

# Chap 6 : Graphes

## 1 Vocabulaire

### 1.1 Introduction aux graphes

#### 1.1.1 Graphe non-orienté

Définition:

Un graphe non-orienté  $G$  est un ensemble de sommets reliés par des arêtes.

Exemple:



#### 1.1.2 Adjacence et incidence

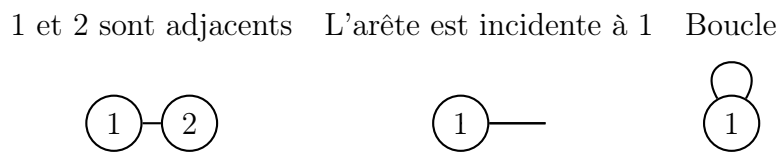
Définition:

Deux sommets reliés par une arête sont dits adjacents.

Une arête reliant deux sommets est dite incidente à ces deux sommets.

Une arête est une boucle si elle relie un sommet à lui-même.

Exemple:



#### 1.1.3 Ordre et degré

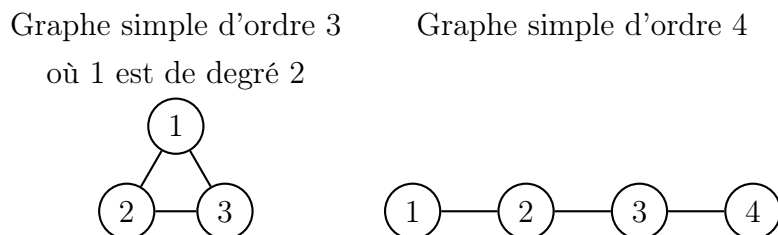
Définition:

L'ordre d'un graphe est le nombre total de ses sommets.

Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes incidentes à ce sommet, les boucles comptant pour deux. il est noté  $\delta$

Un graphe est dit simple si au plus une arête relie deux sommets et s'il n'y a pas de boucle sur un sommet.

Exemple:

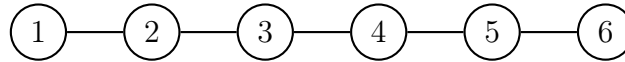


Propriété:

Soit  $G$  un graphe simple non-orienté, la somme du degré des sommets de  $G$  est égale au double du nombre d'arêtes de  $G$ .

Exemple:

La somme du degré des sommets de G vaut :  $2 \times Nb_{arêtes} = 2 \times 5 = 10$



Conséquence:

Dans un graphe simple non-orienté, le nombre de sommets de degré impair est pair.

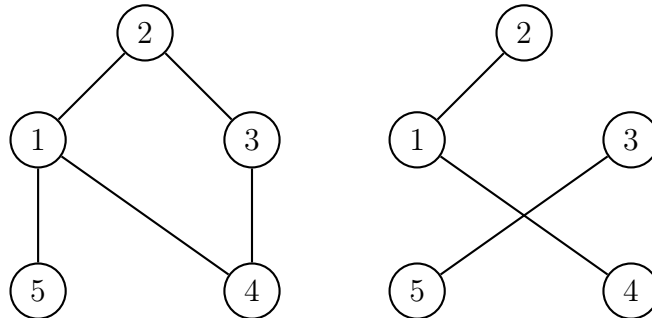
#### 1.1.4 Graphe connexe

Définition:

Un graphe est dit connexe si tout sommet est relié à tout autre sommet par une arête ou une suite d'arêtes

Exemple:

Ce graphe est connexe    Ce graphe n'est pas connexe



## 1.2 Graphes orientés

### 1.2.1 Définition

Définition:

Un graphe est orienté lorsque ses arêtes sont définies par une origine et une extrémité.

Exemple:

Graphe simple orienté d'ordre 5. 3 est une origine et 4 est une extrémité



### 1.2.2 Arcs

Définition:

Une arête orientée est appelée un arc.

Une flèche indique le sens dans lequel un arc peut être parcourue.

### 1.2.3 Degré entrant/sortant

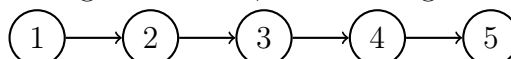
Définition:

Le degré entrant d'un sommet est le nombre d'arcs dirigés vers ce sommet.

Le degré sortant est le nombre d'arcs partant de ce sommet.

Exemple:

1 est de degré entrant 0 et de degré sortant 1, 3 est de degré entrant 1 et de degré sortant 1

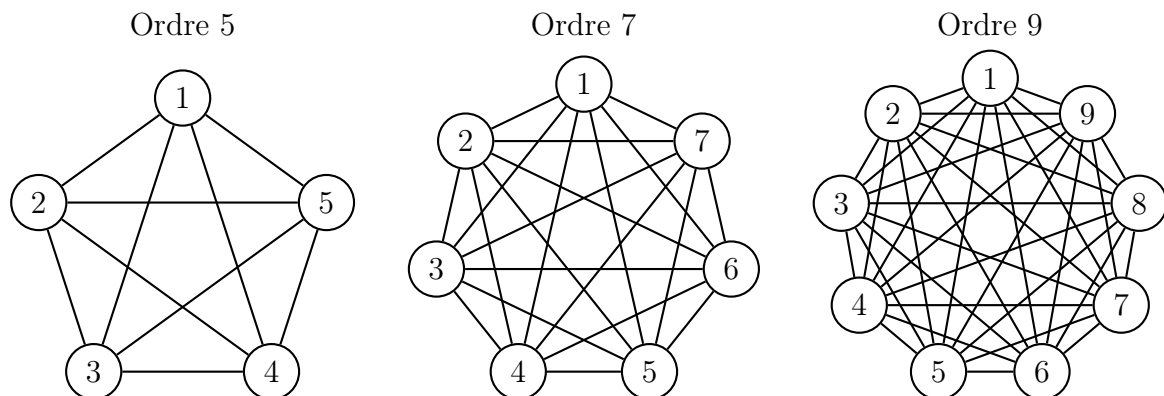


## 1.3 Graphes complets

Définition:

Un graphe non-orienté est dit complet si tous ses sommets sont adjacents.

Exemple:



## 1.4 Chaînes

### 1.4.1 Définition

azd

Remarque:

Un graphe connexe est donc un graphe pour lequel il existe une chaîne passant par tous ses sommets.

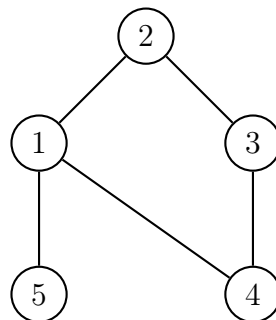
### 1.4.2 Longueur d'une chaîne

Définition:

Le **nombre d'arêtes** constituant une chaîne est appelé **longueur** de cette chaîne

Exemple:

La chaîne 5-1-2-3-4-1-5 est de longueur 6



### 1.4.3 Chaîne simple/élémentaire

Définition:

Une chaîne est **simple** si elle ne passe pas deux fois par la même **arête**

Une chaîne est **élémentaire** si elle ne passe pas deux fois par le même **sommet**

Exemple:

1-2-3-1 est une chaîne simple    La chaîne 1-2-3 est élémentaire



#### 1.4.4 Chaîne fermée

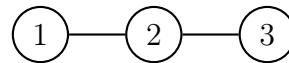
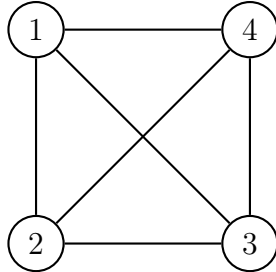
Définition:

Une chaîne est dite **fermée** si le premier et le dernier sommet de la chaîne sont confondus

Exemple:

La chaîne 1-2-3-4-1 est fermée  
mais la chaîne 1-2-3-4-2 n'est pas fermée

La chaîne 1-2-3 n'est pas fermée  
mais la chaîne 1-2-3-2-1 est fermée



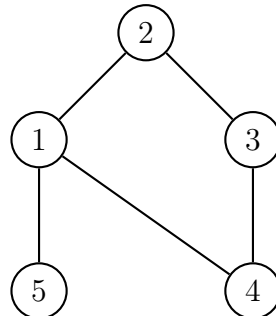
#### 1.4.5 Cycle

Définition:

Un **cycle** est une chaîne **fermée** qui ne repasse **pas deux fois** par la **même arête**

Exemple:

La chaîne 1-2-3-4-1 est un cycle  
mais la chaîne 5-1-2-3-4 n'en est pas un



#### 1.4.6 Chaîne d'Euler

Définition:

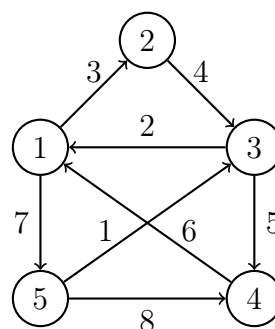
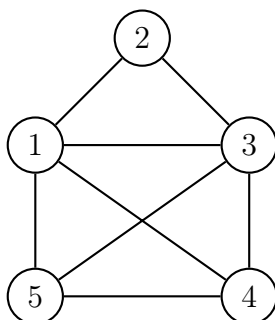
Pour qu'une chaîne soit eulerienne, deux conditions doivent être réunies:

- La chaîne doit passer par chacune des arêtes du graphe
- La chaîne ne doit pas passer deux fois par la même arête

Exemple:

Cette enveloppe peut être tracée  
par une chaîne eulerienne

En partant de 5 et en suivant les flèches,  
on peut la tracer sans lever le stylo



Remarque:

Une chaîne eulérienne n'est pas nécessairement fermée (ex:l'enveloppe), mais si elle l'est on appelle donc cette chaîne un cycle eulérien.

## 2 Graphes orientés et lien avec les matrices

### 2.1 Graphes orientés

### 2.2 Matrices

#### 2.2.1 Matrice d'adjacence

#### 2.2.2 Puissances de matrices

## 3 Pour aller plus loin

### 3.1 Chaîne de Markov

