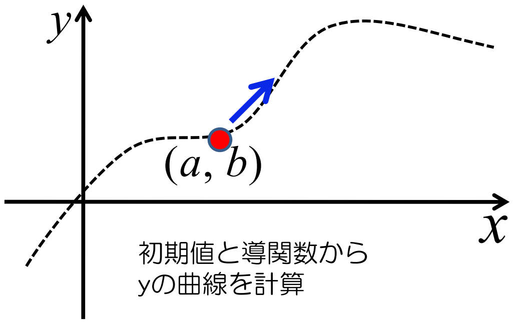
数値計算第11回　常微分方程式

- テーマ：　常微分方程式の解法
- 方法：　オイラー法，ルンゲ・クッタ法

$$y(a) = b$$

$$\frac{d}{dx} y = f(x, y)$$



常微分方程式は何に使われるか

- 電気回路の回路方程式，機械分野の運動方程式
- 解析的には解けない問題がほとんど
- 例：あかつき（金星探査）のための周回軌道への投入計画，軌道修正のための再計算

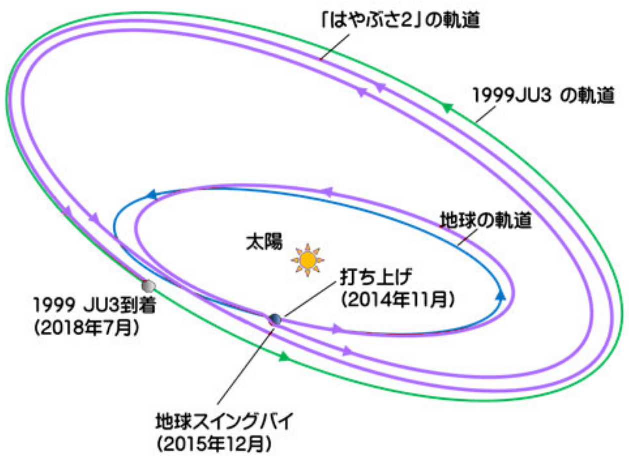
運動方程式

$$F = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

惑星の引力
太陽の引力
…

あかつきプロジェクト
http://www.youtube.com/watch?v=mtzVa3xVPjo&feature=player_detailpage

はやぶさ2の軌道概要



JAXA発表資料を引用
http://fanfun.jaxa.jp/countdown/hayabusa2/mission.html

今回の演習

- 演習11-1　オイラー法
- 演習11-2　ルンゲ・クッタ法

教科書122ページ

初期値問題の解の性質

- 常微分方程式の解曲線
  - 初期値

初期値によって決まる解曲線

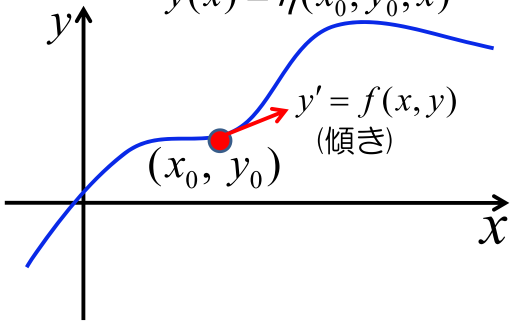
$y(x)=\eta(x_0,y_0;x)$

$y(x_0)=y_0$

$\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)$

$y'=f(x,y)$

（別の表現）



教科書124ページ

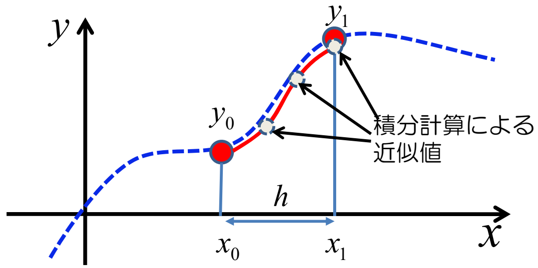
ルンゲ・クッタ型公式

- 点$(x_0,\ y_0)$を通る解 $y(x)=\eta(x_0,y_0;x)$

$x_1=x_0+h$

$$y_1=y(x_0+h)=y_0+\int_{x_0}^{x_1}y'(x)dx \qquad (18)$$

$y'(x)$ 1回微分導関数（既知）



教科書124ページ

第7回で学んだ積分公式を使用

- $y'(x)$を0次補間（定数）$y'(x_0)$ で置換え積分

$$y_1=y_0+hy'(x_0)+O(h^2)$$

→ オイラー法（ルンゲ・クッタ1次）

- 積分を台形則で置換え

→ ホイン法（ルンゲ・クッタ2次）

$$y_1=y_0+\frac{h}{2}\{y'(x_0)+y'(x_1)\}+O(h^3)$$

- 積分をシンプソン則で置換え → 古典的ルンゲ・クッタ法（ルンゲ・クッタ4次）

$$y_1=y_0+\frac{h}{6}\{y'(x_0)+4y'(x_0+\frac{h}{2})+y'(x_1)\}+O(h^5)$$

教科書124 ページ

オイラー法

$$y_1=y_0+hy'(x_0)+\underline{O(h^2)}$$

誤差として無視

$$k_1=f(x_0,y_0)=y'(x_0)$$

$$y_1=y_0+hk_1$$

$$y_2=y_1+hk_2$$

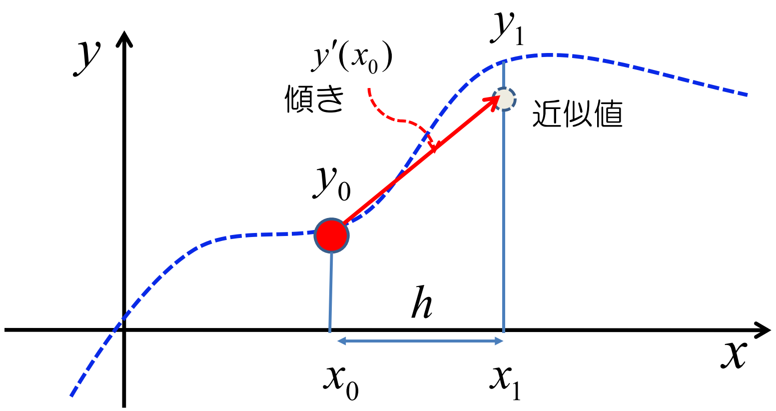
$$\cdots$$

$$y_{j+1}=y_j+hk_{j+1}$$ 漸化式

教科書124ページ

オイラー法の計算

$$y_1 = y_0 + hy'(x_0) + O(h^2)$$



演習問題

- 例題　微分方程式

$$y(0) = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - y\sin(x) + \cos(x)$$

- 区間

$$x = [0,\ 2\pi(6.2831...)]$$

演習11-1　オイラー法

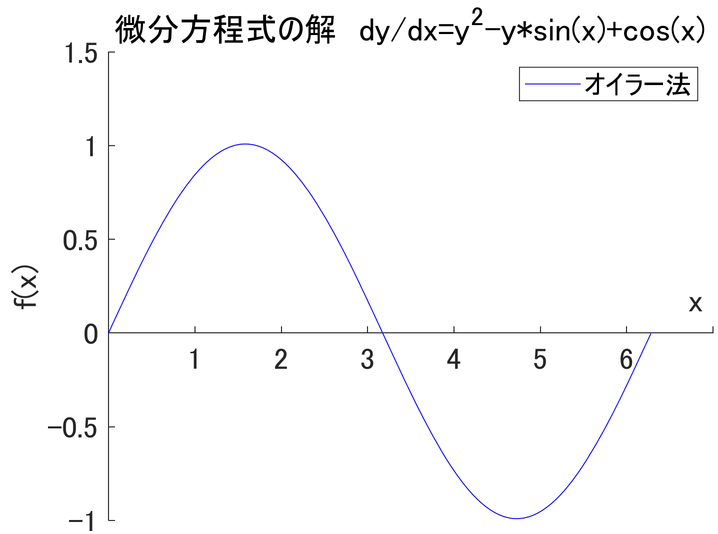
1. オイラー法を完成させる
2. 導関数を定義する
3. プログラム(euler)を呼び出す

```
% オイラー法の呼出し
y0=0, x=0:0.01:2*pi;
format longE;
yel=euler(y0,x,@f);
```

$$y(0) = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - y\sin(x) + \cos(x)$$

$$x = [0, 2\pi]$$



教科書125ページ

ホイン法

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}\{y'(x_0) + y'(x_1)\} + O(h^3)$$

$$k_1 = f(x_0, y_0) = y'(x_0)$$

$$k_2 = f(x_0 + h, y_0 + hk_1) \cong f(x_1, y_1) = y'(x_1)$$

近似

$$y_1 = y_0 + {}^{h}\!/_{2}\{k_1 + k_2\}$$

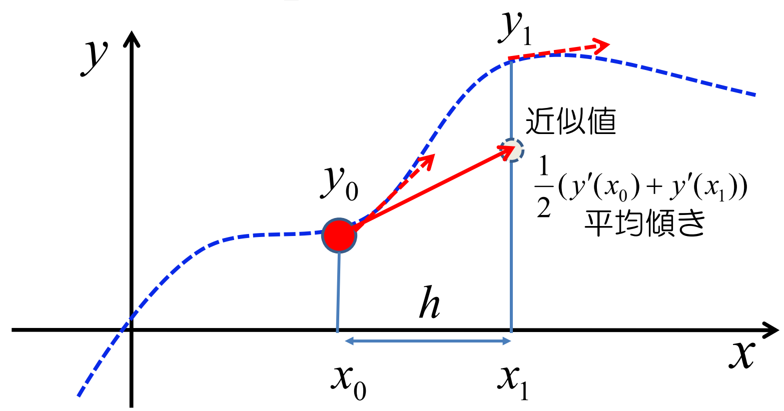
$$\cdots$$

$$y_{j+1} = y_j + {}^{h}\!/_{2}\{k_{j+1} + k_{j+2}\}$$

教科書125ページ

ホイン法の計算

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}\{y'(x_0) + y'(x_1)\} + O(h^3)$$



教科書125ページ

ルンゲ・クッタ4次

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6}\{y'(x_0) + 4y'(x_0 + \frac{h}{2}) + y'(x_1)\} + O(h^5)$$

$$k_1 = f(x_0, y_0) = y'(x_0)$$

$$k_2 = f(x_0 + \tfrac{1}{2}h, y_0 + \tfrac{1}{2}hk_1)$$

$$k_3 = f(x_0 + \tfrac{1}{2}h, y_0 + \tfrac{1}{2}hk_2)$$

$$k_4 = f(x_0 + h, y_0 + hk_3) = y'(x_1)$$

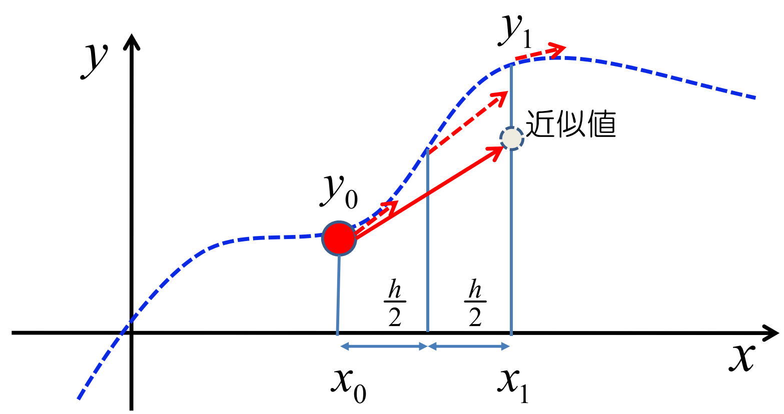
$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6}\{k_1 + 2(k_2 + k_3) + k_4\} + O(h^5)$$

通常は変形版を使用
（高精度）

教科書125ページ

ルンゲ・クッタ4次

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6}\{y'(x_0) + 4y'(x_0 + \frac{h}{2}) + y'(x_1)\} + O(h^5)$$



演習11-2　ルンゲクッタ法

- ルンゲクッタ法を使用して解く
- プログラム(rk4)を呼び出す

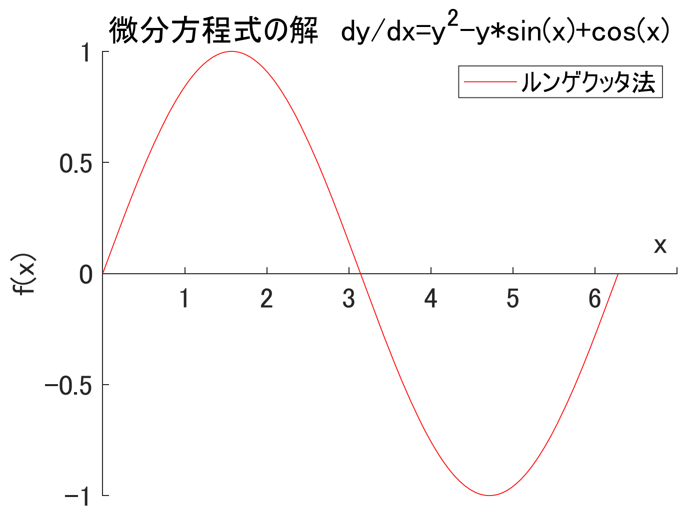
（穴埋め不要）

$$y(0) = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - y\sin(x) + \cos(x)$$

$$x = [0, 2\pi]$$

```
%ルンゲクッタ法の呼出し
y0=0, x=0:0.01:2*pi;
format longE;
yrk=rk4(y0,x,@f);
```



今回の講義のまとめ

- テーマ：　常微分方程式の解法
- 方法
  - オイラー法
  - ルンゲクッタ法

次回　連立常微分方程式の解法

- 方法
  - Matlabの組込み関数ode
  - 高階の微分方程式の解法