ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΙ ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ ΠΡΟΤΥΠΩΝ

1º σετ θεωρητικών ασκήσεων

Γαλάνης Μιχάλης

(2016030036)

Άσκηση 1 (PCA)

Στη πρώτη άσκηση καλούμαστε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο Principal Component Analysis (PCA) για να μειώσουμε τις διαστάσεις των δεδομένων μας. Στο πρώτο μέρος της χρησιμοποιούμε PCA για ένα σύνολο 2D δεδομένων ενώ στο δεύτερο μέρος τη εφαρμόζουμε σε ένα πιο πρακτικό σύνολο δεδομένων 5000 εικόνων προσώπων.

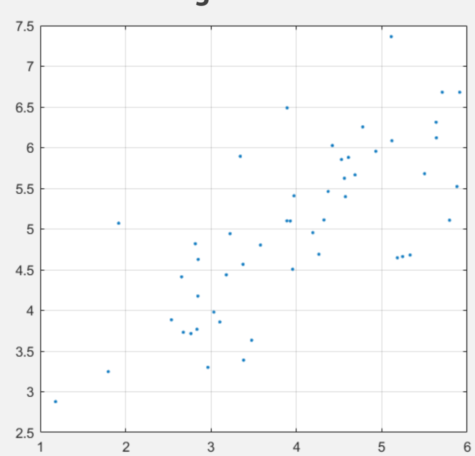
Σε κάθε περίπτωση, για την υλοποίηση του αλγορίθμου, ακολουθούμε τα εξής βήματα εφόσον φορτώσουμε το dataset:

1. Εφαρμόζουμε **standardization** στο dataset μας με τη βοήθεια της `featureNormalize` η οποία επιστρέφει ένα κανονικοποιημένο διάνυσμα `X` με μέση τιμή 0 και διασπορά 1.
2. Υπολογίζουμε τον **πίνακα συνδυασποράς** καθώς και τα **ιδιοδιανύσματα** και τις **ιδιοτιμές** του πίνακα αυτού με τη συνάρτηση `myPCA`.
3. Ταξινομούμε τις ιδιοτιμές σε φθίνουσα σειρά.
4. Επιλέγουμε τις πρώτες Κ ιδιοτιμές όπου Κ ο επιθυμητός αριθμός διαστάσεων.
5. Κάνουμε **project** τα δεδομένα μας στις Κ διαστάσεις με την `projectData` και ύστερα για να τα απεικονίσουμε κάνουμε **reconstruct** χρησιμοποιώντας τις ιδιοτιμές που επιλέξαμε. Αυτό επιτυγχάνεται με την `recoverData`.

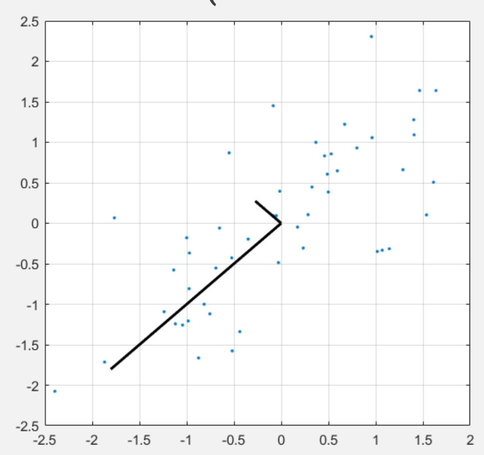
Τα αποτελέσματα φαίνονται στα διαγράμματα της επόμενης σελίδας.

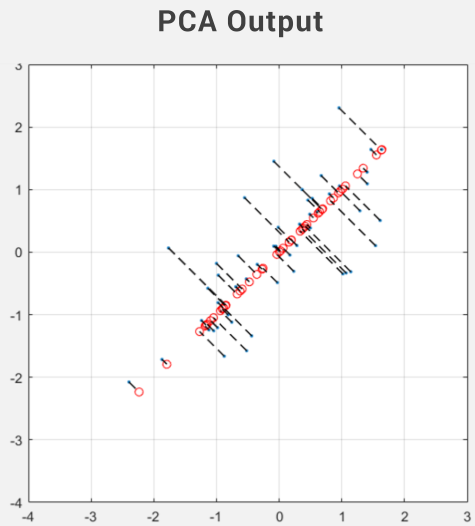
Αποτελέσματα Μέρος 1°

Original Data



Normalized Data (+dimension direction)





Αποτελέσματα Μέρος 2ο

Άσκηση 2 (Ταξινομητής LDA)

Στην άσκηση αυτή καλούμαστε να σχεδιάσουμε ένα **ταξινομητή Linear Discriminant Analysis (LDA)**. Τα δεδομένα μας έχουν προέλθει από δύο **ισοπίθανες** κατηγορίες $\boldsymbol{\omega_1, \omega_2}$ με κατανομές **Gaussian**. Οι μέσες τιμές και οι **πίνακες συνδυασποράς** έχουν εκτιμηθεί από τα δεδομένα ως:

$$\boldsymbol{\mu_1} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\mu_2} = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Sigma_1} = \begin{pmatrix} 11 & 9 \\ 9 & 11 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\Sigma_2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Υπολογίζουμε αρχικά το **within-class scatter** matrix, δηλαδή την εσωτερική διασπορά των κλάσεων με τη σχέση:

$$\boldsymbol{S_w} = \sum_{i=1}^{c} P_i \Sigma_i = \frac{1}{2}(\Sigma_1 + \Sigma_2) \Leftrightarrow$$

$$\boldsymbol{S_w} = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 11 & 9 \\ 9 & 11 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right) \Leftrightarrow$$

$$\boldsymbol{S_w} = \begin{bmatrix} 6.5 & -4.5 \\ -4.5 & 6.5 \end{bmatrix}$$

Υπολογίζουμε κατόπιν το διάνυσμα $\boldsymbol{w}$ από τη παρακάτω σχέση:

$$w = S_w^{-1}(\mu_1 - \mu_2) \Leftrightarrow$$

$$w = \frac{1}{6.5^2 - 4.5^2}\begin{bmatrix} 6.5 & -4.5 \\ -4.5 & 6.5 \end{bmatrix}\left(\begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix}\right) \Leftrightarrow$$

$$w = \begin{bmatrix} \frac{13}{44} & -\frac{9}{44} \\ -\frac{9}{44} & \frac{13}{44} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} -15 \\ -10 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} -\frac{105}{44} \\ \frac{5}{44} \end{pmatrix}$$

Άσκηση 3 (PCA vs LDA)

Στόχος της άσκησης αυτής ήταν να εφαρμόσουμε και πάλι dimensionality reduction ενός feature vector αλλά αυτή τη φορά χρησιμοποιώντας την supervised τεχνική LDA. Στο πρώτο μέρος που έχουμε 2D τεχνητά δεδομένα 2 κλάσεων θα εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο Fisher's Discriminant Analysis (FDA) που είναι ουσιαστικά LDA για την περίπτωση 2 κλάσεων. Θα συγκρίνουμε επίσης τα αποτελέσματα με τη μέθοδο PCA. Στο δεύτερο μέρος θα έχουμε δεδομένα προερχόμενα από το δημοφιλές iris dataset, το οποίο αποτελείται από 3 κλάσεις δεδομένων, συνεπώς θα χρησιμοποιήσουμε τη γενικευμένη τεχνική LDA.

Μέρος 1ο

Για τα δεδομένα 2 κλάσεων ακολουθούμε τα εξής βήματα εφόσον φορτώσουμε το dataset:

1. Εφαρμόζουμε **standardization** στο dataset μας με τη βοήθεια της `featureNormalize` η οποία επιστρέφει ένα κανονικοποιημένο διάνυσμα `x` με μέση τιμή 0 και διασπορά 1.
2. Υπολογίζουμε το **mean** και τον **πίνακα συνδυασποράς** για τις δύο κλάσεις.
3. Υπολογίζουμε τα **within-scatter matrix**:

$$S_w = \sum_{i=1}^{c} P_i \Sigma_i = \frac{1}{2}(\Sigma_1 + \Sigma_2)$$

4. Υπολογίζουμε το διάνυσμα προβολής $\boldsymbol{w}$:

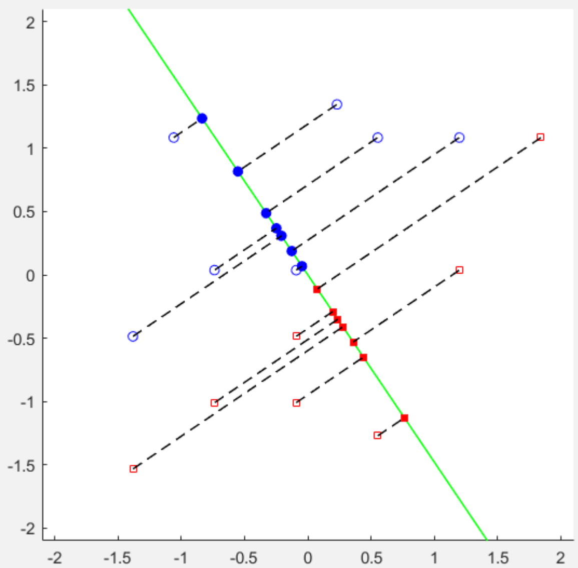
$$\boldsymbol{w} = S_w^{-1}(\mu_1 - \mu_2)$$

5. Κάνουμε **project** τα δεδομένα μας σε μια διάσταση με την `projectDataLDA` και ύστερα για να τα απεικονίσουμε κάνουμε **reconstruct** με την `recoverDataLDA`.

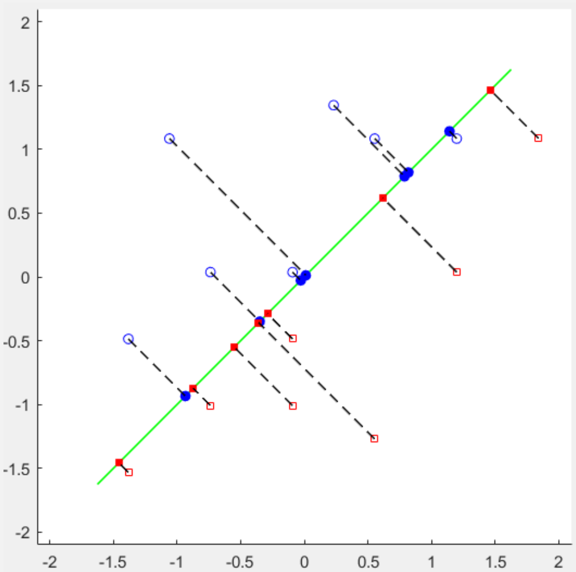
Τα βήματα 2 εώς 4 επιτυγχάνονται στη συνάρτηση `fisherLinearDiscriminant`.

Κατόπιν συγκρίνουμε τα αποτελέσματα με τη μέθοδο PCA.

LDA



PCA



Παρατηρώντας τα αποτελέσματα, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η μέθοδος LDA είναι πιο κατάλληλη στο πρόβλημα αυτό καθώς μειώνοντας τη διάσταση υπάρχει σαφής διαχωρισμός στα δεδομένα των κλάσεων σε αντίθεση με τη τεχνική PCA.

Μέρος 2ο

Γενικεύοντας την υλοποίηση για το dataset των 3 κλάσεων, τα βήματα διαφοροποιούνται ως εξής:

1. Εφαρμόζουμε **standardization** στο dataset μας με τη βοήθεια της `featureNormalize` η οποία επιστρέφει ένα κανονικοποιημένο διάνυσμα με μέση τιμή 0 και διασπορά 1.
2. Υπολογίζουμε επαναληπτικά για κάθε κλάση το **mean**, τον **πίνακα συνδυασποράς** και το **within-scatter matrix.**
3. Υπολογίζουμε το **global mean** $\boldsymbol{\mu_0}$.

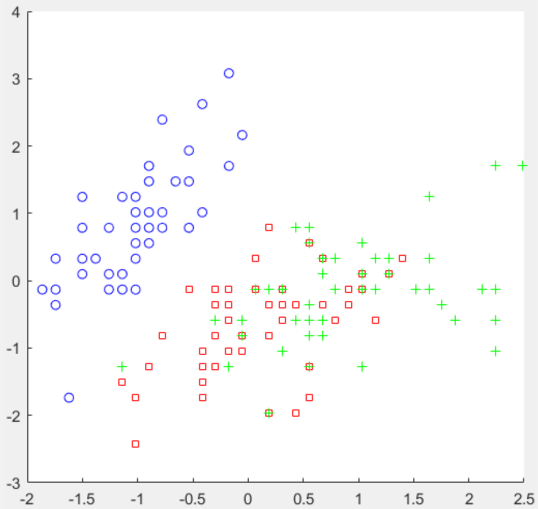
4. Υπολογίζουμε επαναληπτικά για κάθε κλάση το **between-class scatter matrix**:

$$\boldsymbol{S_b} = \sum_{i=1}^{c} P_i(\mu_i - \mu_0)\,(\mu_i - \mu_0)^T$$

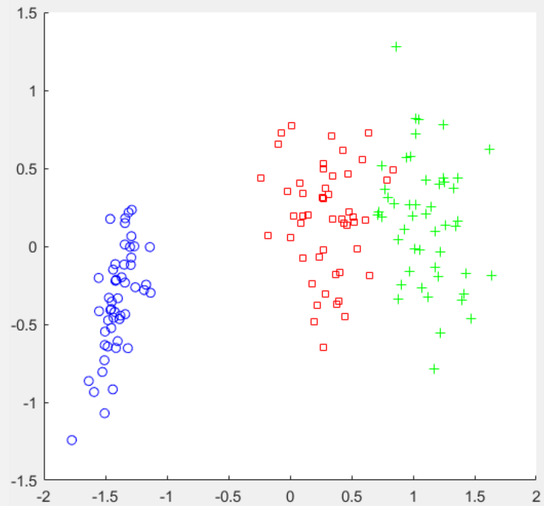
5. Υπολογίζουμε τα **ιδιοδιανύσματα** και τις **ιδιοτιμές** τις οποίες ταξινομούμε σε φθίνουσα σειρά και επιλέγουμε τις πρώτες K ιδιοτιμές όπου K ο επιθυμητός αριθμός μειωμένων διαστάσεων.
6. Κάνουμε **project** τα δεδομένα μας στις K διαστάσεις με την `projectDataLDA` και ύστερα για να τα απεικονίσουμε κάνουμε **reconstruct** χρησιμοποιώντας τις ιδιοτιμές που επιλέξαμε. Αυτό επιτυγχάνεται με την `recoverDataLDA`.

Όπως και προηγουμένως, τα βήματα 2 εώς 5 επιτυγχάνονται στη συνάρτηση `myLDA`. Εκτελώντας τον κώδικα matlab παράγουμε τις ακόλουθες παραστάσεις.

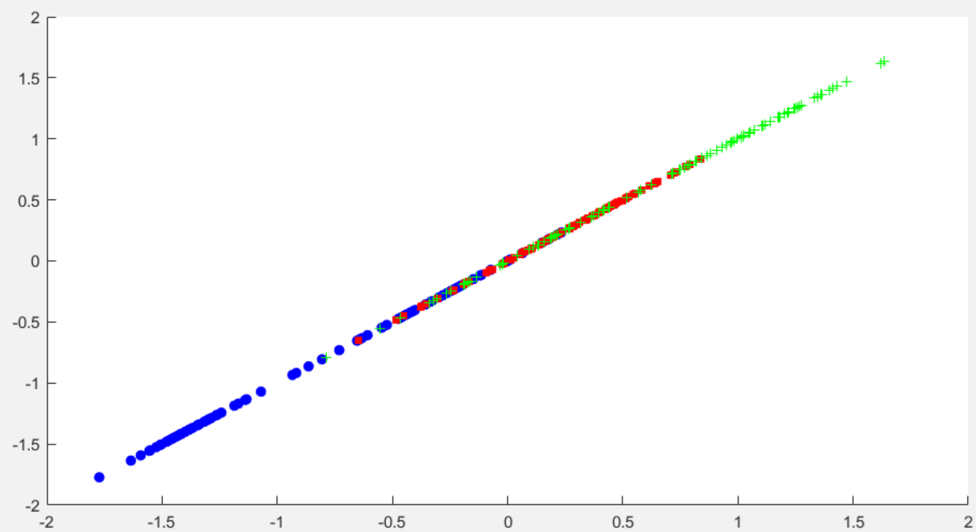
Original Data



Projected Data



Recovered Data



Άσκηση 4

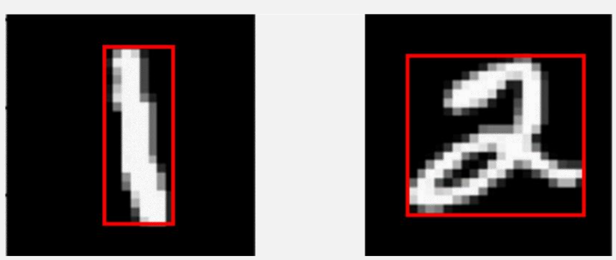
Στην 4η άσκηση υλοποιούμε έναν **Bayes classifier** χρησιμοποιώντας ένα άλλο δημοφιλές dataset, το **mnist**. Αυτό αποτελείται από 60 χιλιάδες εικόνες χειρόγραφων αριθμητικών ψηφίων 0-9. Στόχος είναι να ταξινομήσουμε τις εικόνες των ψηφίων ‘1’ και ‘2’ ως προς το aspect ratio που διαθέτουν, σε 3 κατηγορίες (low, medium, high). Ύστερα γίνεται υπολογισμών των εκ των προτέρων πιθανοτήτων, των πιθανοφανειών και διαφόρων εκ των υστέρων πιθανοτήτων χρησιμοποιώντας τον κανόνα Bayes.

Υλοποίηση

Φορτώνουμε αρχικά το dataset στο matlab. Τα δεδομένα μας εισέρχονται σε ένα struct με πεδία trainX, trainY , testX, testY. Το trainX περιέχει τις πληροφορίες των pixel της κάθε εικόνας ενώ το trainY περιέχει τα labels. Για να μπορούμε να επεξεργαστούμε τα δεδομένα μας εφαρμόζουμε αρχικά μια αναδιάταξη στους πίνακες έτσι ώστε μια εικόνα να θεωρείται ένας δυσδιάστατος πίνακας 28x28.

Αρχικό ζήτημα είναι ο υπολογισμός του **aspect ratio** της κάθε εικόνας. Αυτό ορίζεται ως το λόγο του **πλάτους** προς το **ύψος** των **pixel** του αριθμητικού ψηφίου στην εικόνα. Η ανάλυση αυτή επιτυγχάνεται στη συνάρτηση `computeAspectRatio`.

Διαθέτουμε 4 βοηθητικές μεταβλητές (μια για κάθε κατεύθυνση) οι οποίες δηλώνουν τη θέση του πιο απομακρυσμένου non-black pixel από το κέντρο της εικόνας προς τη κατεύθυνση αυτή. Μόλις διαπεράσουμε ολόκληρη την εικόνα, με δυο απλές αφαιρέσεις μπορούμε να βρούμε το πλάτος και το ύψους του ψηφίου στην εικόνα.



Αφού υπολογίσουμε τα aspect ratios για όλες τις εικόνες των ψηφίων ‘1’ και ‘2’ βρίσκουμε τα ελάχιστα και τα μέγιστά τους για τις αντίστοιχες κλάσεις ψηφίου αλλά και για το συνδυασμό τους. Χωρίζουμε το διάστημα ελάχιστου-μέγιστου aspect ratio σε 3 ίσα υποδιαστήματα τα οποία χαρακτηρίζονται ως Low, Medium και High. Για το συνδιασμό C_1 και C_2 έχουμε:

$$\begin{pmatrix} Low_{0.1\sim 0.86} \\ Med_{0.86\sim 1.6} \\ High_{1.6\sim 2.4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8162 \\ 4471 \\ 67 \end{pmatrix}$$

Παρατήρηση: τα αποτελέσματα φαίνονται λογικά καθώς για το ψηφίο ‘1’ θα μπορούσε κανεις να πει ότι η πλειοψηφία των εικόνων έχουν χαμηλό aspect ratio (μικρό πλάτος, μεγάλο ύψος) ενώ για το ψηφίο ‘2’ συνήθως έχει μεσαίο aspect ratio (περίπου ίσο πλάτος και ύψος). Θετικό είναι επίσης το γεγονός ότι έχουμε ελάχιστες εικόνες οι οποίες έχουν μεγάλο aspect ratio από ένα σύνολο ψηφίων ‘1’ και ‘2’.

Επόμενο βήμα είναι ο υπολογισμός των εκ των προτέρων πιθανοτήτων. Τα παρακάτω αποτελέσματα έχουν παραχθεί από το matlab.

$$\boldsymbol{P(C_1)} = \frac{\#C_1\ images}{\#\ total\ images} = 0.11$$

$$\boldsymbol{P(C_2)} = \frac{\#C_2\ images}{\#\ total\ images} = 0.09$$

Οι πιθανοφάνειες μπορούν να υπολογιστούν ως εξής:

$$\boldsymbol{P(Low|C_1)} = \frac{\#C_1\ low\ images}{\#C_1\ images} = 0.67$$

$$\boldsymbol{P(Med|C_1)} = \frac{\#C_1\ med\ images}{\#C_1\ images} = 0.30$$

$$\boldsymbol{P(High|C_1)} = \frac{\#C_1\ high\ images}{\#C_1\ images} = 0.02$$

$$\boldsymbol{P(Low|C_2)} = \frac{\#C_2\ low\ images}{\#C_2\ images} = 0.77$$

$$\boldsymbol{P(Med|C_2)} = \frac{\#C_2\ med\ images}{\#C_2\ images} = 0.21$$

$$\boldsymbol{P(High|C_2)} = \frac{\#C_2\ high\ images}{\#C_2\ images} = 0.01$$

Ύστερα υπολογίζουμε τις πιθανότητες (evidence):

$$\boldsymbol{P(Low)} = P(Low|C_1)P(C_1) + P(Low|C_2)P(C_2) = 0.15$$

$$\boldsymbol{P(Med)} = P(Med|C_1)P(C_1) + P(Med|C_2)P(C_2) = 0.05$$

$$\boldsymbol{P(High)} = P(High|C_1)P(C_1) + P(High|C_2)P(C_2) \cong 0$$

Και τελικά υπολογίζουμε τις εκ των υστέρων πιθανότητες:

$$\boldsymbol{P(C_1|X = Low)} = \frac{P(Low|C_1)P(C_1)}{P(Low)} = 0.49$$

$$\boldsymbol{P(C_2|X = Low)} = \frac{P(Low|C_2)P(C_2)}{P(Low)} = 0.5$$

Άσκηση 5

Έχουμε ένα πρόβλημα κατηγοριοποίησης σε δύο κλάσεις $\boldsymbol{\omega_1}, \boldsymbol{\omega_2}$ με εκ των προτέρων πιθανότητες $\boldsymbol{P(\omega_1)}, \boldsymbol{P(\omega_2)}$ αντίστοιχα. Τα δείγματα είναι δυσδιάστατα και οι κλάσεις περιγράφονται από κανονικές κατανομές με:

$$\boldsymbol{\mu_1} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{3} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\mu_2} = \begin{pmatrix} \mathbf{6} \\ \mathbf{6} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Sigma_1} = \begin{pmatrix} \mathbf{1.2} & \mathbf{-0.4} \\ \mathbf{-0.4} & \mathbf{1.2} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\Sigma_2} = \begin{pmatrix} \mathbf{1.2} & \mathbf{-0.4} \\ \mathbf{-0.4} & \mathbf{1.2} \end{pmatrix},$$

Για την κατηγοριοποίηση γνωρίζουμε ότι:

- $x = \omega_1$ εάν $P(\omega_1|x) > P(\omega_2|x)$
- $x = \omega_2$ εάν $P(\omega_2|x) > P(\omega_1|x)$

Το σύνορο απόφασης βρίσκεται εάν λυθεί η παρακάτω εξίσωση:

$$P(\omega_1|x) = P(\omega_2|x) \Leftrightarrow P(x|\omega_1)P(\omega_1) = P(x|\omega_2)P(\omega_2)$$

Για οποιαδήποτε κλάση $\boldsymbol{\omega_j}$ ισχύει ότι:

$$P(x|\omega_j) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}|\Sigma_j|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu_j)^T \Sigma_j^{-1}(x-\mu_j)}$$

Η περίπτωσή μας περιλαμβάνει 2 διαστάσεις ($d = 2$), συνεπώς:

$$P(x|\omega_1) = \frac{1}{(2\pi)|\Sigma_1|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu_1)^T \Sigma_1^{-1}(x-\mu_1)}$$

$$P(x|\omega_2) = \frac{1}{(2\pi)|\Sigma_2|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu_2)^T \Sigma_2^{-1}(x-\mu_2)}$$

Επειδή

$$|\Sigma_1| = 1.2^2 - (-0.4)^2 = 1.28$$

$$|\Sigma_2| = 1.2^2 - 0.4^2 = 1.28$$

τοτε η αρχική εξίσωση γίνεται:

$$\frac{1}{(2\pi)|\Sigma_1|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu_1)^T \Sigma_1^{-1}(x-\mu_1)} P(\omega_1) = \frac{1}{(2\pi)|\Sigma_2|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu_2)^T \Sigma_2^{-1}(x-\mu_2)} P(\omega_2) \Leftrightarrow$$

$$e^{-\frac{1}{2}(x-\mu_1)^T \Sigma_1^{-1}(x-\mu_1)} P(\omega_1) = e^{-\frac{1}{2}(x-\mu_2)^T \Sigma_2^{-1}(x-\mu_2)} P(\omega_2)$$

Λογαριθμίζοντας παίρνουμε την ακόλουθη σχέση:

$$ln(e^{-\frac{1}{2}(x-\mu_1)^T\Sigma_1^{-1}(x-\mu_1)}P(\omega_1)) = ln(e^{-\frac{1}{2}(x-\mu_2)^T\Sigma_2^{-1}(x-\mu_2)}P(\omega_2)) \Leftrightarrow$$

$$ln(e^{-\frac{1}{2}(x-\mu_1)^T\Sigma_1^{-1}(x-\mu_1)}) + ln(P(\omega_1)) = ln(e^{-\frac{1}{2}(x-\mu_2)^T\Sigma_2^{-1}(x-\mu_2)}) + ln(P(\omega_2)) \Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{2}(x-\mu_1)^T\Sigma_1^{-1}(x-\mu_1) + ln(P(\omega_1)) = -\frac{1}{2}(x-\mu_2)^T\Sigma_2^{-1}(x-\mu_2) + ln(P(\omega_2)) \Leftrightarrow$$

$$(x-\mu_1)^T\Sigma_1^{-1}(x-\mu_1) - 2ln(P(\omega_1)) = (x-\mu_2)^T\Sigma_2^{-1}(x-\mu_2) - 2ln(P(\omega_2)) \Leftrightarrow$$

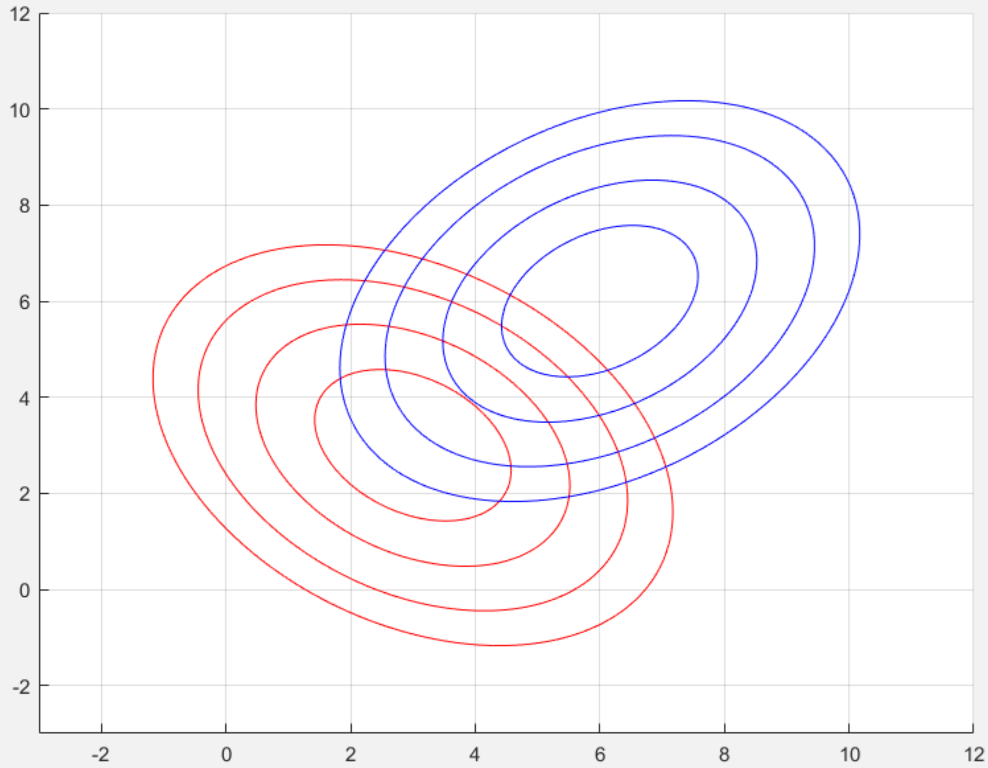
$$-2ln(P(\omega_1)) + \frac{1}{1.28}[x_1-3 \quad x_2-3]\begin{bmatrix}1.2 & 0.4\\0.4 & 1.2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1-3\\x_2-3\end{bmatrix}$$
$$= -2ln(P(\omega_2)) + \frac{1}{1.28}[x_1-6 \quad x_2-6]\begin{bmatrix}1.2 & -0.4\\-0.4 & 1.2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1-6\\x_2-6\end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\vdots$$

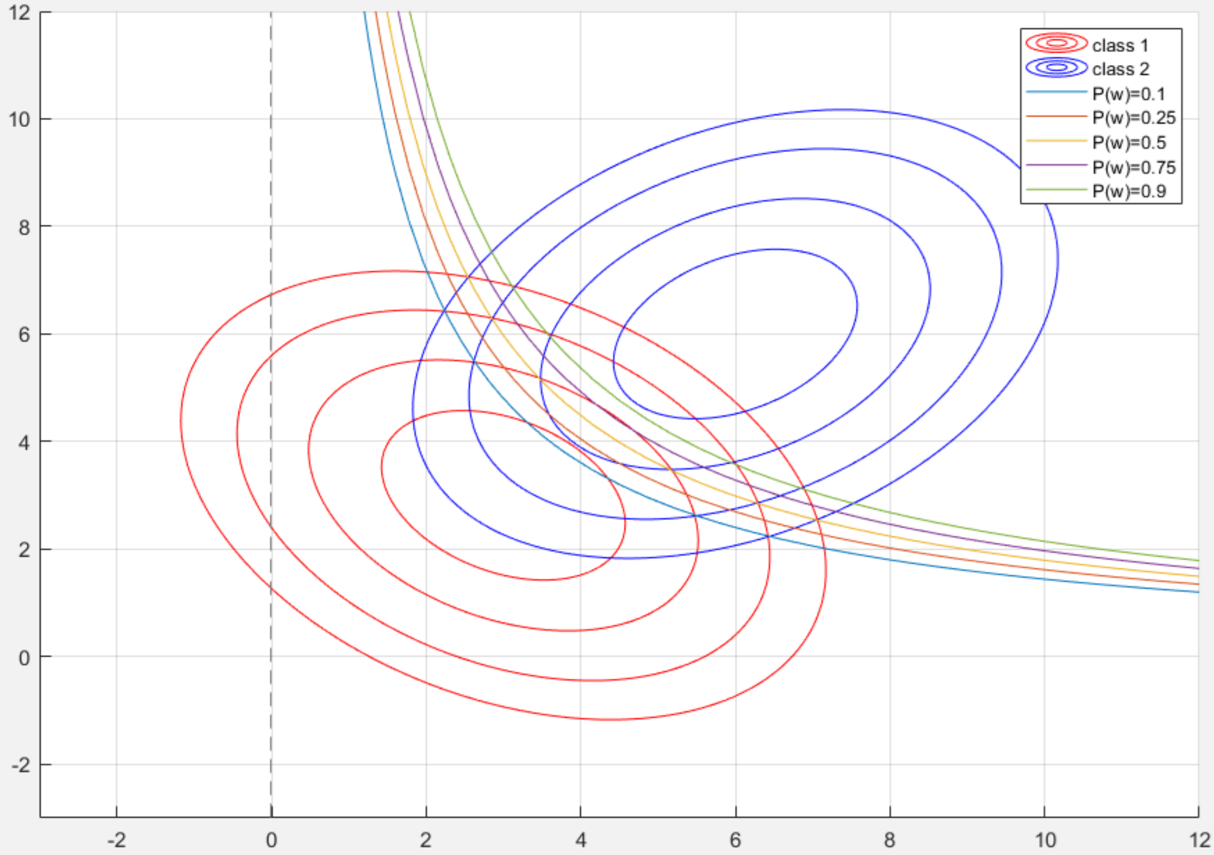
$$2ln\left(\frac{P(\omega_2)}{P(\omega_1)}\right) + 1.25x_1x_2 = 22.4 \Leftrightarrow$$

$$\boldsymbol{x_1} = \frac{22.4 - 2ln\left(\frac{P(\omega_2)}{P(\omega_1)}\right)}{1.25x_2}$$

Παίρνουμε τη σχέση αυτή και την εισαγάγουμε στο matlab. Αρχικά σχεδιάζουμε μερικές ισοϋψείς καμπύλες των δεσμευμένων πιθανοτήτων $P(x|\omega_i)$ για κάθε κλάση σύμφωνα με τα χαρακτηριστικά των κανονικών κατανομών που έχουμε ορίσει.



Επόμενο ζήτημα είναι να σχεδιάσουμε τα σύνορα απόφασης για τις ακόλουθες τιμές του $P(\omega_1) = 0.1, 0.25, 0.5, 0.75, 0.9$ δεδομένου ότι $P(\omega_2) = 1 - P(\omega_1)$. Παράγουμε λοιπόν τα ακόλουθα αποτελέσματα:



Παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται το $P(\omega_1)$ τόσο το σύνορο απόφασης τείνει προς τη κλάση ω_2.

Επαναλαμβάνουμε το πείραμά μας για $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \begin{pmatrix} 1.2 & 0.4 \\ 0.4 & 1.2 \end{pmatrix}$. Θέλουμε και πάλι να λύσουμε την εξίσωση:

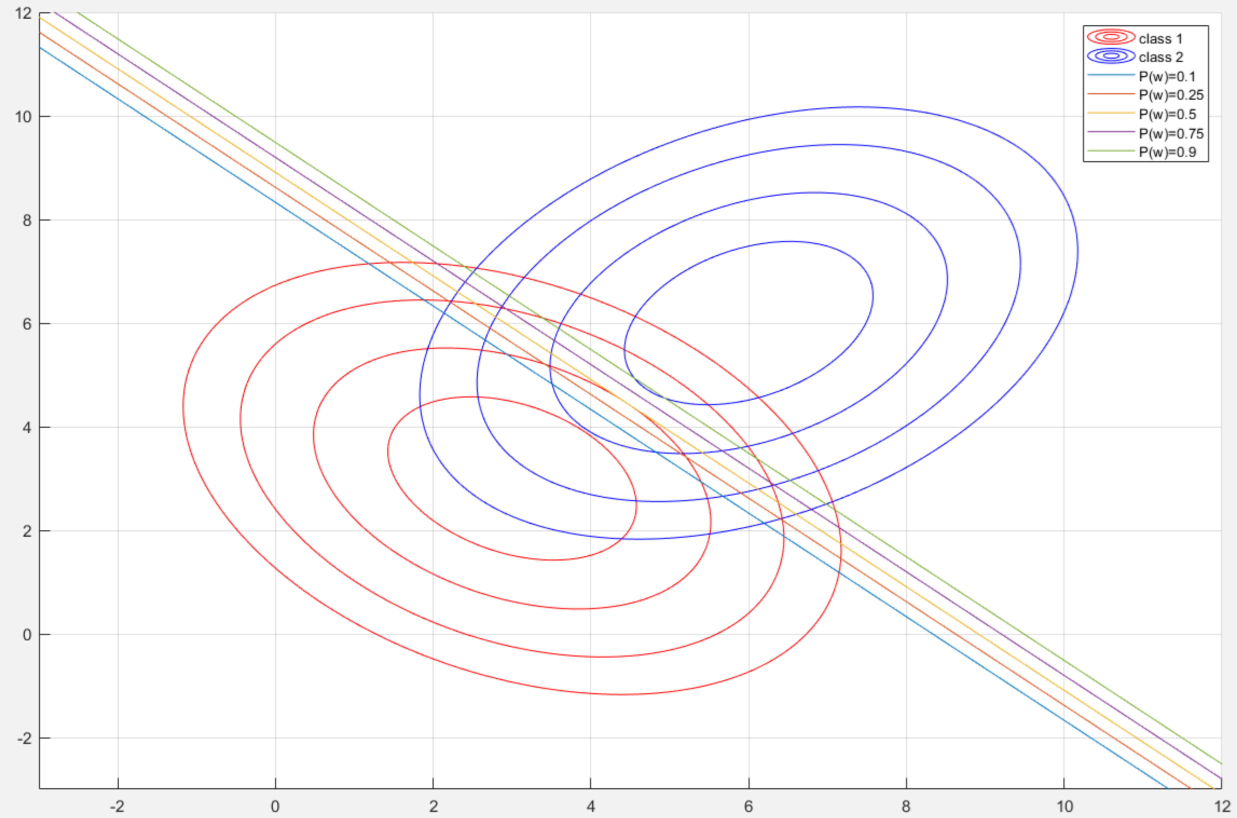
$$P(\omega_1|x) = P(\omega_2|x) \Leftrightarrow$$

$$\vdots$$

$$2ln\left(\frac{P(\omega_2)}{P(\omega_1)}\right) + 7.6(x_1 + x_2) = 67.7 \Leftrightarrow$$

$$\boldsymbol{x_1} = -x_2 + \frac{67.7 - 2ln\left(\frac{P(\omega_2)}{P(\omega_1)}\right)}{7.6}$$

Βάζοντας την εξίσωση στο matlab και ακολουθώντας τα ίδια βήματα με προηγουμένως παράγουμε την παρακάτω γραφική παράσταση:



Αυτή τη φορά το σύνορο απόφασης είναι μια ευθεία γραμμή, όμως όπως και προηγουμένως, όσο αυξάνεται το $P(\omega_1)$ αυτό τείνει προς τη κλάση ω_2.

Άσκηση 6

Έχουμε πρόβλημα κατηγοριοποίησης μεταξύ δυο κλάσεων $\boldsymbol{\omega_1}$**,** $\boldsymbol{\omega_2}$ με ίσες εκ των προτέρων πιθανότητες $P(\omega_1) = P(\omega_2)$. Τα δείγματα ακολουθούν κατανομή Rayleigh με $\boldsymbol{\sigma_1} = 1$, $\boldsymbol{\sigma_2} = 2$ και:

$$\boldsymbol{p(x|\omega_1)} = \begin{cases} \dfrac{x}{\sigma_i^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_i^2}}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Με το κριτήριο ελαχιστοποίησης μέσου ρίσκου για δύο κλάσεις, η ταξινόμηση γίνεται με βάση τις ποσότητες:

$$l_1 = \lambda_{11} P(\omega_1) p(x|\omega_1) + \lambda_{21} P(\omega_2) p(x|\omega_2)$$

$$l_2 = \lambda_{12} P(\omega_1) p(x|\omega_1) + \lambda_{22} P(\omega_2) p(x|\omega_2)$$

Το ρίσκο ελαχιστοποιείται όταν:

$$l_1 = l_2 \Leftrightarrow$$

$$\lambda_{21}P(\omega_2)p(x|\omega_2) = \lambda_{12}P(\omega_1)p(x|\omega_1) \xLeftrightarrow{P(\omega_1)=P(\omega_2)}$$

$$\lambda_{21}p(x|\omega_2) = \lambda_{12}p(x|\omega_1) \Leftrightarrow$$

$$\frac{p(x|\omega_1)}{p(x|\omega_2)} = \frac{\lambda_{21}}{\lambda_{12}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\frac{x}{\sigma_1^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}}}{\frac{x}{\sigma_2^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma_2^2}}} = \frac{1}{0.5} \Leftrightarrow$$

$$2e^{\frac{x^2}{8}-\frac{x^2}{2}} = 1 \Leftrightarrow$$

$$e^{-\frac{3x^2}{8}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$3x^2 = 8ln(2) \Leftrightarrow$$

$$x = \pm 1.35 \xRightarrow{x<0\ \alpha\pi o\rho\rho\iota\pi\tau\varepsilon\tau\alpha\iota}$$

$$\boldsymbol{x} = 1.35$$