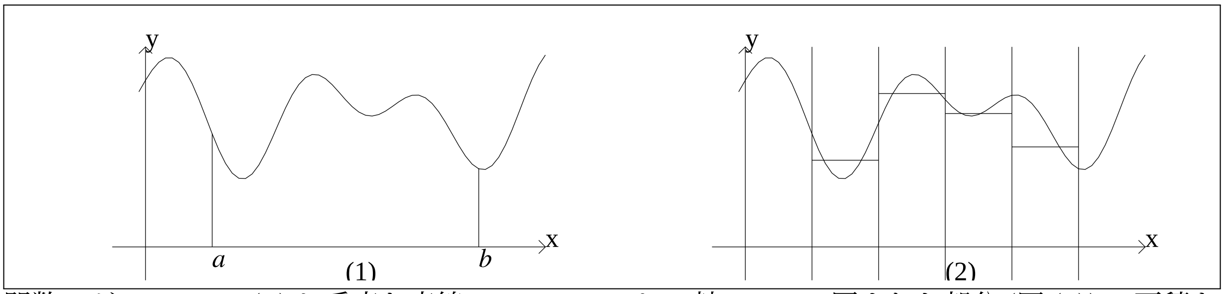
5. 積分の計算

(定) 積分: 曲がった図形の面積を、長方形、3 角形など簡単な面積の公式のある図形で近似する。関数のグラフで囲まれた部分の面積から始める:



関数のグラフ $y = f(x)$ と垂直な直線 $x = a$, $x = b$ と x 軸 $y = 0$ に囲まれた部分 (図 (1)) の面積を長方形で次のように近似する:

(1) 区間 $[a, b]$ を n 分割して小長方形の幅にする。途中の点は $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ とする。各幅は $x_i - x_{i-1}$, $(i = 1, \ldots, n)$.
(2) 各区間から 1 点選ぶ。$a = x_0 \leq t_1 \leq x_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq t_n \leq x_n = b$.
(3) 選んだ点における関数の値を小長方形の高さとする。各高さは $f(t_i)$, $(i = 1, \ldots, n)$.
(4) 小長方形の面積は $f(t_i)(x_i - x_{i-1})$. $(i = 1, \ldots, n)$.
(5) 小長方形の面積の総和は $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$. これが近似面積である。

分割を細かくする極限でこの総和が収束するならば極限値を**定積分**という。次のように表す:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \tag{1}$$

定理 5-1. (リーマン). 閉区間上連続な関数は積分可能である。つまり、極限 (1) は収束する。

定義通りの積分計算は大変である。1 次近似と同様に数式処理で簡単な計算にできる。

定理 5-2. (微分積分学の基本定理).

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a). \quad \left(= [f(x)]_{x=a}^{x=b} \text{ と書く。}\right)$$

例: $\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx = \int_0^1 \left(\frac{x^3}{3}\right)'\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{0} = \frac{1}{3}.$

この計算の主な部分は導関数 $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$ である。つまり、**微分方程式** $f'(x) = x^2$ の解 $f(x) = \frac{x^3}{3}$ がわかれば定積分の計算に使える。

一般に、微分方程式 $\boxed{F' = f}$ の解を f の原始関数、解全体を不定積分という

$$\int f(x)\,dx = \{F \mid F' = f\} = F + C.$$

この微分方程式の解全体には簡単な構造がある。ひとつ解が知られれば他はすべて定数の差しかないのでその定数を積分定数と言って $+C$ などで表す。

例: $\displaystyle\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$, C は積分定数。

微分の場合と同様に積分にも基本公式と一般公式がある。積、商、合成などの関数の構成方法のための積分公式がないので計算には工夫する必要がある。

演習 5: 積分を計算せよ。(1) $\displaystyle\int_{-1}^{3} x^3\,dx$. (2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$. (3) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^3\,dx$. (4) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^4\,dx$.