8. 空間、平面、直線

内積: 3 次元空間のベクトル (a,b,c) とベクトル (x,y,z) の内積を $ax+by+cz$ とする。内積は長さとふたつのベクトルのなす角度 θ による表示もある:

$$ax+by+cz=\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cos\theta.$$

$\theta=\pm 90^{\mathrm{o}}=\pm\frac{\pi}{2}$ の場合 $\cos\theta=0$ である。$\boxed{\text{ベクトルの直交}}$ と $\boxed{\text{内積が 0 に等しい}}$ ことは同値である。

平行移動: 点 (x,y,z) を (a,b,c) ずらすと点 $(x+a,y+b,z+c)$ に移る。(a,b,c) **平行移動**という。

直線や平面などの図形は方程式の解全体として表すことができる。平行移動した図形の方程式は未知ベクトル (x,y,z) に $(x-a,y-b,z-c)$ を代入した形である。

例: 方程式 $x+2y+3z=0$ の解全体は原点 $O=(0,0,0)$ を通る平面である。$(5,8,7)$ 平行移動した平面の方程式は $(x-5)+2(y-8)+3(z-7)=0$. $(5,8,7)$ はこの方程式の解である。つまり $(5,8,7)$ を通る平面である。

平面: 一般に 3 次元空間における平面は (x,y,z) についての 1 次方程式の解全体として表すことができる。平面の定まる条件は色々ある、(1) 一直線上にない 3 点を通ること、(2) 平面に直交するベクトルと通る 1 点、など。

(2) の平面に直交するベクトルを平面の**法線ベクトル**という。原点を通り法線ベクトルが (a,b,c) である平面上の点 (x,y,z) は内積が 0 なので、次の条件を満たす:

$$ax+by+cz=0.$$

(d,e,f) 平行移動で原点から点 (d,e,f) に写るので方程式

$$a(x-d)+b(y-e)+c(z-f)=0$$

は、点 (e,e,f) を通る法線ベクトル (a,b,c) の平面である。

接平面: $f(x,y)$ の 1 次近似とは次が成り立つことである:

$$\begin{cases} f(x,y) = f(a,b)+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)+\varepsilon(x,y)\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}, & (1)\\ \displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)}\varepsilon(x,y)=0. & (2)\end{cases}$$

グラフ $z=f(x,y)$ は点 $(a,b,f(a,b))$ を通る曲面である。$z=f(a,b)+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)$ は (x,y,z) についての 1 次方程式で平面を表す。この平面を $z=f(x,y)$ の (a,b) (あるいは $(a,b,f(a,b))$) における**接平面**という。内積の形に整えて法線ベクトル $(f_x(a,b),f_y(a,b),-1)$ を得る:

$$f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)-(z-f(a,b))=0.$$

直線: 空間における直線は、(1) 異なる 2 点を通る、(2) 平行でないふたつの平面の交わり、などで定まる。(1) の異なる 2 点を結ぶベクトルを**方向ベクトル**という。特に原点を通り方向ベクトル (a,b,c) を持つ直線は**スカラー倍**全体として表示できる:

$$(x,y,z)=t(a,b,c),\quad (t\text{ は実数}).$$

このベクトルの等式は (x,y,z,t) についての 3 連立 1 次方程式である: $\begin{cases} x=at,\\ y=bt,\\ z=ct.\end{cases}$

t を時刻パラメータと考えてこれは 4 次元 $xyzt$ 時空における動きとしての直線である。$a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$ ならば $t=\cdots$ の形に書き直して t を**消去**できる:

(4)
$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}\quad(=t).$$

(4) を (d,e,f) 平行移動して、$\dfrac{x-d}{a}=\dfrac{y-e}{b}=\dfrac{z-f}{c}$. **法線**の方程式: $\boxed{\dfrac{x-a}{f_x(a,b)}=\dfrac{y-b}{f_y(a,b)}=\dfrac{z-f(a,b)}{-1}.}$

演習 8: 曲面上の与えられた点における接平面と法線を求めよ。(1) $z=x^2+3xy+5y^2$, $(2,1,15)$. (2) $z=x^2+y^2$, $(1,2,5)$. (3) $z=\dfrac{4}{x+2y}$, $(2,1,1)$. (4) $z=e^{xy}$, $(0,0,1)$.