微分積分 2, 2020/06/23, 06/30, 07/07

訂正: 前回の解説に間違いがありました。下の方で正しくは $f_y(2,1) = -\dfrac{4}{9}$ です。

• 接平面と法線を求めよ。(1) $z = x^2 + 3xy + 5y^2$, $(2,1,15)$.

解説: $(x,y) = (a,b)$ における 1 次近似 $f(x,y) \fallingdotseq f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$ から $z = (x,y)$ の接平面 $z = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$ を求めます。

偏導関数 $f_x(x,y) = 2x + 3y$, $f_y(x,y) = 3x + 10y$.

偏微分係数 $f(2,1) = 15$, $f_x(2,1) = 2\cdot 2 + 3\cdot 1 = 7$, $f_y(2,1) = 3\cdot 2 + 10\cdot 1 = 16$.

1 次近似 $f(x,y) \fallingdotseq 15 + 7(x-2) + 16(y-1)$.

接平面 $z = 15 + 7(x-2) + 16(y-1)$.

内積表示 $7(x-2) + 16(y-1) + (-1)(z-15) = 0$.

法線 $(x-2, y-1, z-15) = t(7, 16, -1)$. パラメータ t を消去して $\dfrac{x-2}{u} = \dfrac{y-1}{16} = \dfrac{z-15}{-1}$.

• 合成を直接微分するのと連鎖率を使った微分計算を比べよ。(1) $f(g,h) = g^2 + h^2$, $g = x^2$, $h = y^3$, (2) $f(g,h) = g^2 + h^2$, $g = \cos x$, $h = \sin x$.

解説: (1) は合成した結果が x, y についての 2 変数関数なので合成には偏微分があります。$f(g(x), h(y)) = (x^2)^2 + (y^3)^2 = x^4 + y^6$.

直接、偏微分を計算すると $f_x = 4x^3$, $f_y = 6y^5$.

連鎖律で計算すると

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial x} = f_g \cdot g_x + f_h \cdot h_x = 2g \cdot 2x + 2h \cdot 0 = 4g \cdot x = 4x^2 \cdot x = 4x^3.$$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial y} = f_g \cdot g_y + f_h \cdot h_y = 2g \cdot 0 + 2h \cdot 3y^2 = 6y^5.$$

どちらの計算方法でも一致します。

(2) $f(g(x), h(x)) = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$. $\dfrac{df}{dx} = 1' = 0$.

連鎖律で計算すると

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial x} = 2g \cdot (-\sin x) + 2h \cdot \cos x = -2\cos x \sin x + 2\sin x \cos x = 0.$$

• 指定した点における 3 次多項式近似を求めよ。(5) e^{xy}, $(0,0)$

解説: 積の微分で間違える場合が多い問題です。$(e^{xy})_x = e^{(xy)}(xy)_x = e^{xy}y$. $(e^{xy})_{xy} = (e^{xy}y)_y = (e^{xy})_y y + e^{xy}(y)_y = e^{xy}xy + e^{xy} = e^{xy}(xy+1)$.

偏導関数:

$$f(x,y) = e^{xy},$$
$$f_x(x,y) = ye^{xy}, f_y(x,y) = xe^{xy},$$
$$f_{xx}(x,y) = y^2 e^{xy}, f_{xy}(x,y) = (1+xy)e^{xy}, f_{yy}(x,y) = x^2 e^{xy},$$
$$f_{xxx}(x,y) = y^3 e^{xy}, f_{xxy}(x,y) = (2y + y^2 x)e^{xy}, f_{xyy}(x,y) = (2x + x^2 y)e^{xy}, f_{yyy}(x,y) = x^3 e^{xy},$$

$(x,y) = (0,0)$ における**偏微分係数:**

$$1,$$
$$0, 0,$$
$$0, 1, 0,$$
$$0, 0, 0, 0,$$

$(x,y) = (0,0)$ における 3 次近似式は

$$e^{xy} = 1 + 0x + 0y + \frac{1}{2!}\{0x^2 + 2\cdot 1xy + 0y^2\} + \frac{1}{3!}\{0x^3 + 3\cdot 0x^2y + 3\cdot 0xy^2 + 0y^3\} + \cdots \fallingdotseq 1 + xy.$$