Mustererkennung - Schönherr

Franz Köstner

WS2013/14

1 Zum Begriff ME (pattern recognition)

1.1 Einordnung des Gebietes

Erkennung (Klassifikation) von:

- Bildmustern
- Sprachmustern
- Zeichenmustern
- ...

Muster : Datensatz (Abstraktion), zu einer Klasse gehörig

Unterscheidung von:

- numericher Mustererkennung
- Mustererkennung mit KNN
- syntaktische Mustererkennung

Problem: korrekte Kl.-Einordnung von verschiedenen Formen dereselben Objekte
Beispiel: A, $A, \forall$

Mustererkennung und Bildverarbeitung ist unterschiedlich hat aber vielen Gemeinsamkeiten

- Bildverarbeitung: Objekte finden
- Mustererkennung: Klassifikation von Objekten

Typisches Vorgehen (num. Mustererkennung, KNN)

	Beispiel
Rodaten	Pixel-Bild (evlt. farbig)
$\downarrow$	
interessiernde Objekte	Menschen
$\downarrow$	
Merkmalsvekoren	Nasenlänge , ...
$\downarrow$ f	Funktionen (zu konstruieren), die vom Merkmalsraum in Entscheidungsraum abbilden
Entscheidungsvektoren	
$\downarrow$	
Klassennzuordnung	

1.2 Typische Anwendungen

(a) Schriftzeichenerkennung
$\hookrightarrow$ OCR-Software (optical character recognition)

- Bankbelege: ca. 90% Erkennung
- Erkennen gedruckter Schrift
- Handschrift
- Unterschriften-Erkennung

(b) Objekterkennung

- Werkstück auf Fließband
- Pflanzen zwischen Bahngleisen

(c) Qualitätskontrolle

- Produktprüfung: Bsp.: Dachziegel (Risse)

(d) Fernerkundung

- Lagerstätten für Ressourcen
- Waldbeschaffenheit
- Umwelterkennung: Bsp.: Land-Wasser-Grenzen

(e) medizinische Anwendungen

- EKG
- EEG
- CT-Bilder

- Rönten-Bilder
- Mikroskop-Bilder

(f) Auswertung seismographischer Messungen
   - Erdbeben?

(g) Roboter-Fußball
   - Robotererkennung
   - Ballerkennung
   - Spielfelderkennung
   - Torerkennung

(h) Sprachverarbeitung
   - Worterkennung
   - Sprechererkennung

(i) Fingerabdruckerkennung

(j) Gesichtserkennung

(k) Iriserkennung

(l) Handerkennung

(m) CRM-Anwendungen (customer relationship management

1.3 Begriffe und Bezeichnungen

Muster:

$\underbrace{\rightarrow}_{informal}$ Datensatz (Komponenten mit Funktionen)

$$\underbrace{\rightarrow}_{formal} f(x) = \begin{pmatrix} cf_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \ldots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{pmatrix}$$

Muster-Beispiele:

(a) Sprache (mit Mikrofon aufgenommen)
$f(t)$ - elektrischer Spannungsverlauf

(b) Schwarzweiß-Bild f(x,y) - Grauwert im Punkt (x,y)

(c) Fernsehbild $f(x,y,t) = \begin{pmatrix} cf_r(x,y,t) \\ f_g(x,y,t) \\ f_b(x,y,t) \end{pmatrix}$

Mustererkennung - Analyse und Klassifikation von Mustern

Merkmale: Daten zur Beschreibung eines Objektes

- Name
- Datentyp
- Wert

n - Anahl (relevanter) Merkmale

Obejk: Menge von Merkmalswerten (eigentlich Bild eines Objektes)
Klasse: Menge von zusammengehörigen Objekten

Stichprobe: endliche Menge von Objekten

- klassifizierte
- unklassifizierte

Klassifikator: Alg., der Obj. Klassen zuordnet
- Güte des Klassifikators: z.B. $\frac{AnzahlkorrekterKlassifikationen}{AnzahlallerKlassifikationen}$

Lernen eines Klassifikators (mit Lehrer)
- anhand einer klassifizierten Strichprobe (iterativ)

Clustern (ohne Lehrer)
- unüberwachtes “Lernen“, d.h. aufwendige Konstruktion eines Klassifikators

1.4 Merkmale und Invarianten

Robustheit der Merkmale gegen Störungen ist wünschenswert

- Robustheit gegen geometrische Transformation
  - Skalierung

  - Rotation
  - Translation

- Signalrauschen
- Deformationen (Lächeln $\rightarrow$ Gesichtsdeformation)

Invarianz geben alle Störungen unmöglich

1.4.1 Invarianten

Merkmale, die bezüglich bestimmten Transformation konstant sind:

- Flächeninhalte invariant gegen Translation und Rotation (kann bei Rundungen Fehler erzeugen)
- aber nicht gegen Skalierung

Invariantentheorie:
Welche Merkmale sind gegen welche Transformation invariant?

Motivation:
Erkennen von gestörten Mustern

wichtige Transformationen:

- Skalierung: $y = c \cdot x$ (c ist Konstante)
- Translation: $y = x + a$ (a ist konstanter Vektor)
- Rotation um:
  - Winkel φ
    - gegen: UZS: $y = (\begin{pmatrix} cc\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix})$
- affine Transformation: y = A x + a (A: Matrix, a geg. Vektor)
- Projektion $y_1 = \frac{a_10 + a_11x_1 + a_12x_2}{1 + a_31x1 + a_32x_2}$
  $y_2 = \frac{a_20 + a_21x_1 + a_22x_2}{1 + a_31x1 + a_32x_2}$

Affine Invarianten - ein Beispiel
p_0, p_1, p_2, p - 4 Punkte
sodass $p_1 - p_0$ und $p_2 - p_0$ linear unabhängig sind
dann existieren λ_1, λ_2 , so dass
$p = p_0 + \lambda_1(p_1 - p_0) + \lambda_2(p_2 - p_0)$

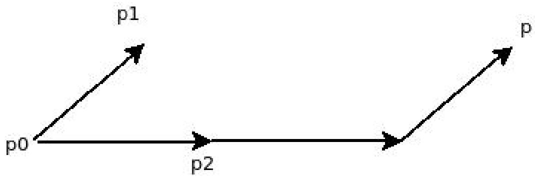


Abbildung 1.1: Beispiel: $p = 0.5(p_1 - p_0) + 2(p_2 - p_0)$

$Ap + a = Ap_0 + a + \lambda_1(A_1 + a - A_0 - a) + \lambda_2(A_2 + a - A_0 - a) \hookrightarrow \lambda_1, \lambda_2$ invariant gegen affine Transformationen

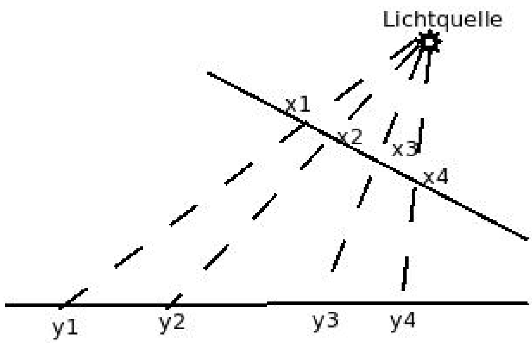
Wichtig: Entsprechung der Basispunkte
$p - q$ $p_1 - q_1 \ldots$ zu garantieren (per Augenmaß)
Diese Aufgabe ist ein Referenzproblem

Danach A, a bestimmbar

Eigenschaft affiner Transformationen:

- Geraden gehen in Geraden über. (Collinearität)
- Abstände von Punkte ändern sich um einen gemeinsamen Faktor. Bei Projektiven Transformationen gibt es keinen gemeinsamen Faktor. Projektive Transformationen sind auch collinear.

Das Doppelverhältnis:
Situationsbeschreibung
4 collineare Punkte in einem Referenzmuster gegeben (x_i)
4 Bildpunkte (nach proj. Abbildung) gegeben (y_i)
Annahme: Referenzproblem gelöst



Doppelverhältnis: $DV(x) = \frac{\frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_3}}{\frac{x_4 - x_2}{x4\_x_3}}$

Satz: DV(x) = DV(y), d.h. Invarianz gegen proj. Transformation

Übung: Aufgabe1:
Aufnahmen von zwei projektiven Kameras. Es existieren in Bild 1 4 Charakteristische Punkte.

- $P_1 = (0, 1)$
- $P_2 = (3, 10)$
- $P_3 = (4, 13)$
- $P_4 = (6, 19)$

Das zweite Bild enthält eine möglicherweise entsprechende Strecke.

- $Q_1 = (-13, 26)$
- $Q_2 = (-\frac{13}{7}, \frac{26}{7})$
- $Q_2 = (-\frac{13}{9}, \frac{26}{9})$
- $Q_2 = (-1, 2)$

Doppelverhältnis von q = 0.5
Doppelverhältnis von p = 0.5

Aufgabe2:

- $P_1 = (0, 3)$
- $P_2 = (1, 2)$
- $P_3 = (2, 1)$
- $P_4 = (3, 0)$

Das zweite Bild enthält eine Möglicherweise entsprechende Strecke mit den mutmaßlich entsprechenden Punkten q_1 bis q_3.

- $Q_1 = (0, 6)$
- $Q_2 = (2, 4)$
- $Q_2 = (4, 2)$

Wo müsste ein vierter Referenzpunkt gefunden werden? Lösung: $q_4 = (0, 6)$

1.4.2 Flächeninvarianten

(a) Determinantenmethode

Berechnnung von Streckenlängen, Dreiecksflächen, Tetraedervolumina, ... können mittels der Eckpunkt mithilfe von Determinanten berechnet werden. Untersuchung des Verhaltens von Determinanten bei Transformationen $\rightarrow$ mögliche eine Reihe von Determinaten abzuleiten

(b) Formfaktor F

$F = \frac{u^2}{4f}$

u - Umfang

f - Fläche

Beispiel: Kreis mit Durchmesser 1

F(Kreis) $= \frac{(\pi * d)^2}{4 + * \frac{\pi}{4} d^2} = \pi$

F(Quadrat) $= \frac{(4 * a)^2}{4 * a^2} = 4$

F beschreibt die Unrundheit einer Fläche

Im Allgemeinen ist kein Rückschluss auf die Form möglich.

1.4.3 Momente

Berechnung von geometrischer Momente:
F sei eine Fläche (z.B. Kreis)
Momente der Ordnung p + q

$$M_{pq} = \iint_F x^p * y^q dxdy$$

Interpretation von Momenten
M_{00} = Fläche von F
M_{10}/M_{00} = X-Koordinate des Schwerpunktes
M_{01}/M_{00} = Y-Koordinate des Schwerpunktes
M_{20}, M_{02} = Trägheitsmomente bezüglich Koordinaten-Achsen
$M_{20} + M_{02}$ = polares Trägheitsmoment bezüglich (0,0)
M_{11} = ?

gegeben: flächenhaftes Objekt
Berechnung des Schwerpunktes
Translation der Fläche, so dass Schwerpunkt auf (0,0) liegt.
$\hookrightarrow$ Fläche F

1.4.4 Die Trägheitsellipse

Definition: Die Ellipse

$$M_{20} * x^2 + 2 * M_{11} * x * y + M_{02} * y^2 = 1$$

heißt Trägheitsellipse in Mittelpunktelage einer Fläche F.
Bemerkung: Es gilt immer $M_{20} * M_{02} \geq M_{11}^2$, so dass es sich wirklich um einne Ellipse handelt.

Definition: Neigung von F gegen X-Achse = Neigung der Trägheitsellipse von F gegen X-Achse
Zielstellung: Feststelllen des Neigungswinkels von F

F samt Ellipse wird entegen dem Uhrzeitgersinn um den Winkel φ gedreht. (um Koordinatenursprung)
$\hookrightarrow$ neues (u,v)-Koordinatensystem
Im neuen System soll die Ellipse in Hauptachsenlage liegen, dass heißt φ ist passend zu wählen.
Berechnung der neuen Momente 2. Ordnung (nach Drehung):

$M_{20}(\varphi) = \iint_{F'} v^2 dvdu$ (F' : F im (u,v)-System)
$= \iint_F (x + \cos(\varphi) - y - \sin(\varphi)^2 dxdy$
$= \iint_F (x^2 + \cos^2(\varphi) - 2 * x * y * \sin(\varphi) * \cos(\varphi) + y^2 * sin^2(\varphi))dxdy$
$= M_{20} + cos^2(\varphi) - 2 * M_{11} * \sin(\varphi) * \cos(\varphi) + M_{02} * \sin(\varphi)$
Ebenso ergibt sich $M_0 2(\varphi) = M_{02} + cos^2(\varphi) + 2 * M_{11} * \sin(\varphi) * \cos(\varphi) + M_{20} * \sin(\varphi)$
Ferner gilt:
$M_{11}(\varphi) = \iint u * vdudv$
$= \iint_F (x * \cos(\varphi) - y * \sin(\varphi)) * (x * \sin(\varphi) + y * \cos(\varphi))dxdy$
$= \iint_F (x^2 * \sin(\varphi) * \cos(\varphi))dxdy \iint_F (x * y * \cos^2(\varphi))dxdy \iint_F (x * y * sin^2(\varphi))dxdy - \iint_F (y^2 * \sin(\varphi) * \cos(\varphi))dxdy$
$= (M_{20} - M_{02}) * \sin(\varphi) * \cos(\varphi) + M_{11} * (\cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi))$
Nullsetzten dieses Ausdrucks (also $M_{11}(\varphi)$), wenn Hauptachsenlage der Trägheitsellipse im (u,v)-System zu erreichen.
Division durch $\cos^2(\varphi)(\varphi \neq \frac{\pi}{2}) \rightarrow$ Übergang zum Tangens
$\hookrightarrow 0 = (M_{20} - M_{02} * \tan(\varphi) + M_{11} * (1 - \tan^2(\varphi))$
Dividieren durch $M_{20} - M_{02}$ und durch $(1 - \tan^2(\varphi))$ und * 2
$\frac{2*M_{11}}{M_{02}-M_{20}} = \frac{2*\tan(\varphi)}{1-\tan^2(\varphi)} = \tan(2 * \varphi)|(\varphi \neq \frac{\pi}{4})$
$\hookrightarrow q = \frac{1}{2} * \arctan(\frac{2*M_{11}}{M_{02}-M_{20}})$
Die Berechnung ist nicht möglich bei Gleichheit von M_{20} und M_{02} Gründe dafür sind mögliche Regelmäßigkeiten der Fläche - Beispiele sindregelmäßige Polygone oder ein Rechteck, welches von der Normalelage um 45° gedreht ist.
Bemerkung: Wenn eine Fläche gedreht wird, dreht sich die zugehörige Trägheitsellipse

automatisch mit.

Ellipsengleichung im Hauptachsenlage (allgemein)
$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$

a - Länge vom (0,0) bis zum linken/rechten Scheitelpunkt
b - Länge vom (0,0) bis zum unteren/oberen Scheitelpunkt

Setze (passend gewählt):
$a = \frac{1}{\sqrt{M_{20}(\varphi)}}$ $b = \frac{1}{\sqrt{M_{02}(\varphi)}}$
$\downarrow$
$M_{20}(\varphi)v^2 + M_{02}(\varphi)v^2 = 1$

Ausblick:

(a) Übertragung zur komplexen Ebene (x + iy) - Berechnung komplexer Momente
Bekannt: H_v-Invarianten $(H_1, \ldots, H_{12})$

(b) Berechnung von Linienmomenten mit Kurvenintegralen

2 Mustervergleich (Matching)

2.1 Abstandsmaße

Referenzmuster (template) sei gegeben - mit mathemtischem Modell
beziehungweise für jede Klasse ein Referenzmuster → modellbasiertes Matching
Problem: neues Muster ähnlich zu einem Referenzmuster?
Berücksichtigung von:

- Position
- Skalierung
- evtl. Rotation
- Orientierung

Muster durch Signalwerte gegeben:
Beispiel: Grauwerte im interessiernden Gebiet G
r(x,y) - Grauwerte der Referenzmusters, $(x, y) \in G$
f(x,y) - Grauwerte eines gegeben Bildes
Abstand zwischen 2 Bildern (Bsp)

a_1= max | f(x,y)- r(x,y) | , $(x, y) \in G$

$a_2 = \iint_G (f(x,y) - r(x,y))^2 dxdy$

$a_3 = \sum_{(x,y)\in G} (f(x,y) - r(x,y))^2 dxdy$

Fall qualitative Merkmale: Hamming-Distanz
$a_4 = \sum_i |x_i - y_i|$

2.1.1 Abstand endlicher Punktmengen

Nutzung für:

- Obejekterkennung in Bildern

- Handschrifterkennung

$A, B \ldots$ endliche Punktmengen
Abstand zweier Punkte:
$d(a,b) = \|a-b\|$, mit $\|x\|$ gleich Norm von x

Abstand eines Punktes a von Punktmenge B:
$d(a,B) = \min\limits_{b \in B} \|a-b\|$ BILD1
Abstand zweier Punktmengen:
$n(A)$ = Anzahl der Elemente in A
$n(B)$ = Anzahl der Elemente in B
$d_1(A,B) = \min\limits_{a \in A} d(a,B)$
BILD2
$d_1(A,B) = 0$ bei Gleichheit zweier Punkte a, b
$d_2(A,B) = \max\limits_{a \in A} d(a,B)$
$d_3(A,B) = \frac{1}{n(A)} \sum\limits_{a \in A} d(a,B)$, mit $n(X)$ gleich Anzahl der Punkte in X

Ungerichtete Abstandsmaße: Irgendein Abstandsmaß $d(A,B)$ sei gegeben.

$$u_1 = min\{d(A,B), d(B,A)\}$$
$$u_2 = max\{d(A,B), d(B,A)\}$$
$$u_3 = \frac{d(A,B) + d(B,A)}{2}$$
$$u_4 = \frac{n(A) \cdot d(A,B) + n(B) \cdot d(B,A)}{n(A) + n(B)}$$

Wichtig: Robustheit gegenüber Störungen!
Hausdorff-Metrik (d_2 mit u_2) eher ungeeignet wegen max
Kombination von d_3 mitu_2 ist günstig:

$$u(A,B) = max\left\{\frac{1}{n(A)} \sum_{a \in A} d(a,B), \frac{1}{n(B)} \sum_{b \in B} d(b,A)\right\}$$

2.1.2 Korrelationsmaße als Matching-Maße

$x, y \ldots$ Muster-Vektoren zum Beispiel Pixel-Grauwerte

$$m = \frac{\langle x,y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}, \text{ dann } -1 \leq m \leq 1 \text{ und } x = y \rightarrow m = 1$$

Falls $y = k \cdot x$, gilt: m ist invariant gegen k $(k \neq 0)$ (k ist Konstante für den Kontrastunterschied)

$y = x + h$ mit h gleich Vektor mit identischen Komponenten
Bilder werden (bei großen h-Werten) als verschieden bewertet.

m sollte invaraint sein gegen Kontrast- und Helligkeitsänderung.

Neudefinition des Matching-Maßes: x' ist der Vektor mit Durchschnittshelligkeit von x als Komponenten
y' ist der Vektor mit Durchschnittshelligkeit von y als Komponenten

Ersetzen von x durch $x - x'$ und y durch $y - y'$ in der m-Formel. Dadurch ergibt sich die zyklische Kreuzkorrelation m':

$$m' = \frac{\langle x - x', y - y' \rangle}{\|x - x'\| \cdot \|y - y'\|}$$

Prüfung mit 2 pixelbilder: objekt in der hauptdiagonale gleich? helligkeitsverschiebung? m' benützen. Antwort: sind unterschiedliche Objekte, bzw. man kann davon ausgehen das es die selben Objekte sein könnten

2.2 Normalisierung zweier endlicher Punktmengen

Problem: 2 Mengen $A(x, y), B(u, v)$ die möglicherweise dasselbe Objekt darstellen. $u = f_1(x, y)$ und $v = f_2(x, y)$ (eine Menge Bild der anderen)
$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$ ist damit eine unbekannte Koordinatentransformation.

2.2.1 Berechnung von MSE (mean square error)

$$MSE = \sum_i w_i \cdot \left[(u_i - f_1(x_i, y_i))^2 + (v_i - f_2(x_i, y_i))^2 \right] \to \min$$

mit w_i gleich gegebene Gewichte, der Bedeutung der Punkte entsprechend zu wählen.
Zum Beispiel: $w_i \geq 0 \wedge \sum_i w_i = 1$
oder: $\underbrace{\forall i : w_i = 1}_{\text{bei Gleichwertigkeit}}$

Variabel sind dabei die Parameter von f. (stehen nicht mit in der Formel)
Voraussetzung: A, B haben gleiche Kardinalität.
Zuordnung $(u_i, v_i) \leftrightarrow (x_i, y_i)$ müssen bekannt sein, das heißt alle Referenz-Probleme gelöst. Die Voraussetzung ist damit praktisch nie erfüllt.

2.2.2 Heuristisches Verfahren zur näherungsweisen Lösung für $MSE \rightarrow \min$ für beliebige Punktmengen und ohne bekannte Referenzbeziehungen:

0. A wird mittels $f^{(0)} = \begin{pmatrix} f_1^{(0)} \\ f_2^{(0)} \end{pmatrix}$ so transformiert, dass danach A mit B "grob" deckungsgleich ist. $f^{(0)}(A) \approx B$

1. Für alle $a \in A$ wird ein $b \in B$ bestimmt mit Abstand $d(a, B)$. Sammeln dieser Pseudo-Referenz Paare in einer Liste L

2. Für alle $b \in B$ wird ein $a \in A$ bestimmt mit Abstand $d(b, A)$. Sammeln dieser Pseudo-Referenz Paare in einer Liste L

3. $i = i + 1$
   Berechnung einer Transformation $f^{(i)}$ durch Minimierung von MSE in Bezug auf die Pseudo-Ref-Paare

4. $A = f^{(i)}(A)$

5. Gütekontrolle $d(A, B)$ genügend klein?
   Falls ja, Stop mit Erfolg
   Falls nein, goto 1
   Falls $d(A, B)$ nach zahlreichen Interationen zu groß, dann STOP ohne Erfolg

2.3 Die Hough-Transformation

Detektion von geraden Linien in einem Bild (meist Konturlinien)
Gegebenfalls Vorverarbeitung: Konturen filtern (mit Sobel-Filter, Canny-Filter)
Grundlage: Hesse'sche Normalform der Normalengleichung.
Übliche Geradengleichung: $a * x + b * y + c = 0$ (Wenn $b = 0 \rightarrow$ Gleichung nicht auflösbar nach $y \rightarrow$ parallel zu y)
l ist die Länge des Lotes von $(0, 0)$ zur Geraden, mit $(0, 0) \notin$ Gerade.
φ ist der Winkel des Lotes zur x-Achse.
$l = x * \cos\varphi + y * \sin\varphi$
Bild der Geraden im (l, φ)-Koordinatensystem (Hough-Raum) ist ein Punkt, denn l und φ determinieren die Gerade.
Beispiel:
$y_1 : 2 * x - y - 3 = 0$
$y_2 : y - 2 = 0$
Bild3

2.3.1 Praktisches Vorgehen (zur Liniendetektion)

Diskretisierung des Hough-Raumes → rechteckiges Punktefeld
Zuordnung einer Zählvariablen zu jeden solchen Punkt (anfangs 0).
Bemerkung: Jedem Pixel im H-Raum entspricht eine Gerade im (x, y)-Raum

Berechnung aller Geradenstücke aus Vordergrundpixel im Urbild. Erhöhung der jeweiligen Zählervariablen im H-Raum zu jedem Geradenstück. Danach werden die Zählvariablen mit höchsten Werten ermittelt. Denen entsprechen die wichtigsten Strecken im Urbild. Literatur: Haberäcker
Erweiterung möglich auf Kreise, Ellipsen, ...

2.4 Matching-Möglichkeiten

2.4.1 Signalorientiertes Matching

Bezeichnug für die bisher beschrieben Vorgehensweißen Grund: direktes Matchen gemessener Signalwerte (Grauwerte von Pixeln)

2.4.2 Merkmalsorientiertes Matching

Matchen auf Grund von Signalwerten abgeleiteter Werte (z.B.: Merkmale, Hough-Koordinaten, ...)
siehe Kapitel 3

2.4.3 Stereo-Matching

Aufgabe: Erkennung von 3D-Objekten aus verschiedenen 2D-Bildern
Problem: Referenz-Problem lösen bei projektiver Verzerrung Erkennungsalgorithmus verwenden

2.4.4 Graph-Matching

Modellierung komplexer Szenen als Graphen.
Erkennung von Teil-Szenen:

- Kommt ein Graph in einem anderen vor?
- Sind 2 Graphen gleich?

3 Numerische Klassifikation

3.1 Aufgabenstellung

E^n wird betrachtet, heißt Merkmalsraum (n-dim Euklidischer Raum)
Objekt O: Repräsentation als n-dimensionaler Messwerte-Vektor
m-Anzahl der Klassen
K_i: i-te Klasse

Gesucht: Zerlegung von E^n in m Gebiete G_i, so dass

$$E^n = \bigcup_{i=1}^{m} G_i$$

$$\forall i \forall j i \neq j \to G_i \bigcap G_j = \emptyset$$

Klassifikator ordnet einem Objekt O K_i zu, falls $x \in G_i$, mit x Bild von O Problem: Zerlegung soll möglichst gut sein:

- entsprechnd der Bedeutung der Klasse
- möglichst weniger Echtklassifikationen

Ggf. (m+1)-tes Gebiet als Rückweisegebiet vorsehen.

3.1.1 Geometrische Modelle

Die G_i (Modell) werden mit Musterklassen (Realität) identifiziert. $O \in K_i \Leftrightarrow x \in G_i$

3.1.2 Stochastische Modelle

Klassifiziert wird nach $x \in G_i$, was nicht $O \in K_i$ bedeuten muss!

Ursache: Kriterien, die der Klassifikator nicht "kennt". (unvollständige Modellierung)

Bsp.: Menschen in Erkältete und Nichterkältete einteilen Klass.-Kriterien: husten oder niesen = true

3.2 Geometrische Klassifikationsmodelle

3.2.1 Trennfunktionen

Mehrere Punktmengen in E^n gegeben

Definition: $P1$, $P2 \subset E_n$ heißt linear separierbar, falls es eine Hyperebene

$$a^\top x + b = 0$$

gibt, so dass

$$a^\top x + b > 0, \text{ für } x \in P_1$$

und

$$a^\top x + b < 0, \text{ für } x \in P_2$$

.

Bei 3 separierbaren Klassen in E^2 sind 3 Geraden zur Klassifikation erforderlich. Allgemein: m-Klassen in E^n dann

$$\frac{m(m-1)}{2}$$

Trenn-Hyperebenen zu konstruieren.
Lineare ist Separierbarkeit nicht offensichtlich.

3.2.2 Diskriminanzfunktionen

Generelle Idee: Konstruktion einer Menge von Funktionen (m Funktionen) d_i.
x gehört zu K_i, wenn $d_i(x) > d_j(x)$, für $i \neq j$
Definition: E^n vollständig in m Gebiete G_i zerlegt.
m auf E^n stetige Funktionen $d_i(x)$ heißen Diskriminanzfunktionen, wenn für alle Nicht-Randpunkte gilt:

$$\forall k \forall j \, [x \in G_k \wedge k \neq j \rightarrow d_k(x) > d_j(x)]$$

Trennfunktion zweier Gebiete G_i, G_j ist spezifisch durch die Gleichung:

$$d_i(x) = d_j(x)$$

Lösung des Klassifikations-Problem durch Berechnung des **Klassen-Index** nach

$$k = \text{index}\left\{\max_i d_i(x)\right\}$$

Konstruktion spezieller Diskriminanzfunktionen

1. **Minimum-Distanz-Klassifikator**
   Idee: Beschreibung der Klassen durch Referenzmuster (oder Zentren) z_i.
   Klassifikation: x wird Klasse K_i zugeordnet, wenn der Abstand von x zu z_i minimal ist.
   Euklidischer Absand $a(x, z_i)$ zwischen x und z_i

   $$a_1^2(x, z_i) = ||x - z_i||^2 = x^T x - 2z_i^T x + z_i^T z_i$$

   Bemerkung: a oder a^2 ist gleichgültig wegen Monotonie von $(|^2)$. Die Konstante (bezüglich i) $x^T x$ auch irrelevant.
   Diskriminanzfunktion: $d_i(x) = z_i^\top z_i - 2z_i^\top x$
   $Klassenindex_i$ linear bezüglich x

   $$k = index\{\min_{1 \leq i \leq m} d_i(x)\}$$

   Trennfläche zwischen 2 Klassen K_i und K_j $d_i(x) = d_j(x) \to$ vollständige Zerlegung des E^n

2. **NN-Klassifikator (nächster Nachbar)** Im allgemeinen eine zu ungenaue Beschreibung einer Klasse durch nur ein Zentrum $z_i \to$ Idee: mehrere Referenzmuster pro Klasse.
   K_i: Zentren $z_i(j)$ $1 \leq j \leq J(i)$ mit J Anzahl der Zentren für K_i.
   Diskriminanzfunktion (stückweise linear):

   $$d_i(x) = \min_{1 \leq j \leq J(i)} \left\{ z_i(j)^\top \cdot z_i(j) - 2 \cdot z_i(j)^\top \cdot x \right\}$$

   $k = index\{\min_i di(x)\}$

3. **KNN-Klassifikator**
   Verbesserung des NN-Klassifikators, indem Ausreißer schwächer berücksichtigt werden.
   x sei gegeben und zu klassifizieren
   Idee: Berechnung aller

   $$d_{ij}(x) = z_i(j)^\top \cdot z_i(j) - 2 \cdot z_i(j)^\top \cdot x$$

   , d.h.$\sum_i d(i)$ Werte

   - i - Klassenindex
   - j - Zentrenindex in K_i

   Auswahl der k kleinsten $d_{ij}(x)$ (k gegeben).
   Klassifikationsregel: Zuordnung von x zu K_i, wenn für $i = |$ die meisten $d_{ij}(x)$

unter den k kleinsten vorkommen.
Nichteindeutigkeit ist möglich.
Entscheidung z.B. nach minimaler Summe der entsprechenden d_{ij}. Eventuell besser: ... der entsprechenden Abstände

Festlegung von k:
k groß $\rightarrow$ schwächerer Einfluss von Ausreißern
$k = 1 \rightarrow$ NN-Klassifikator

4. **Andere Diskriminanzfunktionen**

   - $d(x) = c^T f(x)$ mit $f(x)$ fest vorgegeben
   - Polynome $\rightarrow$ Polynom-Klassifikator

5. **Klassifikation mit Rückweisegebiet**
   Zentren z_i festlegen
   Festlegung von -Hyperquadern , -kugeln, -ellipsen um die z_i herum.
   x zu Klassifizieren, z_7 am nächsten aber nicht im $Hyperquader_7 \rightarrow$ Rückweisung

3.2.3 Baumklassifikator

Idee:

- Konstruktion achsenparalleler Hyperquader (möglicherweise Vereinigungen zugelassen)
- Beschreibung des i-ten Quaders ($1 \leq i \leq m$) durch dessen Extremalpunkte: $p\,[i]$ und $q\,[i]$
- Klassifikator: $x \in K_i \leftrightarrow p_j\,[i] \leq x_j \leq q_j\,[i]$ mit i-Klassen- und j-Komponenten-Index
- Bestimmung von $p\,[i]$ und $q\,[i]$:
  $x_1, \ldots, x_s$ ist eine vorklassifizierte Punktmenge

$$p_j\,[i] = \min_{r:x[r]\in K_i} \{x_j\,[r]\}\,, q_j\,[i] = \max_{r:x[r]\in K_i} \{x_j\,[r]\}$$

Problem:

- empfindlich gegen Ausreißer in der Punktemenge wegen min und max
- Bestimmung aller p_j und q_j nicht immer erforderlich

Problem - Überlappung von Quadern:

- Zurückweisung bei $x \in$ Überlappungsgebiet
- Zuweisung zu genau einer Klassse (Zusatz-Regeln erfinden)
- Zuweisung zu mehreren Klassen

3.3 Stochastische Klassifizierungs-Modelle

3.3.1 Problemstellung

m oder $m+1$ Gebiete des E^n (gegebenenfalls ein Rückweisungsgebiet)
Vollständige Zerlegung des E^n ist gesucht, dabei soll es m echte Klassen geben.

X- n Komponenten zur Beschreibung eines zufälligen Objekts

Y-Zufallsgröße: Bedeutung $Y = i \leftrightarrow$ zufälliges Objekt $X \in K_i$

$f(x)$- Dichte (stetig) von X, wobei x n-dimensionaler Vektor
Ableitung von $P(X \leq x)$ - einmal pro Komponente von x

$f(x|y = i)$- bedingte Dichte von X unter der Bedingung, dass $y = i$. Das heißt Ableitung(nach jeder der Komponenten von x) von $P(X \leq x|Y = i)$

Bemerkung: Stetigkeit von $f(x) \rightarrow$ Vorraussetzungen des Satzes von Schwarz

Von Interesse ist die Beziehung zwischen $f(x)$ und $f(x|Y = i)$. Nach Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit gilt:

$$P(X \in (x, x+h] = \sum_{i=1}^{m} P(X \in (x, x+h]|Y = i) \cdot P(Y = i)$$

linke Seite:

$$P(X \in (x, x+h] = \int_{x_1}^{x_1+h_1} \dots \int_{x_n}^{x_n+h_n} f(y_1, \dots, y_n) dy_n \dots dy_1$$

Division durch alle h_i und $h_i \rightarrow 0$

$$\hookrightarrow f(x) = \frac{\partial'' P(X_1 \leq x1, \dots, X_n \leq x_n)}{\partial x_1, \dots, \partial x_n}$$

rechte Seite:

$$P(x \in (x, x+h|Y = i] \text{ wird analog behandelt}$$

Ergebnis:

$$f(x)|Y = i)$$

Also:
$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} f(x|Y = i) + P(Y = i)$$
Ferner von Interesse:
$$P(Y = i|X = x)$$
d.h. Wahrscheinlichkeit für $\{\text{Objekt} \in K_i\}$, wenn Vektor x beobachtet wurde.
Ausgangspunkt:
$$P(Y = i \wedge X \in (x, x + h])$$
Umformung auf 2 verschiedene Arten:

- einmal 1. Ereignis
- einmal 2. Ereignis

in Bedingung schreiben

$$\begin{aligned} P(Y = i|X \in (x, x + h]) * P(X \in (x, x + h]) \\ = P(X \in (x, x + h]|Y = i) * P(Y = i) \end{aligned}$$

Dann Division von $P(X \in (x, x+h])$, sowie das Prod. $h_1 * \cdots * h_n$ im Zähler und Nenner der rechten Seite und dann $h_i \to 0$

$$P(Y = i|X = x) = \frac{P(Y = i) \cdot f(x|Y = i)}{f(x)} = p_i(x)$$

Begriffe:

$P(Y = i)$ - A-priori-Wahrscheinlichkeit, dass heißt ist Wahrscheinlichkeit für $Y = i$ ohne Zusatzwissen

$P(Y = i|X = x)$ - A-posteriori-Wahrscheinlichkeit, dass heißt die Wahrscheinlichkeit für $Y = i$ nach dem $X = x$ bekannt ist

3.3.2 Klassifizierung mittels A-posteriori-Wahrscheinlichkeit

Beschreibung des Klassenindexes nach:

$$k = \text{index}\{\max_i p_i(x)\}$$

Bemerkung:

- keine Aussage über Fehlklassifikation
- Dichten gegebenenfalls Schätzung oder approximieren

3.3.3 Bayes-Strategie

Einführung einer Kostenmatrix (k_{ij}) mit den Elementen:
$k_{ij}\ldots$ Kosten bei Eintreten des Ereignisses $\{Y = i, X \in G_j\}$
Damit erhält man eine Bestrafung von Fehlklassifikationen
Zufallsgröße K (Kosten): $K = k_{ij} \leftrightarrow \{Y = i, X \in G_j\}$
Einführung von:

$$p_{ij} = P(Y = i, X \in G_J) = P(Y = i) \cdot P(X \in G_j|Y = i)$$

$$= P(Y = i) \cdot \int\limits_{G_j} f(x|Y = i)dx$$

A-priori-Wahrscheinlichkeit ist bekannt

mittlere Kosten (mittleres Risiko):

$$EK = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} k_{ij} * p_{ij}$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} k_{ij} * P(Y = i) * \int_{G_j} f(x|Y = i)dx$$

EK muss minimiert werden. Variabel sind die Gebietsgrenzen.

Aufgabe: G_i so zu wählen, dass EK minimal wird.
Übliche Vorraussetzungen: $K_{ij} = 0$ für alle i.

$$\hookrightarrow EK = \sum_{j=1}^{m} \int_{G_j} \sum_{i=1, j\neq 1}^{m} k_{ij} * P(Y = i) * f(x|Y = 1)dx$$

Bayes-Optimalität

Die Zerlegung $\{G_j\}$ des E^n heißt Bayes-optimal, wenn für ein beliebiges j und einem $x \in \mathrm{int}(G_i)$ (int - interrior: alle punkte, ohne Randpunkte einer Fläche) gilt:

$$(*)\forall l : l \neq j \rightarrow \sum_{i=1, i\neq j}^{m} k_{ij} \cdot P(Y = i) \cdot f(X|Y = i)$$

$$< \sum_{i=1, i\neq l}^{m} k_{il} \cdot P(Y = i) \cdot f(X|Y = i)$$

Also: Die j-te Spaltensumme muss kleiner sein als die anderen für innere Punkte von G_j
Satz: Bedingung (*) ist notwendig und hinreichend für die Optimalität von EK (die Lösung ist im allgemeinen nicht eindeutig)
Bemerkung: Summen über i als Diskriminanzfunktion nutzbar.
Die G_j sind mit den Bedingungen (*) determiniert, aber nicht bekannt.
Klassifikation: Wenn (*) gilt, dann Klasse j.

Das Integral über die j-te Spaltensumme sind die erwarteten Fehlkassifikations-Kosten

Veranschaulichung für 3 Klassen, also $m = 3$, also $(3,3)$-Kostenmatrix:

$$EK = \begin{bmatrix} & k_{12} * P(Y=1) * \int\limits_{G_2} f(x|Y=1)dx & k_{13} * P(Y=1) \int\limits_{G_3} f(x|Y= \\ k_{21} * P(Y=2) \int\limits_{G_1} f(x|Y=2)dx & & k_{23} * P(Y=2) \int\limits_{G_3} f(x|Y= \\ k_{31} * P(Y=3) \int\limits_{G_1} f(x|Y=3)dx & k_{32} * P(Y=3) \int\limits_{G_2} f(x|Y=3)dx & \end{bmatrix}$$

Bayes-Optimalität Matrix $\{k_{ij}P(Y=i)f(x|Y=i)\}$ bilden j-te Spaltensumme kleiner als die anderen $\leftrightarrow$ Klasse j, also $x \in G_j$

Betrachten von Spezialfällen:

- **SF1:** $k_{ij} = k$ für $i, j = 1, \ldots, m$ mit $i \neq j$ und $\forall i k_{ii} = 0$
  $EK = k * \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=0 \wedge i \neq j}^{m} p_{ij}$
  Bayes-Optimalität: Es sei $xint(G_j)$
  $\forall l : l \neq j \rightarrow P(Y=l) * f(x|Y=l) < P(Y=j) * f(x|Y=j)$
  keine Summen mehr, identische Summanden rechts und links werden weggelassen
  Übrig bleiben linnk l-ter und rechts j-ter Summand
  O.B.d.A.: k kann 1 gesetzt werden $\rightarrow EK = \sum \sum p_{ij}$

  Klassifizierungsregel: Muster x gegeben (Realisierung eines Experiments):
  Zuordnung zur Klasse mit:

  $$index \left\{ \max_{1 \leq j \leq m} \underbrace{P(Y=j) \cdot f(x|Y=j)}_{Diskriminanzfunktion} \right\}$$

  Division durch $f(\underbrace{x}_{Konstantebezglichder Index-Werte})$
  $\hookrightarrow$ Ersichtlich: Ist identisch mit Klassifikation A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten

- **SF2:** (spezieller als SF1)
  Y gleichmäßig verteilt, d.h. $\forall i P(Y=i) = \frac{1}{m}$

$\hookrightarrow (*) \forall l : l \neq j \rightarrow f(x|Y=j) > f(x|Y=l)$
Ist die Maximum-Likelihood-Strategie

- **SF3:** allgemeiner Fall, aber nur m=2
$EK = k_{12} \cdot P(Y=1) \cdot \int\limits_{G_2} f(x|Y=1)dx + k_{21} \cdot P(Y=2) \cdot \int\limits_{G_1} f(x|Y=2)dx$
Bayes-Optimalität für m=2:

$$j = 1 \wedge x \in \text{int}(G1) \rightarrow k_{21} \cdot P(Y=2) \cdot f(x|Y=2) < k_{12} \cdot P(Y=1) \cdot f(x|Y=1)$$
$$j = 2 \wedge x \in \text{int}(G2) \rightarrow k_{21} \cdot P(Y=2) \cdot f(x|Y=2) > k_{12} \cdot P(Y=1) \cdot f(x|Y=1)$$

Konstruktion von G_1 und G_2
einfachster Fall SF2 mit m=2 und mit nur einem Merkmal n=1

x ist bekannt. Hypothese $H_0 : x \in K_1$:
p_{12} ist die Wahrscheinlichkeit dass $x \in K_1$, aber trotzdem x der Klasse 2 zugeordnet wird (wegen $x \in G_2$). Das ist die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art.

p_{21} ist die Wahrscheinlichkeit dass $x \in K_2$, aber trotzdem x der Klasse 1 zugeordnet wird (wegen $x \in G_1$). Das ist die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art.

$p_{12} = P(Y=1) \int_{G_2} f(x|Y=1)dx$
Es sei zusätzlich $k_{12} = k_{21}$
$\hookrightarrow$ Minimale Kosten, wenn die Grenze zwischen G_1 und G_2 durch die Lösungen von
$(*) f(x|Y=1) = f(x|Y=2)$
definiert wird.
Bemerkung: i.A. mehrere Lösungen, aber mindestens eine.

Bild5

- **Verallgemeinerung durch Einführung einer Rückweisungsklasse möglich**
$\hookrightarrow$ neuer Kostenvektor $\begin{pmatrix} k_{10} \\ k_{20} \\ \dots \\ k_{m0} \end{pmatrix}$
k_{i0} - Kosten für fälschliche Rückweisung eines Objekts eines K_i
Keine Kosten K_{oi}, wiel es keine echte Klasse K_0 gibt, aber G_0
i.A. Rückweisungskosten > Fehlkassifikations-Kosten
häufiger Spezialfall:

$$k_{0i} = k' K_{ij} = k | k' > k, i \neq 0$$

Verallgemeinerung der Opt.-Bedingung auf Aufg. mit Rückweiseg möglich.

- **SF4:** normalverteilte Merkmalsvektoren X:

$$f(x|Y=1) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\cdot(x-m_i)^T\cdot \mathrm{Cov}_i^{-1}\cdot(x-m_i)}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sqrt{(\det(\mathrm{Cov}_i)}}$$

Mit $m_i = E(X|Y=i)$ und der bedingten Kovarianzmatrix:

$$\mathrm{Cov}_i = E[(X'-m_i)\cdot(X'-m_i)^T]$$

(n,m)-Matrix, X'-Zufallsvektor mit Dichte $f(x|Y=1)$

Diskriminanzfunktion $d_i(x) = f(x|Y=i)\cdot P(Y=i)$ ist zu kompliziert, deswegen:

$$ln(d_i(x)) = -0.5\cdot(x-m_i)^T\cdot\mathrm{Cov}_i^{-1}\cdot(x-m_i) - \underbrace{\frac{n}{2}\cdot\ln(2\pi)}_{\text{unabhängig von i}} -0.5\cdot\ln(\det(\mathrm{Cov}_i))+\ln(P(Y=i))$$

Neue Diskriminanzfunktion (nicht unabhängiges von i und mit -2 multipliziert):

$$D_i(x) = (x-m_i)^T\cdot\mathrm{Cov}_i^{-1}\cdot(x-m_i)+\ln(\det(\mathrm{Cov}_i))-2\cdot\ln(P(Y=i))$$

Klassifikationsregel: Zuordnung von x zur Klasse index $\left\{\min_{1\leq i\leq m} D_i(x)\right\}$ **Bemerkung:** min wegen des Vorzeichenwechsels

Mahalanobis-Abstand zwischen x und m_i: $(x-m_i)^T\cdot\mathrm{Cov}_i^{-1}\cdot(x-m_i)$

- **SF5:** (spezieller als SF4)
  $\forall i : \mathrm{Cov} = \mathrm{Cov}_i, \forall i : P(Y=i) = \frac{1}{m}$
  Dann ist $D_i(X)$ definierbar als Mahalanobis-Abstand

BEISPIEL:

Bayes-Klassifikator zu ermitteln, der Männer und Frauen unterscheiden kann. Einziges Merkmal: Körpergröße X.

Verteilung:
$(X|Y=F)\sim N(169,8)$, dass heißt $m_F = 169$ und $\delta_F = 8$
$(X|Y=M)\sim N(178,10)$, dass heißt $m_M = 178$ und $\delta_M = 10$

Verwechslungskosten: $k_{FM} = 2$ und $k_{MF} = 1$
A-priori-Wahrscheinlichkeit: $P(Y=F) = 0.52$ und $P(Y=M) = 0.48$
Fehlklassifikation zuu minimieren:

$$EK = k_{FM}\cdot P(Y=F)\int\limits_{G_M} f(x|Y=F)dx + k_{MF}\cdot P(Y=M)\int\limits_{G_F} f(x|Y=M)dx$$

Bayes-Optimalität (für 2 Klassen):

$$x \in int(G_F) \rightarrow k_{FM} * P(Y=F) * f(x|Y=F) > k_{MF} * f(x|Y=M)$$

$$2 * 0.52 * f(x|Y=F) > 1 * 0.48 * f(x|Y=M)$$

$$x \in \text{int}(G_F) \rightarrow k_{FM} \cdot P(Y=F) * f(x|Y=F) > k_{MF} \cdot P(Y=M) * f(x|Y=M)$$
$$= 2 \cdot 0.52 \cdot f(x|Y=F) > 1 \cdot 0.48 \cdot f(x|Y=M)$$
$$x \in int(G_M) \rightarrow \dots < \dots$$

zur Bestimmung von G_F und G_M ist die Gleichung:

$$\rightarrow \frac{1.04}{0.48} = \frac{f(x|Y=M)}{f(x|Y=F)} = \frac{4}{5} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{(x-178)^2}{100} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(x-169)^2}{64}}$$

Division durch $\frac{4}{5}$, ln

$$-64(x-178)^2 + 100(x-169)^2 = 12753,0680$$
$$x_1 = 125.54 \text{ und } x_2 = 180.46$$

$\rightarrow$ wenn zwischen $[x_1$ und $x_2]$ dann Frau sonst Mann
Bild6

3.3.4 Minimax-Strategie

F- Falschklassifikation (zufälliges Ereignis)
Lösung der Aufgabe: $\max\limits_{1 \leq k \leq m} \{P(F|Y=k)\} \rightarrow \min$
Allgemein ist Lösung schwierig.

2 Klassen-Aufgabe ist beherrschbar. G_1 und G_2 so gesucht dass:

$$\int\limits_{G_2} f(x|Y=1)dx = \int\limits_{G_1} f(x|Y=2)dx$$

und dabei beide Integrale minimal sind. m
Noch spezieller: nur 1 Merkmal
O.B.d.A. $E(X|Y=1) < E(X|Y=2) \rightarrow f(x|Y=1)$ und $f(x|Y=2)$ schneiden sich bei Stetigkeit.

t so zu bestimmen, dass $\int\limits_t^\infty f(x|Y=1)dx = \int\limits_{-\infty}^t f(x|Y=2)dx$

Bild7

3.3.5 Neyman-Pearson-Strategie

Minimuerung genau einer verwechselungs-Wahrscheinlichkeit. (auf Kosten der anderen)

Aufgabe:

$$P(F|Y=k) \to \min$$

Nebenbedingung:

$$\sum_{i=1, i\neq k}^{m} P(F|Y=i) \leq \alpha$$

$\alpha > 0$ ist vorgegeben
Spezialfall: 2 Klassen mit gleichen A-priori-Wahrscheinlichkeiten

$$P(F|Y=1) = \int_{G_2} f(x|Y=1)dx \to \min)$$
$$P(F|Y=2) = \int_{G_1} f(x|Y=2)dx \leq \alpha)$$

Das Minimum wird für $P(F|Y=2) = \alpha$ angenommen.
Skizze für den Spezialfall nur eines Merkmals:
Bild8

3.4 Texturen

3.4.1 Befriff, statistischer Textur-Merkmale

- **Textur** Grauwert-Strukturen, die sich aus wiederholenden, kleinen Mustern aufbauen, die intuitiv als ähnlich wahrgenommen werden.
- **Interpretation:** Texturen (als Pixelmenge) werden als Realisierung eines zufälligen Versuchs angesehen. $\to$ Ergebnis: Vektor der Grauwerte
- **Vereinbarung:**
  - Grauwertmenge $= \{\underbrace{0}_{\text{schwarz}}, 1, \ldots, \underbrace{255}_{\text{weiß}}\}$
  - n - Anzahl der Pixel
  - p_i - Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällige herausgegriffenes Pixel (gleichmäßige Verteilung, $\frac{1}{n}$) den Grauwert i hat $0 \leq i \leq 255$
  - $$h_i = \frac{\text{Anzahl der Pixel mit Grauwert } i}{n}$$
  - $h_i \approx p_i$ gilt mit hoher Wahrscheinlichkeit (h_i ist zufällige Realisierung durch vorliegendes Bild gegeben)

- $\underbrace{\{h_0, h_1, \dots, h_255\}}_{\text{wichtiger Merkmalsvektor für die Texturen}}$ heißt Histogramm
- Gegebenfalls Grauwert-Gruppen bilden
- **Mittelwert**

$$m = \sum_{i=1}^{255} i * h_i$$

- **k-tes Moment** $(k = 1, 2, \dots)$

$$\mu_k = \sum_{i=1}^{255} (i - m)^k * h_i$$

- **Spezialfall** $k = 2$
  Sreuung $== \underbrace{\delta}_{\text{Kontrastmaß}} = \sqrt{\mu_2}$
- **Schiefe** μ_3
  $\mu_3 = 0$ für symmetische Histogramme
  $\mu_3 > 0$ bei überwiedgend hohen Grauwerten
  $\mu_3 < 0$ bei überwiedgend geringen Grauwerten
- **Glattheit**

$$g = 1 - \frac{1}{1 + \delta^2}$$

$\delta = 0 \rightarrow g = 0$nur bei identischen Grauwerten

- **Gleichförmigkeit**

$$gf = \sum_{i=0}^{255} h_i^2$$

  maximal bei identischen Grauwerten
  minimal bei $\forall i, h_i = \frac{1}{256}$
- **Entropie**

$$e = -\sum_{i=0}^{255} h_i + \log_2(h_i)$$

  maximal bei identischen Häufigkeiten

in Matlab kann alles durch ßtatxtureërrechnet werden

3.4.2 co-occurrence Matrix

- Gegeben:
  - (m, n)-Grauwertbild B
  - Pixelbreite $g(x, y)$
  - $1 \leq x \leq m)$
  - $1 \leq y \leq n)$
  - k-Anzahl der möglichen Grauwerte (z.B. 256)
- Gray Level Co-occurrence Matrix zweier Relationen R (M: Grauwertmatrix)
- Es sei $R \subseteq B \times B$
- CM - (k,k)-Matrix mit folgenden Elementen:
  - cm_{ij} Anzahl der Pixel-Paare $((x_1, y_1), (x_2), y_2)) \in R$
    mit $g(x_1, y_1) = i \wedge g(x_2, y_2) = j$
  - **Achtung:** Zeilen- und Spaltenzählung von 0 an.
  - **Bemerkung:** R ist i.A. die Relation, die aus nebeneinander benachbarten Pixeln gebildet wird, also
    $$R = \left\{ \begin{array}{c} ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) : x_1 = x_2, y_1 = y_2 + 1 \\ 1 \leq x_i \leq m \\ 1 \leq y_i \leq n - 1 (\text{oder } n) \end{array} \right\}$$
    oder
    $R = \left\{ \ ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) : x_1 = x_2, y_1 = y_2 \ \right\}$

- **Bsp:** Grauwertbild mit 3 möglichen Werten: 0, 1, 2
  $m = 5, n = 5$
  R - Rechts-neben-Relation
  $$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
  $$CM = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$
  $cm_{21} = 2$ In B steht 2 mal eine 1 rechts neben einer 2.
  CM hat die Elementesumme:$m * (n - 1) = 5 * 4 = 20$

- Stark homogene Bereiche in B
  $\hookrightarrow$ große Werte nahe der Hauptdiagoneln in CM
- starke Kontraste $\rightarrow$ große Werte rechts oben und links unten

3.4.3 Textur-Modellierung

- a_k - gegeben Konstanten: $k = 1, \ldots, l, a_l \neq 0$
- Y_i - unkorrelierte Zufallsgrößen $EY_i = 0$
- **Definition:** Eine Zufallsfolge, die den Gleichungen

$$X_i = \overbrace{\sum_{k=1}^{l} a_k X_{i-k}}^{\text{Vergangenheit}} + Y_i$$

  genügt, heißt **autoregressiver Prozess** l-ter Ordnung in diskreter Zeit.

- auch 2-D-Vergangenheit denkbar

4 Lernen von Klassifkatoren

4.1 Zum Lernen-Begriff

- **Thema:** Anlernen eines Klassifikators
- Wichtig: Überprüfung der Güte
- 2 grundsätzliche Möglichkeiten:
  - optimistisches Vorgehen
  - pessimistisches Vorgehen
- **optimistisches Vorgeben**
  - Lernvorlage liege vor (Lernen mit Lehrer)
  - Belehrung eines (parameterabhängigen) Klassifikators
  - Reklassifikation
- **pessimistisches Vorgehen**
  - Zufällige Unterteilung der Gesamtprobe in :
Lernstichprobe L (80%)
Teststichprobe T (20%)

  - do Lernen mit Beipspielen aus L:
Reklassifikation (L und T)
Neudefinition von L und T)
while(Reklassifikation klappt noch nicht $\wedge$ noch Zeit übrig)
- Lerbeb - Folgendes zu klären
  - Was wird gelernt (z.B. Klassen)
  - Lernziel ("optimale" Klassen)
  - Optimalitätsbegriff ?
  - Wie wird gelernt ? (z.B. Approxmation)
  - Konvergenz gegen Lernziel gesichert ?

Beispiel: lernen eines Erwartungswertes einer Zufallsgröße X
Grundlage: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ von Umfang n

$$m_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \approx EX \text{ mit hoher Wahrscheinlichkeit}$$

Hinzukommen eines neuen Wertes x_{n+1}

$$m_{n+1} = \frac{n}{n+1} m_n + \frac{1}{n+1} x_{n+1}$$

4.2 Der Fehlerkorrektur-Algorithmus

- S_1, S_2 - zwei linear separierbare Stichproben
- linerare Trennfunktion ist gesucht

$$d(x) = \sum_{i=0}^{m} c_i x_i | x_0 = 1$$

c_i und x_i sind Konstanten vektorielle Schreibweise

$$d(x) = c^T x$$

c so gesucht, dass

$$c^T x = 0$$

den E^n im G_1 und G_2 teilt, so dass

$$c^T x > 0 \text{ für } x \in G_1, S_1 \subset G_1$$

$$c^T x < 0 \text{ für } x \in G_2, S_2 \subset G_2$$

- Es sei $x > 0$, dann gilt

$$c^T x = x^T c > x^T(c - \alpha x) = x^T c - \alpha x^T x$$

$$c^T x = x^T c < x^T(c - \alpha x) = x^T c + \alpha x^T x$$

$c[0]$ sei gegeben
$c[i]$ Korrekturergebnis von $c[i-1]$
$x[i] \in S_1 \cup S_2$ wird ggf. verwendet zum korrigieren von $c[i-1]$
Iterationsvorschrift
$c[i+1] = c[i]$ falls $x[i+1] \in S_1 \wedge c[i]^T * x[i+1] > 0$
$c[i+1] = c[i] + \alpha x[i+1]$ falls $x[i+1] \in S_1 \wedge c[i]^T * x[i+1] \leq 0$
$c[i+1] = c[i]$ falls $x[i+1] \in S_2 \wedge c[i]^T * x[i+1] > 0$

$c[i+1] = c[i] - \alpha x[i+1]$ falls $x[i+1] \in S_2 \wedge c[i]^T * x[i+1] \leq 0$
Satz: Für linear separierbare S_1 und S_2 gilt

$$\exists i^* \forall i \quad i \geq i^* \rightarrow c[i] = c[i+1]$$

Bemerkung: α kann auch $\underbrace{\text{variabel gewählt}}_{\text{abh. von i}}$ werden (erst groß, dann kleiner)
Dann muss für ein $\epsilon > 0$ gelten

$$\forall i \quad \epsilon < \alpha[i])$$

Konvergenz in <u>endlich vielen Schritten</u> auch dann.

Zur Größe von $\alpha[i]$
Es sei $c[i]^T x[i+1] < 0$ trotz $x[i+1] \in S_1$
$\alpha[i+1]$ soll so bemessen sein, dass

$$c[i+1]^T x[i+1] = 0$$

gilt.
Also:

$$c[i+1]^T x[i+1] = (c[i] + \alpha[i+1] + x[i+1])^T * x[i+1]$$

$$\hookrightarrow \alpha[i+1] = -\frac{c[i]^T * x[i+1]}{x[i+1]^T * x[i+1]}$$

Es sei $c[i]^T x[i+1] > 0$ trotz $x[i+1] \in S_2$
$\alpha[i+1]$ soll so bemessen sein, dass

$$c[i+1]^T x[i+1] = 0$$

gilt.
Also:

$$c[i+1]^T x[i+1] = (c[i] - \alpha[i+1] + x[i+1])^T * x[i+1]$$

$$\hookrightarrow \alpha[i+1] = +\frac{c[i]^T * x[i+1]}{x[i+1]^T * x[i+1]}$$

Das bisher falsch klassifizierte Objekt landet jetzt auf dem Rand.
Deshalb evtl.

$$\alpha[i+1] = \alpha[i+1] + \epsilon$$

$$\epsilon \text{ klein,} \epsilon > 0$$

Bemerkungen:

1. Lineare Separierbarkeit feststellbar

2. Ungleichungssysteme
$$Ax \geq b$$
lösbar.
$\underbrace{\text{Zeilen von A}}_{\text{Menge } S_1, S_2 = \emptyset}$ als Belehrungsvektoren
(Zeilen von A in Rolle von x
x in Rolle von c)

3. Trennebene i.A. nicht eindeutig

Zum Praktikum

Programm zur Mustererkennung (Textur oder Buchstaben)

4.3 statistische Klassifikation

Problem: Kenntnis bedingte Dichten
wird jetzt umgangen
Aufgabe in einfacher Form:

- Zweiklassenproblem
- Trennfunktion $d(x)$ gesucht
- Minimierung von Fehlklassifikationen

$$d(x) = c_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x)$$

$f_i(x)$ ist vorgegebe Funktion (z.B. lineare)
Es sei $f_0(x) \equiv 1$
c, f - Vektoren
Dann soll sein:
$$d(x) = c^T f(x) \begin{cases} > 0 & \rightarrow \text{Klasse 1} \\ < 0 & \rightarrow \text{Klasse 2} \end{cases}$$
K(c,Y,X) - geg. borel-messbare Kostenfunktion, abh. u.A. von Zufallsvektor X und der zuf. Kl.-Zugehörigkeit $Y \in \{1, 2\}$
Setze $Z = (Y, X)^T$, dann sei c so zu bestimmen, dass
$$E(K(c, Z)) \rightarrow Min$$
Bezeichnung der Lösung: c_{opt}
Beispiel: y - Indikatorfunktion für Klassenzugehörigkeit
$$y(1) = 1 \qquad y(2) = -1$$

$$K(c,Y,X) = (sign[c^T f(X)] - y(Y)) * c^T f(x)$$

notwendige Optimierungsbedingungen:

$$\nabla_c E(K(c,Z)) = \mathbf{0}$$

analytisch nicht lösbar, wenn $f(x|Y=i)$ nicht bekannt sind
$\{z[i]\}$ - Folge von Realisierungen von Z (X mit Kl.-Zugeh. - Lernen mit Lehrer)

<u>Iterativer Ansatz</u> für $i \geq 0$

a) Def. von $c[i+1]$ in Abhängigkeit von der zufälligen i-ten Realisierung von Z
(c$[i+1]$ dennoch nicht zufällig wegen „E“)
$c[i+1] = c[i] + \alpha[i] * \nabla_c E(K(c[i], Z[i+1]))$
$c[0]$ sei gegeben
$E(K(c,Z))$ sei stetig in c $\rightarrow \nabla_c$ und E vertauschbar
$c[i+1] = c[i] - \alpha[i] * E\nabla_c(K(c[i], Z[i+1]))$

b) E . . . i.A. wegen un bedingten Dichten nicht bestimmbar. $\rightarrow$ Übergang zum statistischen Gradienten

$$C[i+1] = C[i] - \alpha[i] * \nabla_c(K(C[i], Z[i+1])$$

Einsetzen konkreter Realisierungen z[i] für Z[i]

$$c[i+1] = c[i] - \alpha[i] * \nabla_c(K(c[i], z[i+1])$$

(Gegebenfalls zyklische Verwendung des Stichprobenmaterials)

Satz: Es sei

$$\sum_i \alpha[i] = \infty$$

und

$$\sum_i \alpha[i]^2 < \infty$$

Dann konvergiert die Folge $\{\ C[i]\ \}$ im quadratischen Mittel gegen $c_{optimal}$, d. h.

$$\lim_{i\to\infty} E(C[i] - c_{opt})^2$$

4.4 Clusteranalyse

Problemstellung: Keine vorklassifizierten Muster verfügbar. Deshalb muss man "lernen"lassen ohne Lehrer. Verschiedene mögliche Gründe wären:

- der Belehrungsaufwand ist zu hoch
- der Experte kann auch nicht klassifizieren
- keine Eindeutige Zuordnung möglich

Aufgabenstellung für Clusteranalyse:

- Untersuchung der Daten auf Struktur
- Anzahl der Klassen (ist problematisch und deswegen meists vorzugeben)
- Bestimmung des Klassifikators
- Beurteilung der Unterscheidung der Klassen

Unterscheidung von:

- statistische Clusterung
- geometrische Clusterung

Statistische Verfahren: - eine Idee

- wichtiges Ziel ist die bestimmung bedingter Dichten mittels Stichproben aus Grundgesamtheit mit Dichte (Ziel)

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} P(Y = i) * f(x|Y = i)$$

Stichprobe $\underbrace{x^1, \ldots, x^k}_{\text{k Vektoren der Dimensionen n}}$ vom Umfang k gegeben. Die Klassen-Zuordnung ist hierbei unbekannt. $f(x)$ ist zumindest empirisch bekannt. Bestimmung von $f(x(Y = i))$ auf f nicht möglich. Deswegen treffen von Zusatz-Annahmen, wie z.B. das Normalverteilung vorliegt. Damit lassen sich die Parameter schätzen.

Annahme: Ein Parameter pro Klasse als Vektor

$$p = \begin{bmatrix} p1 \\ . \\ . \\ p_m \end{bmatrix}$$

Also:
$f_p(x) = \sum_{i=1}^{m} P(Y = i) \cdot f_{p_i}(x|Y = i)$.
Bildung der Likelihood-Funktion aus einer Stichprobe vom Umfang k:

$$L_p(x_1, ..., x_k) = \prod_{i=1}^{k} f_p(x^i) \text{(i ist Index)}$$

p so wählen, dass Ly maximal wird.

$$\nabla_p * L_p = \mathbf{0}$$

Gleichungssystem lösen.
Kenntnis von von p bedeutet auch Kenntniss der $f_{pi}(X|Y=i)$.
Problem: Größe von m $\rightarrow$ möglicherweise Experimente mit verschiedenen m-Wetrten.

Geometrische Verfahren:

a) **Unüberwachter Min-Distanz-Algorithmus:**
Suche nach Gebieten im Merkmalsraum, die Klassen entsprechen (Cluster).
Es seien unklassifizierte Stichproben gegeben:

$$\underbrace{x[1], x[2], ...}_{\text{nD-Vektoren}}$$

Die Klassenanzahl m ist vorzugeben.
Objektbeschreibung = (x, $\underbrace{\text{Klassenwert}}_{\text{unbelegt}}$)

- Festlegung von m "Zentren" $z[j]$, (zb. aus den x-Vektoren)
- Zuordnung von x zu dem Cluster C_k, dem es am nächsten liegt:

$$k = index \min_{i \le j \le m} \sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i[j])^2$$

- Bestimmung neuer Zentren z[j] durch:

$$z_i[j] = \frac{\sum\limits_{l:x[l]\in C_j} x_i[l]}{\sum\limits_{l:x[l]\in C_j} 1}, \quad \underbrace{1 \le i \le n}_{\text{für alle Komponenten}} \quad , \underbrace{1 \le j \; leqm}_{\text{für alle Cluster}}$$

- Wiederholung der Zuordnung zu den Clustern C_k (zurück zu Punkt 2) bis Stabilität eintritt

Probleme:

- Anzahl der Cluster, gegebenfalls mehrer Experimente
- gute Anfangszentren
- Endzustände möglich, die kontra-Intuitiv sind

Zusatzbedingungen (Heuristiken):

- mittlerer Punkteabstand in Clustern kleiner als zwischen Clustern
- neues Cluster anlegen, wenn der Abstand zu allen Zentren zu groß ist

b) **Minimalbaum-Algorithmus:**
n Vektoren $x[i]$ gegeben (unklassifiziert)
2 Klassen sind zu bilden
Konstruktion eines Minimalgerüstes (Baum):

Beispielbildbeschreibung:

- zufällige Punkte
- die beiden nächsten miteinander verbinden
- die vom "Strich" am nächsten gelegene Punkt wird verbunden. ... (Verbindung wird immer nur von einem Punkt gebildet)
- wenn alle Punkte verbunden sind wird die längste Verbindung gekappt und zwei Klassen (Bäume entstehen) ... für die Anzahl der gesuchten Klassen

Programmablaufplan:

Start:

$E : n, x[j] j = 1, \ldots, n$

$M = \{1, \ldots, n\}$

$k \neq l$ so zu bestimmen, dass $||x[k] - x[l]||$ minimal ist

$B = \{(x[k, x[l]\}$

$M = M \backslash \{k, l\}$

- while $M \neq \emptyset$

- while$(x[i], x[j])$ mit $i \in M, j \notin M, ||x[k], x[l]||$ minimal

- M = M \{ i }

- $B = B \cup \{(x[i], x[j])\}$

* while $(x[s], x[t]) \in B$, so dass $||x[s] - x[t]||$ maximal

* $B = B \backslash \{(x[s], x[t])\}$

* a: beide Teilbäume

Stop

Menge der Knoten eines Teilbaumes bilden Klasse

5 Merkmalsbewertung und Merkmalsauswahl

5.1 Motivation

ursprüngliche Merkmale: Primärmerkmale
Benutzbarkeit prüfen: zum Beispiel Gütemaße definieren
Gütemaß: Maßzahl zur Bewertung von Klassenunterscheidbarkeit auf Grund von Merkmalen (möglichst unahängig von Klassifikator)
Merkmalselektion: gute Merkmale zur Klassifikation benutzen, schlecht nicht

Strategien dafür

a) Gütemaß definieren als Funktion der verwendeten Merkmale
   Weglassen von Merkmalen, die schlechtesten Beitrag für Gütemaß liefern
   Problem: hoher Aufwand

b) Merkmalstransformation, so dass die wichisten und schlechtesten (transformierten, sekundären) Merkmale erkennbar werden
   Probleme: Aufwand, transformierte Merkmale i.A. nicht interpretierbar

statistische Methoden:

- Hauptkomponentenanalyse
- Diskriminanzanalyse

5.2 Gütemaße

Problem: Welche Merkmale unterscheiden die Klassen besonders gut?
Idee: Maßzahl zur Unterscheidbarkeit definieren (möglichst unabhängig vom Klassifikator).

a) Definition einer Maßzahl
   Behandlung am Beispiel der Bayes-Strategie:

also:

$$EK = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} k_{ij} \cdot p_{ij} - > Min$$

Summe aus Verwechslungskosten * Verwechslungswahrscheinlichkeiten

$\binom{n}{k}$ Möglichkeiten, k Merkmale aus n Merkmalen auszuwählen. Theoretisch zu viele Maß-Werte berechnen. Praktisch zu viele Werte.

Voraussetzungen (wie Spezialfall 5 in 3.3.3)
X ist n-dimensional und normalverteilt
$m = 2$ Klassen, keine Rückweisung
$k_{11} = k_{22} = 0, k_{12} = k_{21} = 1$
Kovarianzmatrixen: $Cov_1 = Cov_2 = Cov$
A-priori-Klassenwahrscheinlichkeit: $P(Y = 1) = P(Y = 2) = 0.5$

Es sei

$$L(x) = \frac{f(x|Y = 1)}{f(x|Y = 2)}$$
$$L^*(x) = \ln(L(x))$$

(keine Potenzzerlegung bei Normalverteilung)

$$EK = \frac{1}{2} \int\limits_{L^*(x) \geq 0} f(x|Y = 2)dx + \frac{1}{2} \int\limits_{L^*(x) < 0} f(x|Y = 1)dx$$

wird minimal, kann selbst als Gütemaß verwendet werden
Unter obigen Vorraussetzungen ist:

$$L(x) \geq 1 \rightarrow x \in K_1 \leftarrow L^*(x) \geq 0$$

$$L(x) < 1 \rightarrow x \in K_2 \leftarrow L^*(x) < 0$$

Es ergibt sich mit

$$m_i = E(X|Y = i) i = 1, 2, \text{ Cov - Kovarianz-Matrix}$$

und

$$D = (m_1 - m_2)^T \cdot Cov^{-1}(m_1 - m_2)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\delta_{ii}^2} (m_1[i] - m_2[i])^2$$

letzteres gilt nur bei definierten Merkmalen. Dann folgt (nach längerer Rechnung):

$$EK = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\sqrt{D/2}}^{\infty} e^{-Y^2/2} dY$$

EK ist eine Funktion von D. Die erwarteten Kosten sind klein wenn D groß ist. Also Merkmale so wählen, dass D maximal wird. Nun kann D als Gütemaß verwendet werden, weil EK monoton fallend sind bezüglich a

b) **Beurteilung der Klassifikationsgüte**
Zunächst wird 2-Klassen-Problem betrachtet (K_1, K_2)
K_1, sei voon bestimmten Interesse ("positiver" Fall)
$x_1, \ldots, x_n$ - n konkrete Messwertevektoren, die klassifiziert wurden
$y_1, \ldots, y_n$ - berechnete Klassen-Zugehörigkeiten
$z_1, \ldots, z_n$ - tatsächliche Klassen-Zugehörigkeiten

t_{pos} - Anzahl der Fälle $y_i = z_i = 1$ (positive, korrekte Erkennung)
t_{neg} - Anzahl der Fälle $y_i = z_i = 2$ (negative, korrekte Erkennung)
f_{pos} - Anzahl der Fälle $y_i = 1, z_i = 2$ (positive, falsche Erkennung)
f_{pos} - Anzahl der Fälle $y_i = 2, z_i = 1$ (negative, falsche Erkennung)
$\rightarrow$ $(2, 2)$-Wahrheitsmatrix

	tatsächlich positiv	tatsächlich negativ
positiv erkannt	t_{pos}	f_{pos}
negativ erkannt	f_{neq}	t_{neq}

K_1	K_2
t_{pos}-mal K_1 korrekt erkannt	f_{neq}-mal K_1 falsch erkannt
f_{pos}-mal K_2 falsch erkannt	t_{neq}-mal K_2 richtig erkannt

$\hookrightarrow$ Schätzung folgender Wahrscheinlichkeit möglich.

Richtig-positiv-Rate, Sensitivität, Trefferquote, Empfindlichkeit:
K1-Erkennung

$$P(K_1 erkannt | K_1) \approx \frac{t_{pos}}{t_{pos} + f_{neg}}$$

Falsch-positiv-Rate:
K2-Erkennung

$$P(K_1 erkannt | K_2) \approx \frac{f_{pos}}{t_{neg} + f_{pos}}$$

Falsch-negativ-Rate:
K1-Erkennung

$$P(K_2 erkannt | K_1) \approx \frac{t_{neg}}{t_{pos} + f_{neg}}$$

Richtig-negativ-Rate:
K2-Erkennung

$$P(K_2 erkannt|K_2) \approx \frac{t_{neg}}{t_{neg} + f_{pos}}$$

Für $n \to \infty$ “$\approx$“ fast sicher “=“

P(Richtig-Erkennung)

$$\approx \frac{t_{pos} + t_{neg}}{n}$$

P(Falsch-Erkennung)

$$\approx \frac{f_{pos} + f_{neg}}{n}$$

Annahme: K_1 soll keinesfalls übersehen werden. Klassifkator so gestalten, dass

$$P(K_1 erkannt|K_1) = 1 \wedge P(K_2 erkannt|K_1) = 0$$

$\hookrightarrow$ Zielstellung unsinnig

5.3 Merkmalstransformation Prüfung

X - Vektoren von Primär-Merkmalswerten (n-Werte)
Problem: n zu groß, Beschränkung auf k (k < n) "wesentliche"Merkmaleh
$\hookrightarrow$ Transformation der Merkmale.

Bekannteste Möglichkeit: **Karhunen-Loeve-Transformation**:
A sei Orthonormalmatrix (n x n) $\to A^T = A^{-1}$
X sei zufälliger Merkmalsvektor, O.B.d.A. sei EX=0

Transformation:

$$X = A \cdot Y$$

also

$$Y = A^T \cdot X$$

$a_1, a_2, ..., a_n$ sind Spaltenvektoren von A
X soll durch Linearkombination von $a_1, ..., a_k$ ($k < n$) ersetzt werden.

$$X = \underbrace{a_1 * Y_1 + \ldots a_k * Y_k}_{\text{X soll durch die Teil-Linearkombination der Spalten von A ersetzt werden}} + a_{k+1} * Y_{k+1} + \ldots a_n * Y_n$$

A ist so gesucht, dass X äm besten"(im Sinne des quadrat. Mittels) approximiert wird, d.h.

Erwarteter Fehler der Approximation:

$$R_k(A) = E(X - \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot Y_i)^2 = E(\sum_{i=k+1}^{n} a_i \cdot Y_i)^2 \to \min$$

n Nebenbedingung: $a_i^T \cdot a_i - 1 = 0$ für alle i

Diejenigen k Vektoren a_i sind auszuwählen, die im Mittel den kleinsten Approximationsfehler liefern.

$R_k(A)$ wird weiter umgeformt:

$$Y_i = a_i^T X = X^T a_i$$

und

$$(a_j \cdot Y_j)^T (a_i \cdot Y_i) = (a_j X^T a_j)^T (a_i X^T a_i)$$
$$= a_j^T \cdot X \cdot \underbrace{a_j^T \cdot a_i}_{0, if(i=j)} \cdot X^T \cdot a_i = \begin{cases} a_j^T X X^T a_i & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

Cov - Kovarianzmatrix zu X. Muss bekannt sein, ggf schätzen (statistisches Problem)

$$R_k(A) = E(\sum_{i=k+1}^{n} a_i \cdot X^T \cdot a_i)^2 = \sum_{i=k+1}^{n} a_i^T \cdot E(X \cdot X^T) \cdot a_i = \sum_{i=k+1}^{n} a_i^T \cdot Cov \cdot a_i$$

$\hookrightarrow$ $R_k(A)$ wird minimal, wenn (in diesem Fall) jeder Summand einzeln minimal wird.
$\hookrightarrow$ n-k gleichartigt, unabhängige Optimierungsprobleme für die Summanden zu lösen.

Zielfunktion:

$$z_i = a_i^T \cdot Cov \cdot a_i \to \min$$

Nebenbedingung:

$$a_i^T \cdot a_i - 1 = 0$$

Charakterisierung der Aufgabe:
Zielfunktion und Funktion in Nebenbedingung sind beide quadratisch, also konvex.
eine Nebenbedingung, auch mit konvexer Funktion
$\hookrightarrow$ Methode der Langrange-Funktion anwendbar: $(L_i; i = 1, \ldots, n)$

$$L_i(a_i) = \underbrace{{}^T \cdot Cov \cdot a_i}_{\text{ursp. Zielfunk.}} - \underbrace{\lambda_i(a_i^T \cdot a_i - 1)}_{*}$$

* Summe aus μ-Werten, multipliziert mit NB-Funktion. Hier nur 1 Summand (nur 1 NB)

Bildung des Gradienten:
(alle partiellen Ableitungen nach den Komponenten des Vektors a_i)

$$\nabla_{a_i} L_i(a_i) = 2 \cdot Cov \cdot a_i - 2 \cdot \lambda_i \cdot a_i$$

Nullsetzten des Gradienten, Ausklammerrn von a_i, Einführung der Einheitsmatrix E:

$$\hookrightarrow (Cov - \lambda_i \cdot E) \cdot a_i = 0$$

d.h. Eigenschaftsproblem zu Cov zu lösen $\rightarrow \lambda_i$
Cov symmetisch $\rightarrow$ nur reele Eigenwerte Cov pos. semidefinit $\rightarrow \lambda_i \geq 0$
a_i sei dann Eigenvektor zu $\underbrace{\lambda_i}_{\text{zu berechnen}}$ $\rightarrow$ A bekannt

Zurück zum Optimierungs-Problem:

$$R_k(A) = \sum_{i=k+1}^{n} a_i^T \cdot Cov \cdot a_i = \sum_{i=k+1}^{n} a_i^T \cdot \lambda_i \cdot a_i = \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit soll λ_i fallend sortiert sein.

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_k \geq \lambda_{k+1} \geq \cdots \geq \lambda_n$$

$R_k(A)$ ist minimal, wenn die kleinsten λ_i “hinten“ sind.

Interpretation der Ergebnisse:
Spaltenvektoren der Transformationsmatrix A: orthonormierten Eigenvektoren von Kovarianzmatrix

$$Cov = EXX^T$$

“Im Mittel“ beste Approximation, indem diejenigen Merkmale im Sekundärraum ausgewält werden, die zu den k größten Eigenwerten gehören.

Berechnung Kovarianzmatrix im Sekundärraum d.h. $Cov(Y_i, Y_j)$):

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(YY^T) &= \mathrm{E}(A^T X (A^T X)^T) \\ &= \mathrm{E}(A^T X X^T A) \\ &= A^T \cdot \mathrm{E}(XX^T) \cdot A \\ &= A^T \cdot Cov \cdot A \\ &= A^T \cdot E \cdot \lambda \cdot A \\ &= diagMatrix(\lambda) \text{ ,alles 0, Hauptdiagonale} \lambda_i \end{aligned}$$

Diagonalmatrix mit dekorrelierten Komponenten und Varianzen ($VarY_i = \lambda_i$) in Hauptdiagonale.
Nur erste k Komponenten von Y werden zur Mustererkennung verwendet.
$\hookrightarrow$ Verwendung der ersten k Spalten von A
$\hookrightarrow A_k = (a_1 a_2 \dots a_k)$
$\rightarrow Y$ jetzt k-dimensional (nach Abschneiden der Komponenten nach Nummer k)

$$E(Y'Y'^T) = \dots = A_k^T \cdot E(XX^T) \cdot A_k$$

Varianzen λ_i sind Maß für die Streuung ($\sqrt{\lambda_i}$) im neuen Koordinatensystem der Eigenvektoren.
Wenn $\lambda_i = 0$, also keine Streuung, dann kann Merkmal i (im Sekundärraum) weggelassen werden.
Falls $\lambda_i = 0$, gibt es keine Streuung und damit keine Information.

Beispiel:

$$Cov = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$
$$\hookrightarrow Cov * x = \lambda * x \text{ zu lösen}(*)$$

charakteristische Gleichung:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 8\lambda + 15 = 0$$
$$\hookrightarrow \lambda_2 = 5, \lambda_2 = 3$$

(Es soll $\lambda_1 \geq \lambda_2$ sein)
Berechnung der Eigenvektoren (mit 1-Normierung)
Einsetzen von λ_1 im (*) $\rightarrow x_1 - x_2 = 0$
Einsetzen von λ_2 im (*) $\rightarrow x_1 + x_2 = 0$

Eigenvektoren:

$$e_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$
$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sei zu klassifizierender Primär-Merkmalsvektor - Dimensionen 2 (1 zu groß)

$$y = A^T x = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{Nach 0 wird im Sekundärraum klassifiziert} \\ \leftarrow \text{nicht beachten} \end{matrix}$$

Bemerkungen:

a) Falls $E(X) \neq 0$, wird mit $Z = X - EX$ verfahren wie beschrieben.

b) Verfahren auch pro Klasse anwendbar, dass heißt auf einen Vektor X unter Bedingung $Y = i$ (Klassenzugehörigkeit) $E(X|Y = i)$ zu bilden. (Kenntnis von $P(X \leq x|Y = i)$ erfordert, auch bedingte Kovarianzmatrizen)
$\hookrightarrow$ Unterschiedlichen Merkmalssätze pro Klasse möglich.

c) Verfahren garantiert nicht erfolgreiche Klassifikation. Bild18
Nach Verfahren wäre y_1-Komponente wegzulassen $\rightarrow$ Klassen nicht mehr unterscheidbar, sonst Klassifikator muss nur $y_1 > 0$ testen

d) Kenntniss von Cov ist starke Vorraussetzung. Praktisch muss Cov i.A. aus statischen Material geschätzt werden

e) auch ähnliche Aufgabenstellungen denkbar:
   - Transformation soll mittleren Objektabstand pro Klasse konstant lassen
   - Transformation soll Klassenabstände maximieren

6 Biometrische Identifikation

6.1 Grundlagen

Begriffe: Biometrie: biologische Statistik, Zählung und Messungen von Lebewesen
Biometrik: anatomisches Messen lebenswesenspezifischer Merkmale
Biometrische Id.: Identifikation mittels Biometrik
Arten-biometrischer Id:

- Fingerabdruck
- Hand
- Gesicht
- Sprache
- Iris
- Retina
- Unterschrift
- DNA
- ...

3 Schritte:

- Auswahl der Merkmale
- Messung
- Klassifikation

Einsatz: Zugriffskontrolle, Zutrittskontrolle und Zugangskontrolle

PIN-Nachteil: keine Personengebundenheit

Eignundskriterien von Merkmalen:

- Universalität (Vorhandensein bei jeder Person)
- Einzigartigkeit (bei jeder Person anders)

- Permanenz (Zeitinvarianz)
- Erfassbarkeit

Anforderung an Verfahren:

- technische Umsetzbarkeit
- ökonomische Umsetzbarkeit
- Überlistungsresistenz

Vermutung:
Einzigartigkeit, Unveränderlichkeit
seit 1960: Entwicklung von AFIS (automated fingerprint id. system)
Fingerabdruck: Abdruck der Finger-Beere
Muster entsteht durch Papillar-Linien
Merkmale:

- Verlauf
- Breite
- Tiefe
- Gabelungen
- Linien-Enden

6.2 Fingerabdruck-Erkennung

- Fingerabdruck als Unterschrift im alten Indien.
- 1897 Daktyloskopie in Indien eingeführt
- 1901 England übernimmt indisches Beispiel
- 1903 Deutschland übernimmt englisches Beispiel
- seit 1960 Entwicklung von AFIS (Automated Fingerprint Identification System)
- Fingerabdruck - Abdruck der Finger-Beere (Fettpolster)
- Muster entsteht durch Papiller-Linien (Minutien)
- **Merkmale**
- Breite

- Tiefe
- Gabelungen
- Verlauf
- Linien-Enden
- **Arten von Linien-Verläufe**
- Stange
- Spirale
- Bogen
- Gabelung
- Insel
- **Forensische Verwendung**
- FA scannen → 250 kByte pro Finger
- Identifikation
- Konzentration auf benötigte Merkmale → ca. 1 kByte (damals keine FA-Rekonstruktion möglich)
- Arbeitsweise:
  a) Bildgewinnung
  b) Bildverarbeitung (Kontrast, Kanten, ...)
  c) Matchen mit Referenzmustern
  (Abstandsmaße, Abstandsminimierung) mit Hilfe von Schwellenwerten
- Innerhalb der Biometrie hat die Fingerabdruckerkennung Anteil von rund 50%

6.3 Gesichts-Erkennungssysteme eine der schwierigsten Aufgaben des Erkennens

Auswertungen:

- Zugangskontrolle
- Fotodatenbanken
- Einschalfkontrolle im Auto

6.3.1 Gesichtssuche in einem Bild

Ziel: Gesichter und Nicht-Gesichter unterschieden
Ist p Mittelpunkt meines Gesichtes?
dazu:

- Referenz-Gesichtsmaske über Bild schieben
- ggf. mehrfache Skalierung des Bildes
- ggf. mehrfache Rotation des Bildes
- gleiche mittlere Helligkeiten bezüglich des Bildausschnitts und Maske
- gleiche Kontraste bezüglich des Bildausschnitts und Maske

6.3.2 Merkmalsextraktion, Merkmalsvergleich

2 wichtige Methoden

- Eigenface-Methode
- Elastic-Graph-Matching

a) Eigenface-Methode (Turk, Pertland 1991)
Beweis: Karhunen-Loeve-Transformation
Darstellung jedes Gesichts als Linearkombination von n Referenzgesichtern im Sekunddärraum. (m Koeffizienten $\rightarrow$ m Merkmale)
Vorteil:
Gesicht wird als Ganzes gesehen.

ca. $m = 5000$ normierte Gesichter gegeben als Vektoren (auch eine Person mehrfach)
Normalisierung: gleiche Größe und Position wichtiger Punkte (Augen, Nase, ...).

Dimensionen eines Gesichtes G_i z.B. $n = 10000 (= 100\text{x}100) to$ Raum der Gesichter

Verfahren:
Zuerst "mittleres Gesicht" GM aus dem G_i ermitteln (arithm. Mittel)

$\hookrightarrow$ GM als Ursprung des neuen Koordinatensystems.

Berechnung von m Differenzgesichtern $G_i - GM$
Estellung einer (geschätzten) (n,n) Kovarianzmatrix: $C = GM * GM^T$ Bestimmung der Eigenvektoren von C : gesichtsähnliches Aussehen dieser Eigenvektoren ($\rightarrow$ Eigengesichter)

Jedes Gesicht wird dargestellt als Linearkombination der Eigengesichter

formal: (siehe Kapitel 5)
zufälliges Primärgesicht X
Gesicht im Sekunddärraum Y
orthonormale Transformationsmatrix A

$$X = A * Y \rightarrow Y = A^T * X$$

$a_1, \ldots, a_n$ - Spalten von A
Zugehörige Eigenwerte sind Streuungsmaß in Richtung der zugehörigen Eigenvektoren.
X wird ersetzt durch Linearkombination von $a_1, \ldots, a_k$ $(k < n)$ Y_i sind die Koeffizienten der Linearkombination
Y ist Bild von X im Sekunddärraum
A wird aus C bestimmt

Gesichtserkennung:
Transformation eines realen Gesichts im Sekunddärraum
$\hookrightarrow$ Koeffizienten repräsentieren Gesicht
Vergleich (z.B.) nach Minimum-Distanz-Prinzip
Gleichheit, falls Abstsand $\leq$ Schwellenwert, sonst Rückweisung
Problem:
Auswahl "guter" Referenzgesichter schwierig
hoher, einmaliger Aufwand zur Bestimmung von A
danach: akzeptabler Aufwand

b) Elastic-Graph-Matching
Gesicht gegeben: Grapf zu konstruieren
Bild mit Gesicht, in welchem Linien liegen
Funktion zu definieren, die Abstand zweier Grapfen beschreibt

- Unterschuede am Knoten
- Berücksichtigung von Verzerrungen

Gleichheit $\leftrightarrow$ Abstand $\leq$ Schwellenwert
Verifikation verlässlich (Ist es bestimmte Person?)
Indetifikation ist problematischer (Welche Person ist es?)

Prinzip:
Knoten werden mit Merkmalsmengen versehen (Jets)
Verwendung als Schlüssel für Suchen im anderen Gesicht
Nutzung von Wavelets zur Berechnung der Jets
$\hookrightarrow$ Funktion für Wavelet-Transformation., geeignet zum Finden von Signalbrüchen (glänzender Punkt auf Nasenspritze)

Wortbildung:

onedelette (fr.)	- kleine Welle	$\hookrightarrow$ Kunstwort Wavelet
onde	- wave (Welle)	

Verwendung verschiedener Graphen, verschiednen Jets
konkrete Produktinfos geheim

6.3.3 Iriserkennung

Vorteile:
Invarianz gegen Stimmungen
Eindeutigkeit

2 Kameras

- Weitwinkel-Kameras nimmt Bild auf
  Sofware sucht gesicht und Augen
- Schwenk-Kamera mit engen Blickfeld erforscht ein Auge

Iris-Suche:

$$K(r, x_0, y_0) \text{ - Kreis um } (x_0, y_0) \text{ mit Radius } r$$

$$g(x, y) \text{ - Grauwert von } (x, y)$$

Gesucht: die Kresilinie mit größtem Konstrasunterschied zur Umgebung
dazu: Maximierung der Ableitung von Kreis-Kurvenintegralen nach dem Radius

$$\max K(r, x_0, y_0) | \frac{\delta}{\delta r} \int_{K(r,x_0,y_0)} \frac{K(r, x_0, y_0)}{2\pi r} dr$$

Gefundene Kreislinie gilt als Iris-Kontur
Kodierung der Iris-Merkmale (z.B. als 1048-Bit-String) (Downing, Daugman; 1995)

Idee zur Binarisierung:

- intessierenden iris-Bereich festlegen(z.B. untere Hälfte)
- Rasterung dieses Bereiches (z.B. 1048 Rasterpunkte)
- Mittelwert m der Grauwerte berechnen
- Zuweisung von 0 oder 1 zu jedem Rasterpunkt, je nachdem, ob sein Grauwert $> m$ ist
  Vergleich von 2 Irisen nach Hamming-Distanz
  $\rightarrow$ hohe Verlässlichkeit

6.3.4 Sprechererkennung

Sprecherverifikation
Sprecheridentifikation

Aufzeichnungen der Schwingungen und der Mustervergleich
sprecherspezifische Merkmale zu erheben
Verwendung von HMM (Hidden-Markow-Modelle), auch bei Schrifterkennung
Probleme der Unterscheidung:

- Stimmschwankungen durch Stimmungsschwankungen
- Hintergrund-Geräusche

6.3.5 Unterschriftenerkennung

Schriftmerkmale:

- Größe
- Neigung
- Proportionen
- Weite
- Verbundenheit
- Raumaufteilung
- Schleifenform
- Aufstriche
- mittlere Schreibgeschwindigkeit (horizontal/vertikal)
- Druckverlauf
- Variationen gleicher Buchstaben

6.3.6 Handrenen-Analyse

Grundlage: Infrarot-Aufnahme der Hand

6.4 Prüfung

Zirkel kann hilfreich sein.

6.4.1 Aufgabe 1

verbale Aufgabe
Grundidee und Merkmale zur Lösung liefern

6.4.2 Aufgabe 2

Geometsiche Mittel zur Mustererkennung (einfaches Problem) Klassifikator: Minimumdistanz, nn,knn

6.4.3 Aufgabe 3 - x

keine Stochastische Approximation zu berechnen
aber Faktenwissen
Bayes-Klassifikator, Klassengrenzen finden und links und rechts von Grenze unterscheiden (größte Spaltensumme) Bayessches Kriterium richtig anwenden (finden der klasse 1 und 2) 2-Klassen-Problem
Merkmalsbewertung Merkamals Auswahl Det von 3x3 Matrix bestimmen oder 2x2 Covarianz gegeben
Eigenvektoren bilden
unabhängigkeit der eigenvektoren prüfen
Eigenwert der Covarianzmatrix > 0
Verständnisfragen
Transformationsmatrix ausrechnen?