数値計算　第9回
線形方程式の計算誤差

テーマ：　線形方程式の計算誤差の評価

問題点：　Aは行列でxはベクトル

- ベクトルや行列の大きさの評価方法

方法：　ノルム（長さの概念の拡張版）を使う

- 線形方程式の計算誤差の評価式
- 悪条件の線形方程式に注意

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

今回の演習

- 演習9-1　ベクトルのノルム計算
- 演習9-2　2次元ベクトルのノルム

- 演習9-3　行列の条件数計算
- 演習9-4　悪条件の線形方程式

教科書37ページ

ベクトルのノルム (norm)

- ベクトルの長さを表す概念
- ベクトル　$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in R^n$
  （n次元の実ベクトル空間R^n）

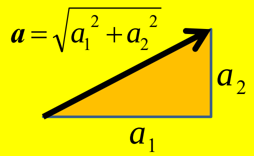
公理

1-ノルム　$\|\boldsymbol{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

2-ノルム　$\|\boldsymbol{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$

∞-ノルム　$\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$

2-ノルムの例



ノルムの考え方

- 例として以下のベクトルx,yを比較する

$$\boldsymbol{x} = (3,4,5)$$
$$\boldsymbol{y} = (2,4,6)$$

- 各要素の絶対値を加算：1-ノルム

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 = 3 + 4 + 5 = 12$$
$$\|\boldsymbol{y}\|_1 = 2 + 4 + 6 = 12$$

$$\Rightarrow \quad \|\boldsymbol{x}\|_1 = \|\boldsymbol{y}\|_1$$

負の要素がある場合は絶対値で計算

ノルムの考え方（2）

- ２乗した和の平方根を比較：2-ノルム

$$\|\boldsymbol{x}\|_2 = \sqrt{3^2+4^2+5^2} = \sqrt{50}$$
$$\|\boldsymbol{y}\|_2 = \sqrt{2^2+4^2+6^2} = \sqrt{56}$$
$$\Rightarrow \|\boldsymbol{x}\|_2 < \|\boldsymbol{y}\|_2$$

- 最大要素を比較：　∞-ノルム

$$\max(3,4,5) = 5,\ \|\boldsymbol{x}\|_\infty = 5$$
$$\max(2,4,6) = 6,\ \|\boldsymbol{y}\|_\infty = 6$$
$$\Rightarrow \|\boldsymbol{x}\|_\infty < \|\boldsymbol{y}\|_\infty$$

負の要素がある場合は絶対値で計算

ノルムの考え方（3）

- n-ノルムの定義

最大要素

$$\|\boldsymbol{x}\|_n = \sqrt[n]{3^n+4^n+5^n} = \sqrt[n]{((\frac{3}{5})^n+(\frac{4}{5})^n+(\frac{5}{5})^n)5^n} \underset{n\to\infty}{\to} \sqrt[n]{5^n} = 5$$
$$\|\boldsymbol{y}\|_n = \sqrt[n]{2^n+4^n+6^n} = \sqrt[n]{((\frac{2}{6})^n+(\frac{4}{6})^n+(\frac{6}{6})^n)6^n} \underset{n\to\infty}{\to} \sqrt[n]{6^n} = 6$$

最大要素

n→∞とすると

演習9-1　ノルム計算

- MATLABのノルム計算関数: norm
- 使い方： [y]=norm(x [,flag])
  - flagを省略すると2-ノルム, infで∞-ノルム
- 以下のベクトルbのノルムを計算
  - flagを1と 2で計算する．また50 程度に大きくしていくと，∞-ノルムに収束することを確認しなさい

$$\boldsymbol{b} = (3 \quad 4 \quad 5)$$

MATLAB
```
norm(b, 1)
norm(b, 2)
norm(b, 'inf')
```


演習9-2　ノルムのイメージ

- 1-ノルム，2-ノルム，∞-ノルムについて，ノルムが1の2次元ベクトル $\boldsymbol{u} = (x, y)$ 全体を図に示しなさい（考えて手で書く）

$$\|\boldsymbol{u}\| = 1$$

$$\|\boldsymbol{u}\|_1 = |x| + |y| = 1$$
$$\|\boldsymbol{u}\|_2 = \sqrt{x^2+y^2} = 1$$
$$\|\boldsymbol{u}\|_\infty = \max(|x|, |y|) = 1$$

教科書38ページ

ベクトルの誤差と指標

- ベクトル　$\boldsymbol{x}$
- 近似ベクトル　$\boldsymbol{x}'$
- 誤差ベクトル　$\Delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'$
  - 絶対誤差　$\|\Delta\boldsymbol{x}\|$
  - 相対誤差　$\|\Delta\boldsymbol{x}\| / \|\boldsymbol{x}\| \quad (\|\boldsymbol{x}\| \neq 0)$

ノルムを使うことで，ベクトルに関しても
数（スカラー）の誤差と同じ考え方が使える

行列についてはどうか　→　同様に定義できる

教科書40ページ

行列ノルムの定義

- 行列ノルムの定義（従属ノルムともいう）

$$\|\boldsymbol{A}\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|\boldsymbol{Ax}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \qquad (8)$$

- 行列ノルムの性質

$$\|\boldsymbol{Ax}\| \leq \|\boldsymbol{A}\| \cdot \|\boldsymbol{x}\| \qquad (9)$$

$$\|\boldsymbol{A}\| = \max_{\|\boldsymbol{x}\|=1} \|\boldsymbol{Ax}\| \qquad (10)$$

行列のノルムの例

- 行列ノルム　$\|\boldsymbol{A}\|_1, \|\boldsymbol{A}\|_\infty$

$$\|\boldsymbol{A}\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$　列要素の絶対値和の最大値

$$\|\boldsymbol{A}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$　行要素の絶対値和の最大値

- 行列ノルム　$\|\boldsymbol{A}\|_2$

$$\|\boldsymbol{A}\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$$　Aが非対称行列

$$\|\boldsymbol{A}\|_2 = \rho(A)$$　Aが対称行列

$\rho(\boldsymbol{A})$　：行列の固有値の
絶対値の最大値

教科書41ページ

教科書43ページ

行列と条件数

- 行列Aに対して，cond(A)を行列Aの条件数と呼ぶ

$$cond(\boldsymbol{A}) \equiv \|\boldsymbol{A}\| \cdot \|\boldsymbol{A}^{-1}\| \qquad (14)$$

- 線形方程式の解の，誤差の影響の受け易さを示す．
  cond(A)が大きいと，誤差が大きくなりやすい

$$\frac{\|\Delta\boldsymbol{y}\|}{\|\boldsymbol{y}\|} \leq cond(\boldsymbol{A}) \frac{\|\Delta\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \qquad (15)$$

$$cond(I) = 1 \qquad (22)$$

$$cond(\boldsymbol{A}^{-1}) = cond(\boldsymbol{A}) \qquad (23)$$

教科書43ページ

悪条件の行列例

- 以下の行列の条件数を求める

$$A = \begin{pmatrix} 1000 & -999 \\ -999 & 1000 \end{pmatrix}$$

- MATLABの条件数の計算関数：cond

MATLAB

```
A=[1000 -999; -999 1000]
cond(A)
```

- この行列を使った線形方程式では，cond(A)倍に誤差が拡大する恐れがある

演習9-3　行列ノルム計算

- MATLABのノルム計算関数: norm
- 行列ノルムも計算可能
- 以下の行列Aのノルムと条件数を計算
  - norm 関数で，flagを1,2, %infと変えて計算

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\|A\|_1 = ?, \quad \|A\|_2 = ?, \quad \|A\|_\infty = ?$$

演習9-4　悪条件の線形方程式

- ２つの線形方程式を定義して解く

MATLAB

```
cond(A)
A¥b
```

$$Ax_1 = b_1, Ax_2 = b_2$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.1001 \\ 10 & 1 \end{pmatrix} \quad b_1 = \begin{pmatrix} 1.1001 \\ 11 \end{pmatrix} \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 11 \end{pmatrix}$$

- 係数行列の条件数cond(A)を計算：約100000
- 2つの右辺ベクトルはほとんど同じだが，方程式の解は大きく異なることを確認しなさい

今回の講義のまとめ

テーマ：　線形方程式の計算誤差の評価

問題点：　Aは行列でxはベクトル

- ベクトルや行列の大きさの評価方法

方法：　ノルム（長さの概念の拡張版）を使う

- 線形方程式の計算誤差の評価式
- 悪条件の線形方程式に注意

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$