1. 概要: 高次元の微分積分

微分積分 1 では 1 変数関数の微分積分を学んだ。微分積分 2 では多変数の場合を扱う。

1 変数関数とは $f(x)$, $g(t)$, $\cos q$ などの形で x, t, q の値を決めると値が定まる対応である。

2 変数以上は $f(x,y)$, $g(t,w)$, $h(x_1,\ldots,x_{100})$, v^3+q^2+3 などの形である。

1 変数の場合にはひとつの値に対するひとつの値の対応で xy 平面にグラフを書いて調べることができた。多変数の場合は図にすることが困難である。

1 変数関数の微分では関数 $f(x)$ を 1 次近似式 $f(a)+f'(a)(x-a)$ に単純化して調べた。

多変数の微分も同様である。以下、 2 変数の場合とする。

$$f(x,y) \fallingdotseq f(a,b)+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b).$$

右辺は x, y についての 1 次式である。偏微分係数 $f_x(a,b)$ と $f_y(a,b)$ は極限で定義される。

しかし計算を 2 段階に分けると計算は容易になる。(1) $f(x,y)$ から**偏導関数** $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ を求める。(2) $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ の (a,b) における値は**偏微分係数** $f_x(a,b)$ と $f_y(a,b)$ である。

偏導関数の求め方は 1 変数の場合の導関数と同様である。偏微分する変数以外の変数を定数扱いして微分する。

例: $f(x,y)=x^2+3xy+5y^2$.
$f_x(x,y)=(x^2+3xy+5y^2)_x=(x^2)_x+3y(x)_x+5y^2(1)_x=2x+3y+0=2x+3y$,
$f_y(x,y)=(x^2+3xy+5y^2)_y=x^2(1)_y+3x(y)_y+5(y^2)_y=0+3x+5\cdot 2y=3x+10y$.
$f(2,1)=2^2+3\cdot 2\cdot 1+5\cdot 1^2=15$,
$f_x(2,1)=2\cdot 2+3\cdot 1=7$,
$f_y(2,1)=3\cdot 2+10\cdot 1=16$.

$$x^2+3xy+5y^2 \fallingdotseq 15+7(x-2)+16(y-1).$$

このように偏導関数の計算には新しいことはない。

合成関数のパターンが増える。2 変数関数と 1 変数関数の組み合わせでは 4 通りある。

(1) $f(g(x))$, (2) $f(g(x,y))$, (3) $f(g(x),h(x))$, (4) $f(g(x,y),h(x,y))$.

(1), (2) は 1 変数の場合と同じ、(3), (4) で新しい法則、**連鎖律** (チェインルール) が現れる。

偏微分の繰り返しで莫大な関数が現れるが C^n 級という性質を満たせばあまり増えない。高次偏導関数の値、高階偏微分係数を係数として多変数関数の場合も多項式近似を構成できる。

例: $e^{xy}=1+xy+\dfrac{x^2y^2}{2}+\cdots$.

特に 2 次近似が図形として放物面の場合には極大極小値を取ることがわかる。関数の最大最小を調べることができる。

2 変数関数のグラフは $z=f(x,y)$ として (x,y,z) 空間における**曲面**として現れる。xy 平面における**領域** D の上にグラフを制限して立体を囲む。この立体の体積は **2 重積分**で表される。

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy.$$

D が xy 軸に平行な辺を持つ長方形の場合、**累次 (るいじ) 積分**で 1 変数の定積分に表せる。

例: 長方形 $R=\{(x,y)\mid 0\le x\le 2, 3\le y\le 4\}$.

$$\iint_R x\,dxdy=\int_0^2\left(\int_3^4 x\,dy\right)dx=\int_0^2 [xy]_{y=3}^{y=4}\,dx=\int_0^2 (x4-x3)\,dx$$
$$=\int_0^2 x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2=\frac{2^2}{2}-\frac{0^2}{2}=2.$$

複雑な形状の領域の場合には、領域を分割したり、縦線、横線領域表示をして累次積分する。

最初の数回は 1 変数関数の計算の復習をする。

演習 1: (1) $f(x,y)=x^2+3y^2$ の偏導関数を求めよ。(2) $f(x,y)=x^2+3y^2$ の $(2,1)$ における 1 次近似を求めよ。