

# 3 - Σχεδίαση IIR Φίλτρων

2016030016 - Μαυρογιώργης Δημήτριος  
2016030036 - Γαλάνης Μιχάλης  
2016030099 - Καπενεκάκης Ανθέας

17 Νοεμβρίου 2018

## 1 Περίληψη

Στο τρίτο εργαστήριο του μαθήματος Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος ασχοληθήκαμε με την δημιουργία IIR (Infinite Impulse Response) φίλτρων. Ασχοληθήκαμε με δύο τέτοια φίλτρα: το Butterworth και το Chebyshev, με τα οποία υλοποιήσαμε ένα low-pass φίλτρο και ένα high-pass φίλτρο αντίστοιχα. Τελικά, τα εφαρμόσαμε σε δύο σήματα για να δούμε την επίδραση τους πάνω σε αυτά και στο φάσμα τους.

## 2 Ασκήσεις

### 2.1 Φίλτρο low-pass τύπου Butterworth

Αρχικά, δημιουργούμε 2 φίλτρα low-pass τύπου Butterworth με ζώνη passband στα 0–3 kHz με ripple στα 3 dB και stopband στα 4 kHz–5 kHz με εξασθενίσεις στα 30 dB και 50 dB (σχήμα 1), βρίσκοντας ότι είναι της τάξης  $N = 13$  και  $N = 21$  αντίστοιχα.

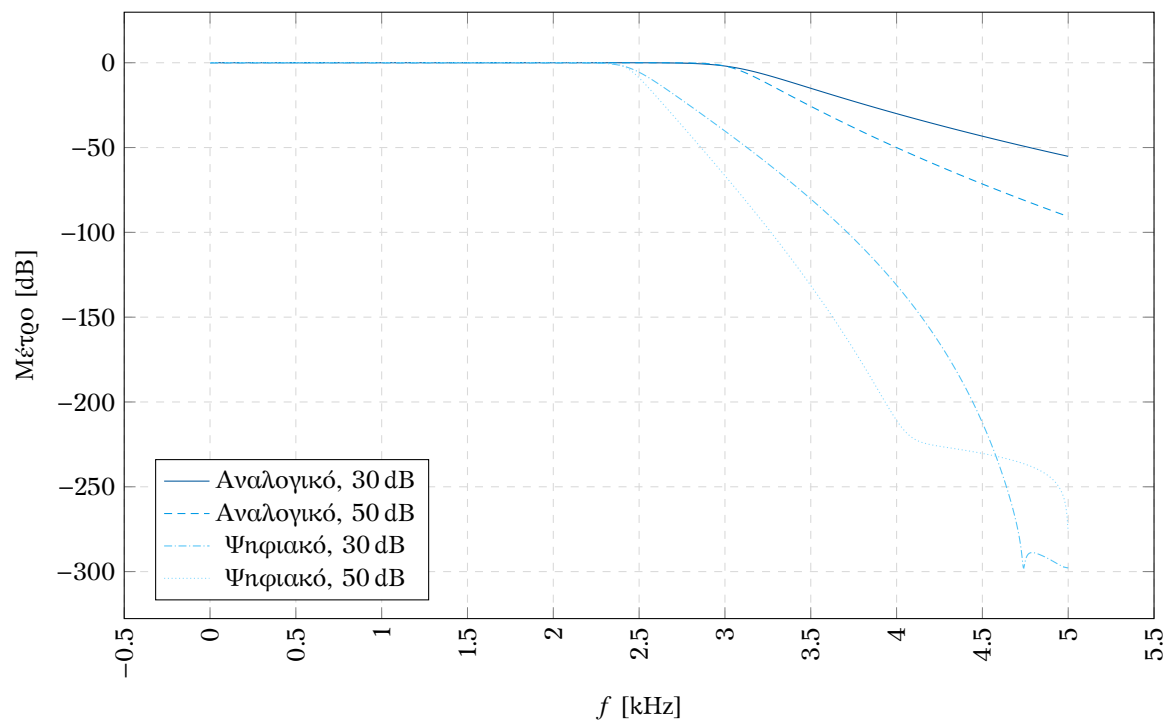
Τα φίλτρα υλοποιούνται ως αναλογικά και μετατρέπονται σε ψηφιακά μέσω του διγραμμικού μετασχηματισμού. Έτσι, αναδεικνύεται ένα φαινόμενο του διγραμμικού μετασχηματισμού που λέγεται Frequency Wrapping. Ο διγραμμικός μετασχηματισμός μετατρέπει ένα αναλογικό φίλτρο σε ψηφιακό αντιστοιχώντας την αναλογική του απόκριση στον μοναδιαίο κύκλο. Επειδή ο μοναδιαίος κύκλος είναι πεπερασμένος, αυτό οδηγεί στην συρρίκνωση των αναλογικών συχνοτήτων του φίλτρου ( $[-\infty, +\infty]$ ) στο διάστημα  $[-\frac{f_s}{2}, \frac{f_s}{2}]$ , το οποίο οδηγεί, για παράδειγμα, την απόκριση της συχνότητας  $\frac{f_s}{2}$  στο ψηφιακό φίλτρο να είναι ίση με αυτή της  $+\infty$  στο αναλογικό. Υπάρχει, δηλαδή, μία μη-γραμμική σχέση μεταξύ των συχνοτήτων σε αντίστοιχες αποκρίσεις μεταξύ του αναλογικού και του ψηφιακού φίλτρου.

Το Matlab περιέχει υλοποίηση ψηφιακού φίλτρου Butterworth η οποία γίνεται απευθείας στο πεδίο  $z$  που δεν εμφανίζει το παραπάνω φαινόμενο, την οποία θα χρησιμοποιήσουμε στην άσκηση 3.

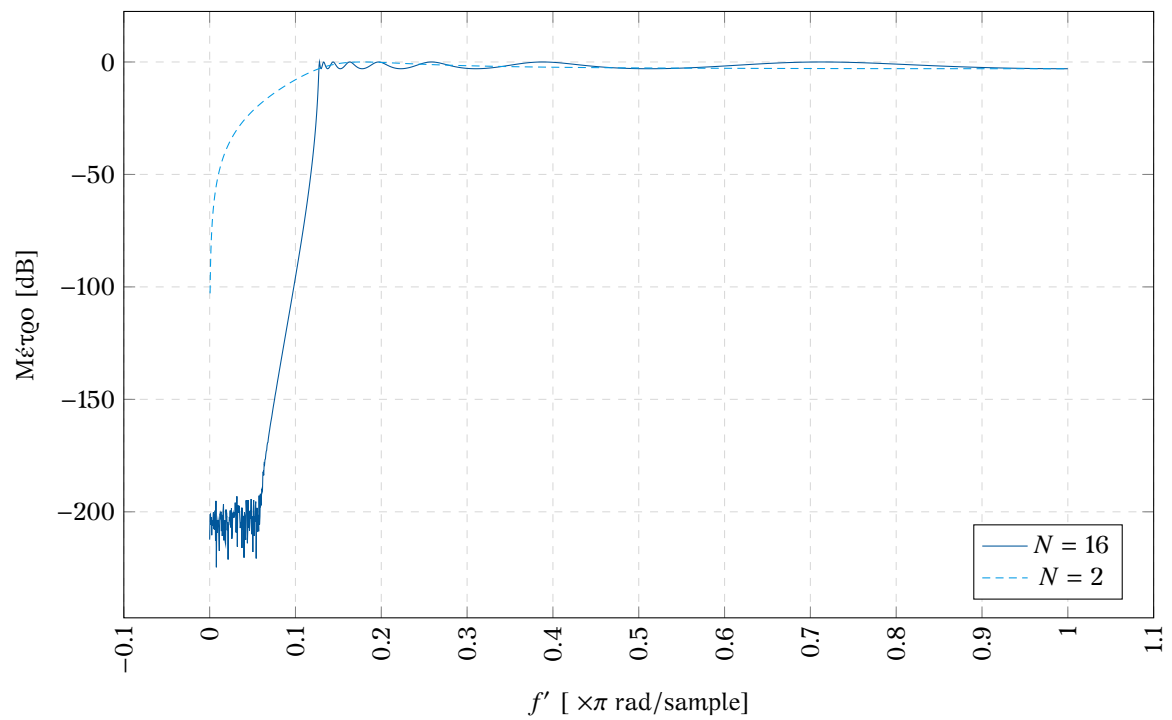
### 2.2 Φίλτρο high-pass τύπου Chebyshev

Στην συνέχεια, δημιουργούμε δύο high-pass φίλτρα τύπου Chebyshev στις τάξεις 2 και 16 (σχήμα 2). Η τάξη του φίλτρου δείχνει τον αριθμό των πόλων από τους οποίους ορίζεται και ως αποτέλεσμα την πολυπλοκότητα του. Περιμένουμε, οπότε, με την αύξηση της τάξης του φίλτρου να γίνει πιο στενή η ζώνη μετάβασης και να αυξηθούν οι ταλαντώσεις στη ζώνη διέλευσης, κάτι το οποίο παρατηρούμε.

Το διάγραμμα είναι στο διάστημα  $[0, 1]$  επειδή οι αριθμοί του άξονα είναι πεπερασμένοι και αντιστοιχούν στα σημεία του μοναδιαίου κύκλου με γωνία  $\times \pi$  σε ένα ψηφιακό φίλτρο. Η συχνότητα δειγματοληψίας, δηλαδή, δεν επηρεάζει τη λειτουργία του φίλτρου, παρα μόνο με την σχέση της με την συχνότητα cutoff. Επομένως, δεν είναι αναγκαία για να το περιγράψουμε. Παρόλα αυτά, μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε το διάστημα με την μισή συχνότητα δειγματοληψίας για να λάβουμε την απόκριση ανά συχνότητα ή να την περάσουμε σαν όρισμα στην freqz έτσι ώστε να γίνει αυτόματα από το Matlab.



Σχήμα 1: Απόκριση Συχνότητας φίλτρου Butterworth για διάφορες εξασθενίσεις.



Σχήμα 2: Αποκρίσεις Φίλτρου Chebyshev.

## 2.3 Εφαρμογή Φίλτρων

Τελικά, εφαρμόζουμε τα φίλτρα σε 2 σήματα, ένα για το καθένα, για να εξετάσουμε τις ιδιότητες τους. Για να αναδείξουμε τις διαφορές μεταξύ του αρχικού και τελικού σήματος δημιουργούμε τα διαγράμματα χρόνου και φάσματος των σημάτων (σχήμα 3). Επειδή η διαφορά μεταξύ των σημάτων δεν είναι ξεκάθαρη κάνουμε τις εξής τροποποιήσεις: στο διάγραμμα χρόνου δειγματοληπτούμε ένα μικρότερο κομμάτι και αυξάνουμε την συχνότητα δειγματοληψίας για να βγει πιο ξεκάθαρη η μετατροπή και στο διάγραμμα φάσματος αλλάζουμε την κλίμακα του άξονα  $y$  σε λογαριθμική.

### 2.3.1 Butterworth

Για το φίλτρο Butterworth δειγματοληπτούμε το σήμα:

$$x(t) = 1 + \cos 1 \cdot 10^3 t + \cos 16 \cdot 10^3 t + \cos 30 \cdot 10^3 t \quad (1)$$

Το οποίο έχει μετασχηματισμό με τέσσερις συμμετρικούς μοναδιαίους παλμούς στις συχνότητες:

$$f_0 = 0, \quad f_1 = \frac{1 \cdot 10^3}{2\pi} \approx 159.15 \text{ Hz}, \quad f_2 = \frac{16 \cdot 10^3}{2\pi} \approx 2.546 \text{ kHz}, \quad f_3 = \frac{30 \cdot 10^3}{2\pi} \approx 4.774 \text{ kHz} \quad (2)$$

Επειδή είναι μικρότερες από τη συχνότητα Nyquist (5 kHz) δεν παρουσιάζεται επικάλυψη.

**Αποτελέσματα** Τα φίλτρα Butterworth που θα χρησιμοποιήσουμε είναι low-pass με διαφορετική εξασθένιση και passband μέχρι τα 3 kHz. Οπότε περιμένουμε αποκοπή της συχνότητας  $f_3$  ( $> 3 \text{ kHz}$ ) και διαφορά 20 dB ή μία δεκάδα στον θόρυβο στην περιοχή αποκοπής μεταξύ των φίλτρων.

### 2.3.2 Chebyshev

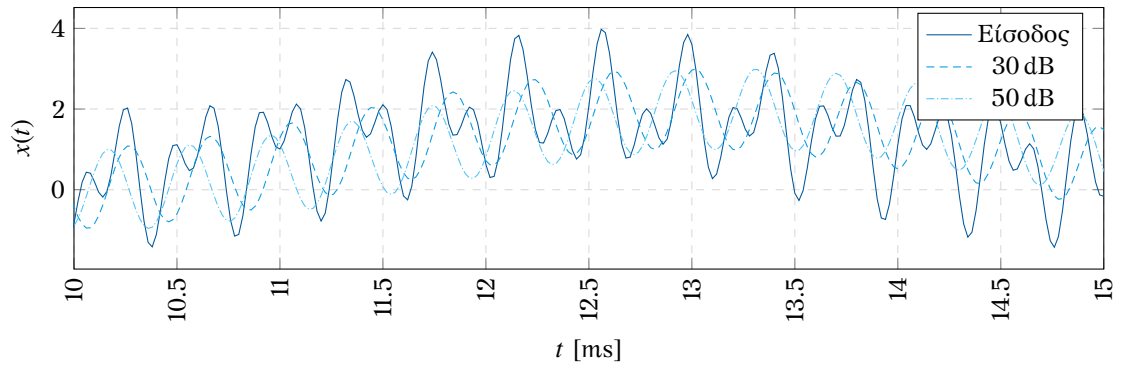
Για το φίλτρο Chebyshev δειγματοληπτούμε το σήμα:

$$x(t) = 1 + \cos 1.5t + \cos 5t \quad (3)$$

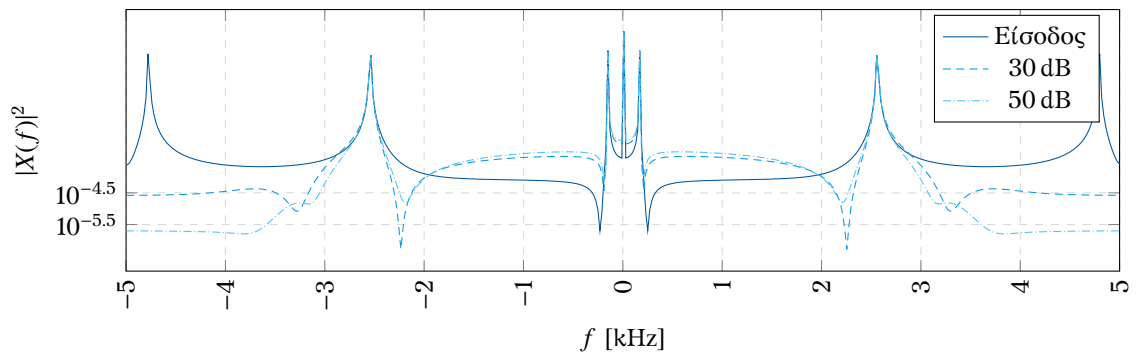
Το οποίο έχει μετασχηματισμό με τρεις συμμετρικούς μοναδιαίους παλμούς στις συχνότητες:

$$f_0 = 0, \quad f_1 = \frac{1.5}{2\pi} \approx 0.238 \text{ Hz}, \quad f_2 = \frac{5}{2\pi} \approx 0.795 \text{ Hz} \quad (4)$$

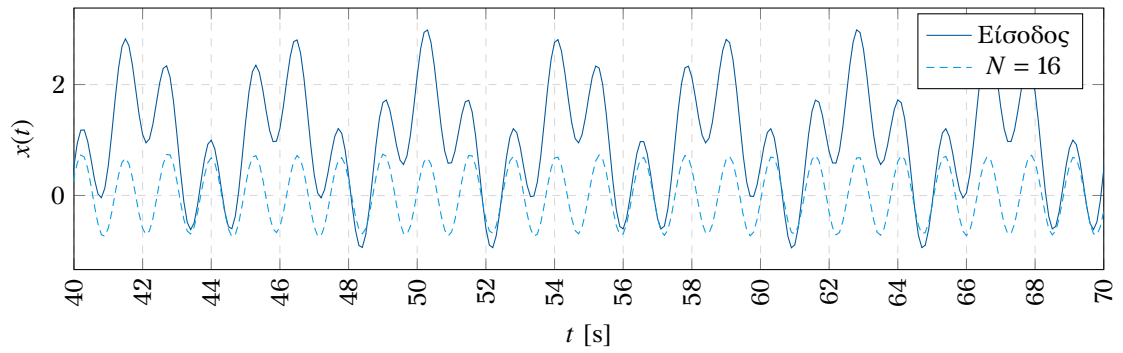
**Αποτελέσματα** Το φίλτρο Chebyshev εδώ είναι high-pass και έχει  $\omega_c = 2 \text{ rad s}^{-1} \Rightarrow f_c = 0.318 \text{ Hz}$ , οπότε περιμένουμε αποκοπή της συχνότητας  $f_1$  και της μονάδας, κάτι το οποίο παρατηρούμε.



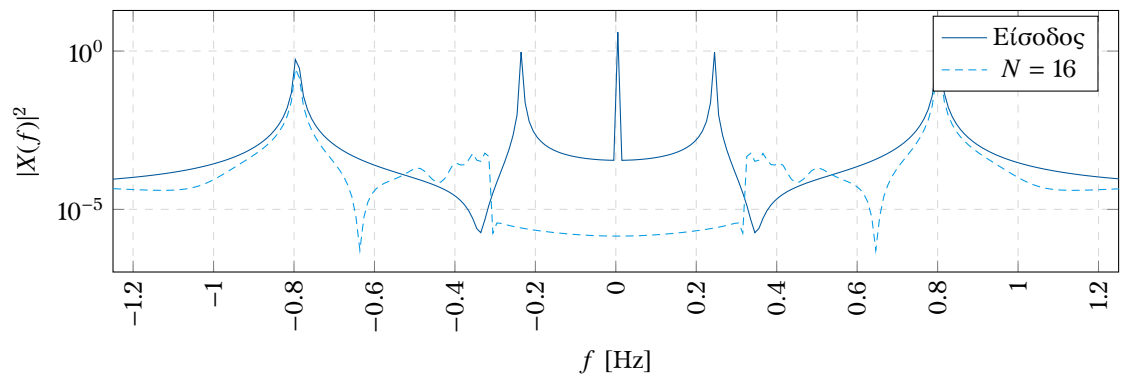
(α) Εφαρμογή Butterworth



(β) Φάσμα Butterworth



(γ) Εφαρμογή Chebyshev



(δ) Φάσμα Chebyshev

Σχήμα 3: Εφαρμογή Φίλτρων