Τηλεπικοινωνιακά Συστήματα I

Άσκηση 2

Ημερομηνία Παράδοσης: 22 Νοεμβρίου 2018 (ώρα 11:00, Αίθουσα 2041)

Η εργασία μπορεί να παραδοθεί από ομάδες $\leq$ δύο ατόμων

Διδάσκων: Αθανάσιος Π. Λιάβας

Μονάδες 130

Α. Στο πρώτο μέρος της άσκησης, το οποίο είναι, κυρίως, πειραματικό, θα μελετήσουμε το φασματικό περιεχόμενο PAM κυματομορφών βασικής ζώνης.

Α.1 Να δημιουργήσετε παλμό SRRC $\phi(t)$ με ενδεικτικές τιμές $T = 10^{-2}\,\text{sec}$, $\text{over} = 10$, $T_s = \frac{T}{\text{over}}$, $A = 4$, και $a = 0.5$.

(10) Μέσω των συναρτήσεων fftshift και fft, να υπολογίσετε το μέτρο του μετασχηματισμού Fourier της $\phi(t)$, $|\Phi(F)|$, σε N_f ισαπέχοντα σημεία στο διάστημα $\left[-\frac{F_s}{2}, \frac{F_s}{2}\right)$.[1] Να σχεδιάσετε τη φασματική πυκνότητα ενέργειας $|\Phi(F)|^2$ στον κατάλληλο άξονα συχνοτήτων με χρήση της εντολής semilogy.

Α.2 Να δημιουργήσετε ακολουθία N (ενδεικτικά, $N = 50, 100$) ανεξάρτητων και ισοπίθανων bits $\{b_0, \ldots, b_{N-1}\}$.

Χρησιμοποιώντας την απεικόνιση

$$0 \longrightarrow +1,$$

$$1 \longrightarrow -1,$$

να απεικονίσετε τα bits σε σύμβολα X_n, για $n = 0, \ldots, N-1$.

Να κατασκευάσετε την κυματομορφή

$$X(t) = \sum_{n=0}^{N-1} X_n \phi(t - nT).$$

[1] Να επιλέξετε το N_f αρκετά μεγάλο και να το διατηρήσετε σταθερό για όλη την άσκηση. Πιο συγκεκριμένα, το N_f θα πρέπει να είναι μεγαλύτερο από το μήκος της κυματομορφής $X(t)$, μετρημένο σε δείγματα. Για παράδειγμα, η τιμή $N_f = 2048$ είναι αρκετή για σχετικά μικρά N και over. Διαφορετικά, θα υπάρξει παραμόρφωση στις φασματικές πυκνότητες ισχύος!

Υποθέτοντας ότι το πλήθος των συμβόλων είναι άπειρο, αποδείξαμε ότι η φασματική πυκνότητα ισχύος της $X(t)$ είναι

$$S_X(F) = \frac{\sigma_X^2}{T} \left|\Phi(F)\right|^2.$$

A.3 (10) Με χρήση της εντολής fft, να υπολογίσετε το περιοδόγραμμα μίας υλοποίησης της $X(t)$

$$P_X(F) = \frac{\left|\mathcal{F}[X(t)]\right|^2}{T_{\text{total}}},$$

όπου T_{total} είναι ο συνολικός χρόνος διάρκειας της $X(t)$ σε sec. Να σχεδιάσετε το $P_X(F)$ με χρήση plot και semilogy.

Να επαναλάβετε για διάφορες υλοποιήσεις της ακολουθίας bits $\{b_0, \ldots, b_{N-1}\}$, ώστε να αποκτήσετε μία καλή εικόνα σχετικά με το πώς μοιάζει το περιοδόγραμμα υλοποιήσεων της $X(t)$.

(10) Να εκτιμήσετε τη φασματική πυκνότητα ισχύος υπολογίζοντας αριθμητικές μέσες τιμές πάνω σε K (ενδεικτικά, $K = 100, 1000$) υλοποιήσεις περιοδογραμμάτων. Να σχεδιάσετε σε κοινό semilogy την εκτίμηση και τη <u>θεωρητική</u>[2] φασματική πυκνότητα ισχύος.

(10) Όσο αυξάνετε το K και το N, θα πρέπει η προσέγγιση να γίνεται καλύτερη. Συμβαίνει αυτό στα πειράματά σας; Αν ναι, μπορείτε να εξηγήσετε το φαινόμενο;

A.4 Χρησιμοποιώντας την απεικόνιση

$$00 \longrightarrow +3$$

$$01 \longrightarrow +1$$

$$11 \longrightarrow -1$$

$$10 \longrightarrow -3$$

να κατασκευάσετε την ακολουθία 4-PAM X_n, για $n = 0, \ldots, \frac{N}{2} - 1$. Παρατηρήστε ότι, *αν τα bits είναι ισοπίθανα, τότε και τα σύμβολα X_n είναι ισοπίθανα!*

[2] Δηλαδή, αυτή που προκύπτει από τον τύπο του βήματος A.2 αν θεωρήσετε ότι η φασματική πυκνότητα ενέργειας του $\phi(t)$ είναι η $|\Phi(F)|^2$ του βήματος A.1.

Να κατασκευάσετε την κυματομορφή

$$X(t) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} X_n \, \phi(t - nT)$$

χρησιμοποιώντας την ίδια περίοδο T με το ερώτημα Α.2.

(10) Να υπολογίσετε το περιοδόγραμμα και να εκτιμήσετε τη φασματική πυκνότητα ισχύος μέσω αριθμητικών μέσων τιμών υλοποιήσεων περιοδογραμμάτων της $X(t)$. Να σχεδιάσετε την πειραματική και την θεωρητική φασματική πυκνότητα ισχύος στο ίδιο semilogy. Τι παρατηρείτε·

(10) Πώς συγκρίνεται, ως προς το εύρος φάσματος και ως προς το μέγιστο πλάτος τιμών, η φασματική πυκνότητα ισχύος της $X(t)$ σε σχέση με αυτή της $X(t)$ του βήματος Α.2; Μπορείτε να εξηγήσετε τα αποτελέσματα της σύγκρισης;

Α.5 (10) Να επαναλάβετε το βήμα Α.3, θέτοντας περίοδο συμβόλου $T' = 2T$ (να διατηρήσετε την περίοδο δειγματοληψίας T_s ίση με αυτή των προηγούμενων βημάτων, άρα, θα πρέπει να διπλασιάσετε την παράμετρο over).

(5) Τι παρατηρείτε σχετικά με το εύρος φάσματος των κυματομορφών σε αυτή την περίπτωση σε σχέση με αυτό των κυματομορφών του βήματος Α.3; Μπορείτε να εξηγήσετε το φαινόμενο;

Α.6 (2.5) Αν θέλατε να στείλετε δεδομένα όσο το δυνατό ταχύτερα έχοντας διαθέσιμο το ίδιο εύρος φάσματος, θα επιλέγατε 2-PAM ή 4-PAM, και γιατί;

(2.5) Αν το διαθέσιμο εύρος φάσματος είναι πολύ ακριβό, θα επιλέγατε περίοδο συμβόλου T ή $T' = 2T$, και γιατί;

Β. Αρχικά, θα λύσουμε ένα θεωρητικό πρόβλημα και κατόπιν θα το επαληθεύσουμε πειραματικά. Έστω η κυματομορφή

$$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \phi(t - nT)$$

όπου X_n είναι ανεξάρτητα τυχαία σύμβολα, με $\mathcal{E}[X_n] = 0$ και $\mathcal{E}[X_n^2] = \sigma_X^2$, και $T > 0$ η περίοδος συμβόλου. Η $X(t)$ διαμορφώνει ένα ημιτονοειδές σήμα. Το διαμορφωμένο σήμα είναι το

$$Y(t) = X(t)\cos(2\pi f_0 t + \Theta)$$

όπου Θ είναι τυχαία μεταβλητή, ομοιόμορφα κατανεμημένη στο $[0, 2\pi)$, ανεξάρτητη των X_n, για κάθε n.

B.1 (10) Να υπολογίσετε αναλυτικά τις ποσότητες $\mathcal{E}[Y(t)]$ και $\mathcal{E}[Y(t+\tau)Y(t)]$.

B.2 (10) Να χαρακτηρίσετε την $Y(t)$ ως προς τη (κυκλο)-στασιμότητα, υπό την ευρεία έννοια.

B.3 (10) Να υπολογίσετε τη φασματική πυκνότητα ισχύος της $Y(t)$, $S_Y(F)$, συναρτήσει της $S_X(F)$ και της συχνότητας διαμόρφωσης, f_0.

B.4 (20) Να επαληθεύσετε πειραματικά το παραπάνω αποτέλεσμα. Πιο συγκεκριμένα, να επιλέξετε συχνότητα διαμόρφωσης $\frac{1}{2T} < f_0 < \frac{F_s}{2} - \frac{1}{2T}$ και να διαμορφώσετε κυματομορφές που προκύπτουν από διαμόρφωση 2-PAM.

(α) Να εκτιμήσετε τη φασματική πυκνότητα ισχύος του διαμορφωμένου 2-PAM σήματος, μέσω περιοδογραμμάτων.

(β) Να σχεδιάσετε σε κοινό semilogy τη θεωρητική και την πειραματική φασματική πυκνότητα ισχύος.