9. 合成関数

合成とは代入による関数構成である。2 変数関数まででは組み合わせは 4 通りある。

(1) $f(g(x))$: $f(g)$ と $g(x)$ の合成。
(2) $f(g(x,y))$: $f(g)$ と $g(x,y)$ の合成。
(3) $f(g(x),h(x))$: $f(g,h)$ と $g(x)$, $h(x)$ の合成。
(4) $f(g(x,y),h(x,y))$: $f(g,h)$ と $g(x,y)$, $h(x,y)$ の合成。

合成した結果は、(1), (3) は x についての 1 変数関数、(2), (4) は x, y についての 2 変数関数である。

(1), (2) の微分、偏微分は 1 変数の場合と同じである。

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x). \qquad \frac{df}{dx} = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dx}.$$

$$(f(g(x,y)))_x = f'(g(x,y)) \cdot g_x(x,y). \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{dg}\frac{\partial g}{\partial x},$$

$$(f(g(x,y)))_y = f'(g(x,y)) \cdot g_y(x,y). \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{df}{dg}\frac{\partial g}{\partial y}.$$

(3), (4) には新しい規則、**連鎖律** (チェインルール) が現われる。(3) の場合 $f(g,h)$ の 1 次近似より (g_0,h_0) の近く (g,h) で関数の値は

$$f(g,h) \fallingdotseq f(g_0,h_0) + f_g(g,h)(g-g_0) + f_h(g,h)(h-h_0).$$

これに $g(x)$ と $h(x)$, $g_0 = g(x_0)$, $h_0 = h(x_0)$ を代入して

$$\begin{aligned} f(g(x),h(x)) &\fallingdotseq f(g(x_0),h(x_0)) + f_g(g(x_0),h(x_0))(g(x)-g(x_0)) + f_h(g(x_0),h(x_0))(h(x)-h(x_0)) \\ &\fallingdotseq f(g(x_0),h(x_0)) + f_g(g(x_0),h(x_0))g'(x_0)(x-x_0) + f_h(g(x_0),h(x_0))h'(x_0)(x-x_0) \end{aligned}$$

$$\frac{f(g(x),h(x)) - f(g(x_0),h(x_0))}{x-x_0} \fallingdotseq (f_g(g(x_0),h(x_0))g'(x_0) + f_h(g(x_0),h(x_0))h'(x_0)).$$

$x \to x_0$ の極限を取って

$$(5) \qquad (f(g(x),h(x)))' = f_g(g(x),h(x)) \cdot g'(x) + f_h(g(x),h(x)) \cdot h'(x). \qquad \frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial g}\frac{dg}{dx} + \frac{\partial f}{\partial h}\frac{dh}{dx}.$$

これが**連鎖律**である。

このように関数の値のずれ (**微分**) が 1 次式で連動する。

$$dx = x - x_0, dy = y - y_0, df = f - f_0 = f(g(x)) - f(g(x_0)), \ldots$$

のように変数、関数の値のずれを**微分**記号 $d\cdots$ や $\Delta\cdots$ で表す。

全微分: $f(g,h)$ の 1 次近似を微分で表すと次のようになる。f の全**微分**という:

$$df = f_g \cdot dg + f_h \cdot dh = \frac{\partial f}{\partial g}dg + \frac{\partial f}{\partial h}dh.$$

合成関数の微分は、関数の変位である微分と変数の変位の比として公式が成り立つ: (3) の場合、

$$\frac{df}{dx} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial g}dg + \dfrac{\partial f}{\partial h}dh}{dx} = \frac{\partial f}{\partial g}\frac{dg}{dx} + \frac{\partial f}{\partial h}\frac{dh}{dx}.$$

(4) も同様である:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial x},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial y}.$$

演習 9: 合成を直接微分するのと連鎖律を使った微分計算を比べよ。(1) $f(g,h) = g^2 + h^2$, $g = x^2$, $h = y^3$. (2) $f(g,h) = g^2 + h^2$, $g = \cos x$, $h = \sin x$.