6. 多変数関数

1 変数関数とは $y = f(x)$ などと書き、x を定めると y の値が定まる、という数の対応であった。変数、関数の記号は何でもよくて $v = q(r)$ などでも 1 変数関数を表す。

2 変数関数とは $z = f(x, y)$ などと書き、x, y 両方を決めると z の値が決まる、という事である。変数の個数はいくつでも考えることができて 100 変数関数 $f(x_1, \ldots, x_{100})$ なども扱える。

1 変数から 2 変数に増えて新しいことがいくつかある。2 変数より多い場合は同じように進むので特に 2 変数の場合を解説する。

2 変数関数の場合は $z = f(x, y)$ の (x, y, z) を空間座標として**グラフ**は空間内の**曲面**として描く事もできる。曲面を調べるにはこの関数表示が有効である。さらに変数が多い場合には、平面、空間への切り口を見ることにする。

例: 多項式関数 $f(x, y) = x^2+3xy+5y^2$. x, y についての 2 変数関数である。$(x, y) = (2, 1)$ における値は $f(2, 1) = 2^2+3\cdot2\cdot1+5\cdot1^2 = 15$ $(x, 1)$ における値は定まらないが $f(x, 1) = x^2+3x\cdot1+5\cdot1^2 = x^2+3x+5$. $(2, y)$ における値も定まらないが $f(2, y) = 2^2 + 3 \cdot 2y + 5y^2 = 5y^2 + 6y + 4$. それぞれ、1 変数関数である。両方の変数の動きを同時に見ると大変である。片方だけ動かした切り口などで調べていく。

平面上の近づき方: 数直線上の近づく動きは基本的に左右からしかない。平面上の点の近づく動きはたくさんあるので単に**近づく**といった場合、2 点間の距離が縮んでいくすべての動きをまとめて考える。平面上の 2 点 (x, y) と (a, b) の間の距離はピタゴラスの定理から $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$. この値が 0 に近づいていくすべての動きをまとめて $(x, y) \to (a, b)$ と書く。

$$(x, y) \to (a, b) \Leftrightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \to 0.$$

(1) $(x, y) \to (a, y)$(水平移動), $(a, y) \to (a, b)$(垂直移動) の 2 段階。
(2) $(x, y) \to (x, b)$(垂直移動), $(x, b) \to (a, b)$(水平移動) の 2 段階。
(3) $(a + t(x-a), b + t(y-b))$, $t = 1 \to +0$(斜め)1 段階。

などを含めて、$(x, y) \to (a, b)$ ですべての近づき方をあわせて考える。

極限: 2 変数関数 $f(x, y)$ について (x, y) の動きに連動して関数の値 $f(x, y)$ も動く。動き $(x, y) \to (a, b)$ に連動して $f(x, y)$ が一定の値に近づくことを**収束する**といい、その値を**極限値**という:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y).$$

すべての近づき方で関数はこの値に近づくので多変数関数の極限の収束は厳しい条件である。

連続関数: 極限と関数の値が一致することを**連続**という。$\boxed{\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b).}$ 左辺は (a, b) の周りから決まる値で右辺は 1 点 (a, b) のみで定まる。連続であるならばひとつの近づき方について極限値がわかれば他のすべての近づき方も一致する。連続な点での極限は**代入**と同じである。

連続関数の四則は 0 で割る点を除いて連続である。連続関数の合成は連続である。x, y, 定数は連続である。以上のことから関数の構成方法で連続性を確認できる。

例: $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ の分母について $1^2 + 2^2 \neq 0$ なので $(x, y) \to (1, 2)$ の極限で分母は 0 でない。連続関数の極限なので (x, y) をどのように $(1, 2)$ に近づけても同じ極限値に向かう。水平、垂直の 2 段階に近づけたとしてそれぞれ 1 変数 x, y の動きである。

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{(1,y)\to(1,2)} \left(\lim_{(x,y)\to(1,y)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \right) = \lim_{y\to2} \left(\lim_{x\to1} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \right) = \lim_{y\to2} \frac{1^2-y^2}{1^2+y^2} = \frac{1-4}{1+4} = \frac{-3}{5}.$$

例: $\dfrac{0}{0}$ 型不定形の極限 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ は収束しない。極座標表示 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ を使って $(x, y) \to (0, 0) \Leftrightarrow r = \sqrt{x^2+y^2} \to 0$. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{r\to0} \frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2} = \cos\theta\sin\theta$. この値は近づき方、例えば角度 θ で近づくなど、に依存して一定ではないからである。

演習 6: 極限を計算せよ。(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{x^2+3xy+5y^2}{x^2+y^2}$. (2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,-\frac{\pi}{2})} \cos x \sin y$. (3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.