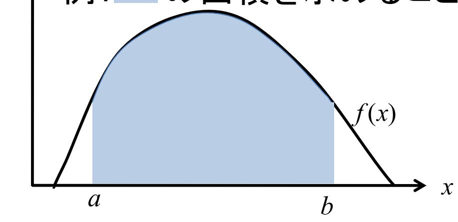
数値計算　第6回　数値積分

- テーマ：　四則計算（＋－×÷）しかできない計算機で，どう数値積分を計算させるか
- 有限個の関数値から積分値を近似する
  - 被積分関数の代わりに関数近似を使う

例: ■ の面積を求めることが積分の例



数値積分は何に使われるか

- CADで設計した容積や長さの測定
- 2次電池の充放電量の計測，制御

出典： http:%techon.nikkeibp.co.jp

出典： http:%www.mitsubishi-motors.co.jp/i-miev/

今回の演習

- 演習6-1 中点則による数値積分
- 演習6-2 台形則による数値積分
- 演習6-3 シンプソン則による数値積分

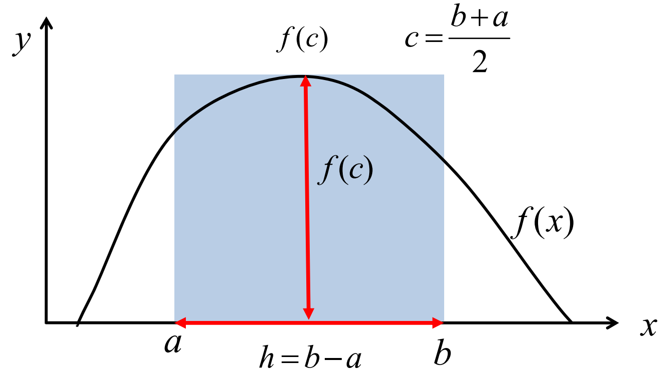
レポート課題

教科書26ページ

3.2　中点則，台形則，シンプソン則

- 中点則　中点のみを使用

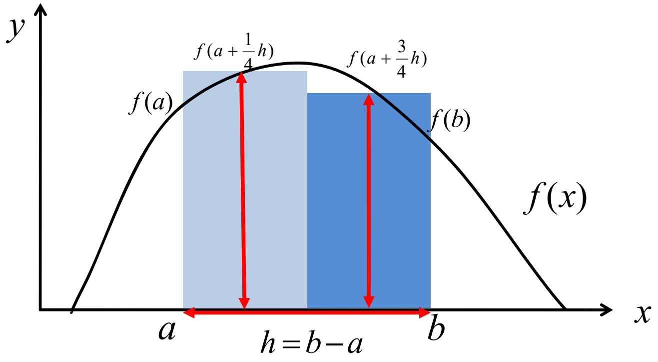
$$Q_1 f = hf(a+\frac{1}{2}h) = hf(c) = \int_a^b f(x)dx + O(h^3)$$



中点則の改良(高精度近似積分)

区間を２分割して精度を向上できる

$$M_2f \;=\frac{h}{2}\left(f\left(a+\frac{1}{4}h\right)+f\left(a+\frac{3}{4}h\right)\right)$$



中点則のプログラム(高精度近似積分)

教科書28ページ
プログラム1

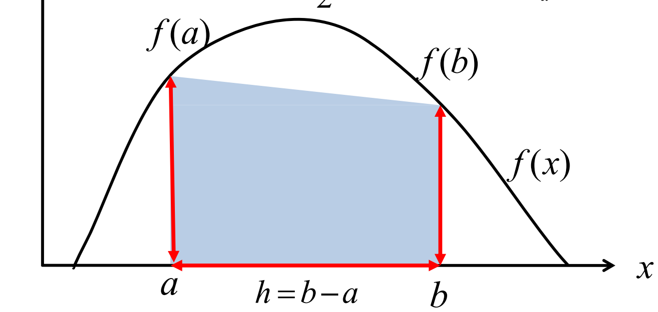
```
// リスト7-1 Scilab
// 中点則　midpoint
// 関数f(x), 区間[a, b], m個分割
function Mm = midpoint(f,a,b,m)
  h = (b - a) / m;
  ci = a + h/2;
  Mm=0;
  for i = 0:m-1
        2行分　穴埋め
  end
  Mm=Mm*h;
endfunction
```

- 教科書28ページのプログラム1を参考にして穴埋め
- MATLABでは使えない演算子
  +=, *= に注意

台形則

- 境界の2点を使用
- 一次関数で近似して積分

$$Q_2f=\frac{h}{2}(f(a)+f(b))=\int_a^b f(x)dx+O(h^3)$$

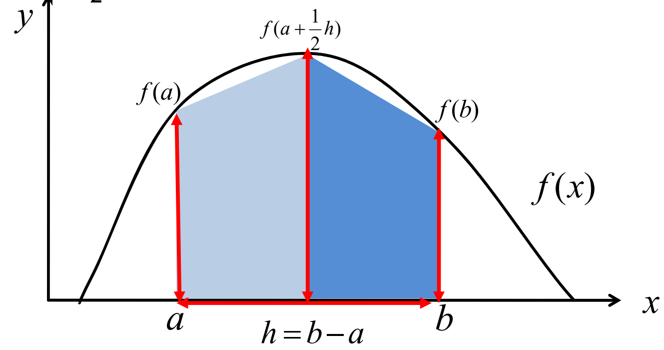


台形則の精度向上(高精度近似積分)

小区間の幅を小さくして精度を向上できる

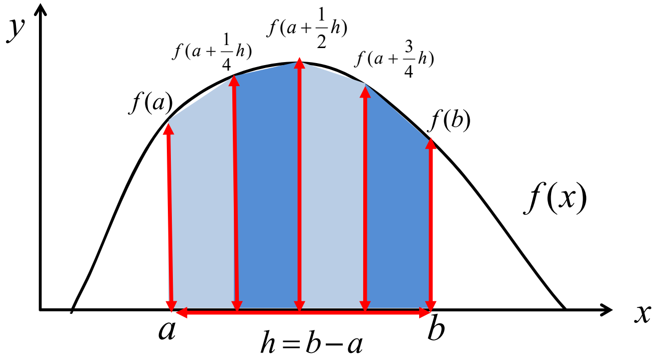
$$T_2f \;=\frac{h}{4}\left(f(a)+f\left(a+\frac{1}{2}h\right)\right)+\frac{h}{4}\left(f\left(a+\frac{1}{2}h\right)+f\left(a+\frac{4}{4}h\right)\right)$$

$$T_2f \;=\frac{h}{4}\left(f(a)+2f\left(a+\frac{1}{2}h\right)+f(b)\right)$$



さらに小区間の幅を小さく

$$T_4 f = \frac{h}{8}(f(a)+f(a+\frac{1}{4}h))+\frac{h}{8}(f(a+\frac{1}{4}h)+f(a+\frac{2}{4}h))$$
$$+\frac{h}{8}(f(a+\frac{2}{4}h)+f(a+\frac{3}{4}h))+\frac{h}{8}(f(a+\frac{3}{4}h)+f(a+\frac{4}{4}h))$$
$$T_4 f = \frac{h}{8}(f(a)+2f(a+\frac{1}{4}h)+2f(a+\frac{2}{4}h)+2f(a+\frac{3}{4}h)+f(b))$$



台形則のプログラム (高精度近似積分)

教科書28ページ
プログラム2

```
% 台形則　trapezoid
% 関数f(x), 区間[a, b], m個分割
function Tm = trapezoid
    (f,a,b,m)
  h = (b - a) / m;
  ai = a + h;
  Tm=(f(a)+f(b))/2;
  for i = 1:m-1
        2行分　穴埋め
  end
  Tm=Tm*h;
end
```

教科書28ページの
プログラム2参考で穴埋め

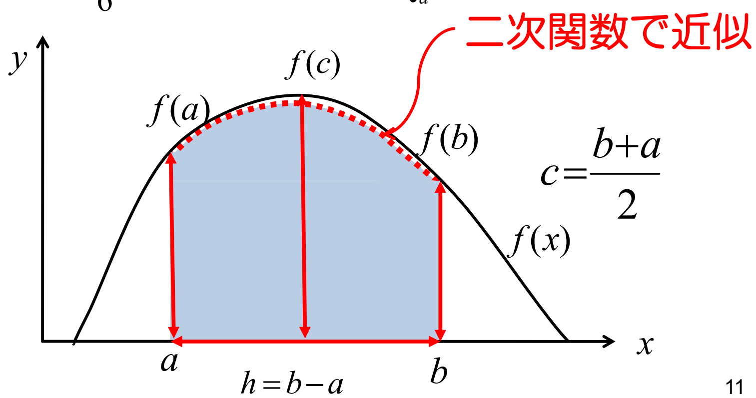
MATLABでは使えない演算子
+=, *= に注意

シンプソン則

- 境界と中点の3点を使用

ラグランジュ補間からの導出は
参考書141ページを参照

$$Q_3 f = \frac{h}{6}(f(a)+4f(c)+f(b)) = \int_a^b f(x)dx + O(h^5)$$



$$c = \frac{b+a}{2}$$

シンプソン則の導出

- ラグランジュ補間の2次関数の積分計算
- 中点則と台形則の結果から合成できる

$$Q_3 f = \frac{h}{6}(f(a)+4f(c)+f(b))$$
$$= \frac{h}{3}(\frac{1}{2}f(a)+\frac{4}{2}f(c)+\frac{1}{2}f(b))$$
$$= \frac{2h}{3}f(c)+\frac{h}{3}(\frac{(f(a)+f(b))}{2})$$
$$= \frac{2}{3}Q_1 f + \frac{1}{3}Q_2 f$$

中点則　台形則

$$Q_3 f = \frac{h}{6}(f(a)+4f(a+h)+2f(a+2h)+\cdots$$
$$+2f(a+(m-2)h)+4f(a+(m-1)h)+f(b))$$

シンプソン則 (高精度近似積分)

- 同様に中点則と台形則から合成できる

$$S_{2m}f = \frac{2}{3}M_m f + \frac{1}{3}T_m f$$

シンプソン則　中点則　台形則

教科書28ページ
プログラム1　中点則

演習6-1 中点則による数値積分

- 以下の積分を中点則で実行しなさい

$$I_{\sin} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)$$

$$I_{\sin} = [-\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

- mを 10, 100, 1000として絶対誤差を計算
- moodleからmlxファイルをダウンロード
- 最後部の関数midpointを穴埋めして完成

教科書28ページ
プログラム2　台形則

演習6-2 台形則による数値積分

- 演習6-1の積分を台形則で実行しなさい.
- 最後部の関数trapezoidを穴埋めして完成

教科書28ページ
プログラム2　台形則

演習6-3 シンプソン則による積分

- 演習6-1の積分をシンプソン則で実行しなさい
- 最後部のsimpson関数を穴埋めして完成
  - 中点則と台形則の結果に係数を掛けて和を求める

$$S_{2m}f = \frac{2}{3}M_m f + \frac{1}{3}T_m f$$

シンプソン則の結果　中点則の結果　台形則の結果

数値積分の誤差(絶対誤差)

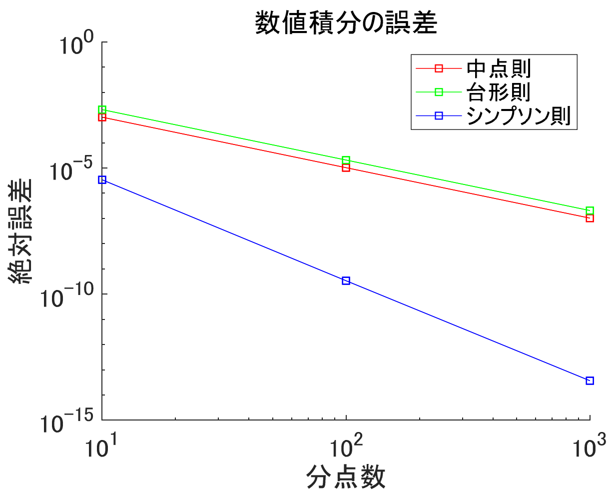
方法	中点則	台形則	シンプソン則
m=10			
m=100			
m=1000			

教科書28ページ
プログラム2　台形則

演習6-4 対数プロットによる誤差表示

- 演習6ー4のセクションのプログラムを実行

演習6-4 対数プロットによる誤差表示



参考：　MATLABの積分用の関数

- 積分用関数　integral
- 使用法

  q = integral(fun,xmin,xmax)
- 例

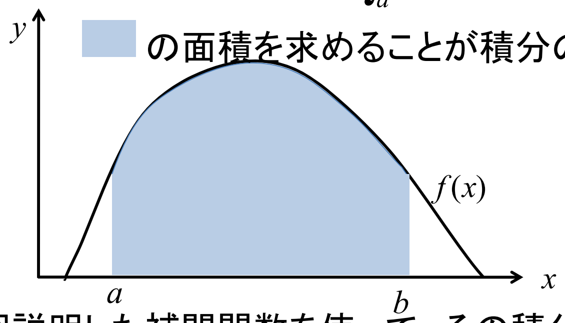
```
x0=0.0;
x1=pi/2;
q =integral(@sin,x0,x1);
```

教科書24ページ

3.1　補間型積分則

- 関数の定積分を有限個の関数値を使って近似

$$If = I^{(a,b)}f = \int_a^b f(x)$$



- 前回説明した補間関数を使って，その積分で関数の定積分を近似計算する

教科書24，25ページ

n-1次（n点）ラグランジュ補間多項式

$$p_{n-1}(x) = \sum_{l=1}^{n} f(x_l)\varphi_l(x), \qquad \varphi_l(x) = \prod_{i=1,i\neq k}^{n} \frac{x-x_i}{x_l-x_i} \tag{2}$$

補間多項式の積分でf(x)の積分を近似する

$$Q_n f = Q_n^{(a,b)} f = \int_a^b p_{n-1}(x)dx \cong \int_a^b f(x)dx \tag{3}$$

$$Q_n f = \sum_{l=1}^{n} f(x_l)\int_a^b \varphi_l(x)dx = \sum_{l=1}^{n} w_l f(x_l)dx, \tag{4}$$

$$w_l = \int_a^b \varphi_l(x)dx \ (1 \le l \le n)$$

教科書24，25ページ

区分幅，$h=b-a$と内分比$0 \leqq t_l \leqq 1$により分点を　$x_l=a+ht_l$で表わす．
変数変換　$x=a+ht$，により

$$w_l = \int_a^b \varphi_l(x)dx = \int_a^b \prod_{i=1,i\neq k}^{n} \frac{x-x_i}{x_l-x_i}dx = h\int_0^1 \prod_{i=1,i\neq k}^{n} \frac{t-t_i}{t_l-t_i}dt$$

積分則

$$Q_n^{(a,b)} f = h\sum_{l=1}^{n} \rho_l f(a+ht_l), \quad \rho_l = \int_0^1 \prod_{i=1,i\neq k}^{n} \frac{t-t_i}{t_l-t_i}dt \ (1 \le l \le n) \tag{5}$$

線形性と誤差

教科書26ページ

補間型積分則の線形性

$$Q_n\{\alpha f + \beta g\} = \alpha Q_n f + \beta Q_n g \tag{6}$$

補間型積分則の誤差

$$\left|Q_n^{(a,b)} f - I^{(a,b)} f\right| \le M h^{k+2} f^{(a,b)} = O(h^{k+2}) \tag{7}$$

$$M = \max_{a \le x \le b}\left|f^{k+1}(x)\right|$$

積分誤差は，積分区分幅hに対して，h^{k+2}で収束
収束がよく，精度のよい計算ができる

今回の講義のまとめ

- テーマ：　四則計算しかできない計算機で，どう数値積分を計算させるか
- 有限個の関数値を使って積分値を近似
  - 被積分関数の代わりに近似関数を使う
  - 中点則，台形則，シンプソン則

次回　線形方程式

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$