

数値計算 第14回 (最終回) 講義全体のまとめ

情報科学部情報科学科
中條 直也

1

今回の演習

- 演習14-1
数値計算のコンセプトマップ作成
- コンセプトマップとは
 1. 中心にテーマとなるキーワードを描く
 2. 放射状に枝を伸ばしてキーワードを繋げる
 3. 枝ごとに色を分けてもよい
 4. 正解はなく、個別の理解のために作成

2

数値計算の講義実績（前半）

- 1回 総論： 数値計算を学ぶ意義、
講義の全体像とポイント
- 2回 MATLAB 使用法 第1回レポート
- 3回 計算機による数値の表現と演算
- 4回 関数計算
- 5回 テイラー展開法、ラグランジュ補間
- 6回 数値積分 第2回レポート
- 7回 線形方程式の解法(1) ガウスの消去法

3

数値計算の講義実績（後半）

- 8回 線形方程式の解法(2) LU分解法
- 9回 線形方程式の解法(3) ノルムの定義、行列の条件数
- 10回 中間テスト
- 11回 非線形方程式の解法 2分法、ニュートン法、割線法
第3回レポート
- 12回 常微分方程式の解法 オイラー法、ルンゲクッタ法
- 13回 連立常微分方程式
- 14回 最小二乗法
- 15回 講義全体のまとめ

4

(第1回) 数値計算とは

- 計算機で数値を計算させること
 - プログラムを書けば簡単に計算できるようになっているが…

コンピュータの計算能力

実は四則計算（ $+$ $-$ \times \div ）しかできない
 $\sin(x)$ や $\exp(x)$ は、近似式で計算

コンピュータは32ビット, 64ビットで計算
 有限精度
 円周率 π などは近似値

5

数値計算

- 正しく効率的な計算を行うための技術
- 数値計算では誤差が不可避
- 計算によって生じる誤差
 - 丸め誤差（有限の精度のため、不可避）
 - 桁落ち（計算法で避けられる）
- 問題に応じた数値計算手法
 - 計算機の発展とともに応用範囲が拡大
 - ただし基本は不変

6

数値計算が役立つ分野

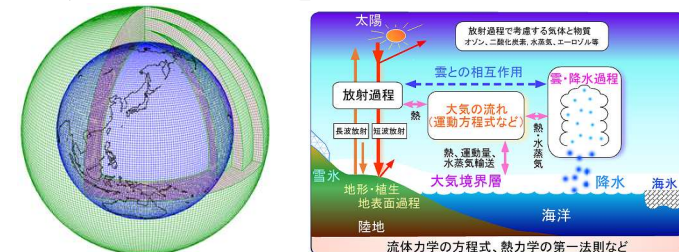
- 気象予報
 - 数値予報で地球をモデル化して気象を予測
- CAD, CAMによる設計, 製造
 - 交通事故での傷害メカニズムの解明
- ゲームでのリアルな戦闘シーンの計算
 - 物理計算エンジン
- 航空宇宙分野
 - 微分方程式に基づく軌道計算や制御

数値モデルの計算など基本計算部分を担う
 実際には計算ライブラリを使用する

7

数値予報

- 物理学に基づく数値予報モデルを作成
- 風や気温などの時間変化を数値計算
- 将来の大気の状態を予測する



出典: <http://www.jma.go.jp/jma/kishou/known/whitep/1-3-1.html>

8

(第2回) MATLABについて

- INRIA (フランス国立コンピュータ科学・制御研究所) による数値計算ソフト (フリーウェア)
- 特徴
 - インタプリタ型のためコンパイル不要で実行
 - 行列の演算が得意
 - for, while, if などプログラム制御文
 - 2次元, 3次元のグラフ出力
 - 便利なライブラリ関数 (ツールボックス)
- MATLABのクローン
 - 愛知工業大学は研究用にMATLABライセンスを導入
 - 他にOctaveなどもある
 - 産業界ではMATLABがよく利用される

9

CとMATLABの比較

| | C言語 | MATLAB |
|----------|-----------------------------------|--|
| 実行形式 | コンパイラ型 コンパイル→リンク→実行 | インタプリタ型 記述すれば即実行可能 |
| デバッグ環境 | デバッグ必要 (統合環境) | 全ての変数値が残っている (メモリ量に依存) |
| オンラインヘルプ | 利用できない (統合環境) | あり サンプルコードつき |
| 行列演算 | 配列データごとの演算 $A(i, j) + B(i, j)$ | 行列単位で可能 $A+B$ |
| グラフィックス | 基本的に範囲外 | グラフコマンドあり |
| 変数宣言 | 必要 | 不要 |
| 数学ライブラリ | ない (別に用意する) | 関数ライブラリ (関数補間, 連立方程式, 微分方程式, 非線形方程式...) |
| 応用別ライブラリ | ない (別に用意する) | SIMULINK (信号処理, 制御, 物理) |

10

(第3回) 数値計算の精度と誤差

| | | 例1 | 例2 | 例3 |
|---------|------------------------|----------------------|-----------|-----------|
| 真値 | x | 1.002 | 1000 | 10000 |
| 近似値 | x' | 1.004 | 999 | 9999 |
| 誤差 | x'-x | 2×10^{-3} | -1 | -1 |
| 絶対誤差 | x'-x | 2×10^{-3} | 1 | 1 |
| 相対誤差 | x'-x / x | 1.6×10^{-3} | 10^{-3} | 10^{-4} |
| 10進有効桁数 | $-\log_{10} x'-x / x $ | 2.8 | 3 | 4 |

11

(第4回) 関数計算

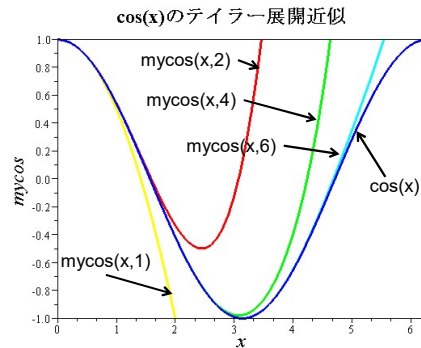
- $\cos(x)$ のテイラー展開の下式を使ってMATLABで近似関数 $\text{mycos}(x, n)$ を作りなさい

$$y_n = p_{2n-2}(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}$$

- $[0; 2*\pi]$ の区間で, $\text{mycos}(x, n)$ ($n=1, 2, 4, 6$)と変えて, 標準関数 $\cos(x)$ のグラフと比較しなさい
- リスト4-1のテイラー展開プログラムを修正

12

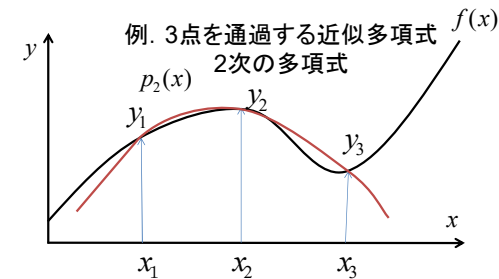
cos(x)とその近似関数



13

(第5回) 多項式補間

- **微係数**の計算が簡単でない関数に適用
- 分点 (x_l, y_l) を通過する近似多項式を作る
- **ラグランジュ補間**

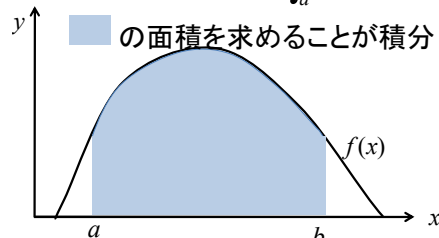


14

(第6回) 補間型積分則

- 関数の定積分を有限個の関数値を使って近似

$$If = I^{(a,b)} f = \int_a^b f(x)$$



- 前回説明した補間関数を使って, その積分で関数の定積分を近似計算する

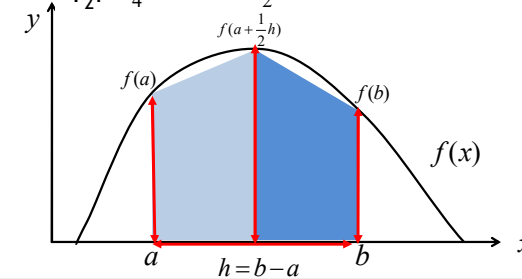
15

台形則の精度向上(高精度近似積分)

小区間の幅を小さくして精度を向上できる

$$T_2 f = \frac{h}{4} (f(a) + f(a + \frac{1}{2}h)) + \frac{h}{4} (f(a + \frac{1}{2}h) + f(a + \frac{4}{4}h))$$

$$T_2 f = \frac{h}{4} (f(a) + 2f(a + \frac{1}{2}h) + f(b))$$



16

(第7回) 線形方程式

- テーマ： 線形方程式とガウス消去法
- 線形方程式： 数値計算で頻繁に使用
- ガウス消去法
 - 行列の計算は面倒そうに見えるが
 - 基本的に線形方程式の手計算方法と同じ
(中学校で学習した方法)

$$Ax = b \quad Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = b$$

17

(第8回) LU分解による線形方程式解法

- 線形方程式をLU分解

$$Ax = LUx = L(Ux) = b$$

- c を使うと線形方程式

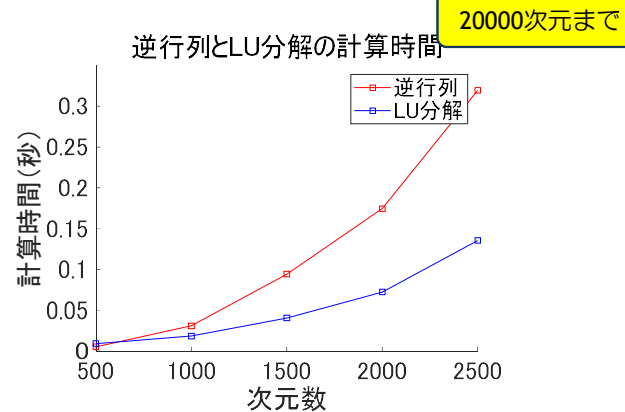
$$Lc = b,$$

$$Ux = c$$

- 二つの行列は三角行列のため計算が容易

18

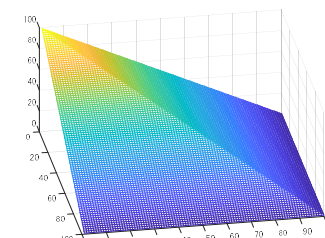
2500次元までの行列の計算時間



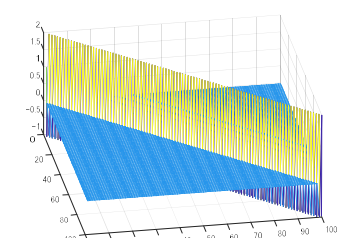
19

演習8-3 フランク行列とその逆行列

演習8-3を実行すればプロットできる



フランク行列



フランク行列の逆行列

20

(第9回) 行列と条件数

- 行列Aに対して, $\text{cond}(A)$ を行列Aの条件数と呼ぶ

$$\text{cond}(A) \equiv \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \quad (14)$$

- 線形方程式の解の, 誤差の影響の受け易さを示す.
 - $\text{cond}(A)$ が大きいと, 誤差が大きくなりやすい

$$\frac{\| \Delta y \|}{\| y \|} \leq \text{cond}(A) \frac{\| \Delta x \|}{\| x \|} \quad (15)$$

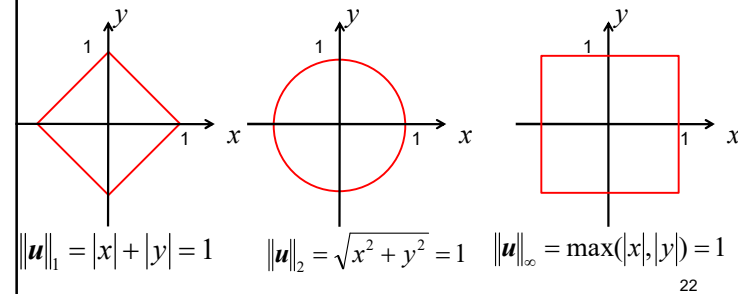
$$\text{cond}(I) = 1 \quad (22)$$

$$\text{cond}(A^{-1}) = \text{cond}(A) \quad (23)$$

21

演習9-2の解答

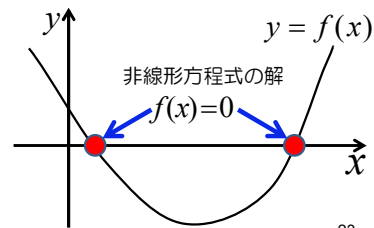
- 1-ノルム, 2-ノルム, ∞ -ノルムについて, ノルムが1の2次元ベクトル $\mathbf{u} = (x, y)$ 全体を図に示せ



22

(第11回) 非線形方程式

- 非線形方程式は一般的には解析的に解けない
- 反復計算で近似解を計算する
 - 2分法 (bisection)
 - ニュートン法 (newton)
 - 割線法 (secant)

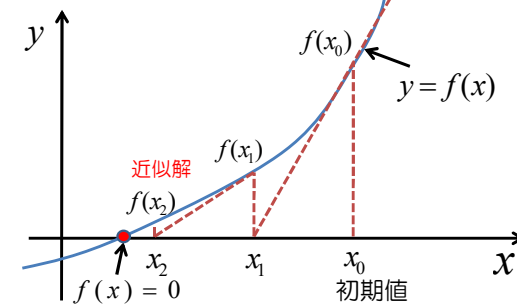


23

教科書99 ページ

9.3 ニュートン法 (newton)

- ニュートン法のアルゴリズム
 - 非線形方程式 $f(x) = 0$
 - 解の近傍 x_0 で接線, x軸交点を近似値



24

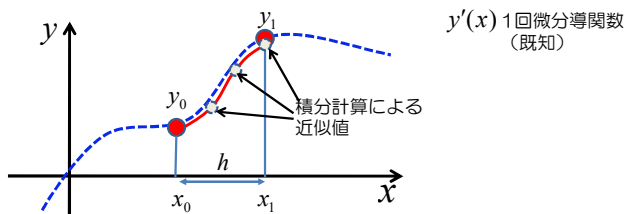
(第12回) 常微分方程式 ルンゲ・クッタ型公式

- 点 (x_0, y_0) を通る解 $y(x) = \eta(x_0, y_0; x)$

$$x_1 = x_0 + h$$

第7回の積分則を応用

$$y_1 = y(x_0 + h) = y_0 + \int_{x_0}^{x_1} y'(x) dx \quad (18)$$

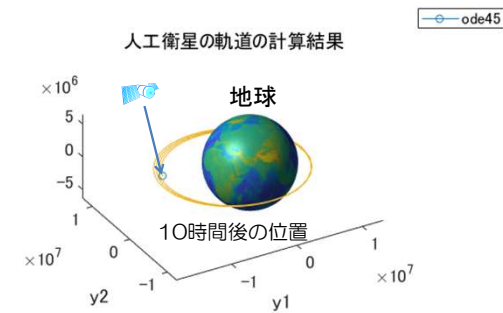


25

(第13回) 連立常微分方程式 人工衛星の軌道計算

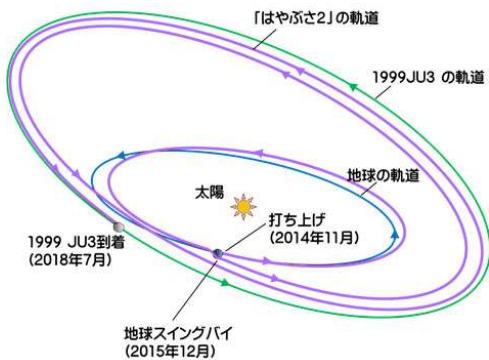
0秒から2時間の軌道を計算
300秒毎の位置をプロット

初速を変化させると
軌道が変化する



26

はやぶさ2の軌道概要



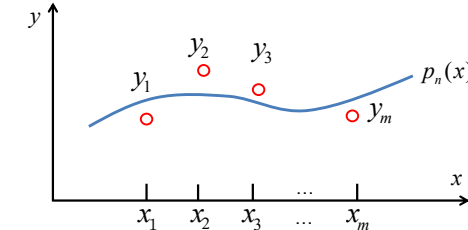
JAXA発表資料を引用
<http://fanfun.jaxa.jp/countdown/hayabusa2/mission.html>

27

(第14回) 最小二乗近似を使う場面

- 分点数 m が多項式の次数 n より、大きい場合の近似方法
- 分点 (x_d, y_d) と多項式の残差の2ノルムを最小化
 - 最小二乗近似

例. 計測された m 点を近似する n 次多項式 $p_n(x)$



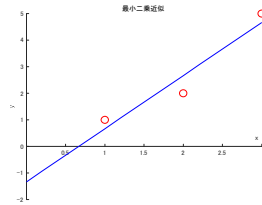
多数の実験データから近似曲線
を求めるときによく用いる

28

最小二乗近似となる直線（一次式）の例

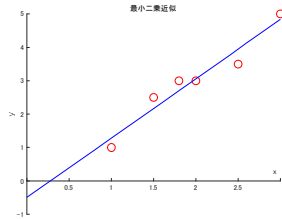
3点のデータ

$x_d = [1 \ 2 \ 3];$
 $y_d = [1 \ 2 \ 5];$



6点のデータ

$x_d = [1 \ 2 \ 3 \ 1.5 \ 1.8 \ 2.5];$
 $y_d = [1 \ 2 \ 5 \ 2.5 \ 3.0 \ 3.5];$



29

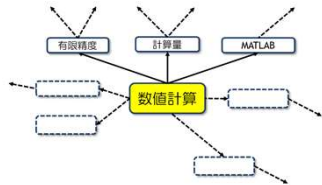
今回の演習

- 演習15-1
数値計算のコンセプトマップ作成
- コンセプトマップの作り方
 1. 中心テーマとなるキーワードを描く
 2. 放射状に枝を伸ばしてコンセプトを繋げる
 3. 枝ごとに色を分けてもよい
 4. 正解はなく、個別理解のために作成

30

コンセプトマップ(概念地図)とは

- コンセプト（概念）間の関係性を表現
 - 放射構造や木構造を用いて表現
- コンセプトマップの効果、使用例
 - 体系化された知識の全体像の理解
 - 複雑なアイデアの伝達にも利用



31

演習15-1 コンセプトマップの作成

数値計算