3. 1次近似

関数 $f(x)$ の $x=a$ を中心とする **1次近似**とは次のふたつの等式が成り立つことである:

$$\begin{cases} f(x) &= f(a)+f'(a)(x-a)+\varepsilon(x)(x-a), \quad (1),\\ \lim_{x\to a}\varepsilon(x)=0. & \quad (2). \end{cases}$$

与えられた $f(x)$ に対して $f(a)$, $f'(a)$ を求めることが問題である。極限 (2) は ε(**イプシロン**と読む) が $x=a$ の近くで小さいことを保証する。

(1) の $f(a)+f'(a)(x-a)$ の部分は関数として1次式、グラフを描くと直線である。この式は $f(x)$ を $x=a$ の近くで最も関数に近い1次式なので **1次近似式**という。

$x-a$ は $x=a$ の近くで 0 に近い。(2) より $\varepsilon(x)$ も $x=a$ の近くで 0 に近い。(1) の $\varepsilon(x)(x-a)$ はこれらよりも 0 に近い。$\varepsilon(x)(x-a)$ を1次近似 (1) の**誤差**という。

(1), (2) が成り立つことを $f(x)$ は $x=a$ において**微分 (1次近似) 可能**であるという。$f(a)$ は関数 $f(x)$ の a における値とする。$f'(a)$ を**微分係数**という。

(1), (2) から $f'(a)$ は $\dfrac{0}{0}$ 型不定形の極限である: $\boxed{f'(a)=\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}.}$ これを直接計算するのは大変である。2段階に分けて簡易化する:

(3) $f(x)$ から $f'(x)$ を求める。(**導関数**、数式処理).
(4) $f'(x)$ の a における値は $f'(a)$ に等しい。(**微分係数**、代入、簡約化).

(3) の計算は微分公式を使った数式処理である。極限は微分公式に押し付ける。(4) は導関数の値である。

例: $f(x)=x^2$, $x=1$ における1次近似を求める。
$f'(x)=(x^2)'=2x$, (導関数、基本公式を使った). $f(1)=1^2=1$, $f'(1)=2\cdot 1=2$ (微分係数).

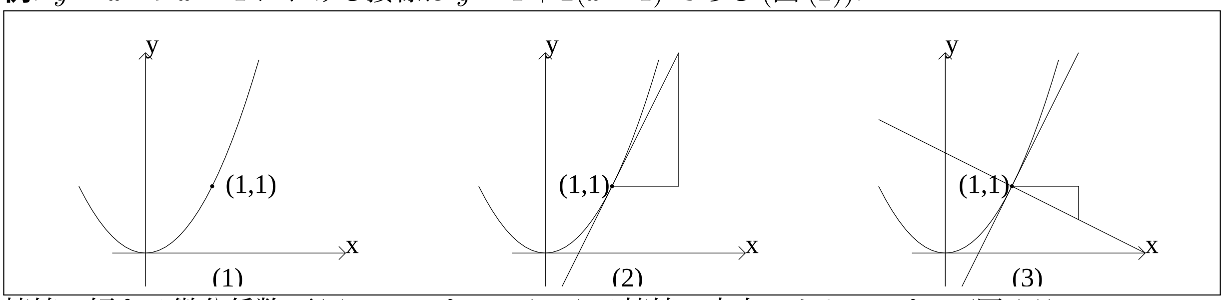
$$\begin{cases} x^2 &= 1+2(x-1)+\varepsilon(x)(x-1), \quad (1),\\ \lim_{x\to a}\varepsilon(x)=0. & \quad (2). \end{cases}$$

(2) は微分公式 $(x^a)'=ax^{a-1}$ を使ったことで成り立つ。誤差の情報が必要ならば $\varepsilon(x)$ についてさらに調べる。必要なければ、$\varepsilon(x)$ と書いておくだけである。

この1次近似はより簡単に、$\boxed{x^2 \fallingdotseq 1+2(x-1)}$ が $x=1$ の近くで成り立つ、と書く。

この1次近似 $f(a)+f'(a)(x-a)$ は、$f(x)$ に近い、値 $f(a)$ をとる、1次関数、である。$y=f(a)+f'(a)(x-a)$ のグラフを描くと、$y=f(x)$ に近い、$(a,f(a))$ を通る、直線、である。この直線を $f(x)$ の $x=a$ における**接線**という。

例: $y=x^2$ の $x=1$ における接線は $y=1+2(x-1)$ である (図 (2)):



接線の傾きは微分係数 $f'(1)=2$ である。$(1,2)$ は接線の方向ベクトルである (図 (2)).

これに直交するベクトルを**法線ベクトル**という。$(1,-\frac{1}{2})$ は接線の法線ベクトルである (図 (3)). $y=x^2$ の $x=1$ における**法線**は $y=1-\frac{1}{2}(x-1)$ である (図 (3)).

一般に $y=f(x)$ の $x=a$ における接線は $\boxed{y=f(a)+f'(a)(x-a)}$, 法線は $\boxed{y=f(a)-\dfrac{1}{f'(a)}(x-a).}$

x, y について対等な内積の形では、それぞれ $f'(a)(x-a)-(y-f(a))=0$, $(x-a)+f'(a)(y-f(a))=0$.

演習 3: 関数の指定された点における接線と法線を求めよ。(1) $y=x^3$, $(1,1)$. (2) $y=\frac{1}{x}$, $(2,\frac{1}{2})$. (3) $y=\sqrt{x}$, $(4,1)$.