微分積分 2, 2020/05/05, 05/12, 05/19

演習 3 (3) を訂正します。

$y=\sqrt{x}$, $(4,2)$ における接線と法線を求めよ。

解説: 関数 $f(x)=\sqrt{x}$ の $x=a=4$ における 1 次近似から接線と法線を取り出します。

1 次近似を構成するにあたって最も難しい所は微分係数 $f'(a)$ です。しかし、導関数を求めて、数値化する、の 2 段階に分けると割と簡単な計算です。

(1) (**導関数**). $f'(x)=(\sqrt{x})'=(x^{\frac{1}{2}})'=\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

(2) (**微分係数**). $f'(4)=\dfrac{1}{2\sqrt{4}}=\dfrac{1}{4}$.

(3) (4 を中心とした 1 次近似). $\begin{cases} f(x)=f(4)+f'(4)(x-4)+\varepsilon(x)(x-4) \\ \lim\limits_{x\to 4}\varepsilon(x)=0. \end{cases}$

(4) (4 を中心とした $\sqrt{x}$ の 1 次近似). $\begin{cases} \sqrt{x}=2+\dfrac{1}{4}(x-4)+\varepsilon(x)(x-4) \\ \lim\limits_{x\to 4}\varepsilon(x)=0. \end{cases}$

こうした計算の流れは極限計算を回避してかなり楽をしています。微分係数の定義通りに $f'(4)$ を求めると

$$\begin{aligned} f'(4)&=\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{4}}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}=\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} \\ &=\lim_{x\to 4}\begin{cases} \text{なし、} & x=4 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}+2}, & x\neq 4 \end{cases} \\ &=\lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x}+2}=\frac{1}{\sqrt{4}+2}=\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

関数の性質や妙な技を使ったりして結構面倒です。

微分計算の秘密 (?) は (1) の計算が数式処理で済むことです。

同じように、多項式近似、多変数関数の 1 次近似も導関数の計算で効率よく計算できます。ただし、公式として (3) のように書いてあるのでいきなり組み立てようとして失敗しがちです。(1), (2), (4) と順に計算して必要な数値を揃えて組み立てます。

(4) は誤差を省いて簡単に

$$\sqrt{x}\fallingdotseq 2+\frac{1}{4}(x-4)$$

とも書きます。この右辺の 1 次式はこの形で有用な情報を表示しています。順序も含めてこの形をできるだけ維持します。右辺は、$x=4$ で値 2 を取る、x が 4 に近いところで第 2 項は無視できる、と読み取れます。これを $\dfrac{1}{4}x+1$ などと書き直すと台無しです。

直線 $y=2+\dfrac{1}{4}(x-4)$ は $(4,2)$ を通る $y=\sqrt{x}$ のグラフに最も近い直線で**接線**と言います。

同じ点 $(4,2)$ を通り接線に直交する傾き -4 を持つ直線は $y=2-4(x-4)$ を**法線**と言います。

図形の性質をベクトルで表すことで高次元の場合も同様に書けます。接線、法線は内積の形に表すと

$$f'(a)(x-a)+(-1)(y-f(a))=0.\quad \begin{bmatrix} f'(a) & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x-a \\ y-f(a) \end{bmatrix}=0.\quad \begin{bmatrix} f'(a) & -1 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} a \\ f(a) \end{bmatrix}\right)=0.$$

$$x-a+f'(a)(y-f(a))=0.\quad \begin{bmatrix} 1 & f'(a) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x-a \\ y-f(a) \end{bmatrix}=0.\quad \begin{bmatrix} 1 & f'(a) \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} a \\ f(a) \end{bmatrix}\right)=0.$$

どちらも、法線ベクトル $\begin{bmatrix} f'(a) & -1 \end{bmatrix}$, 接ベクトル $\begin{bmatrix} 1 & f'(a) \end{bmatrix}$, に直交する、という条件で直線を表しています。

2 変数以上の関数の場合にも、接平面、法線、を同様に構成できます。