数値計算　第5回　多項式補間

- テーマ：　四則計算（＋－×÷）しかできない計算機で，どう関数を計算するか

- 関数近似
  - 関数を多項式で近似
  - テイラー展開で近似

微係数を使う方法 → 前回

- 多項式補間
  - 設定した分点を通る関数
  - ラグランジュ補間
  - チェビシェフ補間
  - ニュートン補間

微係数を使わない方法 → 今回

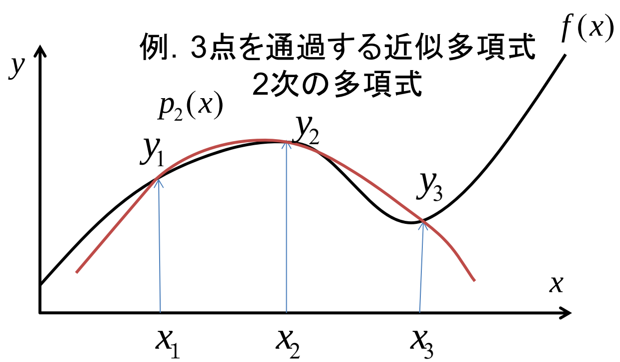
今回の演習

- 演習5-1 分点を通る多項式の補間関数を作る（手計算）
- 演習5-2 MATLABプログラムで分点を通る多項式の補間関数を計算する

2.3 多項式補間

教科書14ページ

- 微係数の計算が簡単でない関数に適用
- 分点(x_l , y_l)を通過する近似多項式を作る
- ラグランジュ補間



- 3点のラグランジュ補間多項式（二次関数）

$$p_2(x)=y_1\varphi_1+y_2\varphi_2+y_3\varphi_3$$

$$p_2(x)=y_1\frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+y_2\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+y_3\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

- 計算して見よう

$$p_2(x_1)=?$$

$$p_2(x_2)=?$$

$$p_2(x_3)=?$$

教科書14, 15ページ

- n-1次（n点）ラグランジュ補間多項式

$$p_{n-1}(x)=\sum_{k=1}^{n} y_k \varphi_k(x), \quad \varphi_k(x)=\prod_{l=1, l\neq k}^{n} \frac{x-x_l}{x_k-x_l} (1\le k\le n) \qquad (13)$$

- 基本多項式φ(*x*)の分点上の値

$$\varphi_k(x_l)=\delta_{kl} \quad (1\le k,l\le n) \qquad (14)$$

$$\delta_{kl}=\begin{cases}0, & k\neq l\\ 1, & k=l\end{cases} \qquad (15)$$

クロネッカーのデルタ

演習5-1　ラグランジュ補間の計算

- 次の点を通る補間関数を手計算しなさい

x	1	2	3
y	1	0	5

$$p_2(x)=1\cdot\frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)}+0\cdot\frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)}+5\cdot\frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}$$

演習5-2　ラグランジュ補間の計算

1. 次の点を通る補間関数をラグランジュ補間関数のMATLABプログラムで計算しグラフを作成しなさい

x	1	2	3
y	1	0	5

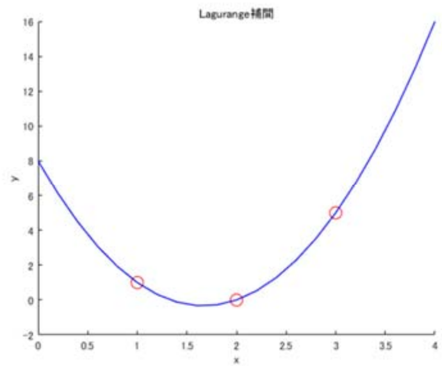
2. 次の点を通る補間関数をラグランジュ補間関数のMATLABプログラムで計算しグラフを作成しなさい

x	0. 5	1	2	3
y	1	1	0	5

演習5-2の答　ラグランジュ補間

- リスト5-2を参照
- 下記の分点データで計算

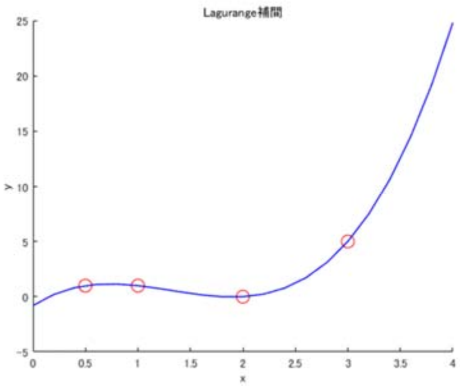
x	1	2	3
y	1	0	5



演習5-2の答　ラグランジュ補間

- リスト5-2を参照
- 下記の分点データで計算

x	0. 5	1	2	3
y	1	1	0	5

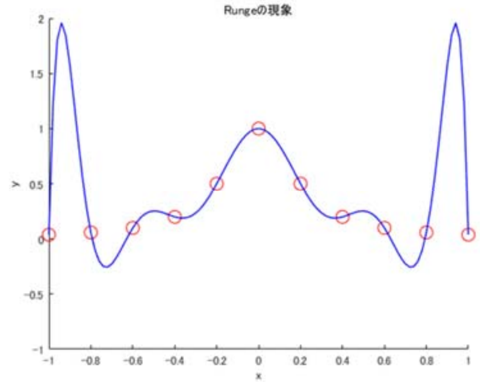


ルンゲの現象

- 分点の間で補間多項式が大きく変動する現象
- 高次の多項式近似で発生
- 両端で誤差が拡大

$$y=\frac{1}{(25x^2+1)}$$

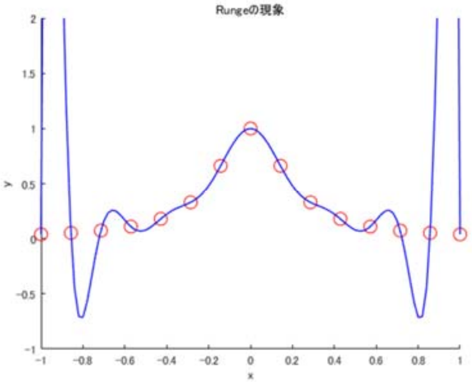
- ex5_3を実行



ルンゲの現象　（つづき）

- 分点数を増加して（11点から15点へ）

手間（計算）
をかけても
精度が悪化する
困った現象

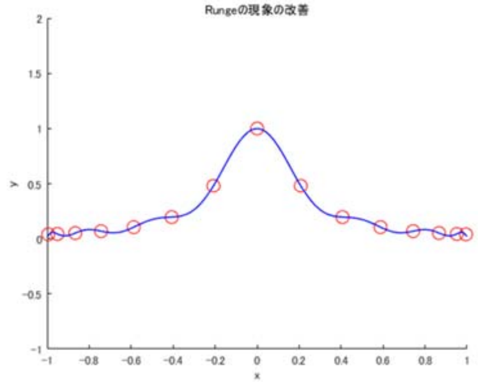


ルンゲの現象の改善

- チェビシェフ分点でRungeの現象を改善できる（端に分点を寄せる）

$$y=\frac{1}{(25x^2+1)}$$

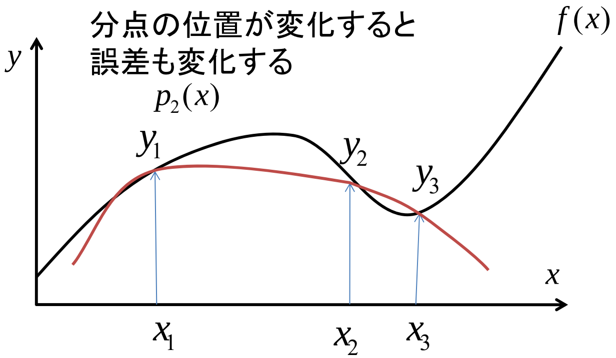
- ex5_4を参照



教科書16ページ

2.4　チェビシェフ補間

- 分点数nのとき，誤差を最小にする最良の分点の位置がチェビシェフ分点
- この分点を使うのがチェビシェフ補間



チェビシェフ多項式

$$T_n(x)=\cos(n\cos^{-1}x)\qquad (|x|\le 1)$$

$$T_n(\cos\theta)=\cos(n\theta)$$

$$T_0(x)=\cos(0\cos^{-1}x)=1$$

$$T_1(x)=\cos(1\cos^{-1}x)=x$$

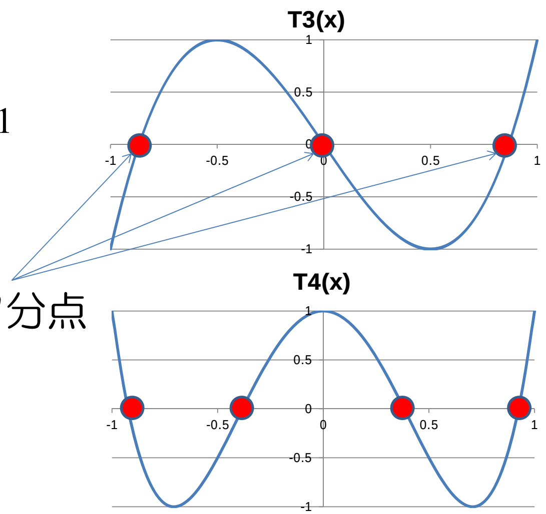
$$T_2(x)=2xT_1(x)-T_0(x)=2x^2-1$$

$$T_3(x)=2xT_2(x)-T_1(x)=2x(2x^2-1)-x=4x^3-3x$$

チェビシェフ多項式のグラフ

$$T_3(x)=4x^3-3x$$

$$T_4(x)=8x^4-8x^2+1$$



チェビシェフ分点

- n次の[-1,1]区間のチェビシェフ分点

$$\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right),\cos\left(\frac{3\pi}{2n}\right),\cos\left(\frac{5\pi}{2n}\right),\cdots,\cos\left(\frac{2\pi n-1}{2n}\right)$$

- [a,b]区間に適用するには下式で変換

$$\mathrm{y}=\frac{(\mathrm{b-a})}{2}\mathrm{x}+\frac{(\mathrm{a+b})}{2}$$

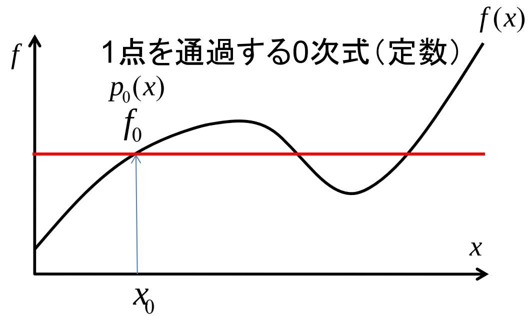
$$x=1\rightarrow \mathrm{y}=\frac{(\mathrm{b-a})}{2}(1)+\frac{(\mathrm{a+b})}{2}=\frac{2\mathrm{b}}{2}=b$$

$$x=-1\rightarrow \mathrm{y}=\mathrm{a}$$

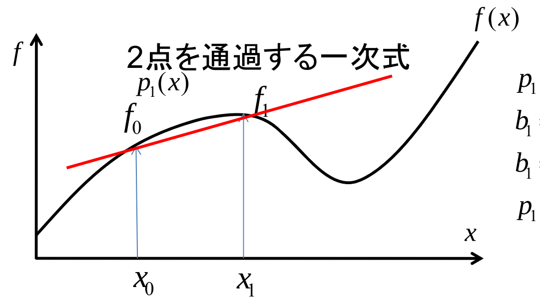
教科書17ページ

2.5　ニュートン補間

- 補間多項式を逐次的に構成
- 分点数nを増やしながら，多項式を計算する

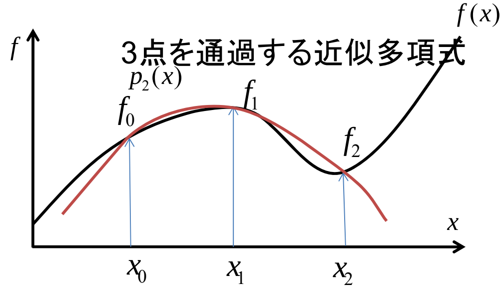


$$p_0 = f_i = f(x_0)$$
$$w_0(x) \equiv 1$$



$$p_1 = p_0 + b_1 w_1(x)$$
$$b_1 = (f_1 - p_0(x_1)) / w_1(x_1)$$
$$b_1 = (f_1 - f_0)/(x_1 - x_o)$$
$$p_1 = f_0 + (f_1 - f_0)/(x_1 - x_o)\cdot(x - x_o)$$
$$w_1(x) \equiv (x - x_o)$$

$+b_2 w_2(x)$



$$p_2 = p_1 + b_2 w_2(x)$$
$$p_2 = p_0 + b_1 w_1(x) + b_2 w_2(x)$$
$$b_2 = (f_2 - p_1(x_2)) / w_2(x_2)$$
$$w_2(x) \equiv (x - x_o)(x - x_1)$$

今回の講義のまとめ

- テーマ：四則計算（＋－×÷）しかできない計算機で，どう関数を計算するか

微係数を使う方法

- 関数近似
  - 関数を多項式で近似

→ 前回

微係数を使わない方法

- 多項式補間
  - 設定した分点を通る関数
  - ラグランジュ補間
  - チェビシェフ補間
  - ニュートン補間

→ 今回

次回　数値積分

- テーマ：　四則計算（＋－×÷）しかできない計算機を使って，どのように積分を計算させるか

レポート出題予定