\mathcal{K} : \mathbb{ID} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{IR}^n$

$$\mathcal{K}(X, \bar{x}) := \bar{x} - \Lambda \cdot F(\bar{x}) + (I - \Lambda \cdot L) \cdot (X - \bar{x})$$

- $L \subset \mathbb{IR}^{n \times n}$  – интервальная матрица Липшица отображения  $F$  на брус  $X$
- $\Lambda = (\text{mid } L)^{-1}$
- Положив  $X^{(0)} = X$ , строится итерационный процесс для последовательности точек  $\bar{x}^{(k)} \in X^{(k)}$

$$X^{(k+1)} \leftarrow X^{(k)} \cap \mathcal{K}(X^{(k)}, \bar{x}^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

- Условие сходимости :  $\rho(|I - \Lambda \cdot L|) < 1$



# Определение интервалов пересечения интервальных окружности и эллипса

- Имеем две окружности радиусами  $R_1$  и  $R_2$ , центр в точке  $(0, 0)$

$$x^2 + y^2 = R_1^2$$

$$x^2 + y^2 = R_2^2$$

- Окружность радиуса  $R_2$  подвергается трансформации матрицей поворота  $P$

$$x^2 + y^2 = R_2^2 \Rightarrow P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

# Определение интервалов пересечения интервальных окружности и эллипса

- Требуется найти пересечение окружности и эллипса, где  $\varepsilon$  – очень маленькое неотрицательное число, а  $a > b$ :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R_1^2 + [-\varepsilon, \varepsilon] \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + [-\varepsilon, \varepsilon] \end{cases}$$

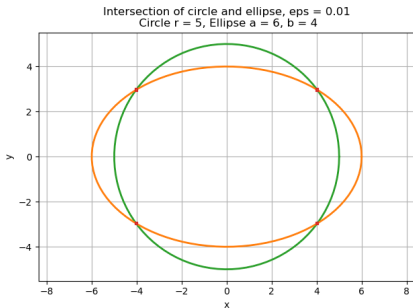
- Нелинейный метод Кравчика
  - $X_0 = [0, R_1 + 5\varepsilon] \times [0, a + 5\varepsilon]$
  - Разбиваем  $X_0$  на  $N$  интервалов  $X_i$
  - Решаем задачу методом Кравчика на каждом из  $X_i$ 
    - Получен пустой интервал  $\Rightarrow$  в  $X_i$  нет точек пересечения
    - Получен непустой интервал  $\Rightarrow$  в  $X_i$  есть точки пересечения
  - Ответ: объединение полученных интервалов  $x_1 = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$
  - Другие интервалы пересечения:  $x_2 = [x_1, x_2] \times [-y_2, -y_1]$ ,  
 $x_3 = [-x_2, -x_1] \times [-y_2, -y_1]$  и  $x_4 = [-x_2, -x_1] \times [y_1, y_2]$

# Определение площади фигуры

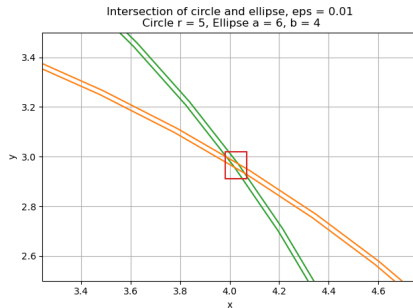
Формула Гаусса – поиск площади простого самонепересекающегося многоугольника с заданными вершинами  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$

$$S = [S_1, S_2] = \frac{1}{2} \left| \sum_{i=1}^{n-1} x_i y_{i+1} + x_n y_1 - \sum_{i=1}^{n-1} y_i x_{i+1} - x_1 y_n \right|$$

# Демонстрация работы на простом примере

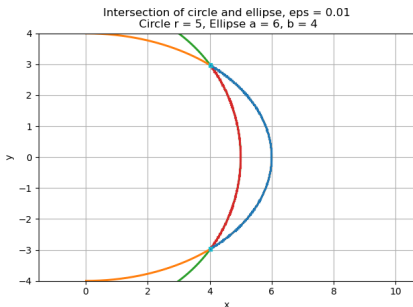


Найденные интервалы пересечения

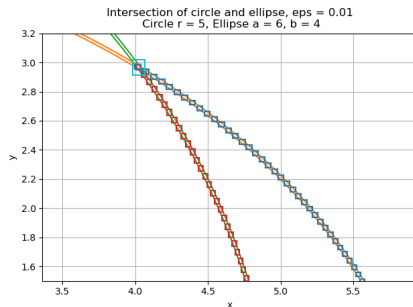


Один из найденных интервалов пересечения

# Демонстрация работы на простом примере



Нахождение области эллипса, не пересечённой с окружностью

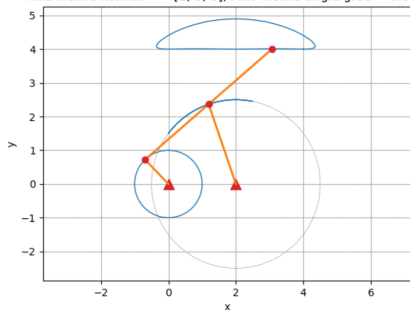


Нахождение области эллипса, не пересечённой с окружностью, увеличенное изображение

# Результаты работы. Расчет работы механизма

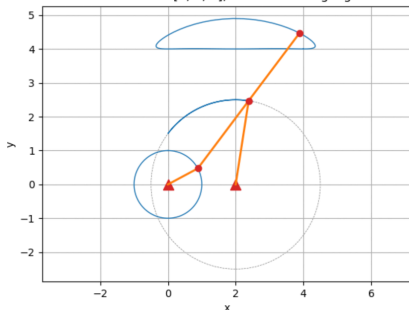
При вычислениях полагалось, что ось двигателя наклонена в направлении оси  $OX$ , т.е.  $n = [1, 0, 0]$ , на угол  $\alpha = \frac{1}{30}$  радиан  $\approx 2$  градуса.

Animation of Chebyshev lambda mechanism motion. View 2D  
Axis incline normal  $n = [1, 0, 0]$ , Axis incline angle grad = 0.0333



Движение лямбда-механизма Чебышева в 2D, в начале движения

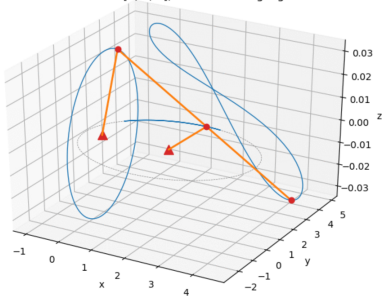
Animation of Chebyshev lambda mechanism motion. View 2D  
Axis incline normal  $n = [1, 0, 0]$ , Axis incline angle grad = 0.0333



Движение лямбда-механизма Чебышева в 2D, в конце движения

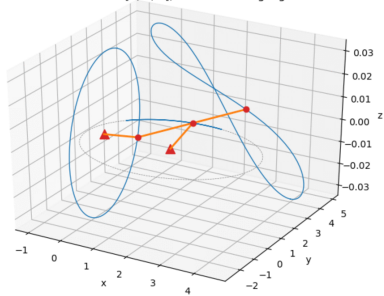
# Результаты работы. Шатунная траектория 3D

Animation of Chebyshev lambda mechanism motion. View 3D  
Axis incline normal  $n = [1, 0, 0]$ , Axis incline angle grad = 0.0333



Движение лямбда-механизма Чебышева в 3D, в начале движения

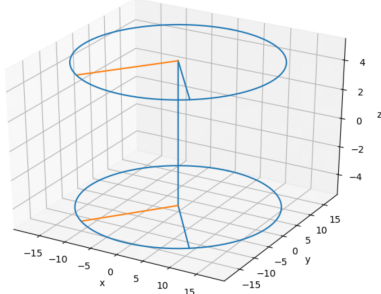
Animation of Chebyshev lambda mechanism motion. View 3D  
Axis incline normal  $n = [1, 0, 0]$ , Axis incline angle grad = 0.0333



Движение лямбда-механизма Чебышева в 3D, в конце движения

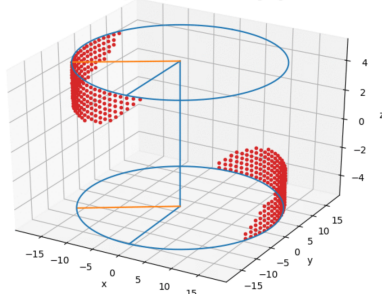
# Результаты работы. Пересечение цилиндров

$R_b = 17.5$ ,  $H_b = 10$ ,  $R_{bh} = 0.03$   
Axis incline normal  $n = [1, 0, 0]$ , Axis incline angle grad = 0.0333



Взаимное положение цилиндра подшипника и отверстия шатуна. Положение без заклинивания

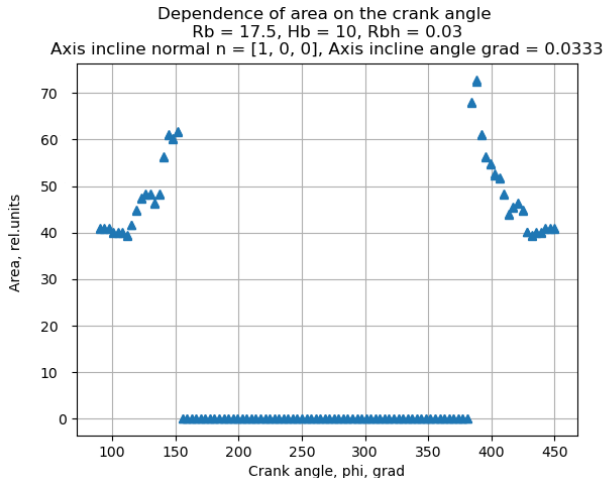
$R_b = 17.5$ ,  $H_b = 10$ ,  $R_{bh} = 0.03$   
Axis incline normal  $n = [1, 0, 0]$ , Axis incline angle grad = 0.0333



Взаимное положение цилиндра подшипника и отверстия шатуна. Положение с заклиниванием

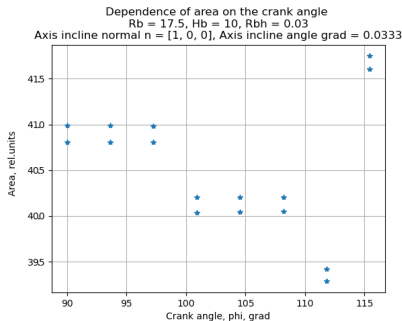


# Результаты работы. Выявление области касания

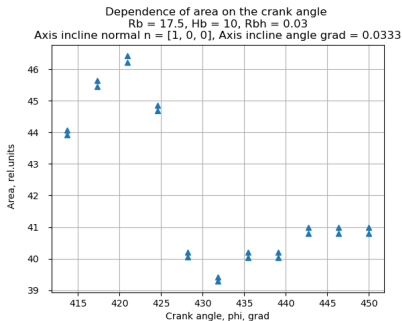


Зависимость площади части эллипса, не пересечённой с окружностью от угла наклона кривошипа

# Результаты работы. Детальное рассмотрение области касания



Зависимость площади части эллипса, не пересечённой с окружностью от угла наклона кривошипа. Промежуток  $\phi = [90^\circ, 115.5^\circ]$



Зависимость площади части эллипса, не пересечённой с окружностью от угла наклона кривошипа. Промежуток  $\phi = [414^\circ, 450^\circ]$

# Выводы

- Разработана математическая модель плоского лямбда-механизма Чебышева в трёхмерной постановке
- Произведен анализ причин избыточного трения в подшипнике методами интервального анализа путем решения системы нелинейных интервальных уравнений

## РАЗВИТИЕ

- Разработанная математическая модель и программный код будут использоваться в качестве инструмента для проектирования и анализа работы шторочного механизма защиты оптических зеркал в лазерной диагностике плазм, разрабатываемой в ФТИ им. А.Ф.Иоффе РАН для международного проекта ITER

Спасибо за внимание!