Chap 6 : Graphes

1 Vocabulaire

1.1 Introduction aux graphes

1.1.1 Graphe non-orienté

Définition:

Un graphe non-orienté G est un ensemble de sommets reliés par des arêtes.

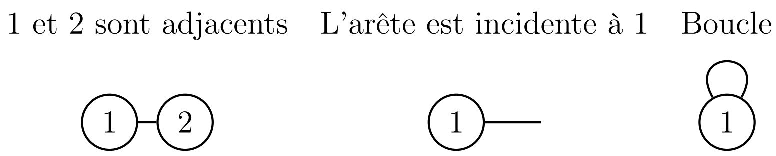
Exemple:

1.1.2 Adjacence et incidence

Définition:

Deux sommets reliés par une arête sont dits adjacents.
Une arête reliant deux sommets est dite incidente à ces deux sommets.
Une arête est une boucle si elle relie un sommet à lui-même.

Exemple:

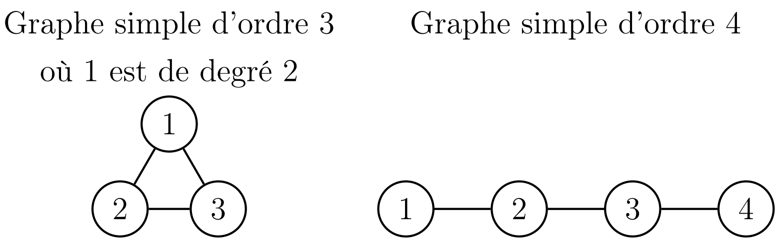


1.1.3 Ordre et degré

Définition:

L'ordre d'un graphe est le nombre total de ses sommets.
Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes incidentes à ce sommet, les boucles comptant pour deux. il est noté δ
Un graphe est dit simple si au plus une arête relie deux sommets et s'il n'y a pas de boucle sur un sommet.

Exemple:

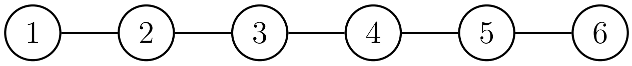


Propriété:

Soit G un graphe simple non-orienté, la somme du degré des sommets de G est égale au double du nombre d'arêtes de G.

Exemple:

La somme du degré des sommets de G vaut : $2 \times Nb_{aretes} = 2 \times 5 = 10$



Conséquence:

Dans un graphe simple non-orienté, le nombre de sommets de degré impair est pair.

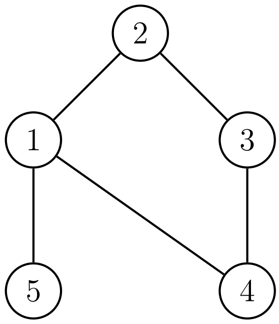
1.1.4 Graphe connexe

Définition:

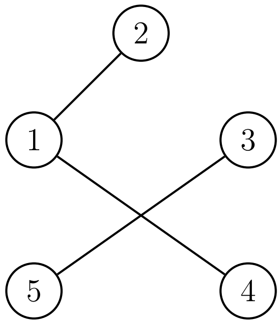
> Un graphe est dit connexe si tout sommet est relié à tout autre sommet par une arête ou une suite d'arêtes

Exemple:

Ce graphe est connexe



Ce graphe n'est pas connexe



1.2 Graphes orientés

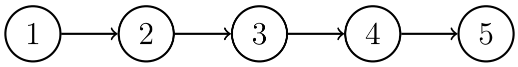
1.2.1 Définition

Définition:

> Un graphe est orienté lorsque ses arêtes sont définies par une origine et une extrémité.

Exemple:

Graphe simple orienté d'ordre 5. 3 est une origine et 4 est une extrémité



1.2.2 Arcs

Définition:

> Une arête orientée est appelée un arc.
>
> Une flèche indique le sens dans lequel un arc peut être parcourue.

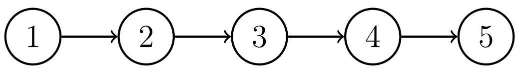
1.2.3 Degré entrant/sortant

Définition:

> Le degré entrant d'un sommet est le nombre d'arcs dirigés vers ce sommet.
>
> Le degré sortant est le nombre d'arcs partant de ce sommet.

Exemple:

1 est de degré entrant 0 et de degré sortant 1, 3 est de degré entrant 1 et de degré sortant 1



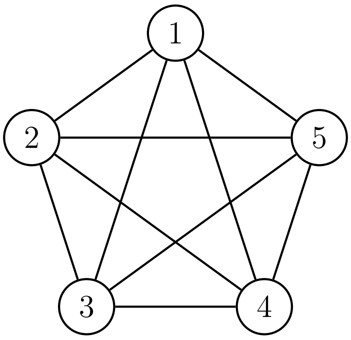
1.3 Graphes complets

Définition:

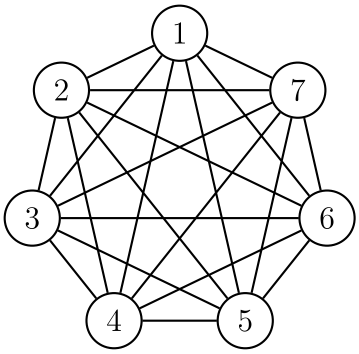
Un graphe non-orienté est dit complet si tous ses sommets sont adjacents.

Exemple:

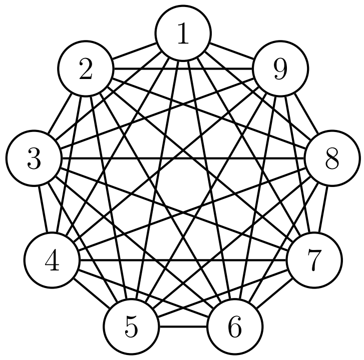
Ordre 5



Ordre 7



Ordre 9



1.4 Chaînes

1.4.1 Définition

Définition:

Une chaîne est une suite d'arêtes reliant un sommet à un autre.

Remarque:

Un graphe connexe est donc un graphe pour lequel il existe une chaîne passant par tous ses sommets.

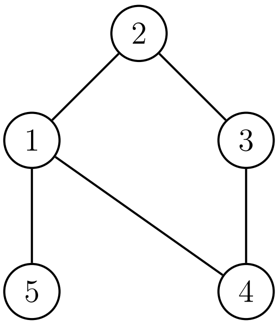
1.4.2 Longueur d'une chaîne

Définition:

Le **nombre d'arêtes** constituants une chaîne est appellé **longueur** de cette chaîne.

Exemple:

La chaîne 5-1-2-3-4-1-5 est de longueur 6



1.4.3 Chaîne simple/élémentaire

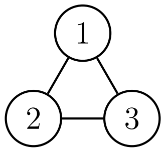
Définition:

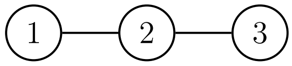
Une chaîne est **simple** si elle ne passe pas deux fois par la même **arête**.

Une chaîne est **élémentaire** si elle ne passe pas deux fois par le même **sommet**.

Exemple:

1-2-3-1 est une chaîne simple   La chaîne 1-2-3 est élémentaire





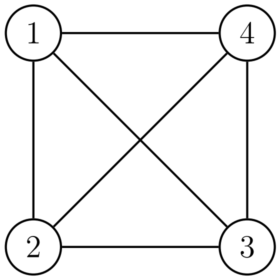
1.4.4 Chaîne fermée

Définition:

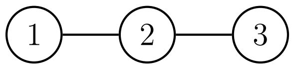
Une chaîne est dite **fermée** si le premier et le dernier sommet de la chaîne sont confondus.

Exemple:

La chaîne 1-2-3-4-1 est fermée
mais la chaîne 1-2-3-4-2 n'est pas fermée



La chaîne 1-2-3 n'est pas fermée
mais la chaîne 1-2-3-2-1 est fermée



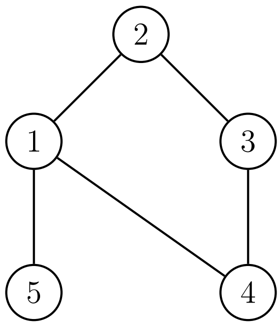
1.4.5 Cycle

Définition:

Un **cycle** est une chaîne **fermée** qui ne repasse **pas deux fois par la même arête**.

Exemple:

La chaîne 1-2-3-4-1 est un cycle
mais la chaîne 5-1-2-3-4 n'en est pas un



1.4.6 Chaîne d'Euler

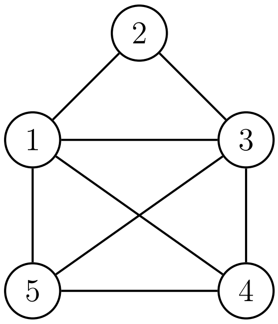
Définition:

Pour qu'une chaine soit eulerienne, deux conditions doivent être réunies:

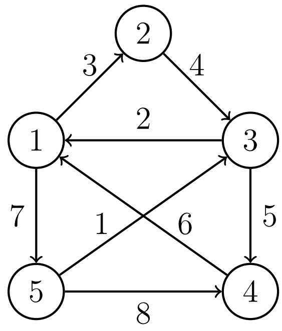
- La chaine doit passer par chacune des arêtes du graphe
- La chaine ne doit pas passer deux fois par la même arête

Exemple:

Cette enveloppe peut être tracée par une chaîne eulerienne



En partant de 5 et en suivant les flêches, on peut la tracer sans lever le stylo



Remarques:

- Une chaîne eulerienne n'est pas nécessairement fermée (ex:l'enveloppe), mais si elle l'est on appelle donc cette chaîne un cycle eulerien.
- Un graphe connexe non-orienté admet une chaîne eulérienne seulement si le nombre de sommets de degré impair vaut 0 ou 2.
- Si le graphe connexe a deux sommets de degré impair, ce sont les extrémités de la chaîne eulérienne.
- Un graphe connexe admet un cycle eulérien si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair.

1.5 Matrice d'adjacence

Définition:

La matrice adjacente à un graphe d'ordre n est la matrice carré de taille n où a_{ij} est la nombre d'arêtes reliant le point i au point j.

Exemple:

M est la matrice adjacente au graphe au dessous

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$