4. 多項式近似

高次導関数: 導関数から導関数を求めることを繰り返して**高次導関数**という。その値を**高階微分**係数という。繰り返しなので帰納的に定義する:

$$f^{(n)} = \begin{cases} f, & n = 0, \\ (f^{(n-1)})', & n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

$f^{(m+n)} = (f^{(m)})^{(n)} = (f^{(n)})^{(m)}$ が成り立つ。特に $f^{(n)} = f^{(1+n-1)} = (f^{(1)})^{(n-1)} = (f')^{(n-1)}$.

例: 3 次導関数には 3 通りの表示がある。$f''' = (f'')' = (f')'' = ((f')')'$.

基本関数の高次導関数の表示は公式として表せる:

(1) $$(e^x)^{(n)} = e^x,$$

(2) $$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), \quad (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right),$$

(3) $$((1+x)^a)^{(n)} = a(a-1)\cdots(a-n+1)(1+x)^{a-n}.$$

(1): $(e^x)^{(n)} = ((e^x)')^{(n-1)} = (e^x)^{(n-1)} = \cdots = (e^x)^{(0)} = e^x$.

(2): $(\sin x)^{(n)} = (\cos x)^{(n-1)} = \left(\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)^{(n-1)} = \cdots = \left(\sin\left(x + \frac{\pi}{2} + \cdots + \frac{\pi}{2}\right)\right)^{(0)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$. 公式 $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ を使った。

多項式近似、テイラー、マクローリン展開: 1 次近似は微分係数で表示できた。**テイラー**の定理はさらに 2 次以上の項を高階の微分係数で表す:

$$\begin{cases} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \dfrac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}(x), \quad (5) \\ R_{n+1}(x) &= \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad (6). \end{cases}$$

が成り立つ c が a と x の間に存在する。

(6) の R を**剰余項**という。一般に $n+1$ 回微分可能な関数についてテイラーの展開は表すことができるが剰余項が小さいかは確認する必要がある。小さいことがわかれば (5) を $f(x)$ の x が a に近いところでの n 次近似として使うことができる。

$a = 0$ を中心とする場合、**マクローリン**展開という。

例: $f(x) = \sin x$, $a = 0$, $f' = \cos x$, $'' = -\sin x$, $f''' = -\cos x, \dots, f''''' = -\sin x$. $f(0) = \sin 0 = 0$, $f'(0) = \cos 0 = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -1$, 0, 1.

$$\begin{cases} \sin x &= 0 + 1(x-0) + \dfrac{0}{2!}(x-0)^2 + \dfrac{-1}{3!}(x-0)^3 + \dfrac{0}{4!}(x-0)^4 + \dfrac{1}{5!}(x-0)^5 + R_6(x), \\ &= x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + R_6(x), \\ R_6(x) &= \dfrac{-\sin c}{6!}(x-0)^6 = \dfrac{-\sin c}{6!}x^6. \end{cases}$$

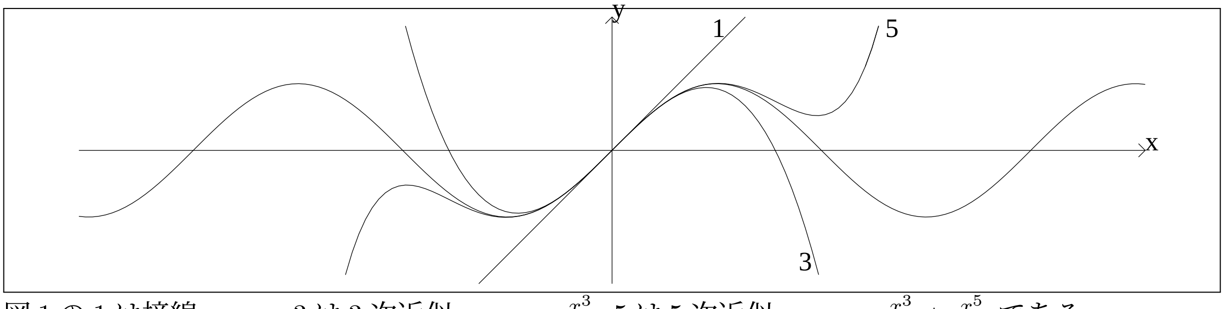

図 1 の 1 は接線 $y = x$, 3 は 3 次近似 $y = x - \frac{x^3}{6}$, 5 は 5 次近似 $y = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ である。

演習 4: 指定した点における 3 次近似を求めよ。(1) $f(x) = x^2 + 3x + 5$, $a = 1$. (2) $f(x) = \sqrt{1+2x}$, $a = 0$. (3) $f(x) = \sin x$, $a = \pi$.