

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт прикладной математики и механики

Работа допущена к защите
Директор ВШПМиВФ
_____ Л.В. Уткин
« _____ » _____ 2020 г.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
РАБОТА БАКАЛАВРА
РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЛЯМБДА-МЕХАНИЗМА
ЧЕБЫШЕВА В ТРЕХМЕРНОЙ ПОСТАНОВКЕ

по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика
Направленность (профиль) 01.03.02_02 Системное программирование

Выполнил
студент гр. 3630102/60201

А.Г. Митрофанова

Руководитель
преподаватель,
к.ф.-м.н., доцент ВШПМиВФ ИПММ

А.Н. Баженов

Консультант
по нормоконтролю

Л.А. Арефьева

Санкт-Петербург
2020

РЕФЕРАТ

На 33 с., 16 рисунков, 0 таблиц, 0 приложений.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: ИНТЕРВАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ, ЛЯМБДА-МЕХАНИЗМ ЧЕБЫШЕВА, МЕТОД КРАВЧИКА, ПЛОЩАДЬ ФИГУРЫ

Тема выпускной квалификационной работы: «Разработка математической модели лямбда-механизма Чебышева в трёхмерной постановке».

Данная работа посвящена исследованию лямбда-механизма Чебышева в трёхмерной постановке, применению полученных результатов для анализа причин избыточного трения в подшипнике методами интервального анализа. Задачи, которые решались в ходе исследования:

1. Нахождение кинематики звеньев лямбда-механизма Чебышева в трёхмерной постановке;
2. Нахождение условия заклинивания подшипника;
3. Определение площади контакта повышенного трения в подшипнике.

В ходе работы были разработаны необходимые математические модели, а также ряд алгоритмов для решения поставленных задач.

В первую очередь была построена математическая модель лямбда-механизма Чебышева в трёхмерной постановке и разработан алгоритм, подсчитывающий кинематику всех звеньев механизма.

Во вторую очередь полученный результат сформулирован в виде постановки задачи пересечения кривых второго порядка с интервальными неопределённостями параметров. Затем разработан алгоритм, с помощью которого стало возможным рассчитать точки пересечения интервальных эллипса и окружности.

В третьем этапе был разработан алгоритм, который вычисляет площадь части интервального эллипса, не пересечённой с интервальной окружностью. Построена зависимость этой площади от угла наклона кривошипа.

Разработанная математическая модель и программный код будут использоваться в качестве инструмента для проектирования и анализа работы штормочного механизма защиты оптических зеркал в лазерной диагностике плазм, разрабатываемой в ФТИ им. А.Ф.Иоффе РАН для международного проекта ITER.

ABSTRACT

On 33 p., 16 figures, 0 tables, 0 appendices.

KEYWORDS: INTERVAL ANALYSIS, CHEBYSHEV'S LAMBDA MECHANISM, INTERVAL KRAWCZYK METHOD, AREA OF THE SHAPE

The subject of the graduate qualification work is «Development of a mathematical model of the Chebyshev's Lambda mechanism in a three-dimensional setting».

This given work is devoted to studying Chebyshev's Lambda mechanism in three-dimensional setting, the application of the obtained results to analyze the causes of excessive friction in the bearing by interval analysis methods. The research set the following goals:

1. Finding the kinematics of Chebyshev's Lambda mechanism links in a three-dimensional setting;
2. Finding the condition for jamming the bearing;
3. Determination of the contact area of increased friction in the bearing.

In the course of the work, the necessary mathematical models were developed, as well as a number of algorithms for solving the tasks.

First of all, a mathematical model of Chebyshev's lambda mechanism was constructed in a three-dimensional setting and an algorithm was developed that calculates the kinematics of all links of the mechanism.

In the second place, the obtained result is formulated as a statement of the problem of intersection of second-order curves with interval parameter uncertainties. Then an algorithm was developed that made it possible to calculate the intersection points of the interval ellipse and circle.

In the third stage, an algorithm was developed that calculates the area of the part of the interval ellipse that is not intersected with the interval circle. The dependence of this area on the crank angle is constructed.

The developed mathematical model and software code will be used as a tool for design and analysis work shutter mechanism for the protection of optical mirrors in the laser diagnostics of plasmas produced in the FTI im. A. F. Ioffe RAS, for the international project ITER.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	6
Глава 1. Постановка задачи	8
1.1. Формулировка задачи	8
Глава 2. Теория	8
2.1. Введение.....	8
2.2. Теория плоского лямбда-механизма Чебышева в трёхмерной постановке	9
2.3. Интервальный анализ.....	12
2.3.1. Основные понятия	12
2.3.2. Поиск двусторонних границ решения ИСЛАУ	14
2.3.3. Линейный метод Кравчика	15
2.3.4. Нелинейный метод Кравчика.....	15
2.4. Условие заклинивания подшипника	16
2.5. Определение площади контакта повышенного трения.....	16
2.5.1. Определение площади пересечения окружности и эллипса	17
2.6. Выводы	19
Глава 3. Разработка программного обеспечения и математической модели для решения задачи	19
3.1. Введение.....	19
3.2. Программа, описывающая кинематику крайней точки лямбда-механизма Чебышева (шатунная траектория).....	19
3.3. Программа, определяющая заклинивание подшипника	21
3.4. Программа, определяющая площадь контакта повышенного трения	21
3.4.1. Программа, определяющая параметры эллипса.....	22
3.4.2. Программа, реализующая метод Кравчика	22
3.4.3. Программа для поиска точек пересечения эллипса и окружности.....	23
3.4.4. Программа для вычисления площади части эллипса, не пересеченной с окружностью.....	23
3.5. Выводы	25
Глава 4. Анализ результатов.....	27
4.1. Введение.....	27
4.2. Анализ работы плоского лямбда-механизма Чебышева.....	27
4.3. Определение условий возникновения повышенного трения	27
4.4. Пример работы алгоритма на искусственном примере.....	28
4.5. Выработка требований к геометрии изделия	29
4.6. Выводы	31

Заключение	32
Список использованных источников.....	33

ВВЕДЕНИЕ

Механика, наряду с астрономией, — одна из древнейших математических дисциплин. Тем не менее, теория механизмов до сих пор активно развивается. При том, что уже созданы сложные роботы, совершающие весьма сложные движения, расчет каждого нетривиального механизма остается сложной задачей. В машиностроение, строительство, архитектуру постоянно входят новые идеи [3].

Среди «классических» механизмов преобладают плоские, то есть такие конструкции, все звенья которых находятся в одной плоскости. Сложные механизмы обычно являются композицией плоских. Такой подход сложился в докомпьютерную эпоху, когда теоретический анализ носил характер аналитического исследования. Вместе с тем, реальные механизмы реализуются в материальном, 3-мерном мире, и реальное расположение их узлов пространственное. Если этот факт не учитывается в проектировании, это приводит к неучтенным эффектам.

Актуальность. Конкретно, в практике произошел именно такой случай: спроектированный конструктором в современной 3D CAD-системе лямбда-механизм Чебышёва со справочными размерами работал неудовлетворительно. Таким образом, актуальна задача трехмерного анализа этой конструкции.

По мере развития трехмерной постановки стало ясно, что причиной проблем в работе является избыточное трение в сочленении частей механизма подшипником. Для исследования привлечен инструментарий интервального анализа, который естественным образом оперирует с двусторонними ограничениями на геометрические размеры. Такие ограничения очень естественно соотносятся с принятой в машиностроении системой допусков и посадок.

Содержание работы включает построение математической модели плоского лямбда-механизма Чебышева в трёхмерной постановке и анализ причин избыточное трения в подшипнике методами интервального анализа путем решения системы нелинейных интервальных уравнений.

Степень разработанности проблемы. На просторах сети интернет не было найдено исследования об анализе лямбда-механизма Чебышева в трехмерной постановке. В [4] и [6] можно найти анализ лямбда-механизма Чебышева в плоской двухмерной постановке. Но, как уже было упомянуто ранее, этого бывает недостаточно для прикладных задач.

Теоретической базой данного исследования являются дисциплины «Интервальный анализ», «Линейная алгебра и аналитическая геометрия», «Математический анализ» и «Теоретическая механика».

Методологической базой данного исследования являются методы решения систем нелинейных интервальных уравнений, методы моделирования и анализа, методы построения и анализа геометрических фигур.

Практическая значимость работы заключается в

- Решении прикладной задачи;
- Проведении дальнейших исследований по теме данной выпускной квалификационной работе.

ГЛАВА 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

1.1. Формулировка задачи

Сформулируем перед началом работы ряд задач, которые предстоит решить. Требуется разработать метод решения и написать программы для решения следующих задач:

А. Описание кинематики звеньев механизма Чебышева:

1. Вращение одного конца шатуна вокруг оси;
2. Нахождение угла наклона шатуна;
3. Обнаружение заклинивания подшипника;
4. Вычисление координаты конечной точки шатуна.

В. Нахождение условия заклинивания подшипника;

С. Нахождение параметров эллипса и окружности в механизме;

Д. Интервализация найденных эллипса и окружности;

Е. Геометрическое обнаружение пересечения интервальных эллипса и окружности в механизме;

Ф. Определение площади части эллипса, которая не пересекается с окружностью.

Таким образом, сформулированы задачи. Теперь можно приступать к изучению теории и решению данных задач.

ГЛАВА 2. ТЕОРИЯ

2.1. Введение

В данной главе рассматривается теория, необходимая для решения поставленных задач. Здесь присутствует необходимая теория для анализа работы плоского лямбда-механизма Чебышева в трехмерной постановке. Также особое внимание уделяется теории интервального анализа, так как данная дисциплина является основной в этой работе.

2.2. Теория плоского лямбда-механизма Чебышева в трёхмерной постановке

Лямбда-механизм Чебышева – это четырехзвенный механизм, преобразующий вращательное движение в движение, приближенное к прямолинейному. Своё название этот механизм получил из-за того, что похож на греческую букву лямбда "λ"[4]. Исходная конфигурация механизма изображена на рис.2.1.

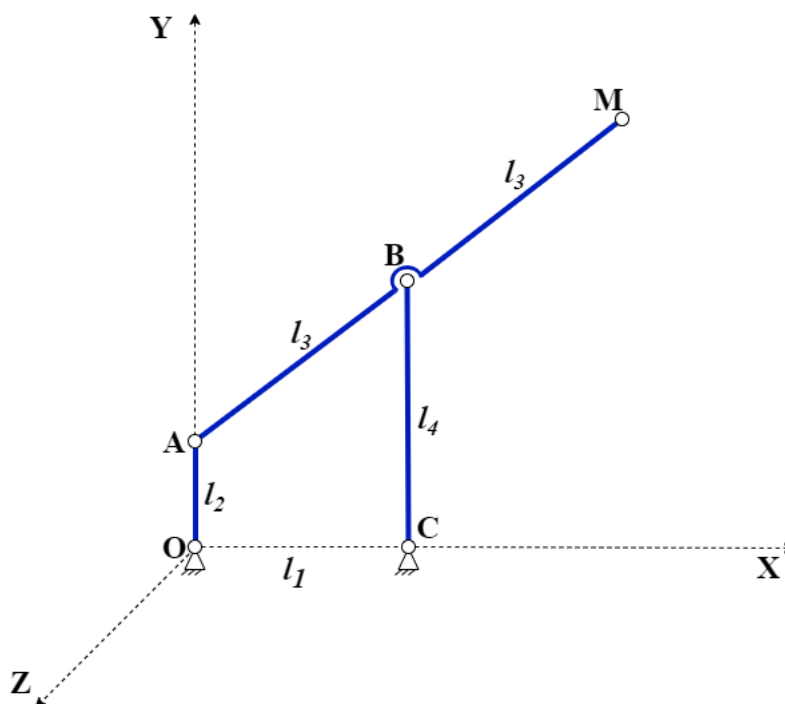


Рис.2.1. Исходная конфигурация механизма Чебышева в плоской постановке

Механизм состоит из следующих шарниров:

- два закреплённых неподвижных шарнира в точках O и C ;
- незакреплённый шарнир в точке A вращающегося ведущего звена;
- ведомый шарнир в точке M .

В исследуемом механизме важно выделить следующие звенья:

- кривошип OA вращается вокруг оси O ;
- коромысло CB совершает качательное движение вокруг оси C ;
- шатун AM соединён только с подвижными звеньями OA и CB .

Обозначим длины OC , OA , AB и BM как l_1 , l_2 , l_3 и l_4 соответственно. В лямбда-механизме Чебышева эти длины соотносятся как

$$l_1 : l_2 : l_3 : l_4 = 2 : 1 : 2.5 : 2.5 \quad (2.1)$$

Благодаря заданным соотношениям длин (2.1) существуют специальные геометрические условия, которые облегчают нахождение кинематики звеньев, чем кинематика более общего четырехзвенного механизма.

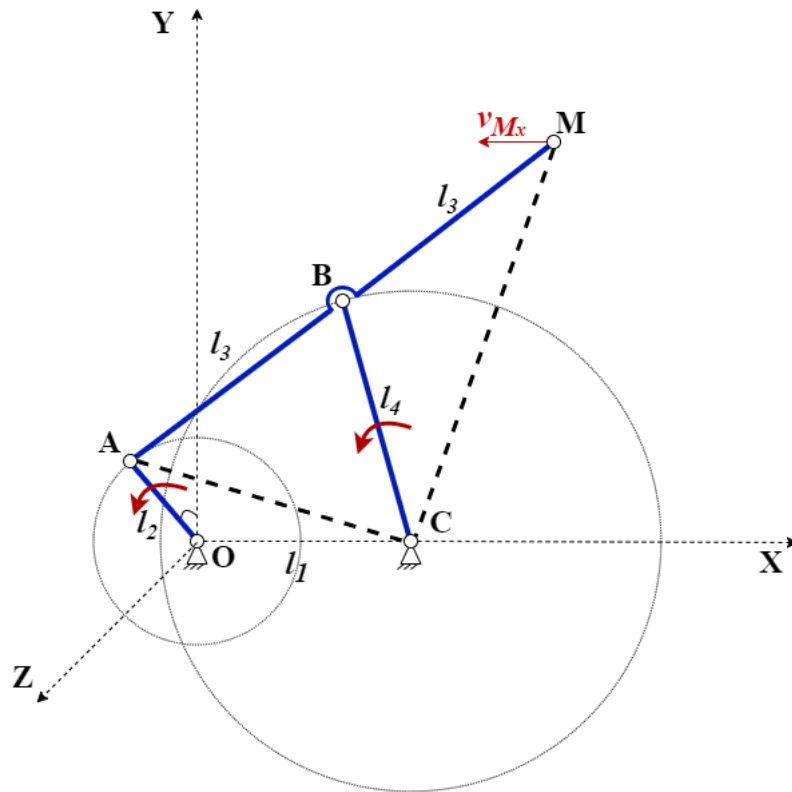


Рис.2.2. Конфигурация механизма Чебышева в произвольный момент времени

На рис.2.2 изображена конфигурация механизма Чебышева в произвольный момент времени. Кривошип OA отклонён от оси OY на произвольный угол. Также на рис.2.2 изображены окружности, по которым движутся кривошип OA и коромысло CB .

Обозначим проекцию произвольной точки P на оси OX , OY и OZ как P_x , P_y и P_z соответственно.

Рассмотрим трёхмерную постановку задачи. В идеале точки на ободе (траектория движения точки $A = (A_x, A_y, A_z)$) расположены на секторе окружности радиусом l_2 :

$$\begin{cases} A_x = l_2 \cdot \cos(\varphi) \\ A_y = l_2 \cdot \sin(\varphi) \\ A_z = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

Но так как ось двигателя наклонена, то получаем не окружность, а эллипс. Действительное положение точек на ободе мы можем найти, используя матрицу

вращения:

$$A = \text{rot}(n, \alpha) \cdot A \quad (2.3)$$

Матрица вращения в этом случае выглядит следующим образом:

$$\text{rot}(\alpha, n) = \begin{pmatrix} c + n_1^2(1 - c) & n_1n_2(1 - c) + n_3s & n_1n_3(1 - c) - n_2s \\ n_1n_2(1 - c) - n_3s & c + n_2^2(1 - c) & n_1n_3(1 - c) + n_1s \\ n_1n_3(1 - c) + n_2s & n_2n_3(1 - c) - n_1s & c + n_3^2(1 - c) \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

где $n = (n_1, n_2, n_3)$, $c = \cos(\alpha)$ и $s = \sin(\alpha)$.

Прежде всего заметим, что треугольник $\triangle ACM$ всегда прямоугольный. Это действительно так, потому что CB является медианой треугольника $\triangle ACM$ и $CB = AB = MB$. Это означает, что медиана CB является радиусом описанной около этого треугольника окружности, а сторона AM – диаметром. Значит медиана CB проведена из вершины прямого угла $\angle ACM$ на гипотенузу AM [6].

Найдём длину AC , используя проекции AC на оси OX и OY :

$$AC = \sqrt{(C_x - A_x)^2 + (C_y - A_y)^2} = \sqrt{(l_1 - A_x)^2 + A_y^2} \quad (2.5)$$

Угол $\angle ACB$ можно найти по теореме косинусов:

$$\begin{aligned} AB^2 &= AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos \angle ACB \Rightarrow \\ \Rightarrow \angle ACB &= \arccos \left(\frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2 \cdot AC \cdot BC} \right) = \arccos \left(\frac{AC^2 + l_4^2 - l_3^2}{2 \cdot AC \cdot l_4} \right) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Теперь найдём угол $\angle OCA$:

$$\text{tg } \angle OCA = \frac{C_y - A_y}{C_x - A_x} \Rightarrow \angle OCA = \arctan \left(\frac{C_y - A_y}{C_x - A_x} \right) = \arctan \left(\frac{-A_y}{l_1 - A_x} \right) \quad (2.7)$$

Угол $\angle OCB$ находится как разность углов $\angle ACB$ и $\angle OCA$:

$$\angle OCB = \angle ACB - \angle OCA \quad (2.8)$$

Тогда для того, чтобы найти координаты точки B , движущейся по окружности с центром в точке C и радиусом CB , необходимо воспользоваться формулой (2.9).

$$\begin{cases} B_x = C_x - CB \cdot \cos \angle OCB \\ B_y = C_y + CB \cdot \sin \angle OCB \\ B_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_x = l_1 - l_4 \cdot \cos \angle OCB \\ B_y = l_4 \cdot \sin \angle OCB \\ B_z = 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

Учитывая, что точка B является серединой AM , координаты точки M можно найти по формуле (2.10).

$$M = 2 \cdot B - A \quad (2.10)$$

Найдём наклон шатуна AM в точке B . Обозначим $BA = B - A$. Тогда вектор наклона ΔB_n равен

$$\Delta B_n = (-BA_y, BA_x, 0) \quad (2.11)$$

А угол наклона $\angle(\Delta B_n)$ вычисляется по формуле (2.12).

$$\angle(\Delta B_n) = \arctan \left(\frac{BA_z}{\sqrt{BA_x^2 + BA_y^2}} \right) \quad (2.12)$$

Таким образом, мы нашли кинематику всех звеньев лямбда-механизма Чебышёва в трёхмерной постановке.

2.3. Интервальный анализ

Понятие интервала возникает естественным образом при решении любой практической задачи [1]. Зачастую мы не можем точно обозначить значение какой-либо величины, но мы можем обозначить границы, в пределах которых эта величина находится. Понятие интервала также связано с вычислениями с гарантированной точностью [5]. Ведь как мы знаем, в основном компьютерные вычисления производятся в виде чисел с плавающей точкой, но точно может быть представлено лишь некоторое подмножество дробных чисел, остальные же являются приближительными. В результате этого, в ходе работы алгоритма могут накапливаться ошибки и в конечном счёте привести к очень не точному результату.

2.3.1. Основные понятия

Введём основные понятия интервального анализа, которые понадобятся в данной работе.

Интервалом вещественной оси $a = [\underline{a}, \bar{a}]$ называется множество всех чисел, расположенных между \underline{a} и \bar{a} , включая их самих:

$$a = [\underline{a}, \bar{a}] := \{x \in \mathbb{R} \mid \underline{a} \leq x \leq \bar{a}\} \quad (2.13)$$

Классическая интервальная арифметика \mathbb{IR} – это алгебраическая система, образованная интервалами $a = [\underline{a}, \bar{a}] \subset \mathbb{R}$ с формулами (2.14–2.17) для

арифметических операций сложения, вычитания, умножения и деления.

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \left[\underline{\mathbf{a}} + \underline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{a}} + \overline{\mathbf{b}} \right] \quad (2.14)$$

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \left[\underline{\mathbf{a}} - \overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{b}} \right] \quad (2.15)$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \left[\min \left\{ \underline{\mathbf{a}} \cdot \underline{\mathbf{b}}, \underline{\mathbf{a}} \cdot \overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{a}} \cdot \underline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{a}} \cdot \overline{\mathbf{b}} \right\}, \max \left\{ \underline{\mathbf{a}} \cdot \underline{\mathbf{b}}, \underline{\mathbf{a}} \cdot \overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{a}} \cdot \underline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{a}} \cdot \overline{\mathbf{b}} \right\} \right] \quad (2.16)$$

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \mathbf{a} \cdot \left[\frac{1}{\underline{\mathbf{b}}}, \frac{1}{\overline{\mathbf{b}}} \right], \quad \mathbf{b} \neq 0 \quad (2.17)$$

Брус $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n) \subset \mathbb{R}^n$ – это декартово произведение интервалов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$.

Интервальный вектор – это упорядоченный кортеж из интервалов \mathbf{a}_i , расположенный вертикально (вектор-столбец) или горизонтально (вектор-строка). Далее, говоря об интервальных векторах, будем иметь в виду вектор-столбцы.

Интервальная матрица – это прямоугольная таблица, составленная из интервалов \mathbf{a}_{ij} : $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij})$.

Пусть $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$. Будем обозначать $\underline{\mathbf{a}} = (\underline{\mathbf{a}}_1, \underline{\mathbf{a}}_2, \dots, \underline{\mathbf{a}}_n)$ и $\overline{\mathbf{a}} = (\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \dots, \overline{\mathbf{a}}_n)$. Аналогичным образом определяются $\underline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{a}}$ для интервального вектора-столбца \mathbf{a} .

Аналогично для интервальной матрицы $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij})$ точечные матрицы такого же размера $\underline{\mathbf{A}}$ и $\overline{\mathbf{A}}$ обозначают матрицы, которые образованы элементами $(\underline{\mathbf{a}}_{ij})$ и $(\overline{\mathbf{a}}_{ij})$ соответственно.

Также определяются середина интервала $\text{mid } \mathbf{a} = \frac{1}{2} (\underline{\mathbf{a}} + \overline{\mathbf{a}})$. Аналогично $\text{mid } \mathbf{A} = \frac{1}{2} (\underline{\mathbf{A}} + \overline{\mathbf{A}})$.

Пусть мы имеем интервальную систему линейных уравнений (ИСЛАУ)

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (2.18)$$

с интервальной матрицей $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij})$ размером $m \times n$, интервальным вектором $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_i)$ размером m и вектором неизвестных $\mathbf{x} = (x_i)$ размера n . Это формальная запись, которая обозначает семейство точечных СЛАУ $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, где $\mathbf{A} \in \mathbf{A}$ и $\mathbf{b} \in \mathbf{b}$. В развёрнутом виде система (2.18) может быть записана следующим образом:

$$\begin{cases} \mathbf{a}_{11}x_1 + \mathbf{a}_{12}x_2 + \dots + \mathbf{a}_{1n}x_n = \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_{21}x_1 + \mathbf{a}_{22}x_2 + \dots + \mathbf{a}_{2n}x_n = \mathbf{b}_2 \\ \dots \\ \mathbf{a}_{m1}x_1 + \mathbf{a}_{m2}x_2 + \dots + \mathbf{a}_{mn}x_n = \mathbf{b}_m \end{cases} \quad (2.19)$$

Введём понятие *объединённого множества решений*:

$$\Xi_{uni}(A, \mathbf{b}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{существуют такие } A \in A \text{ и } b \in \mathbf{b}, \text{ что } Ax = b\} \quad (2.20)$$

Теперь рассмотрим интервальную систему нелинейных уравнений

$$F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b} \quad (2.21)$$

с вектор-функцией $F : \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, интервальными векторами $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_i)$ размером l и $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_i)$ размером m и вектором неизвестных $x = (x_i)$ размера n . В развёрнутом виде система (2.21) может быть записана следующим образом:

$$\begin{cases} F_1(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_l, x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{b}_1 \\ F_2(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_l, x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{b}_2 \\ \dots \\ F_m(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_l, x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{b}_m \end{cases} \quad (2.22)$$

2.3.2. Поиск двусторонних границ решения ИСЛАУ

Дана интервальная система линейных алгебраических уравнений (2.18). Рассмотрим стационарные итерационные методы решения ИСЛАУ.

Теорема 2.1 (О сходимости стационарного одношагового итерационного процесса). *Итерационный процесс*

$$\mathbf{x}^{(k+1)} \leftarrow \mathbf{C}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{d} \quad (2.23)$$

с $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ для любого начального вектора $\mathbf{x}^{(0)}$ сходится к единственному формальному решению $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ ИСЛАУ

$$x = \mathbf{C}x + \mathbf{d} \quad (2.24)$$

тогда и только тогда, когда спектральный радиус матрицы $|\mathbf{C}|$, составленной из модулей элементов \mathbf{C} , меньше единицы: $\rho(|\mathbf{C}|) \leq 1$.

Напомним, что спектральный радиус $\rho(A)$ точечной матрицы A размера $n \times n$ – это наибольшее из абсолютных значений собственных чисел A .

Пусть матрица $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Обозначим некую фиксированную неособенную матрицу $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Заметим тогда, что объединённое множество решений ИСЛАУ $Ax = \mathbf{b}$ совпадает с объединённым множеством решений ИСЛАУ (2.24), где $\mathbf{C} = I - \Lambda A$ и $\mathbf{d} = \Lambda \mathbf{b}$ [5].

2.3.3. Линейный метод Кравчика

Метод Кравчика – это итерационный метод для внешнего интервального оценивания множеств решений интервальных линейных систем уравнений.

В этом методе интервальный вектор начального приближения $\mathbf{x}^{(0)}$ выбирают так, чтобы он входил в объединённое множество решений $\mathbf{x}^{(0)} \supseteq \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$.

Итерационный процесс строится следующим образом:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} \leftarrow \left(\Lambda \mathbf{b} + (I - \Lambda \mathbf{A}) \mathbf{x}^{(k)} \right) \cap \mathbf{x}^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.25)$$

Обычно в методе Кравчика берут $\Lambda = (\text{mid } \mathbf{A})^{-1}$, а начальную оценку множества решений можно найти различными способами, например, если $\eta = \|\mathbf{I} - \Lambda \mathbf{A}\|_\infty < 1$, то можем взять

$$\mathbf{x}^{(0)} = ([-\theta, \theta], \dots, [-\theta, \theta])^T, \quad \theta = \frac{\|\Lambda \mathbf{b}\|_\infty}{1 - \eta} \quad (2.26)$$

2.3.4. Нелинейный метод Кравчика

В практике чаще встречаются задачи с нелинейными уравнениями. Для решения таких задач предусмотрен нелинейный метод Кравчика.

Предположим, что на брус X задана система уравнений

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ F_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad (2.27)$$

Краткую форму (2.27) в краткой форме записывается как

$$F(x) = 0 \quad (2.28)$$

где $F(x) = (F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x))^T$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ и $0 = (0, 0, \dots, 0)^T$.

Для этой системы требуется уточнить двусторонние границы решений или убедиться, что решения нет.

Пусть $\mathbf{L} \subset \mathbb{R}^{n \times n}$ – интервальная матрица Липшица отображения F на брус X . В частности \mathbf{L} может быть интервальным расширением якобиана отображения F на X . Возьмём какую-нибудь точку $\bar{x} \in X$. Отображение $\mathcal{K} : \mathbb{ID} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, задаваемое выражением

$$\mathcal{K}(X, \bar{x}) := \bar{x} - \Lambda \cdot F(\bar{x}) + (I - \Lambda \cdot \mathbf{L}) \cdot (X - \bar{x}) \quad (2.29)$$

называется *оператором Кравчика* на \mathbb{D} относительно точки \bar{x} .

Если $\rho(I - \Lambda \cdot L) < 1$, то у отображения (2.29) существует единственная неподвижная точка, которая является решением системы (2.28) [5].

Положив $X^{(0)} = X$, определим итерационный процесс

$$X^{(k+1)} \leftarrow X^{(k)} \cap \mathcal{K}(X^{(k)}, \bar{x}^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.30)$$

для какой-то последовательности точек $\bar{x}^{(k)} \in X^{(k)}$.

В этом методе остаётся открытым вопрос о выборе начального приближения.

2.4. Условие заклинивания подшипника

Мы обладаем следующими данными подшипника:

- Радиус подшипника $Rb = 17.5$ мм;
- Высота подшипника $Hb = 10$ мм;
- Допустимый зазор между цилиндром и обоймой $Rbh = 0.03$ мм;
- Радиус обоймы $Rh = Rb + Rbh = 17.53$ мм;

Таким образом, имеем «идеальный» цилиндр подшипника с радиусом Rb и высотой Hb . Но в реальном случае движение не будет «идеальным». Следовательно получаем естественное *условие заклинивания подшипника*: проекция данной точки подшипника превышает допустимый зазор между цилиндром и обоймой. Подробнее об нахождении точек заклинивания подшипника можно узнать в параграфе 3.3.

2.5. Определение площади контакта повышенного трения

Итак, имеем два цилиндра: один радиуса R_1 , другой радиуса R_2 , оба цилиндра конечной высоты h вдоль оси Z . Причём R_1 и R_2 очень близки по своим значениям. Если эти цилиндры строго соосны, и их центры совпадают, то касания между ними нет. А также проекциями этих цилиндров на плоскость XU являются окружности.

Если цилиндр радиуса R_2 имеет наклон, то его проекция на плоскость XU становится эллипсом и между цилиндрами возникает трение.

В данной работе будут рассматриваться только верхние крышки цилиндров. Предположим, что цилиндр радиуса R_2 наклонён. Тогда проекция крышки цилиндра радиуса R_1 будет окружностью, а проекция цилиндра радиуса R_2 будет эллипсом.

Начнём с того, какой получается эллипс из окружности, и найдём его параметры. Изначально мы имеем окружность радиуса R_2 :

$$x^2 + y^2 = R_2^2 \quad (2.31)$$

Затем окружность умножают на симметричную матрицу вращения $P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{pmatrix}$ (так как цилиндр имеет наклон). Пусть имеем точку $(x, y)^T$. Тогда она имеет иметь следующие новые координаты: $(u, v)^T = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1x + p_2y \\ p_2x + p_3y \end{pmatrix}$. Подставим полученную точку в уравнение (2.31):

$$(p_1^2 + p_2^2)x^2 + 2p_2xy(p_1 + p_3) + (p_2^2 + p_3^2)y^2 - R_2^2 = 0 \quad (2.32)$$

Получено уравнение эллипса в виде уравнения кривой второго порядка. Этот эллипс имеет центр в точке $(0, 0)$, но повернут на некоторый угол α . Тогда по формуле (2.33) найдём угол, на который повернут эллипс [2].

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2p_2(p_1 + p_3)}{p_1^2 + p_2^2 - p_2^2 - p_3^2} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2p_2(p_1 + p_3)}{p_1^2 - p_3^2} \right) \quad (2.33)$$

Конечно же удобнее всего работать с эллипсом, заданным в канонической форме:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2.34)$$

Уравнение (2.34) задаёт эллипс с центром в начале координат $(0, 0)$, причём его оси совпадают с осями координат. Для этого повернём систему координат OXY на угол α в положительном направлении с помощью матрицы вращения $P = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$. Далее автоматически находим a и b с помощью компьютера.

2.5.1. Определение площади пересечения окружности и эллипса

Интервализуем нашу задачу. Таким образом, требуется найти пересечение следующих окружности и эллипса и посчитать площадь пересечения, где ε – очень маленькое неотрицательное число, а $a > b$:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R_1^2 + [-\varepsilon, \varepsilon] \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + [-\varepsilon, \varepsilon] \end{cases} \quad (2.35)$$

Нетрудно заметить, что если центры эллипса и окружности находятся в точке $(0, 0)$ и оси эллипса совпадают с осями координат, то точки пересечения окружности и эллипса симметричны. Из этого следует, что достаточно найти одну точку пересечения окружности и эллипса, и тогда легко можно отыскать все остальные точки пересечений.

Так и поступим, будем рассматривать те части эллипса и окружности, которые лежат в первой четверти. Тогда будем искать решение на брус $X_0 = [0, R_1 + 5\varepsilon] \times [0, a + 5\varepsilon]$. Очень важным в методе Кравчика является выбор начального приближения, если его выбрать неправильно, то метод будет расходиться. Для этого разобьём начальный брус X_0 на N интервалов X_i . Каждый из интервалов X_i используется как начальное приближение в методе Кравчика.

- С каждым интервалом запускается метод Кравчика. Возможно два случая:
- Метод Кравчика вернул пустой интервал. Это означает, что в интервале X_i нет точек пересечения.
 - Метод Кравчика вернул непустой интервал. Это означает, что в интервале X_i содержатся точки пересечения.

По итогу может быть несколько непустых интервалов. Это возможно из-за интервальности эллипса и окружности. В таком случае берут объединение этих интервалов.

После чего в результате работы метода Кравчика на начальном брус X_0 получаем интервал $\mathbf{x}_1 = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$. Тогда соответственно получаем другие точки пересечения: $\mathbf{x}_2 = [x_1, x_2] \times [-y_2, -y_1]$, $\mathbf{x}_3 = [-x_2, -x_1] \times [-y_2, -y_1]$ и $\mathbf{x}_4 = [-x_2, -x_1] \times [y_1, y_2]$.

Теперь перейдём к поиску площади получившейся фигуры. Для этого воспользуемся формулой площади Гаусса, по-другому её называют формулой шнуровки. С помощью этой формулы можно отыскать площадь простого самонепересекающегося многоугольника с заданными вершинами. Пусть заданы (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$ – декартовы координаты точек на плоскости. Тогда площадь фигуры можно найти по формуле (2.36).

$$S = \frac{1}{2} \left| \sum_{i=1}^{n-1} x_i y_{i+1} + x_n y_1 - \sum_{i=1}^{n-1} y_i x_{i+1} - x_1 y_n \right| \quad (2.36)$$

Формулу (2.36) можно расширить на интервалы:

$$\mathbf{S} = [S_1, S_2] = \frac{1}{2} \left| \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{x}_i \mathbf{y}_{i+1} + \mathbf{x}_n \mathbf{y}_1 - \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{y}_i \mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_1 \mathbf{y}_n \right| \quad (2.37)$$

Достаточно отыскать площадь фигуры, расположенной в первой и четвертой четвертях (ввиду того, что пересечение эллипса и окружности симметрично). Следовательно, по формуле рис.2.37 необходимо найти площадь фигуры, заключенной между $x_1 = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ и $x_2 = [x_1, x_2] \times [-y_2, -y_1]$, а затем получившийся результат домножить на 2.

2.6. Выводы

В данной главе была рассмотрена основная теория, необходимая для построения алгоритмов и решения поставленных задач. Одной из важнейших частей данной главы являются параграфы 2.3 и 2.5, так как интервальный анализ является основным инструментом в данной работе.

ГЛАВА 3. РАЗРАБОТКА ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

3.1. Введение

После того, как мы рассмотрели поподробнее теорию, напомним программы, которые помогут нам в исследовании наших вопросов. В этой главе приведены псевдокоды разработанных программ. Так, в параграфе 3.2 приведён псевдокод программы, которая описывает кинематику крайней точки лямбда-механизма Чебышева. А в параграфе 3.3 можно найти псевдокод программы, которая определяет заклинивание подшипника. Параграф 3.4 посвящён программе, которая вычисляет площадь контакта повышенного трения.

3.2. Программа, описывающая кинематику крайней точки лямбда-механизма Чебышева (шатунная траектория)

С помощью формул (2.3–2.12) параграфа 2.2 нетрудно написать алгоритм, который определяет кинематику всех звеньев лямбда-механизма Чебышева в трёхмерной постановке.

Благодаря современным методам программирования на *Python* мы можем написать не итеративный алгоритм, который проводит вычисления для каждого

значения угла наклона кривошипа, а создать массив последовательных углов наклона кривошипа. Как мы видим на рис.2.1 и рис.2.2, движение кривошипа начинается с угла $\varphi_{start} = \frac{\pi}{2}$ и проходит полный оборот, заканчивая углом $\varphi_{end} = \varphi_{start} + 2\pi$. Тогда создаём массив φ из 100 точек, равномерно распределённых на отрезке $[\varphi_{start}, \varphi_{end}]$. И будем выполнять вычисления одновременно для всего массива φ .

На рис.3.1 приведён псевдокод такого алгоритма.

Algorithm

Input: Длины механизма l_1, l_2, l_3, l_4 , массив углов наклона кривошипа φ , нормаль и угол наклона двигателя n и α

Output: Положения точек A, B, M для каждого угла наклона кривошипа φ соответственно, и массивы нормалей B_{normal} и углов наклона шатуна B_{angle} в точке B

1. $A \leftarrow rotation_matrix \cdot A$, где $rotation_matrix = rot(\varphi, n)$ по формуле (2.4)
2. $AB_{xy} \leftarrow \sqrt{l_3^2 - A_y^2}$
3. $AC \leftarrow \sqrt{(l_1 - A_x)^2 + A_y^2}$
4. $angle_ACB \leftarrow \arccos\left(\frac{AC^2 + l_4^2 - AB_{xy}^2}{2 \cdot AC \cdot l_4}\right)$
5. $angle_OCA \leftarrow \arctan\left(\frac{-A_y}{l_1 - A_x}\right)$
6. $angle_OCB \leftarrow angle_ACB - angle_OCA$
7. $B \leftarrow [l_1 - l_4 \cdot \cos(angle_OCB), l_4 \cdot \sin(angle_OCB), 0]$
8. $M \leftarrow 2 \cdot B - A$
9. $BA \leftarrow B - A$
10. $n \leftarrow \sqrt{BA_x^2 + BA_y^2}$
11. $B_{normal} \leftarrow \left[\frac{-BA_y}{n}, \frac{BA_x}{n}, 0\right]$
12. $B_{angle} \leftarrow \arctan\left(\frac{BA_y}{BA_x}\right)$
13. return $A, B, M, B_{normal}, B_{angle}$

Рис.3.1. Псевдокод алгоритма `lambda_mechanism_motion`

3.3. Программа, определяющая заклинивание подшипника

Итак, у нас есть массив φ из 100 точек, равномерно распределённых на отрезке $[\varphi_{start}, \varphi_{end}]$. Также имеем из параграфа 2.4 радиус подшипника $Rb = 17.5$ мм и высоту подшипника $Hb = 10$ мм. Сгенерируем массив h из 30 точек, равномерно распределённых на отрезке $[-\frac{Hb}{2}, \frac{Hb}{2}]$. Тогда «идеальное» расположение точек цилиндра подшипника можно описать следующим образом:

$$cylinder := \begin{cases} cylinder_x = Rb \cdot \cos(\varphi) \otimes (1, 1, \dots, 1)_{1 \times length(h)} \\ cylinder_y = Rb \cdot \sin(\varphi) \otimes (1, 1, \dots, 1)_{1 \times length(h)} \\ cylinder_z = (1, 1, \dots, 1)_{1 \times length(\varphi)} \otimes h \end{cases} \quad (3.1)$$

Напомним, что произведением Кронекера, обозначаемое как \otimes , двух матриц A размера $m \times n$ и B размера $p \times q$ является блочная матрица размера $mp \times nq$:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \dots & a_{mn}B \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Но, разумеется, мы имеем не «идеальный» случай. Отобразим реальное движение механизма и вычислим те точки которые, приводят к заклиниванию механизма. Это те точки цилиндра, проекция которых превышает допуск данного качества. Теперь для каждого элемента из B_{angle} , полученного с помощью алгоритма `lambda_mechanism_motion` на рис.3.1, вычисляем действительное положение точек цилиндра и проверяем, не превышает ли точка допуск.

На рис.3.2 приведён псевдокод такого алгоритма.

3.4. Программа, определяющая площадь контакта повышенного трения

В программе, определяющей площадь контакта повышенного трения можно выделить три части:

- Определение параметров эллипса
- Поиск точек пересечения с помощью метода Кравчика
- Вычисление площади фигуры, конкретно – части эллипса, не пересеченной с окружностью

Algorithm

Input: Массив углов наклона кривошипа φ , положения точек A и B для каждого элемента φ соответственно, и массивы нормалей B_{normal} и углов наклона шатуна B_{angle} в точке B

Output: Массив точек заклинивания подшипника $cylinder_out$

```

1.  $h \leftarrow linspace(-\frac{Hb}{2}, \frac{Hb}{2}, 30)$ 
    $[Rb \cdot \cos(\varphi) \otimes (1, 1, \dots, 1)_{1 \times length(h)},$ 
2.  $cylinder \leftarrow Rb \cdot \sin(\varphi) \otimes (1, 1, \dots, 1)_{1 \times length(h)},$ 
    $(1, 1, \dots, 1)_{1 \times length(\varphi)} \otimes h]$ 
3.  $cylinder\_out \leftarrow empty$ 
4. for  $\forall \beta[i] \in B_{angle}$  do
5.    $cylinder\_rot \leftarrow rotation\_matrix \cdot cylinder$ , где
      $rotation\_matrix = rot(B_{normal}[i], B_{angle}[i])$  по формуле (2.4)
6.    $cylinder\_out[i] \leftarrow empty$ 
7.   for  $\forall c[j] \in cylinder\_rot$  do
8.     if  $c[j][0]^2 + c[j][1]^2 > Rh^2$  then
9.        $cylinder\_out[i] \leftarrow c[j]$  – точка заклинивания подшипника
10. return  $cylinder\_out$ 

```

Рис.3.2. Псевдокод алгоритма jamming_of_bearing

3.4.1. Программа, определяющая параметры эллипса

Имеем эллипс, центр которого находится в точке $(0, 0)$, но он повёрнут на некоторый угол. На рис.3.3 алгоритм вычисляет параметры эллипса, заданного как кривая второго порядка, вычисляет угол поворота эллипса и поворачивает его, после этого получаем параметры эллипса, заданного в канонической форме.

3.4.2. Программа, реализующая метод Кравчика

Нелинейный метод Кравчика реализован с помощью формул (2.29) и (2.30). Метод принимает на вход параметры окружности и эллипса и начальный брус. На выход методом подаётся ответ – решение системы в виде бруса.

Algorithm

Input: Множество точек эллипса *ellipse*, матрица вращения *rot*, при применении которой получили из окружности данный эллипс

Output: Параметры *a*, *b* эллипса *ellipse* в канонической форме

```

1.  $A \leftarrow rot[0][0]^2 + rot[0][1]^2$ 
2.  $C \leftarrow rot[1][0]^2 + rot[1][1]^2$ 
3. if  $A - C == 0$  then
4.    $\alpha \leftarrow \frac{\pi}{4}$ 
5. else  $\alpha \leftarrow \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2B}{A-C}\right);$ 
6.  $new\_ellipse \leftarrow \begin{bmatrix} ellipse[0,:] \cdot \cos \alpha + ellipse[1,:] \cdot \sin \alpha, \\ -ellipse[0,:] \cdot \sin \alpha + ellipse[1,:] \cdot \cos \alpha \end{bmatrix}$ 
7.  $a \leftarrow \max new\_ellipse[0]$ 
8.  $b \leftarrow \max new\_ellipse[1]$ 
9. if  $a < b$  then
10.    $swap(a, b)$ 
11. return  $a, b$ 

```

Рис.3.3. Псевдокод алгоритма `find_ellipse_parameters`**3.4.3. Программа для поиска точек пересечения эллипса и окружности**

Данная программа ищет один интервал пересечения в первой четверти. Это возможно, так как центры эллипса и окружности находятся в точке $(0, 0)$, а оси эллипса совпадают с осями координат. А следовательно точки пересечения симметричны. Для поиска интервала пересечения используется нелинейный метод Кравчика из параграфа 3.4.2. Для того, чтобы отыскать три другие точки пересечения, необходимо воспользоваться параграфом 2.5.1.

На рис.3.5 представлен псевдокод алгоритма.

3.4.4. Программа для вычисления площади части эллипса, не пересеченной с окружностью

После того, как были найдены точки пересечения, необходимо посчитать площадь фигуры. Очевидно, что площади части фигуры, расположенной в первой и четвёртой частях координатной плоскости и части фигуры, расположенной во второй и третьей частях координатной плоскости, равны. Следовательно, можно

Algorithm

Input: Радиус окружности r , параметры эллипса a и b , параметр интервальности ε , начальный брус X_0

Output: Решение системы в виде бруса X

1. $X \leftarrow X_0$
2. $I \leftarrow \begin{bmatrix} [1, 1] & [0, 0] \\ [0, 0] & [1, 1] \end{bmatrix}$
3. $J \leftarrow \begin{bmatrix} [2X[0], 2X[1]] \\ [\frac{2X[0]}{a^2}, \frac{2X[1]}{b^2}] \end{bmatrix}$
4. $\lambda \leftarrow J^{-1}$
5. $\beta \leftarrow I - \lambda J$
6. **while** *True* **do**
 7. $F \leftarrow \begin{bmatrix} [\bar{X}[0]^2 + \bar{X}[1]^2 - r^2 - [-\varepsilon, \varepsilon]] \\ [\frac{\bar{X}[0]^2}{a^2} + \frac{\bar{X}[1]^2}{b^2} - 1 - [-\varepsilon, \varepsilon]] \end{bmatrix}$
 8. $tmp_X \leftarrow \bar{X} - \lambda F + \beta(X - \bar{X})$
 9. $tmp_X \leftarrow tmp_X \cap X$
 10. **if** tmp_X *is empty* **then**
 11. $X \leftarrow empty$
 12. **break**
 13. **if** $tmp_X == X$ **then**
 14. **break**
 15. $X \leftarrow tmp_X$
16. **return** X

Рис.3.4. Псевдокод алгоритма non_linear_kravchik

Algorithm

Input: Радиус окружности r , параметры эллипса a и b , параметр интервальности ε , число интервалов N

Output: Интервал пересечения эллипса и окружности в первой четверти, либо пустое множество, если пересечения нет (то есть окружность и эллипс почти совпадают)

```

1.  $x \leftarrow \text{linspace}(0, a + 5\varepsilon, N)$ 
2.  $y \leftarrow \text{linspace}(0, r + 5\varepsilon, N)$ 
3.  $\text{array\_X} \leftarrow \text{empty}$ 
4. for  $i \in [0, N - 1]$  do
5.     for  $j \in [0, N - 1]$  do
6.          $X_0 \leftarrow \begin{bmatrix} [x[i], x[i + 1]] \\ [y[j], y[j + 1]] \end{bmatrix}$ 
7.          $X \leftarrow \text{non\_linear\_kravchik}(r, a, b, \varepsilon, X_0)$ 
8.         if  $X$  is not empty then
9.              $\text{array\_X} \leftarrow X$ 
10. if  $\text{array\_X}$  is empty then
11.     return None
12.  $\text{answer} \leftarrow \text{Union}(\text{array\_X})$ 
13. return  $\text{answer}$ 

```

Рис.3.5. Псевдокод алгоритма find_intersection_points

найти площадь только одной части фигуры и умножить получившееся значения на 2. Но ввиду того, что в формуле (2.36) присутствует множитель $\frac{1}{2}$, то его просто можно опустить и будет получена сразу площадь всей фигуры.

На рис.3.6 представлен псевдокод такой программы.

3.5. Выводы

Таким образом, был разработан ряд алгоритмов, с помощью которых можно выполнить поставленные задачи, такие как анализ работы плоского лямбда-механизма Чебышева в трехмерной постановке, поиск точек заклинивания подшипника. Поиск площади контакта повышенного трения реализован только для «верхней»

Algorithm

Input: Эллипс, заданный множеством интервалов *ellipse*, окружность, заданная множеством интервалов *circle*

Output: Площадь фигуры S

1. $points \leftarrow ellipse + reverse(circle)$
2. $S \leftarrow points[-1][0] \cdot points[0][1] - points[0][0] \cdot points[-1][1]$
3. **for** $i \in [0, n - 1]$ **do**
4. $S+ = points[i][0] \cdot points[i + 1][1] - points[i + 1][0] \cdot points[i][1]$
5. **return** S

Рис.3.6. Псевдокод алгоритма find_area

крышки цилиндра, так как очевидно, что она имеет самую большую площадь пересечения.

ГЛАВА 4. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

4.1. Введение

После разработки целого ряда алгоритмов в главе 3, конечно же следует посмотреть и проанализировать результаты, полученные в результате выполнения данных алгоритмов.

4.2. Анализ работы плоского лямбда-механизма Чебышева

Для анализа плоского лямбда-механизма Чебышева были использованы значения $l_1 = 2$, $l_2 = 1$, $l_3 = 2.5$, $l_4 = 2.5$. При вычислениях полагалось, что ось двигателя наклонена в направлении оси OX , т.е. $n = [1, 0, 0]$, на угол $\alpha = \frac{1}{30}$ радиан ≈ 2 градуса.

Тогда матрица вращения выглядит следующим образом:

$$rot(\alpha, n) = \begin{pmatrix} 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9994 & -0.0333 \\ 0 & 0.0333 & 0.9994 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

С помощью алгоритма на рис.3.1 получили траекторию движения механизма. А конкретно – траектории движения точек A , B , M , а также углы наклона B_{angle} и нормали B_{normal} шатуна в зависимости от угла наклона кривошипа φ . Результаты сохранены в gif-картинке. Можно увидеть скриншоты на рис.4.1 и рис.4.2, где изображено положение механизма в разные моменты времени в двухмерной и трехмерной системах координат.

На рис.4.1 и рис.4.2 красным и оранжевым цветами изображены звенья механизма. Серым цветом изображена окружность, по части которой движется точка B . Синим цветом изображены траектории движения точек: A – малая окружность, B – часть большой окружности, M – траектория, похожая на шляпку гриба в плоскости OXY .

4.3. Определение условий возникновения повышенного трения

Используя данные из параграфа 2.4 и алгоритм на рис.3.2, получим взаимное положение цилиндра подшипника и отверстия шатуна. Тогда можно увидеть, что

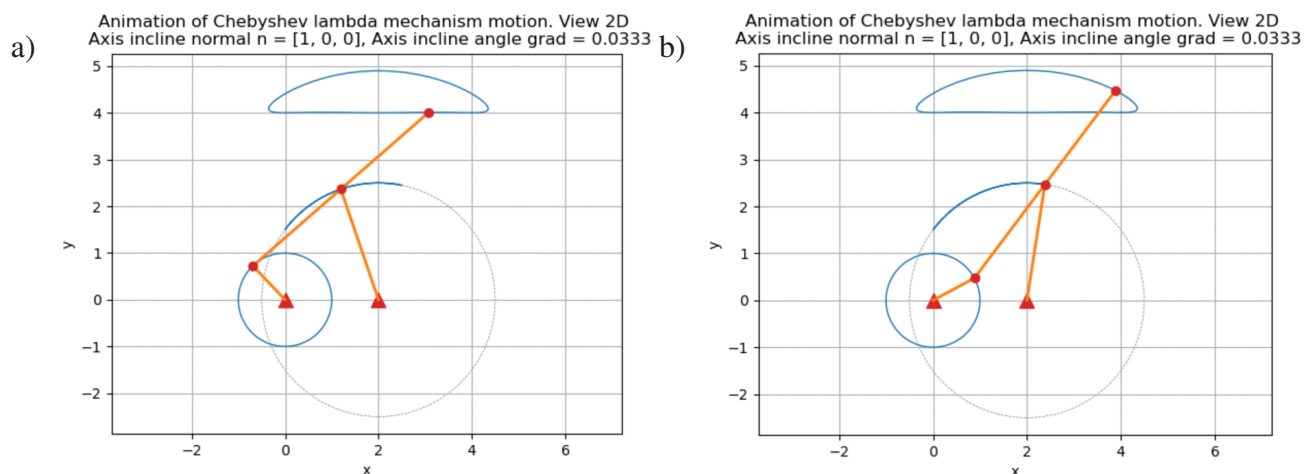


Рис.4.1. Движение лямбда-механизма Чебышева в 2D, в том числе: *a* — в начале движения; *b* — в конце движения.

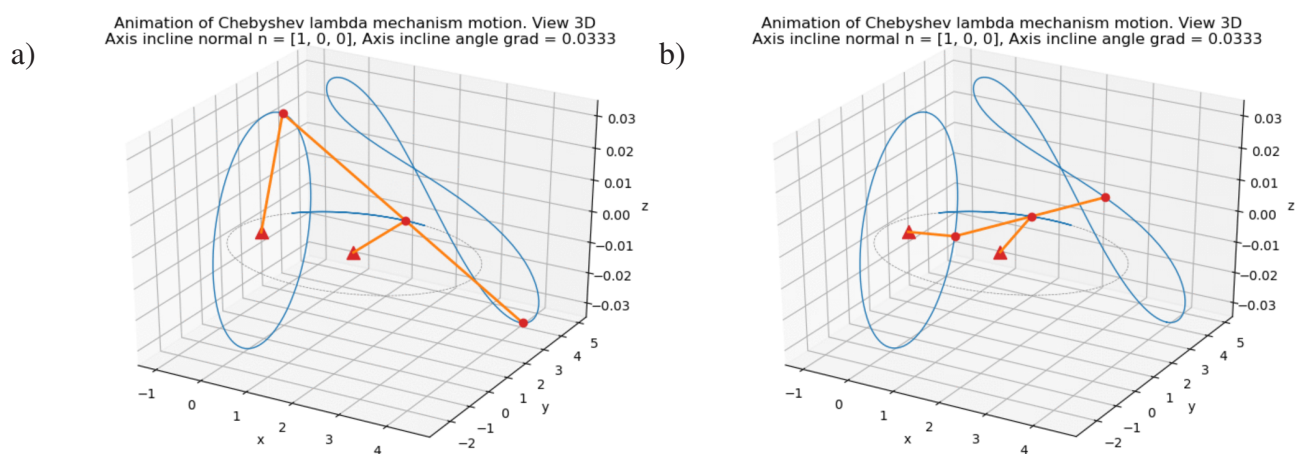


Рис.4.2. Движение лямбда-механизма Чебышева в 3D, в том числе: *a* — в начале движения; *b* — в конце движения.

движение точек цилиндра происходит не «идеально» по окружности, а по эллипсу. Результаты сохранены в gif-картинке. Можно увидеть скриншоты на рис.4.3. Места, где точки цилиндра выходят за пределы «идеальной» окружности с допуском, отмечены красным цветом.

4.4. Пример работы алгоритма на искусственном примере

Так как в случае с подшипником мы оперируем числами, близкими по величине, то будет затруднительно показать, как алгоритм находит точки пересечения. Для этого продемонстрируем, как алгоритм находит точки пересечения на тестовом примере.

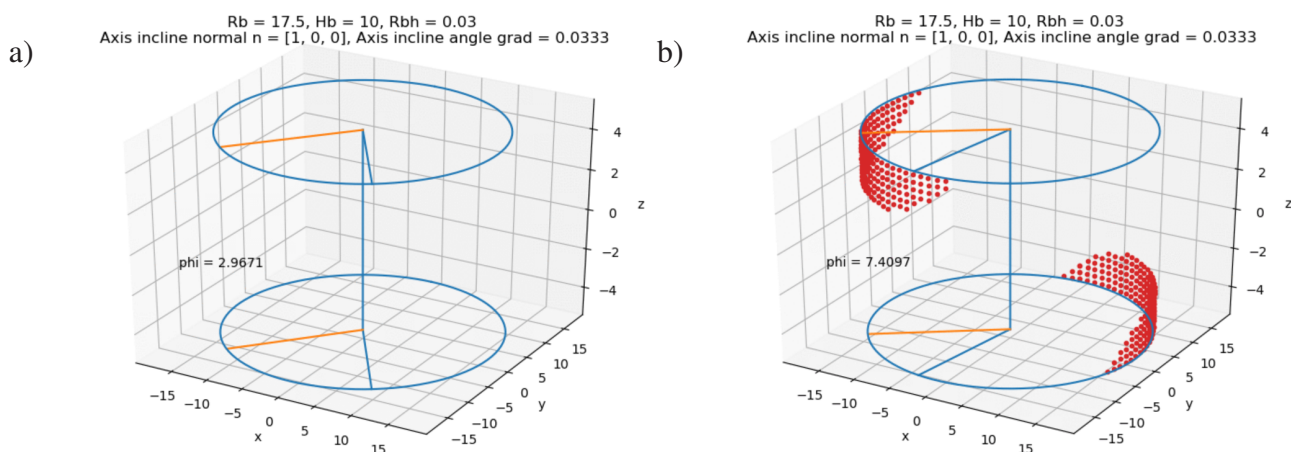


Рис.4.3. Взаимное положение цилиндра подшипника и отверстия шатуна: *a* — положение без заклинивания; *b* — положение с заклиниванием.

На рис.4.4 можно увидеть, что алгоритм находит 4 интервала пересечения эллипса и окружности. На рис.4.4а изображены все четыре интервала. На рис.4.4b изображен один интервал, находящийся в первой четверти.

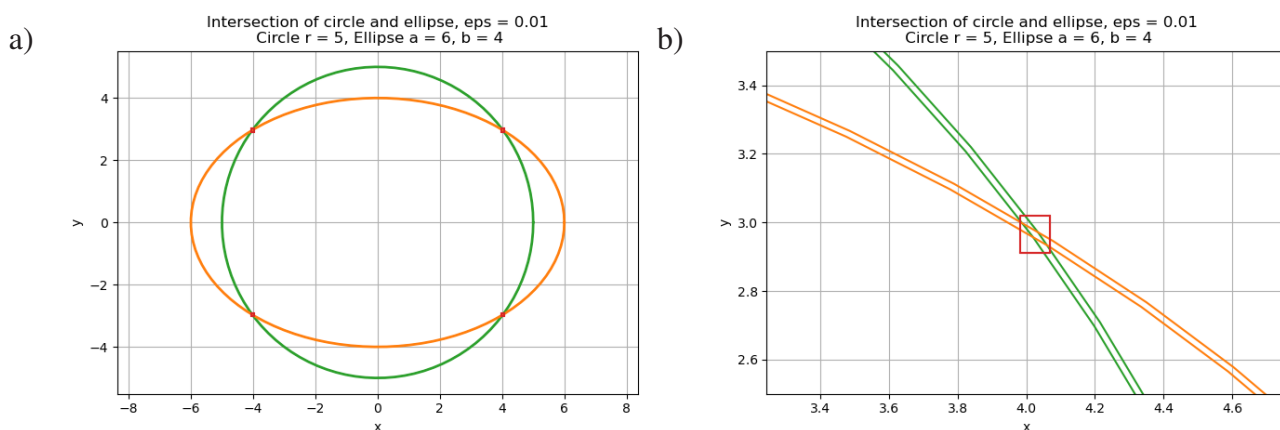


Рис.4.4. Найденные интервалы пересечения для тестового пример: *a* — все интервалы пересечения; *b* — интервал пересечения в первой четверти.

На рис.4.5 можно увидеть, что алгоритм правильно находит нужную область эллипса, не пересечённого с окружностью, находящую в первой и четвертой четвертях. На рис.4.5а можно увидеть всю такую область (где синим цветом – часть эллипса, красным – часть окружности). На рис.4.5b можно увидеть приближённо участок около пересечения в первой четверти и то, как разбиваются на интервалы эллипс и окружность.

4.5. Выработка требований к геометрии изделия

Рассмотрим часть цилиндра подшипника, находящуюся на высоте $\frac{H_b}{2}$. Как уже было сказано ранее, в «идеальном» варианте эта часть является окружностью,

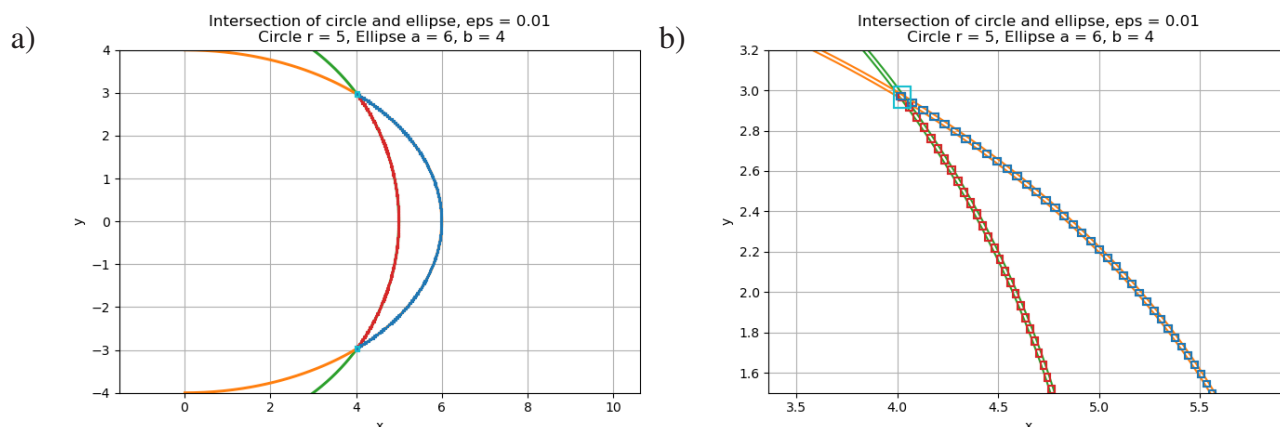


Рис.4.5. Пример нахождения области эллипса, не пересечённой с окружностью, в первой и четвертой четвертях: *a* — вся область в первой и четвертой четвертях; *b* — увеличенная область около пересечения в первой четверти.

но, к сожалению, эта часть подвергается деформации при движении подшипника и становится эллипсом. Построим тогда зависимость площади части эллипса, не пересечённого с окружностью, от угла наклона кривошипа. Будем использовать $\varepsilon = 0.0001$. Эту зависимость можно увидеть на рис.4.6. На рис.4.7 и рис.4.8 представлены увеличенные участки этой зависимости для начала и конца движения.

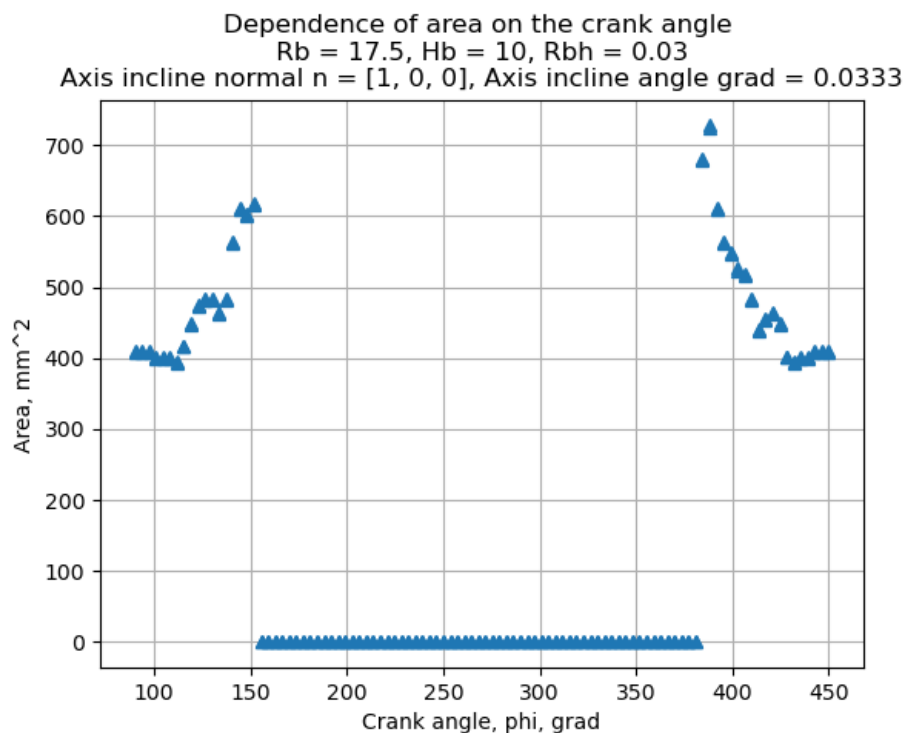


Рис.4.6. Зависимость площади части эллипса, не пересечённой с окружностью от угла наклона кривошипа

Как мы видим, очень большое пересечение возникает в начале движения и в конце движения. На большом участке приблизительно $\varphi = (155^\circ, 385^\circ)$ пересечения не возникает.

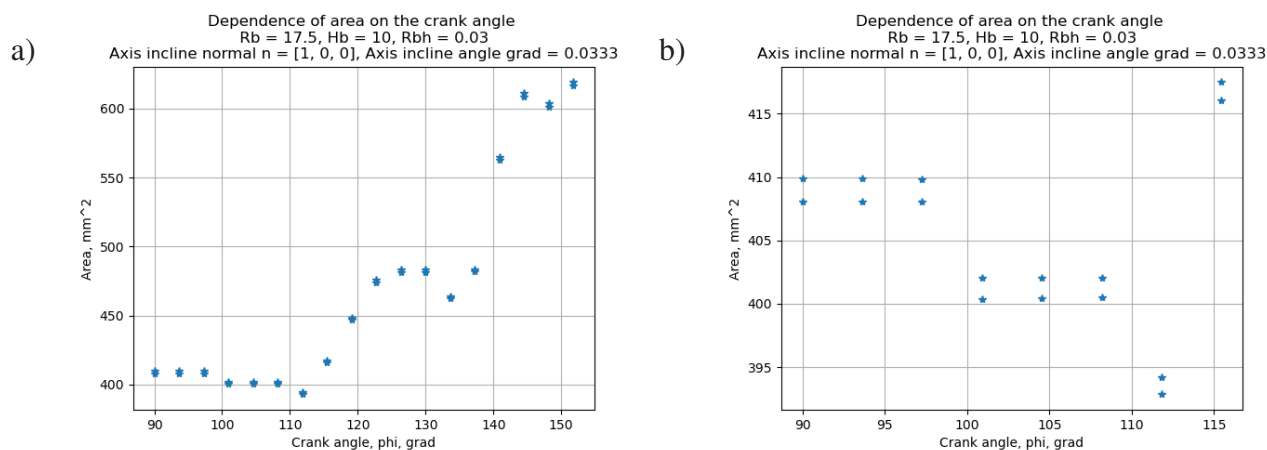


Рис.4.7. График зависимости площади части эллипса, не пересечённой с окружностью, от угла наклона кривошипа: *a* — промежуток $\varphi = [0^\circ, 155^\circ]$; *b* — промежуток $\varphi = [0^\circ, 115.5^\circ]$.

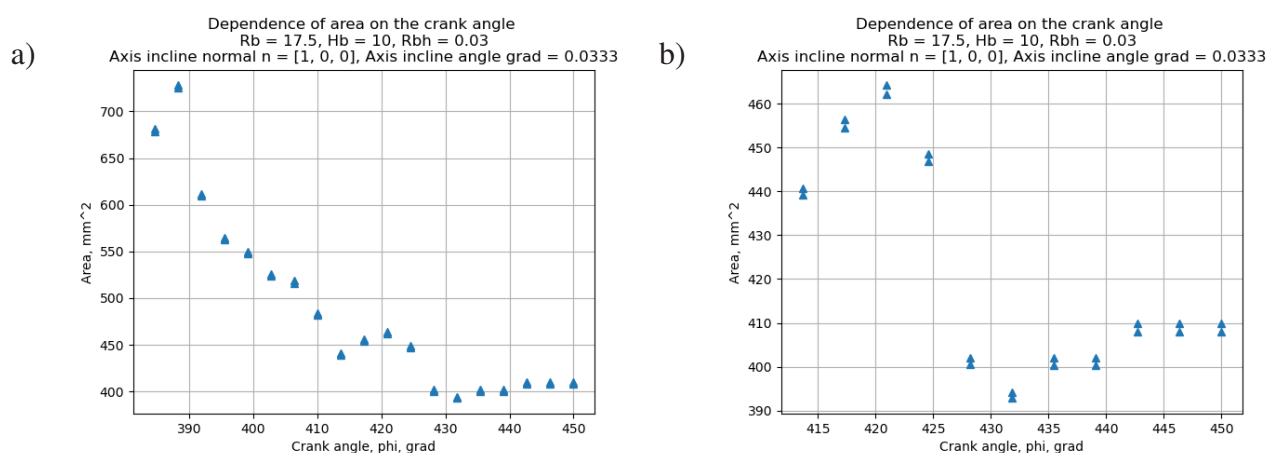


Рис.4.8. График зависимости площади части эллипса, не пересечённой с окружностью, от угла наклона кривошипа: *a* — промежуток $\varphi = [385^\circ, 450^\circ]$; *b* — промежуток $\varphi = [414^\circ, 450^\circ]$.

4.6. Выводы

Таким образом, мы продемонстрировали работу алгоритмов, разработанных в главе 3. Получили траектории движения звеньев лямбда-механизма, определили условия возникновения повышенного трения и рассчитали площади части эллипса, не пересечённой с окружностью.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе работы решены следующие задачи, объединяющие методы исследования механических конструкций и инструментов интервального анализа.

На первом этапе построена математическая модель лямбда-механизм Чебышёва в классической двумерной постановке и проверена адекватность шатунной траектории требуемым аналитическим свойствам: наличию квазипрямолинейного участка и траектории возврата. Далее, построена трехмерная модель, учитывающая пространственное расположение обного из звеньев механизма. Для сочленения звеньев механизма подшипником построена математическая модель с учетом принятых в механическом конструировании системы квалитетов.

На втором этапе полученный результат сформулирован в виде постановки задачи пересечения кривых второго порядка с интервальными неопределенностями параметров. Тем самым произведен перенос системы допусков и посадок в методологию интервального анализа. Полученная система нелинейных уравнений решена методом Кравчика и получены точки пересечения кривых. После этого произведена оценка площади пересечения интервально заданных кривых. Точки пересечения кривых дают информацию зависимости углов работы механизма с повышенным трением, а площадь пересечения деталей подшипника является мерой величины трения в нем.

Разработанная математическая модель и программный код будут использоваться в качестве инструмента для проектирования и анализа работы шторочного механизма защиты оптических зеркал в лазерной диагностике плазм, разрабатываемой в ФТИ им. А.Ф.Иоффе РАН для международного проекта ITER.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Баженов А. Н.* Интервальный анализ. Основы теории и учебные примеры: учебное пособие. — СПб: Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, 2020. — 78 с. — URL: <https://elib.spbstu.ru/dl/2/s20-76.pdf/info>.
2. *Емелин А.* Как привести уравнение линии второго порядка к каноническому виду? — URL: http://mathprofi.ru/kak_privesti_uravnenie_linii_2_poryadka_k_kanonicheskomu_vidu.html (дата обращения: 30.05.2020).
3. *Ковалев М. Д.* Геометрические вопросы кинематики и статики. — М.: Изд-во МГУ, 2019. — 256 с.
4. *Чебышев П. Л.* Полное собрание сочинений П.Л. Чебышева [В 5 томах]. Теория механизмов. т. 4. — М.: Изд-во АН СССР, 1948. — 258 с.
5. *Шарый С. П.* Конечномерный интервальный анализ. — Новосибирск: Изд-во «XYZ», 2020. — 637 с. — URL: <http://www.nsc.ru/interval/Library/InteBooks/SharyBook.pdf>.
6. *Shengnan Lu, Dimiter Zlatanov R. M.* A new family of deployable mechanisms based on the Hoekens linkage // Mechanism and Machine Theory. — 2014. — Vol. 73. — P. 130–153. — URL: https://www.lucidarme.me/wp-content/uploads/2016/10/2014_J_MMT_DM_Straight_Line_small.pdf (visited on 20.03.2020).