微分積分 2, 2020/06/09, 06/16

解説:

● 演習 6 (1), (2) の極限は代入と同じです。(3) は $\dfrac{0}{0}$ 型不定形です。$(x, y) \to (0, 0)$ は極座標 (r, θ) では $r \to 0$ です。

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{(r\cos\theta)^2 - (r\sin\theta)^2}{(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}{r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta} \tag{1}$$

$$= \lim_{r\to 0} \cos 2\theta. \tag{2}$$

(1) で不定形は解消できています。(2) の形は近づき方ごとに θ がいろいろあるので極限は定まりません。

● 演習 7 偏導関数を計算せよ。(2) $x^3 + y^3$, (7) e^{xy}.

解説: (2) $f(x, y) = x^3 + y^3$ として x についての偏導関数は $f_x(x, y) = (f(x, y))_x = (x^3 + y^3)_x = (x^3)_x + (y^3)_x = 3x^2 + 0 = 3x^2$. y についての偏導関数は $f_y(x, y) = (f(x, y))_y = (x^3 + y^3)_y = (x^3)_y + (y^3)_y = 0 + 3y^2 = 3y^2$.

(7) $(e^{xy})_x = e^{(--)}(--)_x = e^{xy}(xy)_x = ye^{xy}$. $(e^{xy})_y = e^{(--)}(--)_y = e^{xy}(xy)_y = xe^{xy}$.

● 指定した点における 1 次近似を求めよ。(9) $\dfrac{x - y}{x + y}$, $(2, 1)$.

解説:

2 変数関数 $f(x, y)$ の (a, b) における 1 次近似とは

$$\begin{cases} f(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}\,\varepsilon(x, y), & (1) \\ \displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} \varepsilon(x, y) = 0. & (2) \end{cases}$$

$f(x, y)$ を (1) で 1 次式の部分と誤差の部分に分けます。$\varepsilon(x, y)$ は (x, y) が (a, b) の近くで 0 に近いことを極限 (2) で表します。$\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$ は 2 点 (x, y) と (a, b) の距離でこれも (a, b) の近くでは小さいと考えます。

誤差は必要になるまではこの式のままにしておきます。

点 $(2, 1)$ における $f(x, y)$ の 1 次近似は

$$\begin{cases} f(x, y) = f(2, 1) + f_x(2, 1)(x - 2) + f_y(2, 1)(y - 1) + \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 1)^2}\,\varepsilon(x, y), \\ \displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,1)} \varepsilon(x, y) = 0. \end{cases}$$

問題の $f(x, y) = \dfrac{x - y}{x + y}$ について偏導関数 f_x, f_y を計算してから偏微分係数 $f_x(2, 1)$, $f_y(2, 1)$ を計算して 1 次近似式を組み立てます。

$f_x(x, y) = \left(\dfrac{x - y}{x + y}\right)_x = \dfrac{(x - y)_x(x + y) - (x - y)(x + y)_x}{(x + y)^2} = \dfrac{1(x + y) - (x - y)1}{(x + y)^2} = \dfrac{2y}{(x + y)^2}$.

$f_y(x, y) = \left(\dfrac{x - y}{x + y}\right)_y = \dfrac{(x - y)_y(x + y) - (x - y)(x + y)_y}{(x + y)^2} = \dfrac{(-1)(x + y) - (x - y)1}{(x + y)^2} = \dfrac{-2x}{(x + y)^2}$.

$f(2, 1) = \dfrac{2 - 1}{2 + 1} = \dfrac{1}{3}$. $f_x(2, 1) = \dfrac{2 \cdot 1}{(2 + 1)^2} = \dfrac{2}{9}$. $f_y(2, 1) = \dfrac{-2 \cdot 1}{(2 + 1)^2} = -\dfrac{2}{9}$.

よって、1 次近似は

$$\begin{cases} \dfrac{x - y}{x + y} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{9}(x - 2) - \dfrac{2}{9}(y - 1) + \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 1)^2}\,\varepsilon(x, y), \\ \displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,1)} \varepsilon(x, y) = 0. \end{cases}$$