数値計算　第4回　関数計算

- テーマ：　四則計算（＋－×÷）しかできない計算機で，e^x, cos(x)などの関数を計算する方法
- 関数近似
  - 関数を多項式で近似
  - 多項式は四則演算で計算できる
  - テイラー展開法を用いた関数近似

今回の演習

- 演習4-1　exp(x)を近似関数で計算する．また，そのグラフを描く
- 演習4-2　cos(x)を近似関数で計算する．また，近似の次数を変えてグラフを描く

2.1　多項式の計算

- 多項式　（四則演算で計算可能）

$$p_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x^1 + a_n$$

- 計算法
  - 素朴なアルゴリズム
  - ネスティング法

同じ計算でも，少ない計算でできる方法がある
　四則演算の計算回数で比較

効率的な計算方法を使おう
　知識として持っておくべき

教科書11ページ

- 素朴なアルゴリズム

$$p_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x^1 + a_n \qquad (1)$$

$$x \xrightarrow{\times x} x^2 \xrightarrow{\times x} \cdots \xrightarrow{\times x} x^{n-1} \xrightarrow{\times x} x^n$$

***n-1*回乗算**

$$\downarrow\times a_{n-1} \quad \downarrow\times a_{n-2} \quad \cdots \quad \downarrow\times a_1 \quad \downarrow\times a_0$$

***n*回乗算**

$$a_n + a_{n-1}x + a_{n-2}x^2 + \cdots + a_1x^{n-1} + a_0x^n$$

***n*回加算**

***2n-1* 回乗算，*n*回加算**

$$p_3(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$$

***5*回乗算，*3*回加算**

教科書11ページ

- ネスティング法

n回乗算，n回加算に減らせる

$$p_3(x)=(\overbrace{(\underbrace{a_0x+a_1}_{y_1})x+a_2}^{y_2})x+a_3$$

3回乗算， 3回加算

教科書12ページ

2.2 テイラー展開法

- テイラー展開

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(x-a)^k,\ c_k=\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(0\le k<\infty) \qquad (4)$$

- テイラー展開を途中まで使って近似

$$p_{n-1}(x)=\sum_{k=0}^{n-1}c_k(x-a)^k \qquad (5)$$

この式はネスティング法で計算可能

教科書13ページ

例１　指数関数e^xの計算誤差

- e^xを　0の周りでテイラー展開

$$y=f(x)=e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k \qquad (-\infty<x<\infty) \qquad (8)$$

- テイラー展開をn項までで近似

$$y_n=p_{n-1}(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}x^k \qquad f=e^x\Rightarrow\frac{df}{dx}=e^x,\ f^{(k)}=\frac{d^kf}{dx^k}=e^x$$

$$y_n=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\ldots+\frac{1}{n-1!}x^{n-1}$$

教科書13ページ

計算誤差

- テイラー展開の絶対誤差

$$|p_{n-1}(x)-y|=\left|\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k\right|=\left|\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\right|\cdot|x^n|\le\frac{e^r}{n!}r^n \qquad (9)$$

- テイラー展開の相対誤差　（9）式を$|y|$で割る

$$y=e^x\ge e^{-r}$$

$$\frac{|y_n-y|}{|y|}\le\frac{|y_n-y|}{e^{-r}}=\frac{e^r}{e^{-r}n!}r^n=\frac{e^{2r}}{n!}r^n \qquad (14)$$

最終的な関数eˣの近似式

- 効率の良い計算方法
  - 前項を利用して次項を計算できる

$$y_n = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

x $\quad \frac{1}{2}x$ $\quad \frac{1}{3}x$

$\frac{x}{k}$ を毎回かけるだけ

演習4-1　テイラー展開法

（1）指数関数e^xのテイラー展開の近似式yをMATLABで計算するプログラムを作り， x=1.0，n=10で計算する．

（2）x=[-1:0.1:1], n=10として，近似値yの値を計算し，横軸x，縦軸yのグラフを作成しなさい．また，MATLABの標準関数*exp(x)*を使って*z=exp(x)*を計算し，グラフを作成しなさい

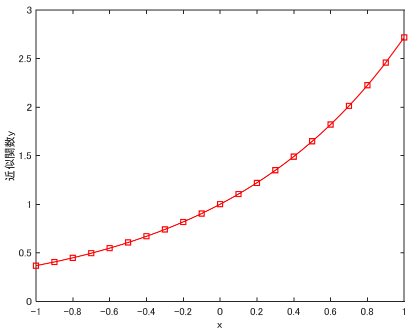
（3） x=[-1:0.1:1]として，MATLABの標準関数*exp(x)*を使って*z=exp(x)*を計算し，誤差y-zを計算し，横軸x，縦軸y-zのグラフを作成しなさい

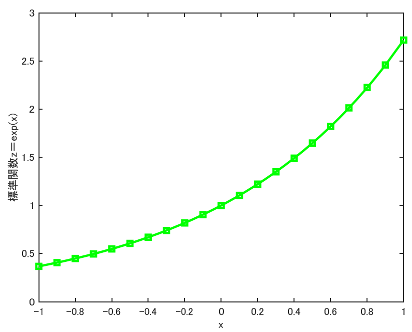
ヒント： n!　はfactorial(n)で計算できる

演習4-1（2）の解答例

$$y_n = p_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} x^k$$

$$z = \exp(x)$$

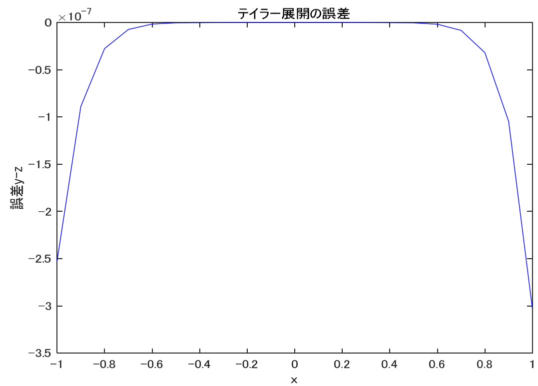




教科書14ページ

演習4-1（3）の解答例

計算結果yと標準関数z=exp(x)の誤差y-zを計算すると，下図（教科書14ページ）のプロット出力になる



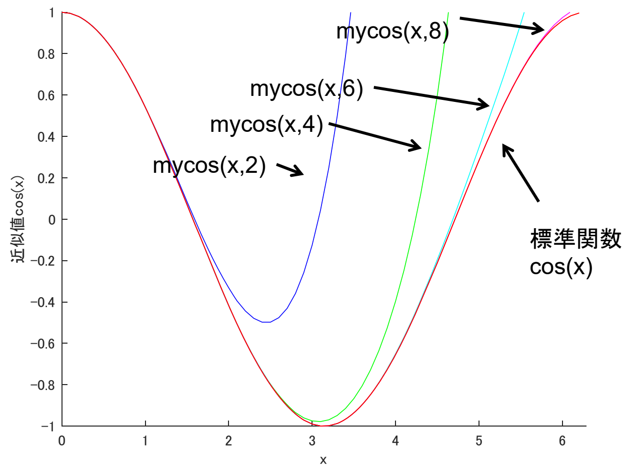
演習4-2　cos(x)の近似関数

- *cos(x)*のテイラー展開の下式を使ってMATLABで近似関数 *mycos(x,n)* を作りなさいここに数式を入力します。

$$y_n = p_{2n-2}(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

- ここに数式を入力します。
- [0:2*%pi]の区間で，*mycos (x,n)*(n=2,4,6,8)と変えて，標準関数*cos(x)*のグラフと比較しなさい
- ヒント リスト5-1のテイラー展開プログラムを修正

演習4-2の答　cos(x)とその近似関数



今回の講義のまとめ

- テーマ：四則計算（加減乗除）しかできない計算機で，どう関数を計算するか

多項式の計算

　ネスティングで効率よく計算

関数近似

　関数を多項式で近似計算

　テイラー展開法（微係数が計算できる場合）

次回　多項式補間

- テーマ：　四則計算（加減乗除）しかできない計算機で，どう関数を計算するか

- 関数近似　　今回
  - 関数を多項式で近似
  - テイラー展開法（微係数使用）
- 多項式補間　　次回
  - 設定した分点を通る関数
  - ラグランジュ補間
  - チェビシェフ補間
  - ニュートン補間