11. 陰関数の微分

陰関数: 方程式の解として関数を取り出して**陰関数**という。

例: $x^2+y^2=5$.

この方程式を y について解く。$y^2=5-x^2$, $\boxed{y=\pm\sqrt{5-x^2},\ (-\sqrt{5}\le x\le\sqrt{5}).}$ 2 次方程式の解としてふたつ解がある。

陰関数の微分: 一般に方程式を解くのは難しい。しかし陰関数の微分に解の表示は必要ない。

例: $x^2+y^2=5$ の両辺を x について微分する。y を x の関数として $y=f(x)$ とする。$x^2+(f(x))^2=5$ の両辺を微分して $2x+2f(x)f'(x)=0$. $f'(x)=-\dfrac{x}{f(x)}$.

$y=f(x)$ とおく必要はない。計算は次の通り: $0=(x^2+y^2-5)'=2x+2yy'$, よって $y'=-\dfrac{x}{y}$.

先ほどの解を微分しても同じ結果である:

$$y'=(\pm\sqrt{5-x^2})'=\pm((5-x^2)^{\frac{1}{2}})'=\pm\frac{1}{2}(5-x^2)^{-\frac{1}{2}}(5-x^2)'=\frac{x}{\pm\sqrt{5-x^2}}=-\frac{x}{y}.$$

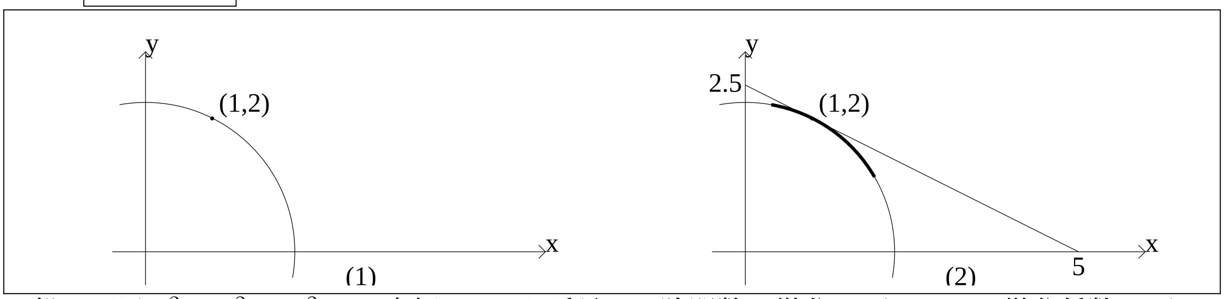
方程式 $G(x,y)=0$ の **1 点解** (a,b) は**曲線解** $(x,f(x))$ に延長できる。

定理 11-1. (陰関数定理). $G(x,y)$ は C^1 級、$G(a,b)=0$、$G_y(a,b)\neq 0$ を仮定すると

(1) 区間 $[c,d]$ があって $c<a<d$.
(2) $[c,d]$ 上定義される関数 $f(x)$ が存在する。
(3) $f(a)=b$. (1 点解を通る).
(4) $G(x,f(x))=0$. (曲線解、陰関数である).
(5) $f'=-\dfrac{G_x(x,f(x))}{G_y(x,f(x))}$. (陰関数の微分).

(5) のみ示す。連鎖律より $0=(G(x,f(x)))'=G_x(x,f(x))x'+G_y(x,f(x))f'(x)$. □

例: 先程の例に続けて 1 点解 $(1,2)$ を延長した陰関数の接線を引く。$1^2+2^4=5$ なので $(1,2)$ は $x^2+y^2=5$ の解である (図 (1)). 陰関数定理より関数 $f(x)$ があって $f(1)=2$, $x^2+(f(x))^2=5$ (図 (2)). $f'(x)=-\dfrac{x}{f(x)}$ から $f'(1)=-\dfrac{1}{f(1)}=-\dfrac{1}{2}$. 接線は $y=f(1)+f'(1)(x-1)=2-\frac{1}{2}(x-1)$. 書きなおすと $\boxed{x+2y=5}$ (図 (2)).



一般に円周 $x^2+y^2=r^2$ の一点解 (a,b) を延長した陰関数の微分は $y'=-\frac{x}{y}$. 微分係数は $y'(a)=-\frac{a}{f(a)}=-\frac{a}{b}$. 接線は $y=f(a)+f'(b)(x-a)=b-\frac{a}{b}(x-a)$. 分母を払って $\boxed{ax+by=a^2+b^2=r^2.}$ これは $b=0$ の場合、$(a,b)=(\pm r,0)$ における垂直接線の場合も有効な表示である。

例: 球面の方程式 $x^2+y^2+z^2=r^2$ の (a,b,c) における接平面は $ax+by+cz=r^2$ である。

例: 関係式 $x^2+8y^2=3$ から y', y'' を x, y で表示せよ。陰関数の微分は両辺を微分して $2x+16yy'=0$ より $y'=-\frac{x}{8y}$. さらに両辺を微分して $2+16(y'y'+yy'')=0$. $1+8y'y'+8yy''=0$. y' を代入して $1+\frac{x^2}{8y^2}+8yy''=0$. $8y^2+x^2+64y^3y''=3+64y^3y''=0$. $y''=-\frac{3}{64y^3}$.

演習 11: (1) $xy=1$ 上の点 $(a,\frac{1}{a})$ における接線を表せ。(2) $x^2+3xy+5y^2=2$ から y', y'' を x, y で表せ。