De Black Brant VC sounding rocket

Mitchell Kampert

Oktober 2022

1 Inleiding

De Black Brant VC is een Canadese sounding rocket. Deze raket moet aan verschillende eisen voldoen. Om te controleren of de Black Brant ook daadwerkelijk aan deze eisen voldoet, kan op basis van de gegevens van de raket de raketbaan berekend of gesimuleerd worden. Deze berekeningen en simulaties komen in dit verslag aan bod.
Het eerste deel zal bestaan uit analytische berekeningen, het tweede deel uit een numerieke simulatie en in het derde deel komen eventuele verbeteringen aan bod.

2 De analytische afschatting

Om te beginnen wordt eerst een simpele, parabolische baan berekend. Hierbij wordt de raket gelanceerd met een initiële snelheid $V0$ gelanceerd met een hoek van ϕ radialen.
Voor deze situatie zijn de volgende variabelen te berekenen: Afstand(x), Hoogte(y), vliegbereik($xmax$) en de apogee($ymax$), het hoogste punt van de vlucht.

Om de afstand te beschrijven als functie van tijd, wordt de snelheid in de x-richting vermenigvuldigd met tijd. Dit geeft de formule:

$x = V0cos(\phi) \cdot t$

Om de hoogte te berekenen wordt de snelheid in de y-richting genomen, maar daar moet in dit geval de versnelling van de zwaartekracht vanaf gehaald worden. Om dit te bereiken wordt de afgeleide van de valversnelling genomen en deze van de y-component afgehaald. Ook dit wordt vermenigvuldigd met tijd om de hoogte op tijdstip t te bepalen.

$y = (V0sin(\phi) - \frac{1}{2}(9.81) \cdot t)t$

Het vliegbereik wordt bepaald door het tijdstip te bepalen voor $y = 0$ waarbij $t \neq 0$ aangezien de raket op $t = 0$ en $y = 0$ gelanceerd wordt.
Wanneer de formule op deze manier omgeschreven wordt, ontstaat de volgende formule:

$xmax = \frac{2 \cdot V0^2 cos(\phi) \cdot sin(\phi)}{9.81}$

De apogee wordt bepaald door de afgeleide van de hoogte gelijk te stellen aan 0, dit is immers de top van de parabool en wanneer dit gedaan wordt geeft dat:

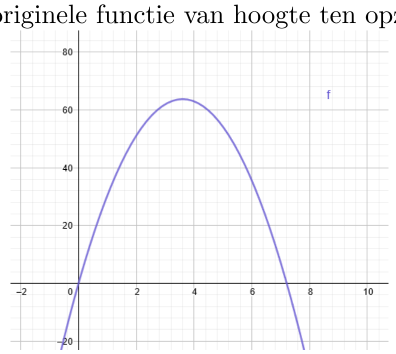
$ymax = \frac{V0^2 \cdot sin(\phi)^2}{2 \cdot 9.81}$

Om te bepalen hoe lang de Black Brant zich boven een bepaalde hoogte bevindt, kan er een formule opgesteld worden met behulp van de wortelformule. Deze luidt als volgt:

Voor $\quad ax^2 + bx + c = 0 \quad$ is $\quad x1, x2 = m \pm \sqrt{m^2 - p}$

Waarbij:
$a = 1$
$m = \frac{-b}{2}$
$p = c$

Figure 1: De originele functie van hoogte ten opzichte van tijd.



Dit geeft echter de nulpunten van een dalparabool, en het doel zijn de punten op $y = hmin$ voor een bergparabool (de vorm van de raketbaan). Om dit te bereiken wordt eerst de parabool omgekeerd:

$ax^2 - bx - c = 0$

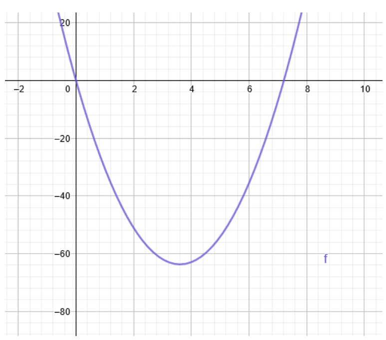


Figure 2: De getransformeerde functie waarbij de y waarden gespiegeld zijn om de t-as.

Vervolgens wordt deze gelijkgesteld aan de minimale hoogte $hmin$, oftwel deze wordt bij c opgeteld. Dit geeft uiteindelijk:

$\frac{1}{2} \cdot 9.81t^2 - V0 \cdot sin(\phi)t + hmin$

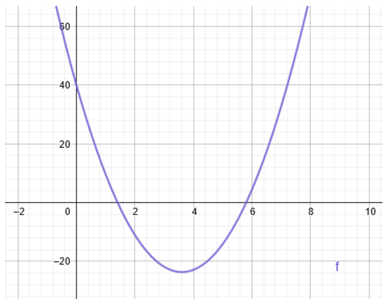


Figure 3: De grafiek is $hmin$ omhoog verplaatst waardoor de snijpunten met $hmin$ op de t-as liggen.

Dit omschrijven met behulp van de bovenstaande wortelformule, én $t1$ van $t2$ afhalen geeft de uiteindelijke formule:

$\Delta t = 2\sqrt{(\frac{V0 \cdot sin(\phi)}{9.81})^2 - \frac{2 \cdot hmin}{9.81}}$

Een minimum energy baan geeft de raketbaan waarbij zo min mogelijk energie gebruikt wordt om een bepaalde afstand af te leggen, of in het geval van een raket met een bepaalde hoeveelheid energie, de baan waarbij de grootste afstand afgelegd wordt. Deze kan berekend worden door de formule te nemen voor $Xmax$ en deze te differentiëren en gelijk te stellen aan 0. Dit geeft:

$xmax = \frac{2 \cdot V0^2 cos(\phi) \cdot sin(\phi)}{9.81}$

Vervolgens differentiëren geeft:

$\frac{2 \cdot V0^2 cos(\phi)^2 - 2 \cdot V0^2 \cdot sin(\phi)^2}{9.81} = 0$

Waaruit blijkt dat $cos(\phi) = sin(\phi)$ wat betekent dat ϕ gelijk staat aan $\frac{1}{4}\pi = 45°$

De specifieke stoot van de brandstof van de Black Brant kan worden afgeleid uit de formule voor stuwkracht. Uit deze formule blijkt dat de specifieke stoot Isp gelijk staat aan:

$Isp = \frac{T}{g \cdot \dot{m}}$

Door de gegeven waarden van stuwkracht op zeeniveau, valversnelling, en verbrandingssnelheid in te vullen volgt een specifieke stoot van 225,30 seconden op zeeniveau.

Vervolgens kan met behulp van deze specifieke stoot de burn-out snelheid van de raket bepaald worden. Deze luidt als volgt:

$\Delta V = Isp \cdot g \cdot ln(\frac{m0}{mf})$

Hierbij is $m0$ de startmassa en mf de massa wanneer alle brandstof verbrandt is.
De burn-out snelheden voor de Black Brant zijn voor 100kg en 362,8kg als volgt:

$225,30 \cdot 9,81 \cdot ln(\frac{1361}{343}) = 3046,19 \quad m/s$
$225,30 \cdot 9,81 \cdot ln(\frac{1623,8}{605,8}) = 2179,19 \quad m/s$

Wanneer deze burn-out snelheid in de besproken formules te zetten met een ϕ van 45°, kan bepaald worden of de Black Brant aan de gestelde eisen voldoet. Een burn-out snelheid van 3046 m/s geeft:

$\frac{2 \cdot 3046,19^2 cos(\phi) \cdot sin(\phi)}{9.81} = 945,9 \cdot 10^3 m$

Aan de gestelde eis van minimaal 700 km wordt dus ruim voldaan.
Vervolgens moet een minimale hoogte van 200 km bereikt worden.

$\frac{3046,19^2 \cdot sin(\phi)^2}{2 \cdot 9.81} = 236,5 \cdot 10^3 m$

Ook aan de minimale hoogte eis wordt voldaan.
De laatste eis is dat de Black Brant minimaal 300 seconden boven een hoogte van 300km moet doorbrengen. Met een tijd van:

$\Delta t = 2\sqrt{(\frac{3046,19 \cdot sin(\phi)}{9.81})^2 - \frac{2 \cdot hmin}{9.81}} = 333,6$ seconden

Ook aan deze eis wordt voldaan en daarmee dus aan alle gestelde eisen.

Voor $\phi = 45°$ en een payload massa van 362,8 kg vliegt de Black Brant 149,6 km ver en 236,1 km hoog. Vergeleken met de gegeven specificaties van de Black Brant zit de analytische schatting er ver van af. Uit de specificaties blijkt dat de Black Brant daadwerkelijk 241 km ver vliegt en 190 km hoog. Dit geeft een afwijking van ruim 60% op de afstand en 20% op de hoogte. Een zeer significant verschil dus en hieruit blijkt dat de resultaten niet betrouwbaar zijn.
De reden hiervoor is dat er nog veel variabelen missen in de analytische schatting. De belangrijkste hiervan zijn: De afgelegde afstand en de veranderende vluchthoek tijdens het opbranden van de brandstof, luchtweerstand en veranderende zwaartekracht op basis van hoogte.

3 De numerieke simulatie

Om een nauwkeuriger model te maken voor de vlucht van de Black Brant, kan een numeriek model opgesteld worden. Dit wordt in het geval van dit verslag gedaan in Matlab/Simulink. In dit model zal de Black Brant beschouwd worden als puntmassa en zullen de volgende krachten erop werken: stuwkracht, zwaartekracht en luchtweerstand. Zoals te zien in figuur 4.

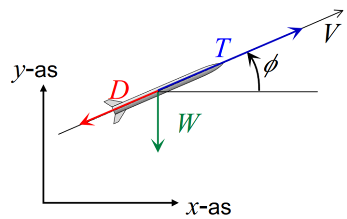


Figure 4: De drie krachten die werken op de Black Brant VC.

Deze krachten kunnen als de volgende bewegingsvergelijkingen opgeschreven worden:

$\ddot{x} = cos(\phi) \cdot (Ft - Fd)$
$\ddot{y} = sin(\phi) \cdot (Ft - Fd) - Fz$

Daarnaast kan de snelheid beschreven worden als:

$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$

En de hoek ϕ als:

$\phi = tan^{-1}(\frac{\dot{y}}{\dot{x}})$

Om luchtweerstand en stuwkracht te bepalen zijn de dichtheid en druk van de atmosfeer van groot belang. Deze waarden worden bepaald door de volgende formules:

$\rho(y) = \rho 0 \cdot e^{-y/H}$
$Pa(y) = P0 \cdot e^{-y/H}$

Door deze formules in Simulink te zetten en weer te geven op basis van een variabele hoogte zijn de volgende grafieken te zien die de luchtdruk en dichtheid weergeven:

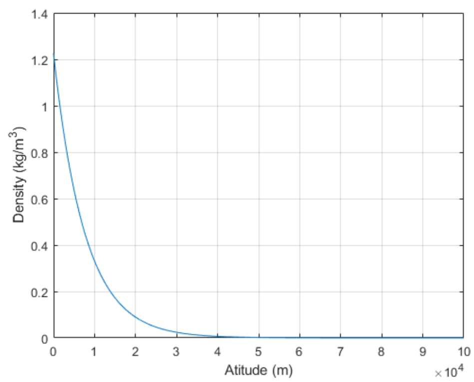


Figure 5: Luchtdichtheid van 0 tot 100 km hoogte.

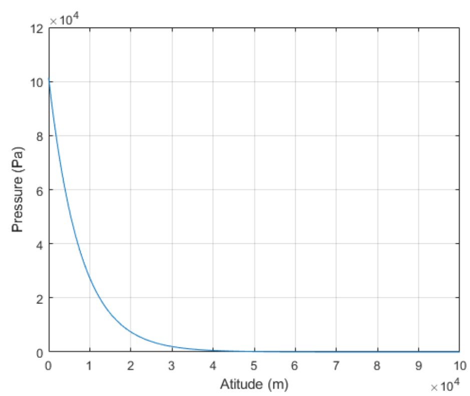


Figure 6: Luchtdruk van 0 tot 100 km hoogte.

Vervolgens kan met de gegeven luchtdruk de stuwkracht van de Black Brant bepaald worden. De formule voor stuwkracht is:

$$T = Ve \cdot \dot{m} + Ae(Pe - Pa)$$

Deze kan omgeschreven worden om hoogte als variabele te nemen:

$$Ts = Ve \cdot \dot{m}$$

Dit invullen in de formule voor stuwkracht geeft:

$$T = Ts - AePe + AePa + AePe - AeP(y)$$
$$T = Ts + Ae(Pa - P(y))$$

Dit levert uiteindelijk de formule voor stuwkracht op basis van hoogte:

$$T(y) = Ts + Ae \cdot Pa(1 - e^{-y/H})$$

Wanneer de stuwkracht weergegeven wordt op basis van hoogte ontstaat de volgende grafiek:

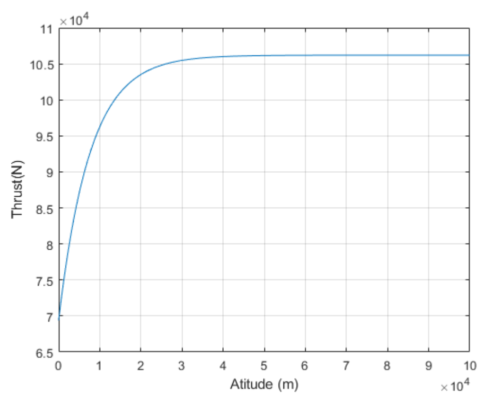


Figure 7: Stuwkracht van 0 tot 100 km hoogte.

Wanneer de raket een payloadmassa van 100 kg heeft, verloopt de massa als volgt:

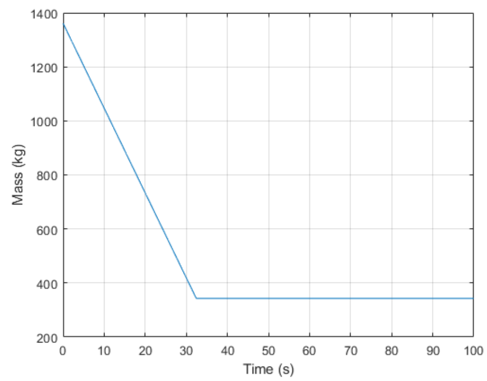


Figure 8: Totale massa van de Black Brant VC

Wanneer de volledige simulatie van de Black Brant gedraaid wordt, en hier de snelheid en vluchthoek uitgehaald worden, ontstaan de volgende grafieken:

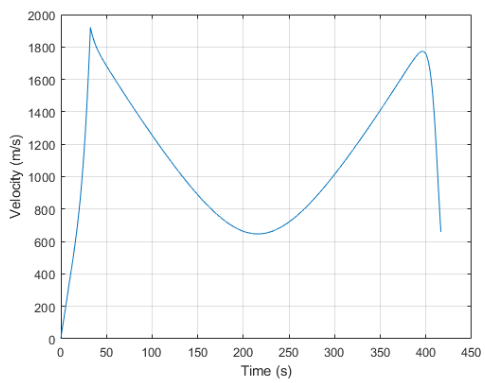


Figure 9: Totale snelheid van de Black Brant VC

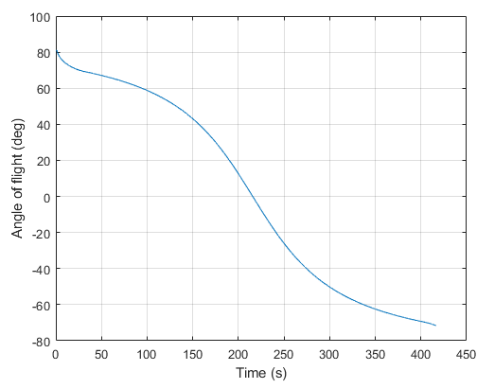


Figure 10: Vluchthoek van de Black Brant VC

In Figuur 9 is de snelheid van de Black Brant te zien. Deze neemt de eerste 32 seconden exponentieel toe wegens de stuwkracht van de motor. Na 32 seconden brandt de motor op en neemt de snelheid initieel zeer snel af wegens de luchtweerstand, maar naarmate de raket hoger komt, en de luchtweerstand afneemt, krijgt de grafiek van de snelheid een parabool-achtige vorm, wegens de zwaartekracht die op de raket werkt. Vanaf ongeveer 400 seconden keert de Black Brant terug in de atmosfeer en begint de snelheid zeer snel weer af te nemen.
Figuur 10 geeft de vluchthoek van de Black Brant weer. Deze neemt eerst snel af wegens de nog lage snelheid van de raket, maar deze afname wordt al snel

minder wanneer de snelheid van de Black Brant toeneemt, wanneer de brandstof op is, neemt de hoek af naar 0 naarmate de Black Brant de apogee bereikt en de hoek gaat vervolgens de negatieve kant op wanneer de Black Brant weer afdaalt.

De maximumsnelheid uit figuur 9 is 1922 m/s. Dit is ongeveer 250 m/s langzamer als de berekende snelheid van de analytische benadering. Dit is te verklaren door de zwaartekracht die gedurende de 32 seconden van de versnelling op de raket werkt, en de luchtweerstand die de raket tegenwerkt tijdens de versnelling.

Om de ideale lanceerhoek te bepalen kan deze hoek incrementeel groter gemaakt worden en de uiteindelijke afstand bekeken worden. Hieruit blijkt dat voor een payload van 100 kg, dat de ideale lanceerhoek 73° is. Dit is hoger dan de vooraf berekende hoek van 45°. Dit kan verklaard worden wegens de luchtweerstand en de varierende hoek waar de stuwkracht in werkt. Ten eerste zal de Black Brant verder vliegen wanneer het weinig luchtweerstand ervaart. Met een hogere lanceerhoek zal de Black Brant eerder de atmosfeer verlaten en dus minder snelheidsverlies leiden binnen de atmosfeer. Daarnaast zal de pitchhoek van de Black Brant de eerste seconden van de vlucht snel afnemen, zoals ook zichtbaar was in figuur 10. Hieruit blijkt dat gedurende het grootste deel van de aangedreven fase, de pitch ongeveer 10° lager ligt dan dat tijdens lancering is ingesteld.

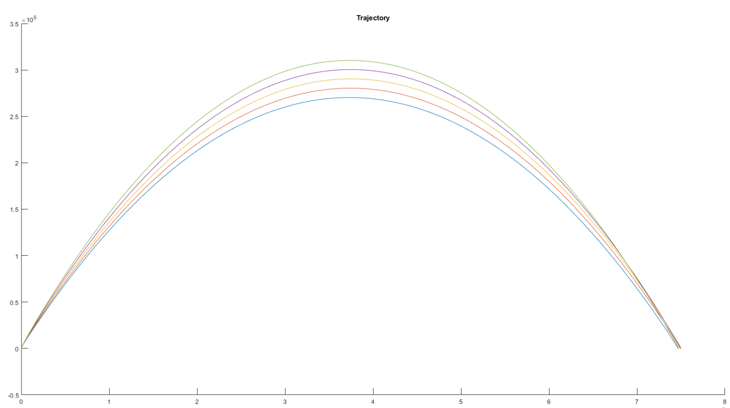


Figure 11: De vlucht van de Black Brant VC onder hoeken van 72° tot 74° met sprongen van 0.5°

Met al deze gegevens kan ten slotte gecontroleerd worden of de Black Brant VC aan de gestelde eisen voldoet. Welke waren: Het doel moet, op een minimum energy trajectory,

- Minimaal 700 km af kunnen leggen.
- Minimaal een hoogte van 200km bereiken.
- Minimaal 300 seconden boven een hoogte van 100km vliegen.

Wanneer het Simulink model ingesteld wordt op een raket met een payload van 100kg en een lanceerhoek van 73°, volgt de raketbaan uit figuur 12.

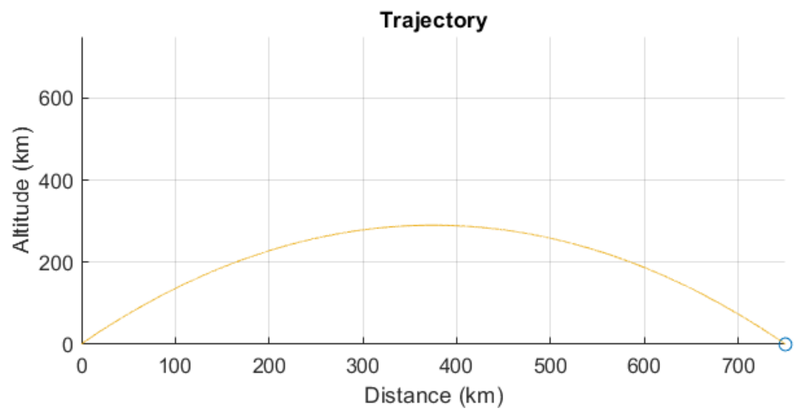


Figure 12: De baan van de Black Brant VC met een payload van 100 kg gelanceerd met een pitch van 73°

De gegevens behorend bij deze vlucht zijn als volgt:

- Afgelegde afstand: 750,31 km
- Maximum hoogte: 290,43 km
- Tijd boven een hoogte van 100km: 410 seconden

Hiermee voldoet de Black Brant VC dus ruimschoots aan de gestelde eisen.

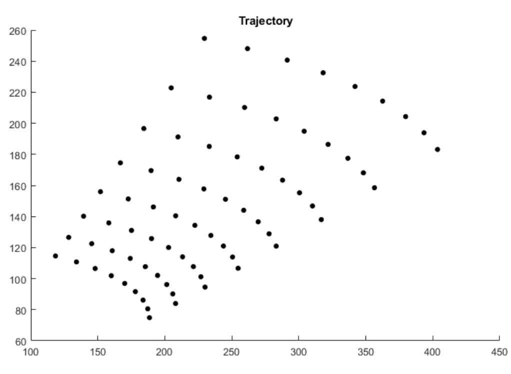


Figure 13: De $Xmax$ en $Ymax$ bij een varierende lanceerhoek en payload zoals gegeven in figuur 2 van het opdrachtendocument.

4 Extra verbeteringen aan het numerieke model

Het numerieke model levert al behoorlijk nauwkeurige simulatieresultaten, maar er is altijd ruimte voor verbetering. Er zijn namelijk vrijwel oneindig veel factoren die naast de gebruikte factoren, nog invloed hebben op de baan van de Black Brant. Veel hiervan zijn verwaarloosbaar, maar een aantal hiervan hebben toch nog een redelijk aandeel in het gedrag van de raket. Deze zijn bijvoorbeeld de ronding en de draaing van de Aarde. Om rekening te houden met deze factoren zijn ook deze in de driverfile verwerkt, maar als optionele keuzes die ingesteld kunnen worden door de waarden van ”centrifugal_force” en ”rotation” op true of false te zetten. In het geval van de besproken minimum energy trajectory met een payload van 100 kg, vliegt de Black Brant VC ongeveer 8 km verder en 8 km hoger. Dit is een logische toename aangezien de zogenaamde middelpuntvliedende kracht een ”invloed” heeft op de raket.
Wanneer ook de draaïng van de Aarde meegenomen wordt, vliegt de Black Brant nog eens 3 km verder en 9 km hoger. De hoogte neemt voornamelijk toe omdat de draaïng initieel de raket recht omhoog trekt en niet naar voren. De hoek van de minimum energy trajectory wordt hierdoor dus iets omlaag gebracht. Wanneer deze draaïng toegevoegd wordt, wordt de aanname gedaan dat de raket op de evenaar gelanceerd wordt richting het oosten.

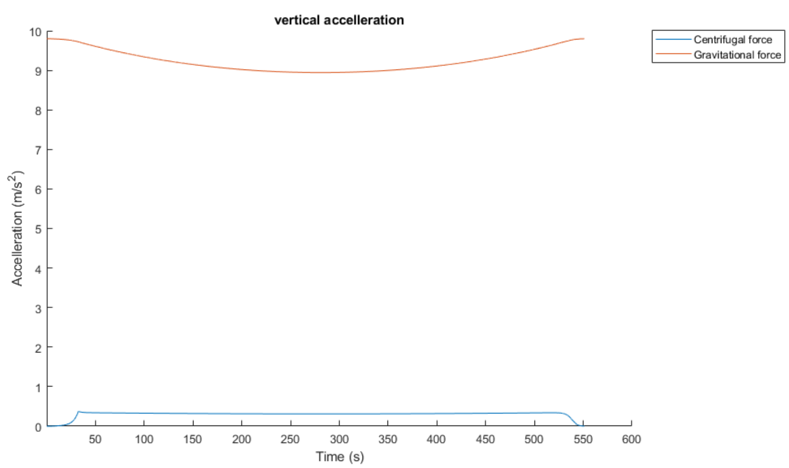


Figure 14: De valversnelling en de middelpuntvliedende kracht

De invloed van deze factoren is in het geval van de Black Brant VC niet heel groot, maar in het geval van een grotere raket daarentegen, zullen deze factoren een grotere invloed hebben. Zeker wanneer de raket in een baan rond de Aarde gebracht wordt. Dat is in het standaard model niet mogelijk, maar met toevoeging van deze factoren wel. Neem bijvoorbeeld de baan het ISS. Dit ruimtestation verplaatst zich op een hoogte van ongeveer 417 km met een snelheid van 7660 m/s. Ook dit kan gesimuleerd worden in het nieuwe model.

De baan en versnellingen zijn te zien in figuur 15 en 16.

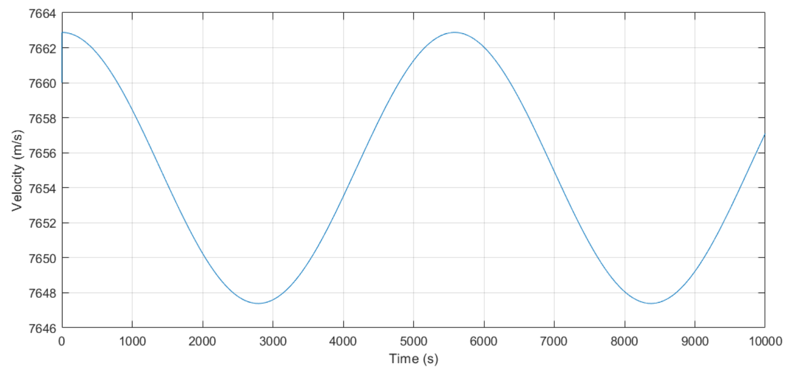


Figure 15: De baan van een object in een stabiele baan om de Aarde

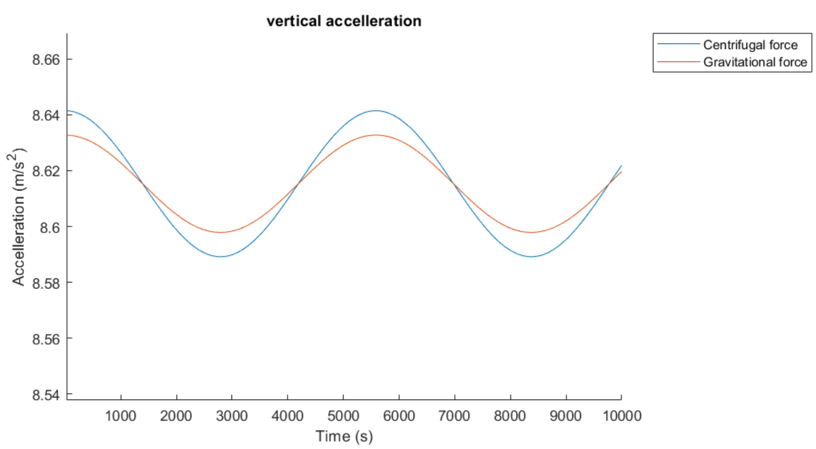


Figure 16: De valversnelling en de versnelling wegens de middelpuntvliedende kracht die om en om de overhand nemen op de apoapsis en periapsis

De toevoegingen van deze factoren maakt dit model dus een stuk flexibeler en kan dus ook gebruikt worden voor grote raketten en satellietbanen.