1 - Δειγματοληψία, Συνέλιξη και Fourier

2016030016 - Μαυρογιώργης Δημήτριος
2016030036 - Γαλάνης Μιχάλης
2016030099 - Καπενεκάκης Ανθέας

24 Οκτωβρίου 2018

1 Περίληψη

Στο πρώτο εργαστήριο του μαθήματος Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος κληθήκαμε να υλοποιήσουμε 3 ασκήσεις, οι οποίες επικεντρώνονταν στην δειγματοληψία, την συνέλιξη και τον μετασχηματισμό Fourier σημάτων.

2 Ασκήσεις

2.1 Συνέλιξη στον χρόνο και στην συχνότητα

Σε αυτήν την άσκηση είχαμε να υλοποιήσουμε χειροκίνητα την συνέλιξη 2 διακριτών σημάτων και στην συνέχεια να αποδείξουμε ότι η συνέλιξη στον χρόνο είναι ισοδύναμη με τον πολλαπλασιασμό στο πεδίο της συχνότητας.

2.1.1 Συνέλιξη

Για την συνέλιξη διαλέξαμε τα σήματα $x(n) = \sin 2\pi\frac{1}{30}n$ και $h(n) = n^2$, στα πεδία $[0, 60]$ και $[-8, 30]$ αντίστοιχα, και υλοποιήσαμε την συνέλιξη τους χειροκίνητα και με conv (σχήμα 1). Για την χειροκίνητη υλοποίηση:

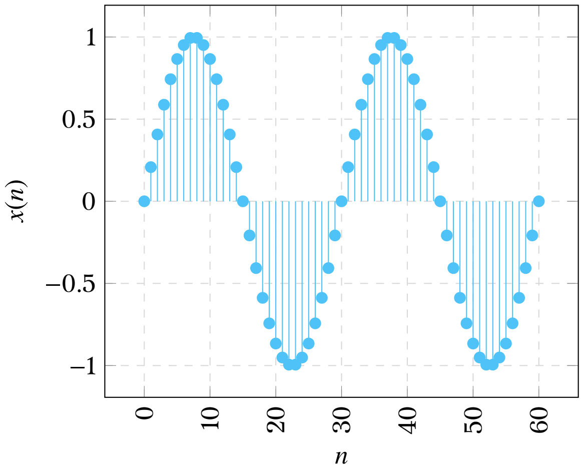
- Υπολογίσαμε το διάστημα της συνέλιξης ως $[n_{x(start)} + n_{h(start)}, n_{x(end)} + n_{h(end)}]$.
- Συμπληρώσαμε το διάστημα του x με zero-padding.
- Και για κάθε σημείο y_n του διαστήματος της συνέλιξης:
  - Κάναμε ανάκλαση την $h(n)$ και zero-padding με $n-1$ μηδενικά πριν για να την τοποθετήσουμε στο σωστό χρονικό σημείο.
  - Η τιμή του y_n ήταν το άθροισμα του γινομένου του x με το παραπάνω διάνυσμα.

2.1.2 Απόδειξη Fourier

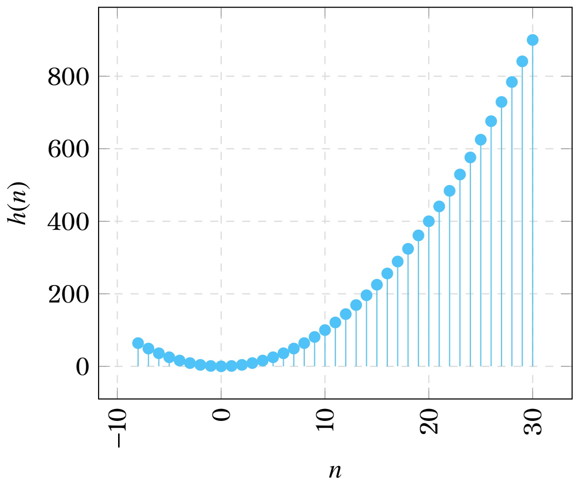
Για την απόδειξη Fourier διαλέξαμε 2 καινούργια σήματα, τα $x_1(n) = 5\sin 2\pi\frac{1}{30}n$ και $x_2(n) = -3\cos 2\pi\frac{1}{30}n$ στο κοινό διάστημα $[-60, 60]$.

Στην συνέχεια, χρησιμοποιήσαμε την **fft** για να υπολογίσουμε τους μετασχηματισμούς $X_1(F)$ και $X_2(F)$, τους οποίους πολλαπλασιάσαμε στο διάνυσμα $Y(F)$ και μετά με την **ifft** τους μετατρέψαμε πίσω στον χρόνο για να πάρουμε την συνέλιξη.

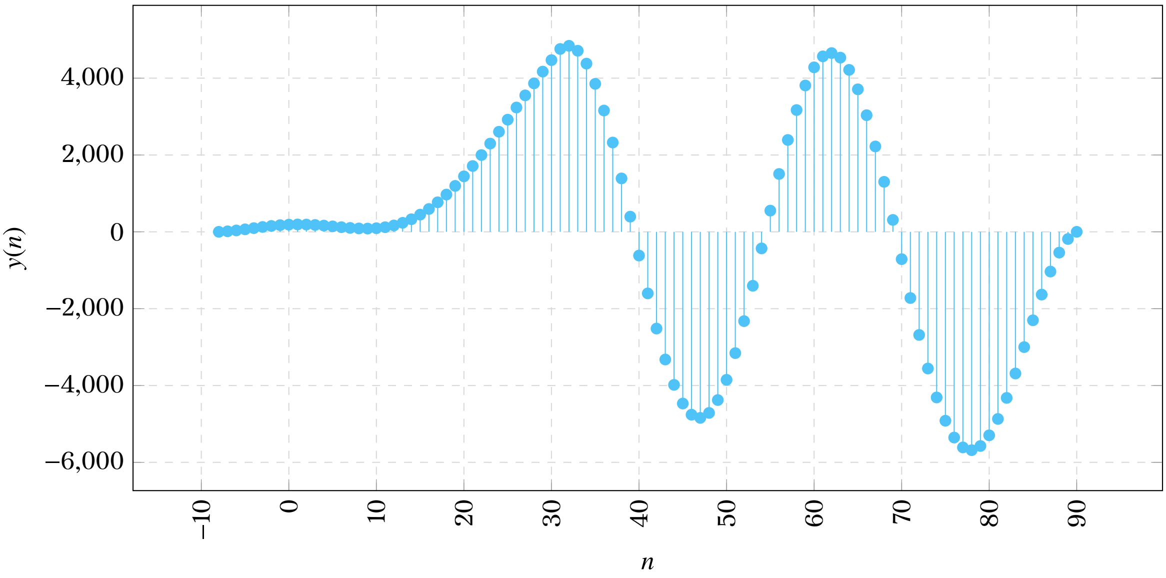
Παρατηρούμε ότι και οι δύο συνελίξεις είναι όμοιες (σχήμα 2).



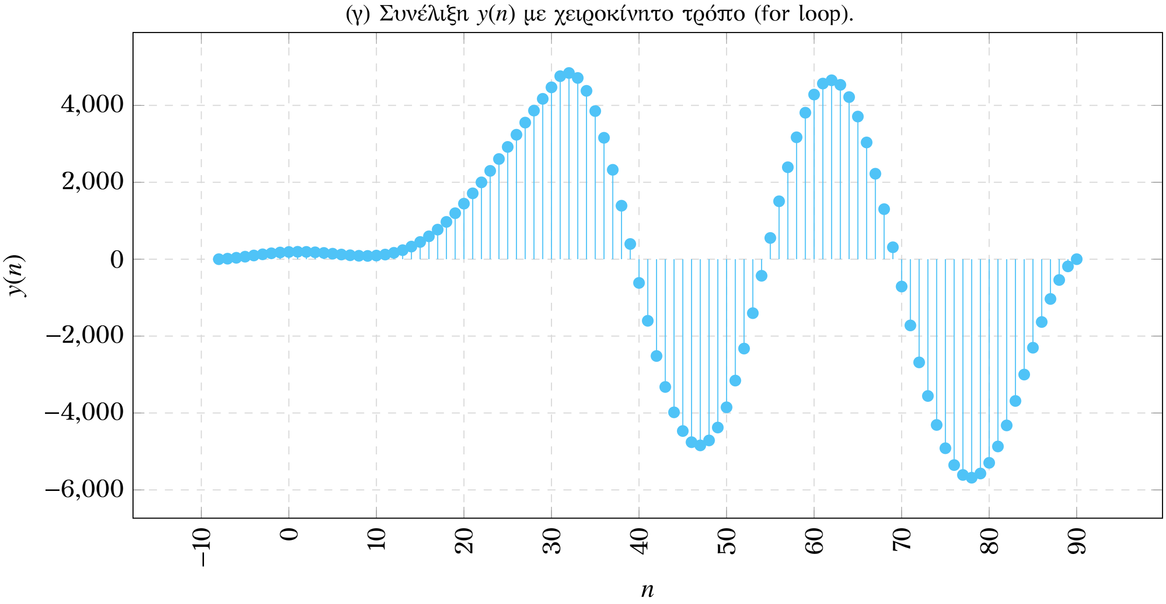
(α) Σήμα $x(n)$



(β) Σήμα $h(n)$

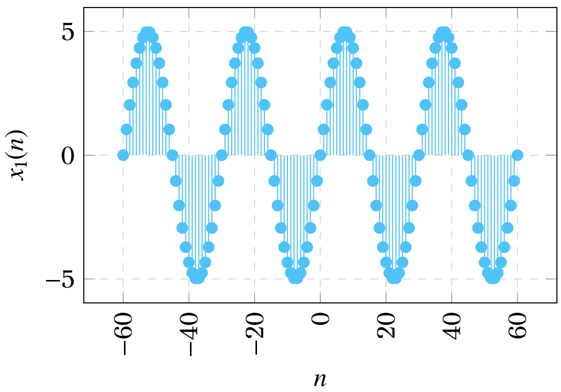


(γ) Συνέλιξη $y(n)$ με χειροκίνητο τρόπο (for loop).

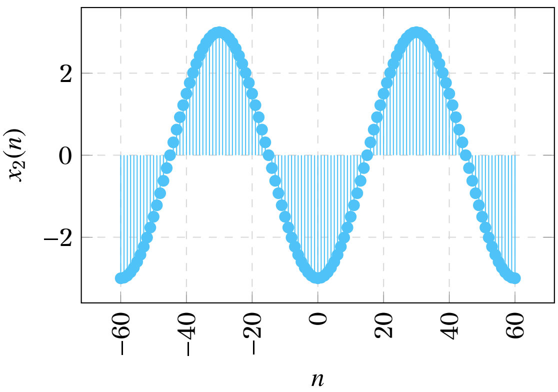


(δ) Συνέλιξη $y(n)$ με conv.

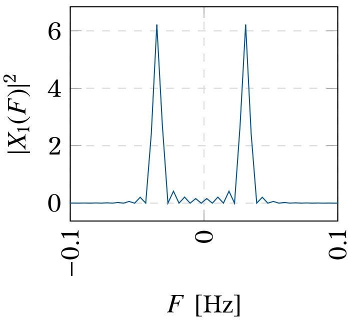
Σχήμα 1: Άσκηση 1Α. Συνέλιξη των $x(n)$ και $h(n)$



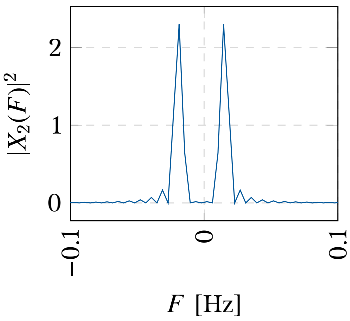
(α) Σήμα $x_1(n)$



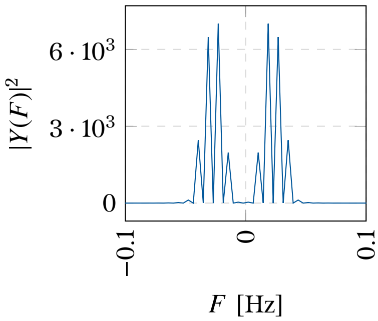
(β) Σήμα $x_2(n)$



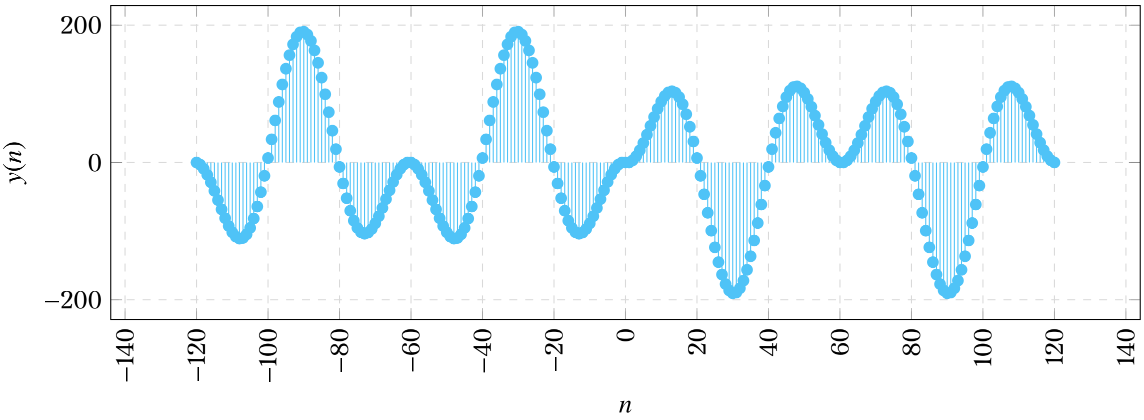
(γ) Ενεργειακό φάσμα $X_1(F)$



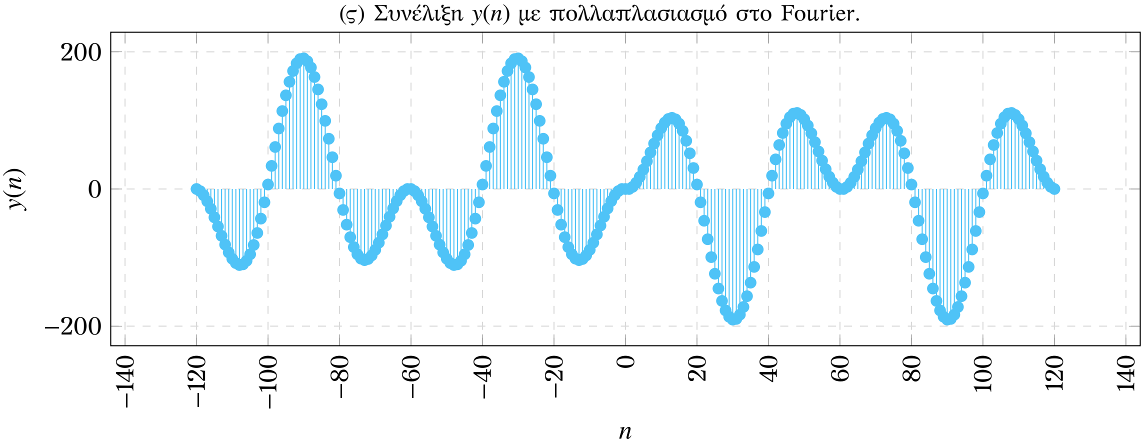
(δ) Ενεργειακό φάσμα $X_2(F)$



(ε) Εν. Φάσμα $Y(F) = X_1(F)X_2(F)$



(ϛ) Συνέλιξη $y(n)$ με πολλαπλασιασμό στο Fourier.



(ζ) Συνέλιξη $y(n)$ με conv.

Σχήμα 2: Άσκηση 1Β. Συνέλιξη των $x_1(n)$ και $x_2(n)$ με Fourier

2.2 Δειγματοληψία γύρω στην συχνότητα Nyquist

Σε αυτήν την άσκηση δειγματοληπτούμε το σήμα $x(t) = 5\cos 2\pi 12t - 2\sin 2\pi\frac{3}{4}t$ στο $t \in (0, 500\,\mathrm{ms})$. Αρχικά, έχουμε να το μετατρέψουμε σε μετασχηματισμό Fourier. Χρησιμοποιώντας μερικές βασικές ισότητες από το μάθημα Σήματα και Συστήματα βρίσκουμε:

$$X(F) = \frac{5}{2}(\delta(F-12) + \delta(F+12)) - \ i\left(\delta\left(F - \frac{3}{4}\right) - \delta\left(F + \frac{3}{4}\right)\right)$$

Ο μη-μηδενικός όρος με την μέγιστη συχνότητα στην παραπάνω σχέση είναι, προφανώς, το $\frac{5}{2}\delta(F+12)$ (ή το -12), με συχνότητα 12 Hz. Οπότε η συχνότητα Nyquist, η οποία είναι η διπλή της μέγιστης συχνότητας ενός σήματος, είναι 24 Hz.

Στην συνέχεια δειγματοληπτούμε με 3 συχνότητες, 12 Hz, 24 Hz και 48 Hz (σχήμα 4). Δεδομένου ότι οι 24 Hz και οι 48 Hz είναι μεγαλύτερες ή ίσες με το Nyquist η δειγματοληψία σε αυτές είναι πλήρης. Η 12 Hz, όμως, είναι μικρότερη και, όπως βλέπουμε στο σήμα, δεν καταγράφει την καμπύλη του συνημίτονου. Έχουμε, δηλαδή, επικάλυψη.

2.3 Εξέταση των Επιδράσεων Επικάλυψης

2.3.1 Δειγματοληψία πάνω από Nyquist (χωρίς επικάλυψη)

Θεωρούμε $x(t) = 5\cos 2\pi 12t - 2\sin 2\pi\frac{3}{4}t$ και δειγματοληπτούμε στα 320 Hz για 128 δείγματα (σχήμα 5). Δεδομένου ότι η συχνότητα Nyquist του σήματος είναι 80 Hz δεν έχουμε επικάλυψη και, όπως παρατηρούμε, το φάσμα είναι πλήρες.

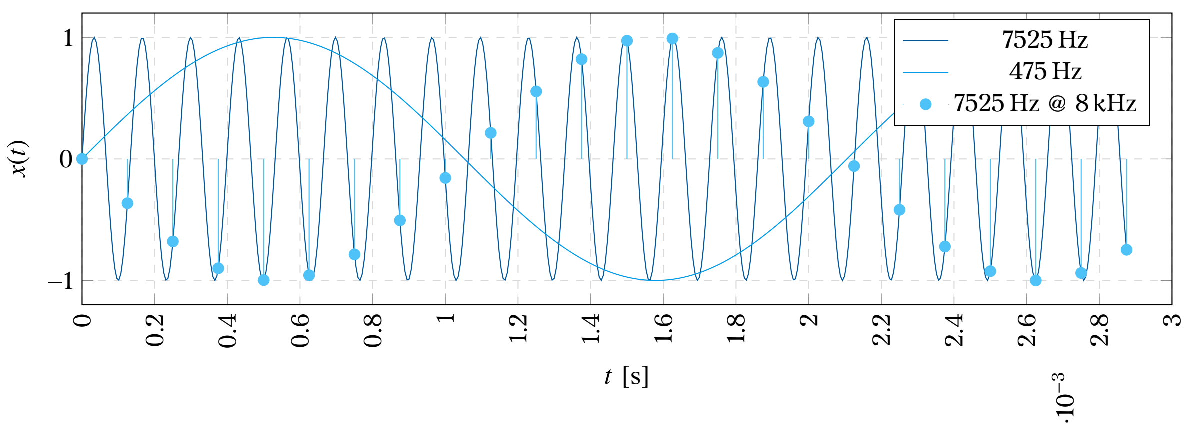
2.3.2 Δειγματοληψία κάτω από Nyquist (επικάλυψη)

Θεωρούμε το σήμα: $x(t) = 10\sin 2\pi f_0 t$ και ως συχνότητα δειγματοληψίας την $f_s = 8\,\mathrm{kHz}$. Επιπλέον, ορίζουμε την ακολουθία:

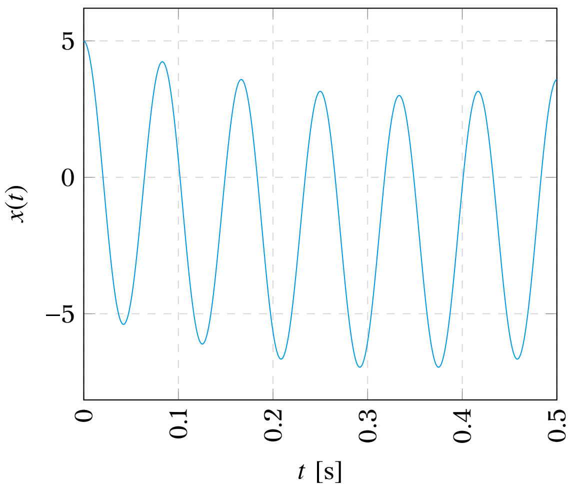
$$\chi[n] = x(nT_s) = x\left(\frac{n}{f_s}\right) \Rightarrow \ x[n] = \sin\left(2\pi\frac{f_0}{f_s}n + \varphi\right)$$

Στην συνέχεια, δειγματοληπτούμε στο $x(t)$ για 2 ομάδες συχνοτήτων, μία κάτω από το Nyquist (100 Hz, 225 Hz, 350 Hz, 475 Hz) και μία πάνω (7.525 kHz, 7.650 kHz, 7.775 kHz, 7.800 kHz), κατασκευάζοντας τα διαγράμματα των φάσματων τους (σχήμα 6).

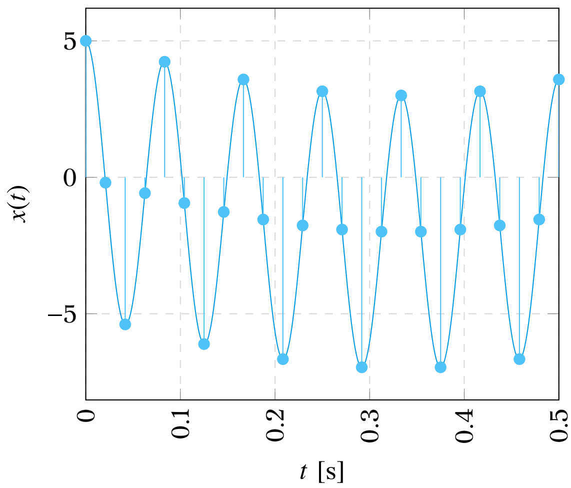
Παρατηρούμε ότι υπάρχει 1-1 επικάλυψη μεταξύ των συχνοτήτων των 2 group. Επομένως, όταν δειγματοληπτούμε με συχνότητες κάτω από το Nyquist του σήματος χάνουμε πληροφορία ή, χειρότερα, αλλοιώνουμε τις χαμηλότερες συχνότητες που ίσως μας ενδιαφέρουν. Παραθέτουμε ένα παράδειγμα επικάλυψης, στο οποίο η συχνότητα 475 Hz επικαλύπτεται από την 7.525 kHz στο σχήμα 3.



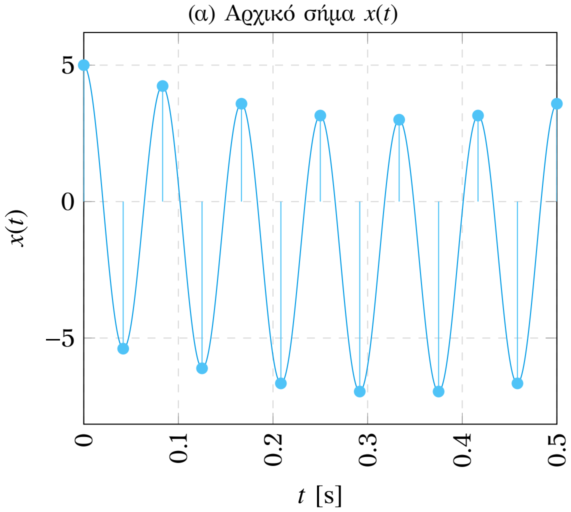
Σχήμα 3: Επίδειξη επικάλυψης με δειγματοληψία κάτω από Nyquist.



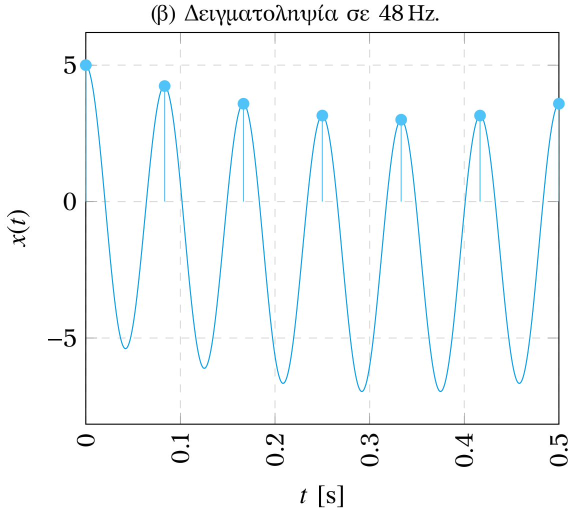
(α) Αρχικό σήμα $x(t)$



(β) Δειγματοληψία σε 48 Hz.

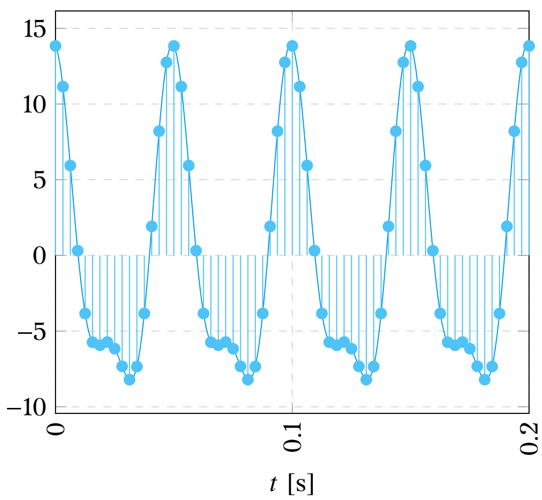


(γ) Δειγματοληψία σε 24 Hz.

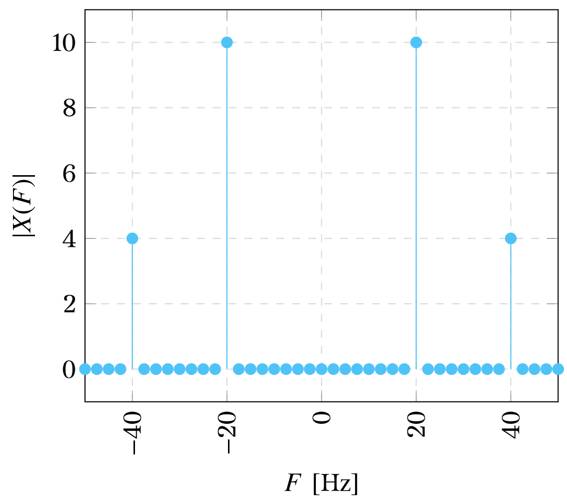


(δ) Δειγματοληψία σε 12 Hz.

Σχήμα 4: Άσκηση 2. Δειγματοληψία γύρω στο Nyquist

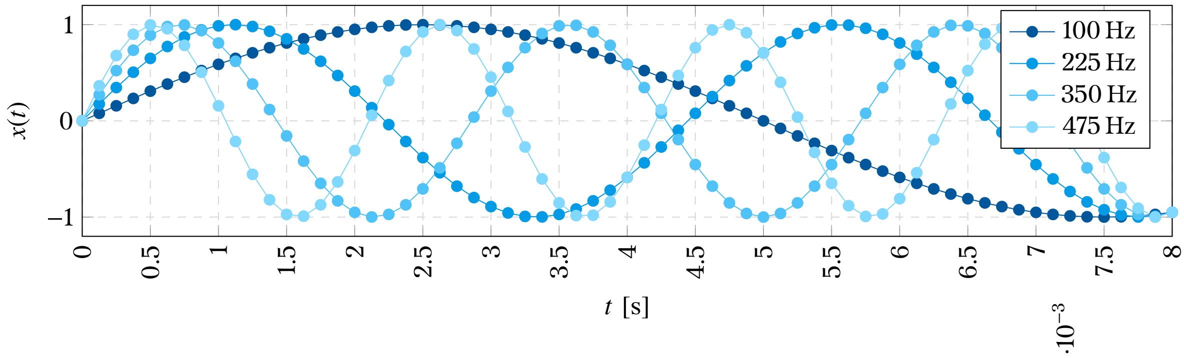


(α) Δειγματοληψία $x(t)$ σε 320 Hz.

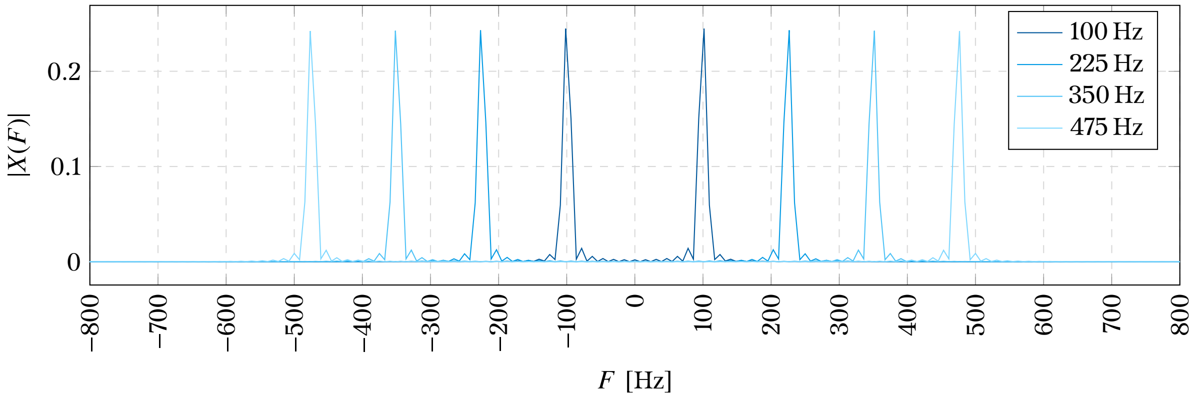


(β) Φάσμα $X(F)$

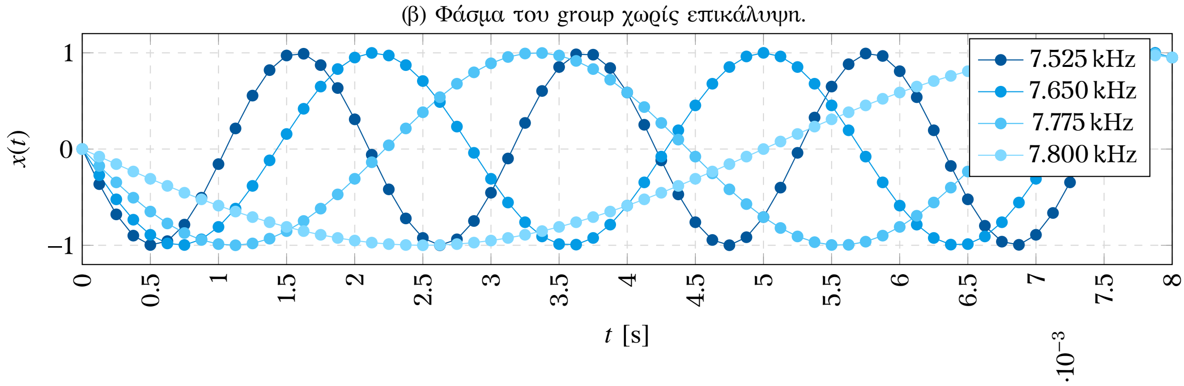
Σχήμα 5: Άσκηση 3Α. Δειγματοληψία πάνω από το Nyquist



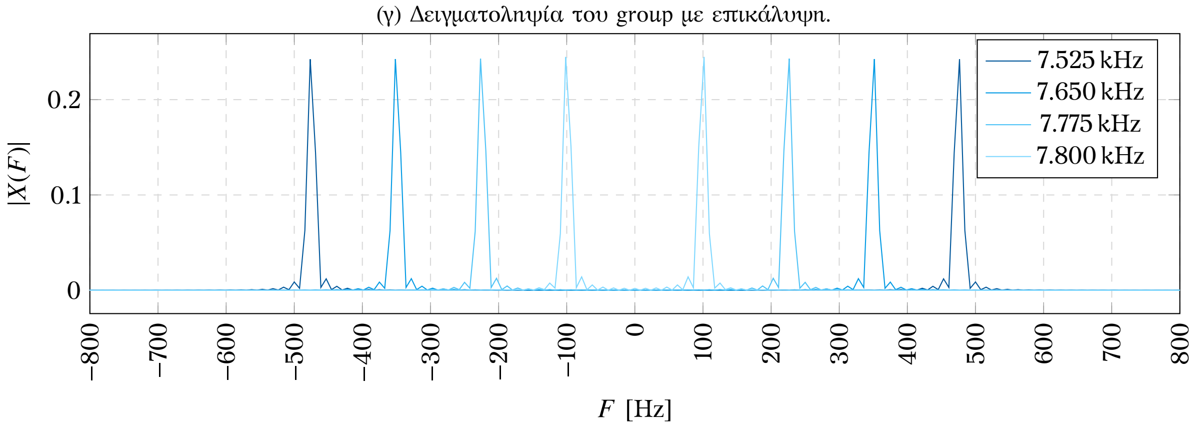
(α) Δειγματοληψία του group χωρίς επικάλυψη.



(β) Φάσμα του group χωρίς επικάλυψη.



(γ) Δειγματοληψία του group με επικάλυψη.



(δ) Φάσμα του group με επικάλυψη.

Σχήμα 6: Άσκηση 3Β. Δειγματοληψία κάτω από το Nyquist

.