

2 - Μετασχηματισμός Z και Απόκριση Συχνότητας

2016030016 - Μαυρογιώργης Δημήτριος
2016030036 - Γαλάνης Μιχάλης
2016030099 - Καπενεκάκης Ανθέας

7 Νοεμβρίου 2018

1 Περίληψη

Στο δεύτερο εργαστήριο του μαθήματος Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος εξοικειωθήκαμε με τον μετασχηματισμό Z και τον υπολογισμό της απόκρισης ενός συστήματος. Ο σκοπός του εργαστηρίου ήταν κυρίως η εξοικείωση μας με το θέμα και τις σχετικές εντολές του Matlab. Προς αυτό, η δυσκολία του εργαστηρίου ήταν αρκετά χαμηλή, με απαιτούμενα δύο απλές ασκήσεις.

2 Ασκήσεις

2.1 Ανάλυση Συστήματος (α)

Για την πρώτη άσκηση αναλύουμε ένα απλό σύστημα. Σε αυτό το σύστημα, εισάγουμε αναλογικό σήμα $x_a(t)$ το οποίο ψηφιοποιείται, περνάει από δύο φίλτρα με συναρτήσεις μεταφοράς $G_1(z)$ και $G_2(z)$, και επαναφέρεται σε αναλογικό. Η ψηφιοποίηση του σήματος δεν μας απασχολεί ακόμα οπότε θα την αγνοήσουμε προς το παρόν.

Για το σήμα $y(n)$ εξόδου ισχύει (σύμφωνα με την προσεταιριστική και την αντιμεταθετική ιδιότητα):

$$y(n) = g_2(n) * (g_1(n) * x(n)) \Rightarrow y(n) = g_1(n) * g_2(n) * x(n) \quad (1)$$

Αντίστοιχα, για τον μετασχηματισμό Z:

$$Y(z) = G_1(z)G_2(z)X(z) \Rightarrow \frac{Y(z)}{X(z)} = G_1(z)G_2(z) \Rightarrow H(z) = G_1(z)G_2(z) \quad (2)$$

Για την $G_1(z)$ μας δίνεται η εξίσωση διαφορών, οπότε:

$$k(n) = 0.9k(n-1) + 0.2x(n) \Rightarrow G_1(z) = \frac{0.2}{1 - 0.9z^{-1}} = \frac{0.2z}{z - 0.9} \quad (3)$$

Και η $G_2(z)$ είναι η εξής:

$$G_2(z) = \frac{1}{z + 0.2} = \frac{0 + z^{-1}}{1 + 0.2z^{-1}} \quad (4)$$

Άρα η συνάρτηση μεταφοράς θα είναι:

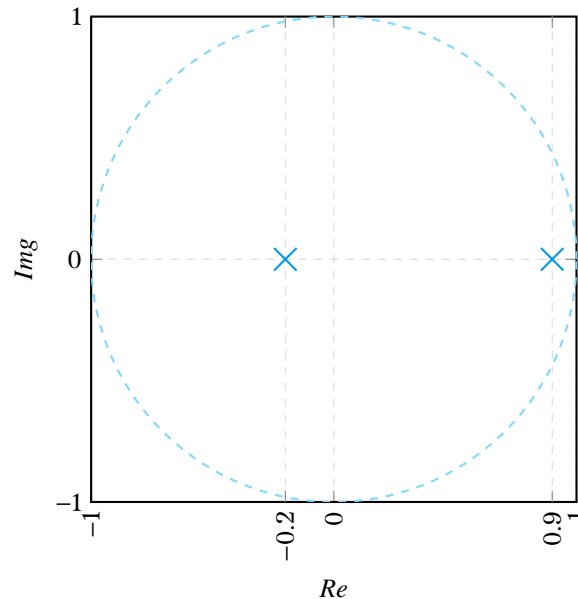
$$H(z) = G_1(z)G_2(z) = \frac{0.2z}{z - 0.9} \cdot \frac{1}{z + 0.2} \Rightarrow H(z) = \frac{0.2z}{z^2 - 0.7z^{-1} - 0.18} = \frac{0 + 0.2z^{-1}}{1 - 0.7z^{-1} - 0.18z^{-2}} \quad (5)$$

Ομοίως με τη $G_1(z)$ βρίσκουμε την εξίσωση διαφορών:

$$y(n) = 0.7y(n-1) + 0.18y(n-2) + 0.2x(n-1) \quad (6)$$

2.1.1 Διάγραμμα Pole-Zero (β, γ)

Στην συνέχεια σχεδιάζουμε το διάγραμμα πόλων-μηδενικών (σχήμα 1). Το σύστημα είναι ευσταθές γιατί η συνάρτηση μεταφοράς του συγκλίνει για $|z| > 0.9$ και το κριτήριο ευστάθειας προϋποθέτει την σύγκλιση στον μοναδιαίο κύκλο ($|z| = 1$).



Σχήμα 1: Διάγραμμα Zero-Pole για την $H(z)$.

2.1.2 Απόκριση Συχνοτήτων (δ, ε)

Τελικά, εξετάζουμε την απόκριση συχνοτήτων του συστήματος μέσω της freqz (σχήμα 2). Το διάστημα που δίνουμε ως τρίτο όρισμα στην freqz ορίζει το διάστημα στο οποίο θα υπολογίσει την απόκριση. Αν δεν δοθεί, η απόκριση υπολογίζεται στο διάστημα $[0, \pi]$.

Τα μηδενικά και οι πόλοι επηρεάζουν την απόκριση ανάλογα με την απόσταση και την τους γωνία τους από το σημείο της συχνότητας στον μοναδιαίο κύκλο. Όσο μεγαλύτερη είναι η απόσταση μεταξύ ενός μηδενικού με το σημείο της συχνότητας τόσο μεγαλύτερο είναι και το πλάτος, και όσο μεγαλύτερη είναι η γωνία τους τόσο μεγαλύτερη η φάση. Το αντίθετο συμβαίνει με τους πόλους. Αυτό το καταλαβαίνουμε και διαισθητικά, αφού όταν πλησιάζουμε ένα μηδενικό η απόκριση πλησιάζει το 0, ενώ όταν πλησιάζουμε έναν πόλο απειρίζεται. Και όσο αφορά την φάση, όταν βρισκόμαστε παράλληλα με τους πόλους γίνεται 0, ενώ αντιπαράλληλα (180°) παίρνει την μέγιστη απόλυτη τιμή της.

Όταν προσθέσουμε τον πόλο στο $z = 1$ το σύστημα χάνει την ευστάθεια του, αφού τώρα ο κύκλος σύγκλισης απαιτεί $|z| > 1$. Οπότε, περιμένουμε η συνάρτηση μεταφοράς να απειρίζεται. Παρατηρούμε ότι όταν η συχνότητα πλησιάζει το 0 (δηλαδή τον πόλο $z = 1$), το μέτρο της απόκρισης πλησιάζει το άπειρο.

Με τον επιπλέον πόλο έχουμε:

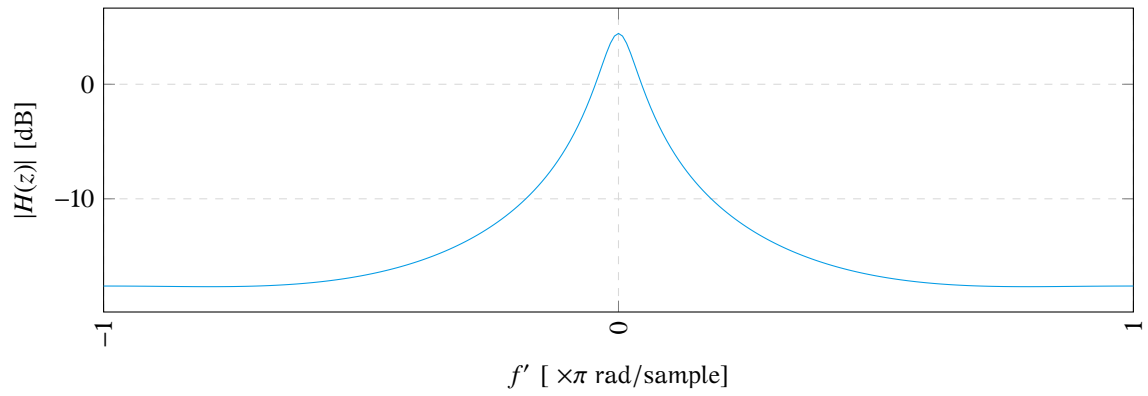
$$H_{z=1}(z) = \frac{0.2}{z^3 - 1.7z^2 + 0.5z + 0.18} = \frac{0 + 0z^{-1} + 0z^{-2} + 0.2z^{-3}}{1 - 1.7z^{-1} + 0.5z^{-2} + 0.18z^{-3}} \quad (7)$$

2.2 Αντίστροφος Μετασχηματισμός Z

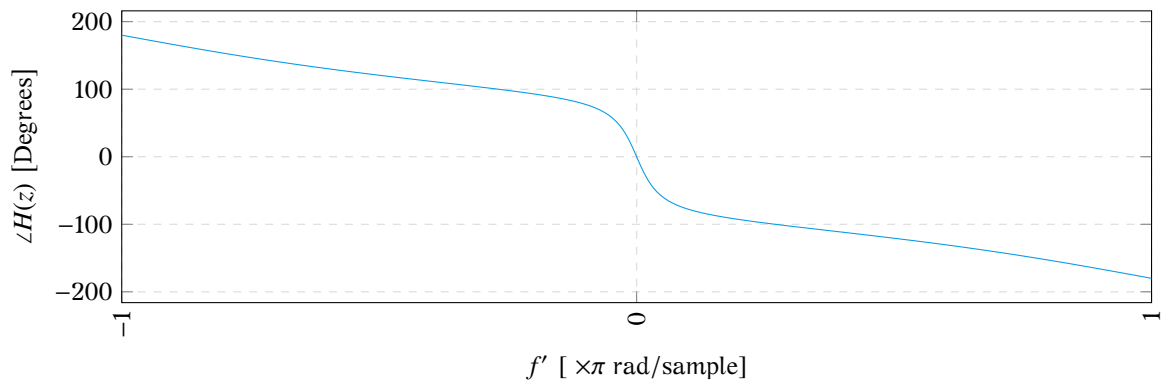
Έχουμε:

$$H(z) = \frac{4 - 3.5z^{-1}}{1 - 2.5z^{-1} + z^{-2}} = \frac{3}{1 - 2z^{-1}} + \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}} \Rightarrow h(n) = 3 \cdot 2^n u(n) + \frac{1}{2} u(n) \stackrel{n \geq 0}{=} 3 \cdot 2^n + \frac{1}{2} \quad (8)$$

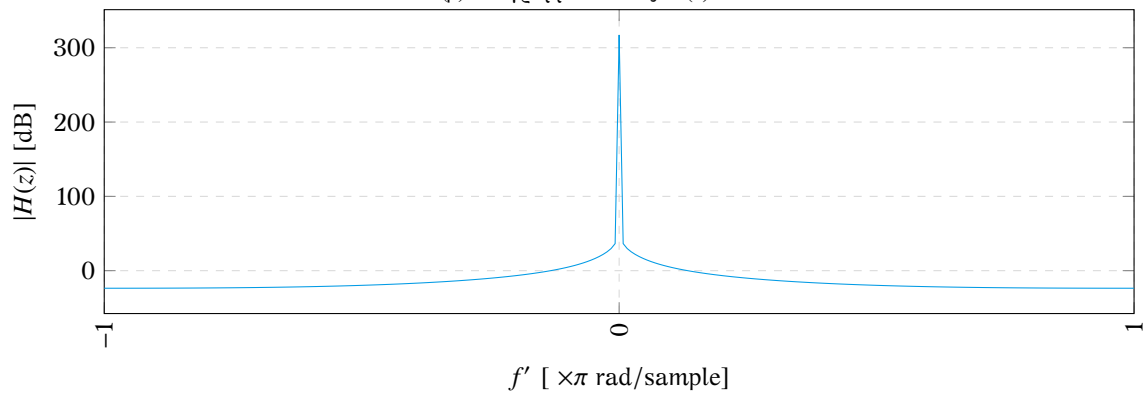
Η λύση είναι όμοια με το iztrans.



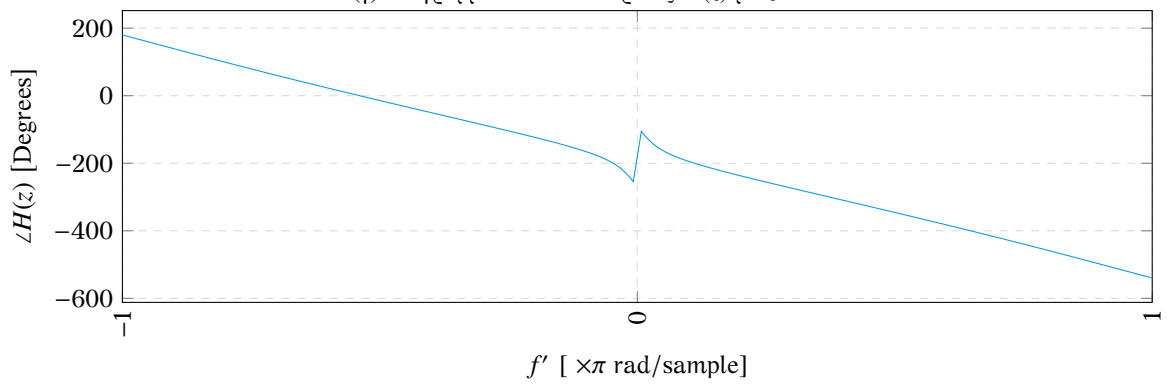
(α) Διάγραμμα Bode Απόκρισης $H(z)$.



(β) Διάγραμμα Φάσης $H(z)$.



(γ) Διάγραμμα Bode Απόκρισης $H(z)$ με $z = 1$.



(δ) Διάγραμμα Φάσης $H(z)$ με $z = 1$.

Σχήμα 2: Διαγράμματα Απόκρισης.