2. 微分の計算

微分計算に必要な関数と関数の構成方法は以下の通り:

(1) 基本関数: x^a, e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\log x$, $\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$, $\tan^{-1} x$.

(2) 構成方法:$af+bg$, $f\cdot g$, $\frac{f}{g}$, $f(g)$, f^{-1}.

基本公式:

(1) $(x^a)' = ax^{a-1}$, (a は定数).

(2) $(e^x)' = e^x$, ($e = 2.718281828459\cdots$ は自然対数の底である。定数).

(3) $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$.

(4) $(\log x)' = \dfrac{1}{x}$. ($0 < x$, $\log x$ は自然対数 $\log_e x$, $\ln x$ とも書く).

(5) $(\sin^{-1} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(-1 < x < 1)$.

(6) $(\cos^{-1} x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(-1 < x < 1)$.

(7) $(\tan^{-1} x)' = \dfrac{1}{x^2+1}$.

一般公式:

(1) $(af+bg)' = af' + bg'$, (a, b は定数、f, g は関数).

(2) $(f\cdot g)' = f'g + fg'$.

(3) $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$.

(4) $(f(g))' = f'(g)\cdot g'$. (**合成関数**の微分).

(5) $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f'}$. ($x = f(y)$ として $y = f^{-1}(x)$ は f の逆関数).

例: 多項式の微分: $(x^2+3x+5)' = (x^2)' + 3(x^1)' + 5(x^0)' = 2x^{2-1} + 3\cdot 1x^{1-1} + 5\cdot 0x^{0-1} = 2x+3$.

例: 有理式の微分: $\left(\dfrac{(x+1)}{[x-1]}\right)' = \dfrac{(x+1)'[x-1]-(x+1)[x-1]'}{[x-1]^2} = \dfrac{1[x-1]-(x+1)1}{(x-1)^2} = \dfrac{-2}{(x-1)^2}$.

$(\tan x)' = \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)' = \dfrac{(\sin x)'[\cos x]-(\sin x)[\cos x]'}{[\cos x]^2} = \dfrac{(\cos x)^2+(\sin x)^2}{(\cos x)^2} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

例: 合成の微分 (公式 (4)): $((x^2+1)^5)' = 5(x^2+1)^{5-1}(x^2+1)' = 5(x^2+1)^4\cdot 2x = 10x(x^2+1)^4$.

これが少し難しいところである。

一般公式の f, g などをひとかたまりとして (f), $[g]$ などのカッコで書きなおして空けておく。

例では、公式 $(f(g))' = f'(g)g'$ を使って、合成の中身 $g = x^2+1$ を空けてある式を書く:

$$((x^2+1)^5)' = ((\qquad)^5)' = 5(\qquad)^4(\qquad)'$$

開いている所に $g = x^2+1$ を書き込む:

$$((x^2+1)^5)' = ((\qquad)^5)' = 5(x^2+1)^4(x^2+1)' = \cdots.$$

あとは残った $(x^2+1)'$ の計算を進める。

微分計算では、式の構成 (四則、合成、逆関数) がわかれば使う公式は一般公式にある。一般公式の f, g のところに式をコピーするだけである。かたまりとしてカッコでまとめる必要もある。

微分計算に入る前に式の構成方法を分析したり、計算後に簡単な形に整えることが難しいことがある。微分計算は上の公式を枠として使って進めるだけである。

例: $(\sqrt{x^2+1})' = ((x^2+1)^{\frac{1}{2}})' = \dfrac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}(x^2+1)' = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}2x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

演習 2: 微分せよ。(1) x^2+8x+7, (2) $x^7+5x^2+9x+17$, (3) $\dfrac{1}{x}$, (4) $\dfrac{1}{x^3}$, (5) $\dfrac{7}{x^2}$, (6) $\dfrac{x-1}{x+1}$, (7) $\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$, (8) $\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$, (9) $\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$, (10) $\sqrt{x^3-1}$, (11) $\sqrt[3]{x^2}$, (12) $\sin 2x$, (13) $\cos x^2$, (14) $\cos^2 x$, (15) $\log\cos x$.