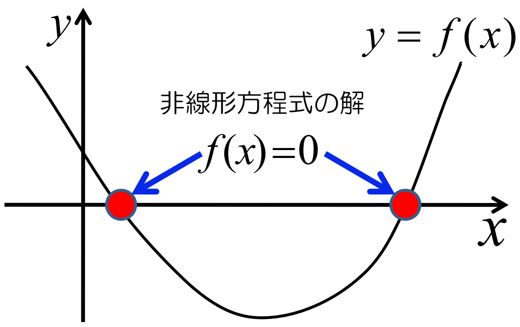
数値計算第10回　非線形方程式の解法

- テーマ：　非線形方程式の解を求める
- 現実の方程式は，解析的には解けないことが多い
- 数値計算で，解を数値的に求める

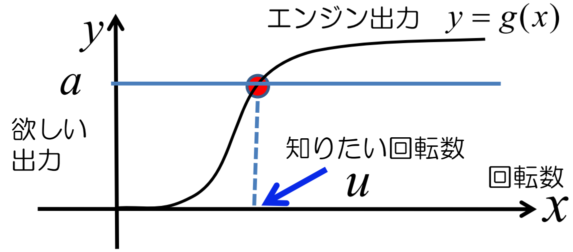


非線形方程式は何に使われるか

- システム設計などで，解析的には解けない設計パラメータを求めるときに使う
- 例：必要なエンジン出力を得るための回転数

方程式 $f(x)=g(x)-a=0$

$f(x)=0$



今回の演習

演習11-1　２分法

演習11-2　ニュートン法(1)平方根計算

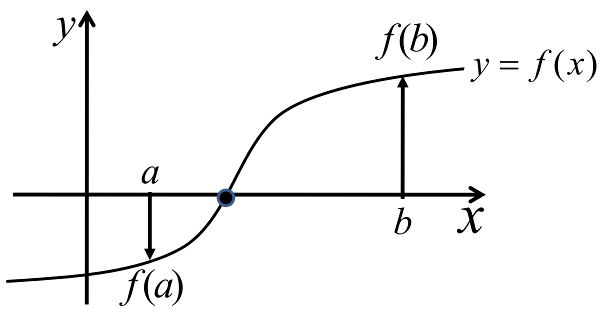
演習11-3　ニュートン法(2)

演習11-4　割線法

教科書97 ページ

9.2　２分法 (bisection)

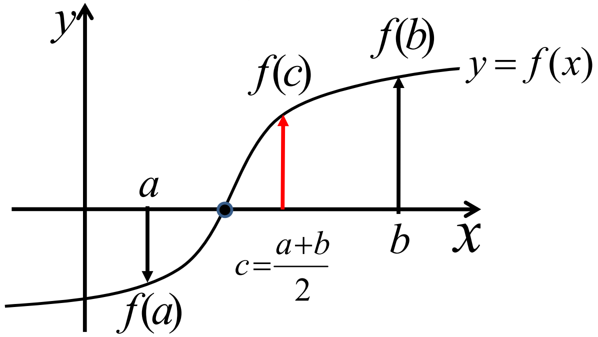
- 原理とアルゴリズム
- 非線形方程式 $f(x)=0$
- 閉区間 $[a,b]$ で $f(a)\leq 0\leq f(b)$ または $f(b)\leq 0\leq f(a)$



教科書97 ページ

2分法のアルゴリズム(1)

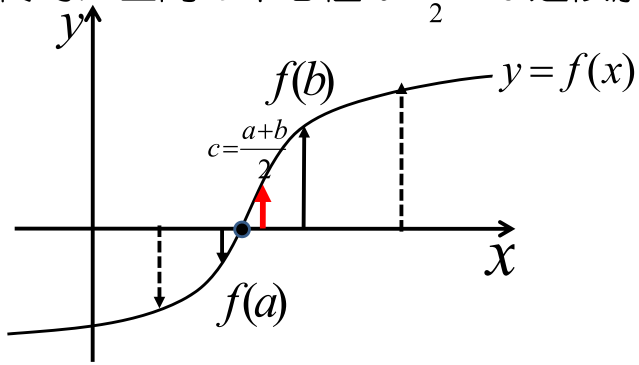
- 点 $c=\frac{a+b}{2}$ で関数値 $f(c)$ を計算
- $f(a)\leq 0\leq f(c)$ なら, bをcで置き換え
- $f(c)\leq 0\leq f(b)$ なら, aをcで置き換え



教科書97 ページ

2分法のアルゴリズム(2)

- 区間幅 $b-a$ が十分小さくなるまで反復
- 最終的に区間の中心値 $c=\frac{a+b}{2}$ が近似解

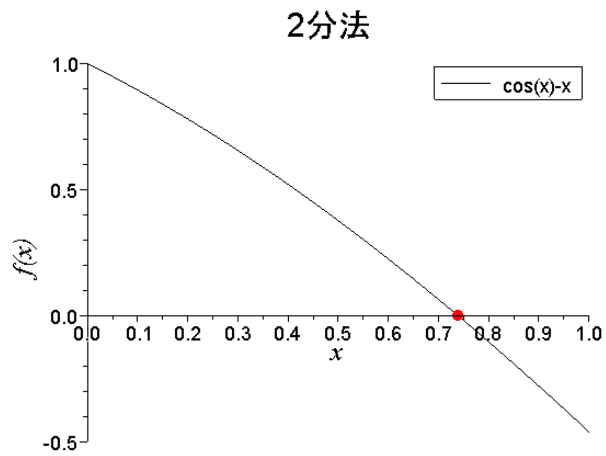


演習11-1　２分法

- 非線形方程式f(x)=0の[0 1]区間の解を2分法(bisect)を使用して求める
- moodleからダウンロードした2分法のプログラムは穴あきなので完成させる

$$f(x) = \cos(x) - x = 0$$

演習11-1　グラフ出力例



教科書98ページ

２分法の収束性

- 閉区間列: $[a,b]=[a_0,b_0],[a_1,b_1],\cdots[a_k,b_k],\cdots$
- 数列: b_0-a_0

$$b_1-a_1=(b_0-a_0)/2$$

$$\cdots$$

$$b_k-a_k=2^{-k}(b_0-a_0)$$

- 収束率: $\frac{1}{2} = 2^{-1}$

1回の反復で，1ビットずつ精度向上
収束は早くない，ただし確実

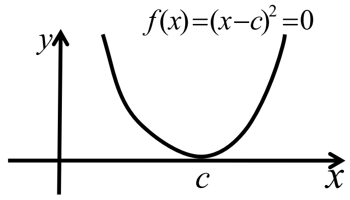
教科書98ページ

２分法の長所と短所

- 長所:
  - 確実に収束する方法
  - 収束条件は $[a,b]$ に対し $f(a)\cdot f(b)<0$
- 短所:
  - 1次収束であり収束が遅い
  - 重解の場合は収束しない

$$f(c)=(x-c)^2=0$$

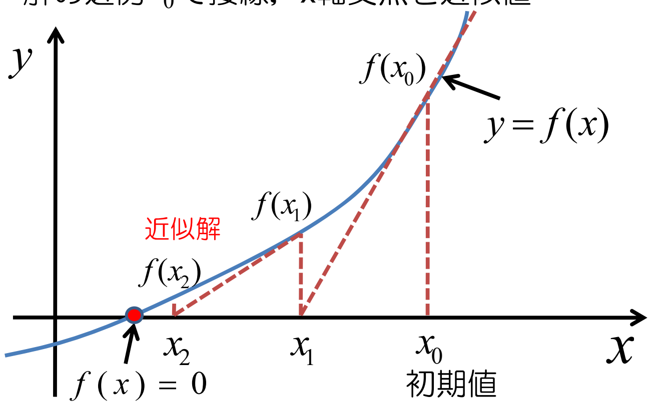
$$f'(c)=2(x-c)=0$$



教科書99 ページ

9.3　ニュートン法 (newton)

- ニュートン法のアルゴリズム
  - 非線形方程式　$f(x)=0$
  - 解の近傍x_0で接線，x軸交点を近似値

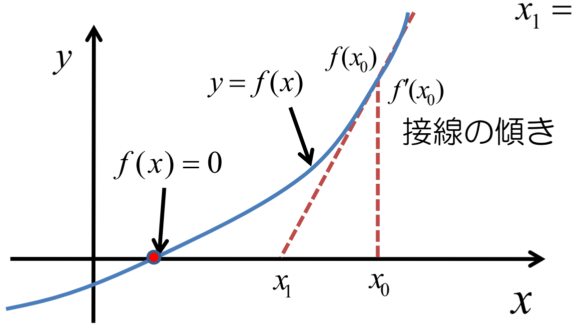


接線の方程式

接線の方程式　$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

0点 $x=x_1,\ y=0$　$0-f(x_0)=f'(x_0)(x_1-x_0)$

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$



教科書100 ページ

ニュートン法のアルゴリズム

- 非線形方程式　$f(x)=0$
- 下式で近似値を計算

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$$x_{k+1}=x_k+\Delta x_k,\quad \Delta x_k=-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\quad (k=0,1,\cdots)\ (12)$$

- 収束条件

$|\Delta x_k|\le\varepsilon$ が十分に小さいとき

微係数が必要

教科書99 ページ

ニュートン法の原理

- 非線形方程式　$f(x)=0$　(9)
- 解 α の近傍で2回連続微分可能
  （２階導関数が存在して連続）
- $f(x)$ を解 α の近傍点 x_0 でテイラー展開
  - $\Delta x=\alpha-x_0$

$$f(x_0)+f'(x_0)\Delta x+O(\Delta x^2)=f(x_0+\Delta x)=0 \quad (10)$$

  - ここで Δx が小さいなら $O(\Delta x^2)$を無視

$$f(x_0)+f'(x_0)\Delta x=0 \quad (11)$$

$$f(x_0)+f'(x_0)(\alpha-x_0)=0\quad \therefore \alpha=x_0-f(x_0)/f'(x_0)$$

演習11-2　ニュートン法(1)

- 非線形方程式　$f(x)=x^2-a=0$
- 方程式の解　$x=\sqrt{a}$
- ニュートン法の漸化式を整理してみる

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

- 整理した漸化式で $a=2$として$\sqrt{2}$を計算

ニュートン法で$\sqrt{2}$の計算

- 初期値　$x_0=1$　として漸化式で計算

$x_1=$

$x_2=$

$x_3=$

$x_4=$

四則演算だけで平方根が計算できる
同様にN乗根もできる

ニュートン法の長所と短所

- 長所:
  - 収束速度が速い．2次収束する（証明は教科書100ページ）
- 短所:
  - 関数が２回連続微分可能であること
  - 初期値が不適切だと収束しない

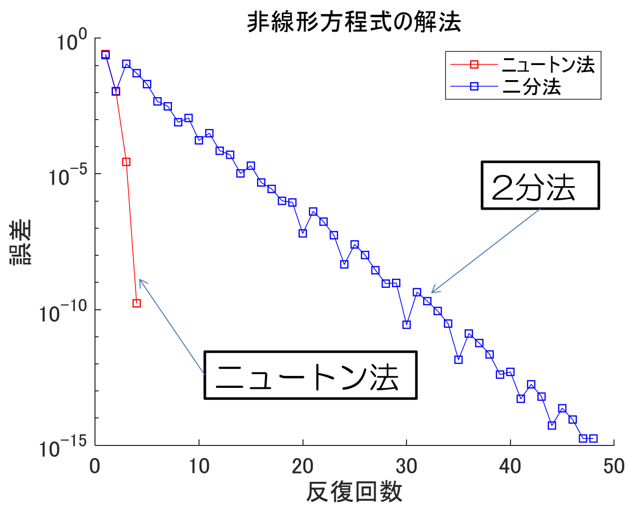
演習11-3　ニュートン法(2)

- 非線形方程式f(x)=0の[0 1]区間の解をニュートン法(newton)を完成させて求める
- 初期値a=0.0とするが，うまく収束したら別の初期値 a=4.0でも試す

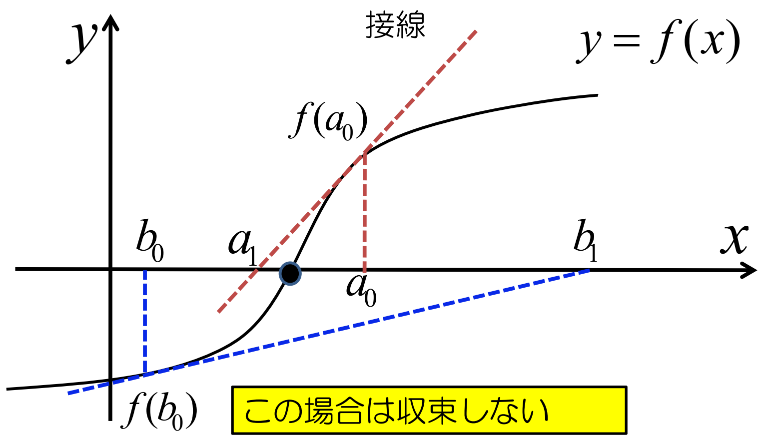
$$f(x) = \cos(x) - x = 0$$

$$\frac{\mathrm{df}}{\mathrm{dx}} = -\sin(x) - 1$$

ニュートン法と2分法の収束



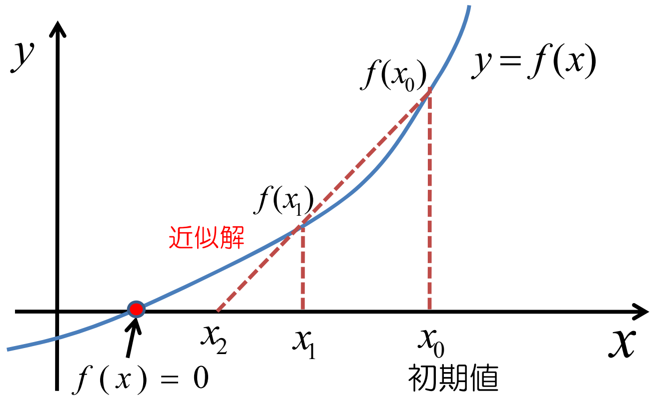
ニュートン法の制約



教科書104ページ

9.4　割線法 (secant)

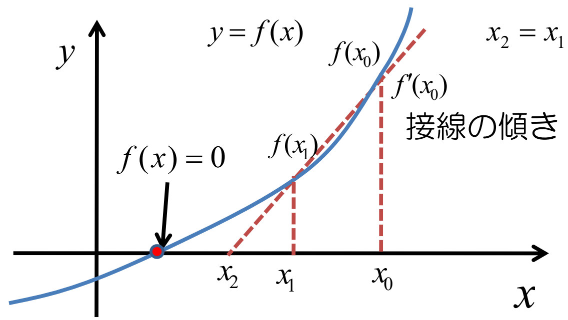
- ニュートン法のアルゴリズムの改良版
  - 微係数不使用　2点の傾きから近似計算



接線の近似方程式

接線の方程式　$y - f(x_1) = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_1)$

0点 $x = x_2,\ y = 0$　$0 - f(x_1) = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x_2 - x_1)$



$$x_2 = x_1 - \frac{(x_1 - x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} f(x_1)$$

教科書104 ページ

割線法のアルゴリズム

- 非線形方程式　$f(x)=0$
- 下式で近似値を計算

$$x_{k+1} = x_k - \frac{(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k) = x_k - \frac{\Delta x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k)$$

$$x_{k+1} = x_k + \Delta x_k,\quad \Delta x_k = -\boxed{\frac{(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}} f(x_k) \quad (k = 1, 2, \cdots) \quad (16)$$

微係数が不要

$1/f'(x_k)$ の近似

- 収束条件

  $|\Delta x_k| \le \varepsilon$ が十分に小さいとき

演習11-4　割線法(2)

- 非線形方程式f(x)=0の[0 1]区間の解を割線法(secant)を完成させて求める
- 初期値a=0.0とするが，うまく収束したら別の初期値 a=4.0でも試す

$$f(x) = \cos(x) - x = 0$$

$$\frac{\mathrm{df}}{\mathrm{dx}} = -\sin(x) - 1$$

MATLABの組込み関数fsolve

- 非線形方程式を解く組込み関数
- n次元の非線形方程式が扱える
  - 連立非線形方程式
- 使用例は,doc fsolveを参照

MATLABの組込み関数（一部）

行列演算：　線形方程式，逆行列，固有値
多項式：　　演算，補間，方程式
関数解析：　最小化問題，微分方程式，数値積分
データ解析統計：　共分散，相関，FFT

今回の講義のまとめ

- テーマ：　非線形方程式の解を求める
- 現実の方程式は，解析的には解けないことがほとんど
- 方法
  - 2分法：　収束遅いが，信頼性が高い
  - ニュートン法：　収束は早いが，適切な初期値が必要，導関数が必要
  - 割線法：　ニュートン法の導関数を差分近似

次回の講義　常微分方程式

- テーマ：　常微分方程式を計算する
- 方法：　オイラー法，ルンゲ・クッタ法

$$y(a) = b$$

$$\frac{d}{dx} y = f(x, y)$$