7. 1 次近似

0 次近似: $f(x,y)$ の、(a,b) での**連続性**は、定数 $f(a,b)$ による近似と同じである:

$$\begin{cases} f(x,y) = f(a,b) + \varepsilon(x,y), & (1) \\ \displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} \varepsilon(x,y) = 0. & (2) \end{cases}$$

誤差 $\varepsilon(x,y)$ が 0 に近いこと、つまり小さいことを表すのに極限を使う。

1 次近似: (x,y) が (a,b) に近いことを距離 $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ が 0 に近いこととする。

水平、垂直は斜めより短い: $|x-a| \leq \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$, $|y-b| \leq \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$.

1 次式を、定数、$x-a$, $y-b$ の 1 次結合で表し、誤差はこれらに比べて小さいと仮定する。1 次近似式を次の等式が成り立つこととする:

$$\begin{cases} f(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) + \varepsilon(x,y)\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}, & (3) \\ \displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} \varepsilon(x,y) = 0. & (4) \end{cases}$$

(3), (4) が成り立つことを $f(x,y)$ は (a,b) で **1 次近似 (微分) 可能**という。$f_x(a,b)$, $f_y(a,b)$ を**偏微分係数**と言う。(3), (4) から $y=b$ として $x\to a$, あるいは $x=a$ として $y\to b$ の極限を取ると偏微分係数は 1 変数の極限で表せる:

$$f_x(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{x\to a} \frac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a},$$
$$f_y(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{y\to b} \frac{f(a,y)-f(a,b)}{y-b}.$$

これは、一方の変数を固定した微分係数であるので 1 変数の微分係数と同じ計算である。

偏導関数:

$$f_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h},$$
$$f_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{k\to 0} \frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k}.$$

とすると偏微分係数は $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ の $(x,y)=(a,b)$ における値である。

例: $f(x,y) = x^2+3xy+5y^2$ の偏導関数、$(2,1)$ における偏微分係数、1 次近似。

$f_x(x,y)$ は $f(x,y)$ の y を定数扱いして x について微分する。$f_y(x,y)$ も同様。

$$f_x(x,y) = (x^2+3xy+5y^2)_x = (x^2)_x + 3y(x)_x + 5y^2(1)_x = 2x+3y,$$
$$f_y(x,y) = (x^2+3xy+5y^2)_y = x^2(1)_y + 3x(y)_y + 5(y^2)_y = 3x+10y.$$

$f(2,1) = 2^2+3\cdot 2\cdot 1+5\cdot 1^2 = 15$, $f_x(2,1) = 2\cdot 2+3\cdot 1 = 7$, $f_y(2,1) = 3\cdot 2+10\cdot 1 = 16$.

$$\begin{cases} x^2+3xy+5y^2 = 15 + 7(x-2) + 16(y-1) + \varepsilon(x,y)\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}, \\ \displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,1)} \varepsilon(x,y) = 0. \end{cases}$$

例: $f(x,y) = \sqrt{x+y}$ の偏導関数。

$f_x(x,y) = (\sqrt{x+y})_x = ((x+y)^{\frac{1}{2}})_x = \dfrac{1}{2}(x+y)^{-\frac{1}{2}}(x+y)_x = \dfrac{x}{2\sqrt{x+y}}$. f_y も同様。

演習 7: 偏導関数を計算せよ。(1) $3x^2+xy+2y^2$. (2) x^3+y^3. (3) $(x+2y)^4$. (4) $\dfrac{x-y}{x+y}$. (5) $e^x\sin y$. (6) $\sqrt{x^2+y^2}$. (7) e^{xy}. (8) $\log(x^2+y^2)$.

指定した点における 1 次近似を求めよ。(9) $\dfrac{x-y}{x+y}$, $(2,1)$. (10) $e^x\sin y$, $(0,\pi)$.