10. 多項式近似

高次偏導関数、高階偏微分: 2 変数関数 $f(x,y)$ の偏導関数 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$、偏微分係数 $f_x(a,b)$, $f_y(a,b)$ はそれぞれふたつある。ふたつの偏導関数にそれぞれ偏導関数があり第 2 次偏導関数は 4 つある:

$$f_{xx} = (f_x)_x, f_{xy} = (f_x)_y, f_{yx} = (f_y)_x, f_{yy} = (f_y)_y.$$

さらに第 3 次偏導関数は 8 個ある:

$$f_{xxx}, f_{xxy}, f_{xyx}, f_{xyy}, f_{yxx}, f_{yxy}, f_{yyx}, f_{yyy}.$$

一般に第 n 次偏導関数は 2^n 個ある。第 n 次導関数の値を第 n 階偏微分係数という。

C^n **級関数:** $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$ が成り立つことを関数 $f(x,y)$ が点 (a,b) で**連続**という。

偏微分可能とは極限として $f_x(a,b)$, $f_y(a,b)$ が存在することである。

連続性と偏微分可能性は関数の構成で継承することがわかるので比較的簡単に判定できる。

例: $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$ は $x-y=0$, つまり直線 $x=y$ の外で連続かつ偏微分可能である。

関数 f が偏微分可能で、f, f_x, f_y が連続であることを C^1 **級**という。

例: $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$. $f_x(x,y) = \dfrac{-2y}{(x-y)^2}$, $f_y(x,y) = \dfrac{2x}{(x-y)^2}$ は $x=y$ の外で連続、よって $f(x,y)$ は $x=y$ の外で C^1 級である。

定理 10-1. ((全) 微分可能). C^1 級 $\Rightarrow$ 微分可能 $\Leftrightarrow$ 1 次近似可能 $\Rightarrow$ 連続かつ偏微分可能。

n 次まで偏微分可能ですべてが連続であることを C^n **級**という。

定理 10-2. f が C^2 級ならば、$f_{xy} = f_{yx}$.

この定理により偏微分の順序を入れ替えて高次偏導関数の数を抑えることができる。例えば、3 次偏導関数は、$f_{xxy} = (f_x)_{xy} = (f_x)_{yx} = f_{xyx} = (f_{xy})_x = (f_{yx})_x = f_{yxx}$, 同様に、$f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx}$. よって C^3 級であれば異なり得る第 3 次偏導関数は f_{xxx}, f_{xxy}, f_{xyy}, f_{yyy} の 4 つである。

C^n 級の仮定から高次偏導関数はそれぞれの変数 x, y についての偏微分する回数 l, m で表せる:

$$f_{x\cdots xy\cdots y} = f_{x^l y^m} = \frac{\partial^{l+m} f}{\partial^l x \partial^m y}.$$

異なりうる第 n 次偏導関数は f_{x^n}, $f_{x^{n-1}y}, \ldots, f_{xy^{n-1}}$, f_{y^n}. y についての偏微分回数は、$0, 1, \ldots, n-1$, n の $n+1$ 通り。つまり、第 n 次偏導関数は $n+1$ まである。

定理 10-3. (テーラーの定理).

$$\begin{aligned} f(x,y) =& f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) \\ &+ \frac{1}{2!}\left[f_{xx}(a,b)(x-a)^2 + 2f_{xy}(x-a)(y-b) + f_{yy}(y-b)^2\right] \\ &+ \frac{1}{3!}\left[f_{x^3}(a,b)(x-a)^3 + 3f_{x^2y}(x-a)^2(y-b) + 3f_{xy^2}(x-a)(y-b)^2 + f_{y^3}(y-b)^3\right] + \cdots \end{aligned}$$

第 1 行は 1 次近似、第 2 行までが 2 次近似、等である。係数 2, 3, 3, ... は 2 項係数である。$f_{xy} = f_{yx}$ で重複して 2 倍になっている。$f_{xxy} = f_{xyx} = f_{yxx}$ から 3 倍である。4 次近似を表すと 2 項係数 1, 4, 6, 4, 1 が現れる。

テイラーの定理は 1 変数関数の場合から導いている。誤差にあたる剰余項も表せるが省略する。

例: $f(x,y) = e^{x+2y}$ の $(0,0)$ における 2 次近似。

テイラーの展開を 3 段階で組み立てる:

導関数: $f = e^{x+2y}$, $f_x = e^{x+2y}$, $f_y = 2e^{x+2y}$, $f_{xx} = e^{x+2y}$, $f_{xy} = f_{yx} = 2e^{x+2y}$, $f_{yy} = 4e^{x+2y}$.

微分係数: $f(0,0) = e^{0+2\cdot 0} = 1$, $f_x(0,0) = 1$, $f_y(0,0) = 2$, $f_{xx}(0,0) = 1$, $f_{xy}(0,0) = 2$, $f_{yy}(0,0) = 4$.

多項式近似: $e^{x+2y} \fallingdotseq 1 + x + 2y + \frac{1}{2}(x^2 + 2xy + 4y^2)$.

o **演習 10:** 3 次までの偏導関数を求めよ。(1) $x^3 + 2xy + y^2$. (2) $\sin(x+2y)$. (3) $\sqrt{2x+3y}$.

指定した点における 3 次多項式近似を求めよ。(4) $\sin(x+2y)$, $(0,0)$. (5) e^{xy}, $(0,0)$.