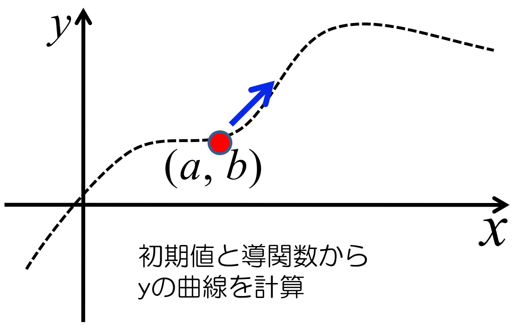
数値計算第12回　連立常微分方程式

- テーマ：　連立常微分方程式の解法
- 方法：　基本はルンゲ・クッタ法

$$y(a) = b$$

$$\frac{d}{dx} y = f(x, y)$$



連立常微分方程式は何に使われるか

- 電気回路の回路方程式，機械分野の運動方程式
  - 1つの方程式であることは少ない
  - やはり解析的にはとけない　⇒　数値計算の出番
- 例：あかつき（金星探査）のための周回軌道への投入計画，軌道修正のための再計算

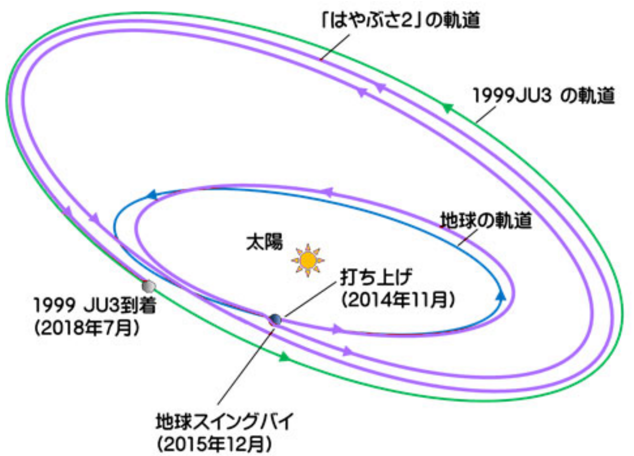
運動方程式

$$F = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

惑星の引力
太陽の引力
…

あかつきプロジェクト
http:%www.youtube.com/watch?v=mtzVa3xVPjo&feature=player_detailpage

はやぶさ2の軌道概要



JAXA発表資料を引用
http:%fanfun.jaxa.jp/countdown/hayabusa2/mission.html

今回の演習

- 演習12-1　MATLABのodeによる解法
- 演習12-2　人工衛星の軌道計算

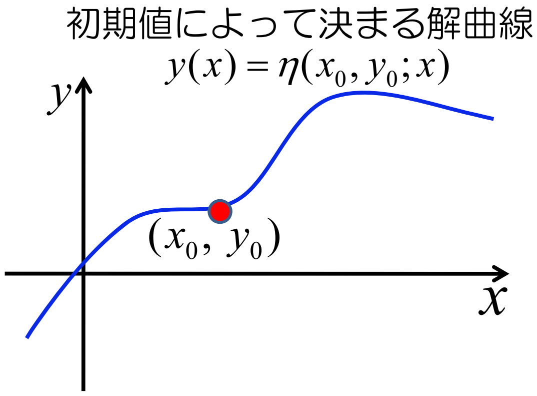
復習 教科書122ページ

初期値問題の解の性質

- 常微分方程式の解曲線
  - 初期値

$$y(x_0) = y_0$$

$$\frac{d}{dx}y = f(x, y)$$



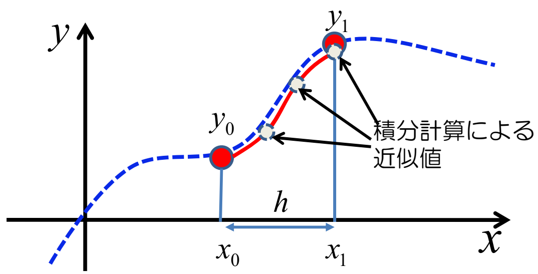
復習 教科書124ページ

ルンゲ・クッタ型公式

- 点(x_0, y_0)を通る解 $y(x) = \eta(x_0, y_0; x)$

$$x_1 = x_0 + h$$

$$y_1 = y(x_0 + h) = y_0 + \int_{x_0}^{x_1} y'(x)dx \qquad (18)$$



$y'(x)$ 1回微分導関数
（既知）

復習 教科書124ページ

数値積分の公式を使用

- $y'(x)$を0次補間（定数）$y'(x_0)$ で置換え積分

$$y_1 = y_0 + hy'(x_0) + O(h^2)$$

→ オイラー法
(ルンゲ・クッタ1次)

- 積分を台形則で置換え

→ ホイン法
(ルンゲ・クッタ2次)

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}\{y'(x_0) + y'(x_1)\} + O(h^3)$$

- 積分をシンプソン則で置換え → 古典的ルンゲ・クッタ法
(ルンゲ・クッタ4次)

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6}\{y'(x_0) + 4y'(x_0 + \frac{h}{2}) + y'(x_1)\} + O(h^5)$$

復習 教科書125ページ

ルンゲ・クッタ4次

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6}\{y'(x_0) + 4y'(x_0 + \frac{h}{2}) + y'(x_1)\} + O(h^5)$$

⇩

通常は変形版を使用
（高精度）

$$k_1 = f(x_0, y_0) = y'(x_0)$$

$$k_2 = f(x_0 + \tfrac{1}{2}h, y_0 + \tfrac{1}{2}hk_1)$$

$$k_3 = f(x_0 + \tfrac{1}{2}h, y_0 + \tfrac{1}{2}hk_2)$$

$$k_4 = f(x_0 + h, y + hk_3) = y'(x_1)$$

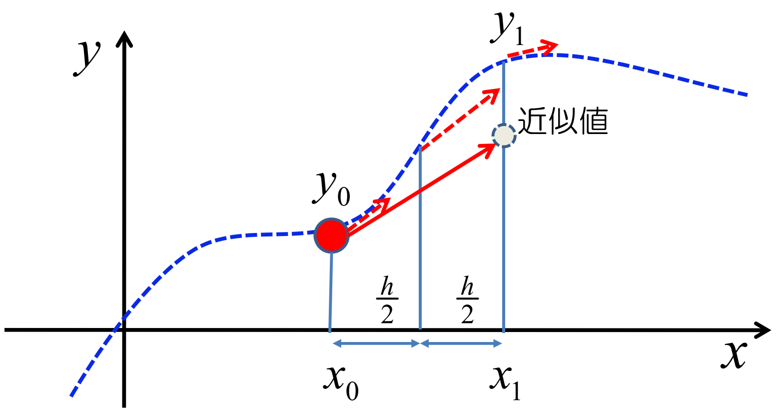
$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6}\{k_1 + 2(k_2 + k_3) + k_4\} + O(h^5)$$

復習

教科書125ページ

ルンゲ・クッタ4次

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6}\{y'(x_0) + 4y'(x_0 + \frac{h}{2}) + y'(x_1)\} + O(h^5)$$



MATLABの組込み関数ode

- 常微分方程式を解く組込み関数
  - ODE: Ordinary Differential Equation
- n次元の連立常微分方程式が扱える

MATLAB/Matlabの組込み関数（一部）

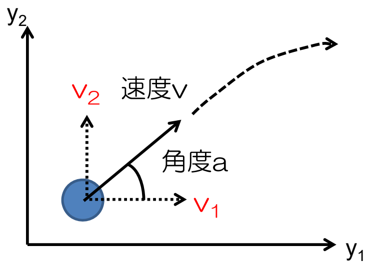
行列演算：　線形方程式，逆行列，固有値
多項式：　演算，補間，方程式
関数解析：　最小化問題，微分方程式，数値積分
データ解析統計：　共分散，相関，FFT

演習12-1　odeによる連立微分方程式の解法

- 放物線軌道の計算
- 速度v, 角度aでボールを投げる
- 連立微分方程式で表現される

$$v_1 = \frac{dy_1}{dt} = v\cos(a)$$

$$v_2 = \frac{dy_2}{dt} = v\sin(a) - gt$$



演習12-1　odeによるプログラム

- 速度式を穴埋めしてプログラムを完成
- 角度degはスライダー(uislider)で変更しシミュレーション
- 速度vはプログラム内で変更してシミュレーション

```
function ydash=ball_throw(t,y)
global para_Degree;
v=60;   % 速度m/s
deg=para_Degree; % 角度（° ）
a=pi*deg/180; %ラジアンに変換
g=9.8; % 重力加速度 m/s²
% ボール投げの微分方程式
% v1 計算式
% v2 計算式
ydash=[v1; v2];
end
```

教科書126ページ

高階連立微分方程式

高階微分：　微分を複数回実行

$$
\begin{aligned}
&y(a) = b_1, \\
&y'(a) = b_2, \\
&\cdots, \\
&y^{(n-1)}(a) = b_n, \\
&y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})
\end{aligned}
\tag{25}
$$

ここで，$y_1 = y,\ y_2 = y',\ \cdots,\ y_n = y^{(n-1)}$ と置くと

1階連立常微分方程式に変形できる！

$$y_1(a) = b_1,\ y_2(a) = b_2,\ \cdots,\ y_n(a) = b_n,$$

$$
\begin{cases}
y_1' = y_2 \\
y_2' = y_3 \\
\cdots \\
y_{n-1}' = y_n \\
y_n' = f(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)
\end{cases}
\tag{26}
$$

常微分方程式の解法が適用可能

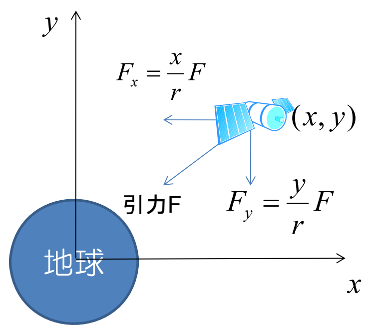
ルンゲ・クッタ型公式が利用できる

人工衛星の簡単な軌道計算

地球軌道周回の必要速度
7.9km/s（第一宇宙速度）

$$F = m\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{GMm}{r^2}$$

G　：万有引力定数
M　：地球の質量
m　：衛星の質量
r=(x,y)　：地球と衛星の距離



$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{GM}{r^2}\frac{x}{r} \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{GM}{r^2}\frac{y}{r}$$

2階連立微分方程式

１階連立微分方程式に変形

ここで，$y_1 = x,\ y_2 = v_x, y_3 = y,\ y_4 = v_y$

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= v_x \\
\frac{dv_x}{dt} &= -\frac{GM}{r^3}x \\
\frac{dy}{dt} &= v_y \\
\frac{dv_y}{dt} &= -\frac{GM}{r^3}y
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dt} &= y_2 \\
\frac{dy_2}{dt} &= -\frac{GM}{r^3}y_1 \\
\frac{dy_3}{dt} &= y_4 \\
\frac{dy_4}{dt} &= -\frac{GM}{r^3}y_3
\end{aligned}
$$

４つの１階連立微分方程式に変形　$(r = \sqrt{y_1^2 + y_3^2})$

演習12-2　Odeによる 人工衛星の軌道計算

```
function ydash=f(t,y)
  % 万有引力定数
  G=6.67E-11;
  % 地球の質量　(kg)
  M=6.0E+24;
  % 衛星の距離(m)
  r=sqrt(y(1)^2+y(3)^2);
  % x方向の速度
  ydash(1)=y(2);
  % x方向の加速度
  ydash(2)=-G*M*y(1)/r^3;
  % y方向の速度
  ydash(3)=y(4);
  % y方向の加速度
  ydash(4)=-G*M*y(3)/r^3;
endfunction
```

```
% 初期位置
y0=[7.0E+6; % x座標 地表から600km
     (地球の半径 6400km)
    0;        % x方向の速度 0m/s
    0;        % y座標
    9.9E+3];  % y方向の速度
% (第１宇宙速度　7.9 km/s)
% (第２宇宙速度　11.2 km/s)
t0=0.0;
% 0秒から2時間の軌道を計算
t=0:300:3600*10;
format longE;
[t,y]=ode45(@satellite,t,y0);
```

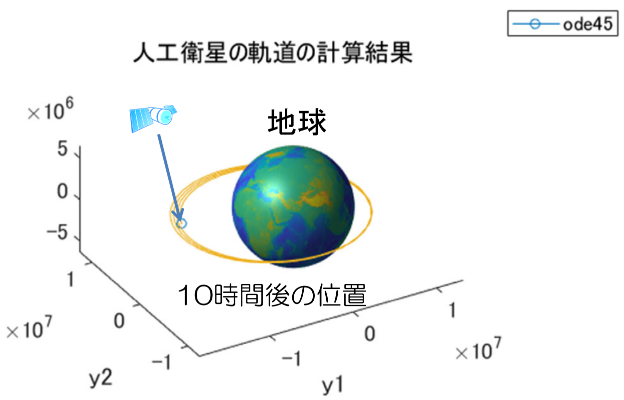

人工衛星の軌道描画

```
% 初期位置
y0=[8.0E+6; % x座標 地表から1600km
   (地球の半径 6400km)
0; % x方向の速度 0m/s
0; % y座標
7.9E+3]; % y方向の速度
% (第１宇宙速度　7.9 km/s)
% (第２宇宙速度 11.2 km/s)
% 0秒からhours時間の軌道を計算
t0=0.0;
hours=10;
t=0:300:3600*hours;
format longE;
% odeで微分方程式を解く
[t,y]=ode45(@satellite,t,y0);
```


計算結果

0秒から10時間の軌道を計算
300秒毎の位置をプロット

初速を変化させると
軌道が変化する



今回の講義のまとめ

- テーマ：　常微分方程式の解法
- 方法
  - MATLABの組込み関数ode
  - 高階の微分方程式の解法
- 人工衛星の運動方程式への応用