微分積分 2, 2020/05/26, 06/02
演習 4 (1), (3). **演習 5** (3), (4).
• (1) x^2+3x+5 の 1 を中心とした 3 次近似を求めよ。
解説: テイラーの定理を使います。

定理 0-1. (テイラー).

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\cdots.$$

$f(x)=x^2+3x+5$ とおいて
導関数: $f'(x)=2x+3,\ f''(x)=2,\ f'''(x)=0.$
微分係数: $f(1)=9,\ f'(1)=5,\ f''(1)=2,\ f'''(1)=0.$
テイラー展開 (多項式近似):

$$x^2+3x+5=9+5(x-1)+\frac{2}{2!}(x-1)^2+\frac{0}{3!}(x-1)^3+\cdots=9+5(x-1)+(x-1)^2.$$

注: 2 次多項式の 3 次近似なので誤差項はありません。最後の形は $x=1$ のところで $x-1,\ (x-1)^2$ が小さいことから左から順に関数の重要な項を取り出しています。この形を崩すと近似としての情報を損ないます。
• (3) $\sin x$ の π を中心とした 3 次近似を求めよ。
解説:
導関数: $f(x)=\sin x,\ f'(x)=\cos x,\ f''(x)=-\sin x,\ f'''(x)=-\cos x.$
微分係数: $f(\pi)=\sin\pi=0,\ f'(\pi)=\cos\pi=-1,\ f''(\pi)=-\sin\pi=0,\ f'''(\pi)=-\cos\pi=1.$
テイラー展開:

$$\sin x=0-1(x-\pi)+\frac{0}{2!}(x-\pi)^2+\frac{1}{3!}(x-\pi)^3+\cdots=-(x-\pi)+\frac{1}{6}(x-\pi)^3+\cdots\fallingdotseq-(x-\pi)+\frac{1}{6}(x-\pi)^3.$$

• (3) $\displaystyle\int_{-1}^{1}x^3\,dx.$
解説: $\displaystyle\int_{-1}^{1}x^3\,dx=\int_{-1}^{1}\left(\frac{x^4}{4}\right)'dx=\left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1}=\frac{1^4}{4}-\frac{(-1)^4}{4}=0.$
• (4) $\displaystyle\int_{-1}^{1}x^4\,dx.$
解説: $\displaystyle\int_{-1}^{1}x^4\,dx=\int_{-1}^{1}\left(\frac{x^5}{5}\right)'dx=\left[\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1}=\frac{1^5}{5}-\frac{(-1)^5}{5}=\frac{2}{5}.$
一般に区間 $[-a,a]$ 上の偶関数、奇関数の積分は対称性から少し簡単になります。
偶関数の場合: $f(-x)=f(x)$ が成り立つならば

$$\int_{-a}^{a}f(x)\,dx=\int_{-a}^{0}f(x)\,dx+\int_{0}^{a}f(x)\,dx=\int_{-(-a)}^{-0}f(-x)\,d(-x)+\int_{0}^{a}f(x)\,dx=2\int_{0}^{a}f(x)\,dx.$$

奇関数の場合: $f(-x)=-f(x)$ が成り立つならば

$$\int_{-a}^{a}f(x)\,dx=\int_{-a}^{0}f(x)\,dx+\int_{0}^{a}f(x)\,dx=\int_{-(-a)}^{-0}f(-x)\,d(-x)+\int_{0}^{a}f(x)\,dx=-\int_{0}^{a}f(x)\,dx+\int_{0}^{a}f(x)\,dx=0.$$