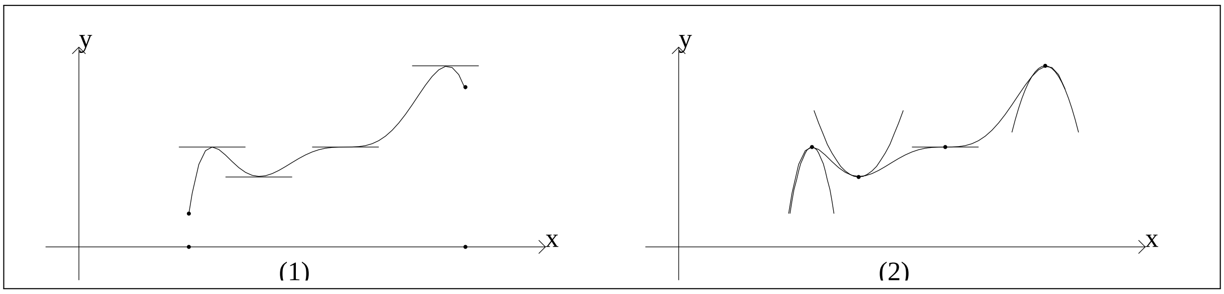
12. 極大極小

1 変数関数の場合: $f(x)$ は考えている範囲で 2 階微分可能とする。

定理 12-1. $f(x)$ が a で極値をとるならば $f'(a)=0$. (水平接線).

定理 12-2. $f'(a)=0$ とする。$0<f''(a)$ ならば a で極小、$f''(a)<0$ ならば a で極大。

定理 12-3. 閉区間 $[c,d]$ において最大最小は、$f(c)$, $f(d)$ か $f'(a)=0$ となる $f(a)$ の中にある。



$$f(x) \fallingdotseq f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2.$$

$f'(a)=0$ ならば 2 次近似は放物線である。$0<f''(a)$ ならば上に伸びる放物線で極小、$f''(a)<0$ ならば下に伸びる放物線で極大である。

2 変数の場合: $f(x,y)$ は考えている範囲で C^2 級とする。

定理 12-4. $f(x,y)$ が (a,b) で極値をとるならば $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$. (水平接平面).

定理 12-5. $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ とする。$\Delta=f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)-f_{xy}(a,b)^2$, $A=f_{xx}(a,b)$ とおく。$0<\Delta$, $0<A$ ならば (a,b) で極小、$0<\Delta$, $A<0$ ならば (a,b) で極大。

定理 12-6. 有界閉領域 D 上の境界の上か D の内部の $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ となる (a,b) で f は最大最小をとる。

水平接平面をとる (a,b) において $f(x,y)$ の 2 次近似は

$$f(x,y) \fallingdotseq f(a,b)+\frac{1}{2}\left\{f_{xx}(a,b)(x-a)^2+2f_{xy}(a,b)(x-a)(y-b)+f_{yy}(a,b)(y-b)^2\right\}.$$

かっこの中を A, B, C, X, Y で略記する。2 次式の部分は $A\neq 0$ ならば平方完成して

$$AX^2+2BXY+CY^2=A\left(X^2+2\frac{B}{A}XY+\frac{C}{A}Y^2\right)=A\left(\left(X+\frac{B}{A}Y\right)^2+(AC-B^2)\frac{Y^2}{A^2}\right)=A(H^2+\Delta K^2).$$

$0<A$, $0<\Delta$ ならば上に伸びる放物面で極小、$A<0$, $0<\Delta$ ならば下に伸びる放物面で極大である。

定理 12-6 の領域が円板などの場合、境界を方程式で表すことができる。最大値の可能性は境界上にもある。次の定理は、そうした**条件付き極値問題**を解く手掛かりを与える。

定理 12-7. (ラグランジュ未定定数法). 条件 $G(x,y)=0$ を満たす (x,y) に制限して $f(x,y)$ が (a,b) で極値をとるならば定数 λ が存在して

(1) $G(a,b)=0$,
(2) $G_x(a,b)=\lambda f_x(a,b)$, $G_y(a,b)=\lambda f_y(a,b)$.

証明. $G(x,y)=0$ の陰関数 $y=h(x)$ をとって $f(x,h(x))$ が a で極値を取れば $(f(x,h(x)))'$ は a で 0 である。連鎖律より $f_x(a,h(a))1+f_y(a,h(a))h'(a)=0$. 陰関数の微分より $f_x(a,b)-f_y(a,b)\frac{G_x(a,b)}{G_y(a,b)}=0$. $\lambda=\frac{G_x(a,b)}{f_x(a,b)}=\frac{G_y(a,b)}{f_y(a,b)}$ とおく。 □

演習 12: (1) $f(x,y)=x^3+y^3-6xy$ の極値を調べよ。(2) 条件 $4x^2+y^2=4$ のもとで $f(x,y)=12x^2+16xy-3y^2$ の最大最小を求めよ。