

Αριθμητικές προσομοιώσεις νεφών σε γαλαξίες

Παπαχρήστου Μιχάλης

24 Ιουνίου 2017

Σε αυτή την εργασία θα προσπαθήσουμε να μελετήσουμε μέσω αριθμητικών εξομοιώσεων τη δυναμική ενός μοριακού νέφους (MC) μέσα στο διαγαλαξιακό μέσο (ISM). Για τις αριθμητικές εξομοιώσεις θα χρησιμοποιήσουμε τον κώδικα PLUTO ([mignone_pluto: 2007](#)) ώστε να μελετήσουμε μια όσο το δυνατόν ρεαλιστικότερη απεικόνιση ενός σφαιρικού μοριακού νέφους χτίζοντας την, βήμα βήμα μέσω διαφορετικών φυσικών διεργασιών (Radiative Cooling, Magnetic Fields, Gravity, etc)

1 Μοριακά Νέφη και διαγαλαξιακός χώρος

Στον μεσοαστρικό χώρο υπάρχει μια τεράστια ποσότητα ύλης υπό τη μορφή αερίου και σκόνης. Η ύλη αυτή, που μπορούμε να πούμε ότι είναι το πρωτόγενες καύσιμο στη διαδικασία αστρικής δημιουργίας των γαλαξιών, αποτελείται περίπου κατά 99% από αέριο και κατά 1% από σκόνη με τη συνολική της μάζα για το δικό μας γαλαξία να είναι της τάξης των $10^9 M_{\odot}$, ενώ η πυκνότητα της κυμαίνεται από 10^{-4} έως 10^6 cm^{-3} .

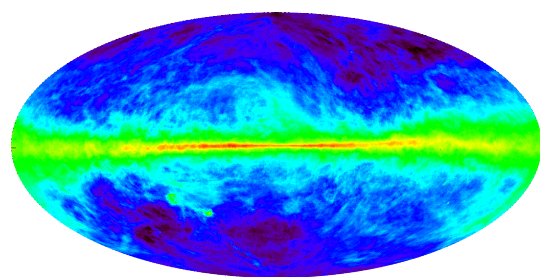
Μεσοαστρικό Αέριο Το Μεσοαστρικό Αέριο παρατηρείται σε νεφελώδη μορφή και αποτελείται κυρίως (περίπου το 90%) από υδρογόνο σε ατομική (H), ιονισμένη (HII) και μοριακή (H_2) κατάσταση. Δεύτερο σε αναλογία είναι το Ήλιο (He) (περίπου 9%) ενώ το υπόλοιπο 1% είναι βαρύτερα στοιχεία (C,O,Ne,Mg,Fe, κ.α.) και μόρια (CO,CS, κ.α.).

Μεσοαστρική Σκόνη Η Μεσοαστρική Σκόνη αποτελείται κυρίως από άνθρακα και πυρίτιο σε ενώσεις με Υδρογόνο, Οξυγόνο, Μαγνήσιο και Σίδηρο ενώ το μέγεθος των κόκκων της σκόνης κυμαίνεται από 0.01 μm έως 1 μm ακολουθώντας μια κατανομή δύναμης όπου τα μικρότερα μεγέθη είναι πληθύτερα από τα μεγαλύτερα. Η Μεσοαστρική Σκόνη παρατηρείται στις σπείρες του Γαλαξία μας (αλλά και σε άλλους γαλαξίες) με τη χαρακτηριστική μορφή τεράστιων σκοτεινών "δρόμων" λόγω της επισκότισης των όπισθεν αστέρων που προκύπτει από την απορρόφηση και σκέδαση του ορατού φωτός.

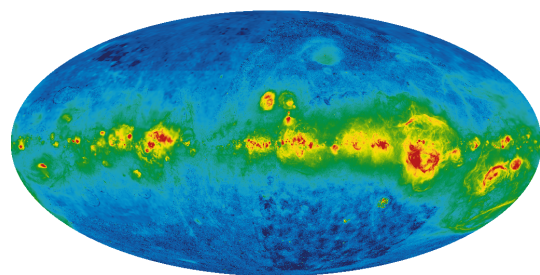
2 Φάσεις και χαρακτηριστικά της Μεσοαστρικής Ύλης

Η Μεσοαστρική Ύλη (ISM) απαντάται σε τρεις φάσεις με διαφορετικά φυσικά και χημικά χαρακτηριστικά: ¹ τη **ψυχρή**, με θερμοκρασίες κάτω των

¹Για τα χημικά χαρακτηριστικά αναφερόμαστε στη σύνθεση των μορίων και στην αναλογία των στοιχείων. Στα φυσικά χαρακτηριστικά αναφερόμαστε στη πυκνότητα και τη θερμοκρασία της Ύλης



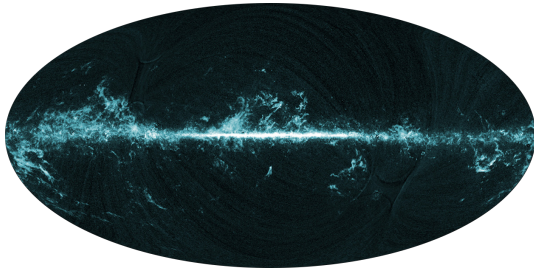
Σχήμα 1: Εκπομπή του HI στα 21.1 cm (Kalberla et al., 2005) Η εκπομπή της γραμμής 21.1 cm στα ραδιοκύματα που οφείλεται στη μετάπτωση αντιστροφής του spin του πρωτονίου και του ηλεκτρονίου στη βασική κατάσταση του ατόμου του Υδρογόνου. Η ενεργειακή διαφορά των καταστάσεων είναι $h\nu = 6 \times 10^{-6} \text{ eV}$, η οποία αντιστοιχεί σε μήκος κύματος 21 cm.



Σχήμα 2: Εκπομπή Ha από συνδυασμό τριών διαφορετικών παρατηρήσεων (WHAM - VTSS - SHASSA) [finkbeiner_2003](#) Η εκπομπή Ha (656.28 nm) προέρχεται από την επανασύνδεση ιονισμένων ατόμων υδρογόνου κοντά σε θερμούς αστέρες O και B (HII Regions).

Πίνακας 1: Χαρακτηριστικά της μεσοαστρικής ύλης

Κατηγορία	Θερμοκρασία (K)	Πυκνότητα (cm^{-3})
Μοριακά Νέφη	10-50	$>10^3$
Ψυχρά Νέφη HI	100	30
Θερμό HI	10^3	0.1
Θερμό HII	10^4	10^{-2}
Περιοχές HII	10^4	>100
Υπέρθερμο Ιονι- σμένο αέριο	10^6 έως 10^7	10^{-3}



Σχήμα 3: Εκπομπή CO όπως τη χαρτογράφησε το Planck. [planck_2014](#)

Το H_2 είναι ένα πλήρως συμμετρικό μόριο επομένως δεν έχει μόνιμη διπολική ροπή. Αυτό έχει σαν συνέπεια η διέγερση του να είναι σε θερμοκρασίες τις τάξεις των 500 K. Άρα για τις τυπικές θερμοκρασίες των μοριακών νεφών 10–50 K είναι αδύνατον να το παρατηρήσουμε άμεσα.

Ο εναλλακτικός τρόπος παρατήρησης του H_2 είναι εμμέσως μέσω της εκπομπής διαφορετικών μορίων που είναι πιο "ευαίσθητα" στις χαμηλές θερμοκρασίες, όπως του CO που είναι το δεύτερο σε αναλογία μόριο στο Σύμπαν και έχει μόνιμη διπολική ροπή (άρα έχουμε περιστροφικές ενεργειακές μεταβάσεις) πράγμα που επιτρέπει να εκπέμπει σημαντικά στο ραδιοφωνικό φάσμα..

Η χαμηλότερη μετάβαση αντιστοιχεί σε θερμοκρασία 5.5 K και αποδίδει ένα ραδιοφωνικό φωνόνιο στα 2.6 mm.

100 K, πυκνότητα 30 έως 50 cm^{-3} και ποσοστό ιονισμού κάτω του 0.1%, που αποτελείται από μοριακό και ατομικό αέριο Υδρογόνου και σκόνη, τη **θερμή**, με θερμοκρασίες της τάξης των 10^3 έως 10^4 K, πυκνότητες 0.3 cm^{-3} , που αποτελείται από ατομικό και ιονισμένο αέριο Υδρογόνο (ποσοστό ιονισμού 2-20%) και την **υπέρθερμη** που οφείλεται σε κρουστικά κύματα εκρήξεων υπερnova και αστρικών ανέμων με θερμοκρασίες τάξης 10^6 K και πυκνότητες μικρότερες των 0.01 cm^{-3} .

3 Μοριακά Νέφη

Τα Μοριακά Νέφη είναι περιοχές όπου ψυχρή μεσοαστρική ύλη έχει πυκνότητες ικανοποιητικά μεγαλύτερες από τη μέση πυκνότητα του μεσοαστρικού υλικού έτσι η ιδιοβαρύτητα του νέφους να παίζει σημαντικό ρόλο στη δυναμική του. Καθώς το μοριακό νέφος καταρρέει, κατακρημνίζεται σε όλο και πιο συμπυκνωμένες δομές έως ότου η πυκνότητα και η μάζα σε μια τέτοια περιοχή είναι αρκετή ώστε να γεννηθούν νέοι αστέρες.

Όπως φαίνεται και από το όνομα τους, τα Μοριακά Νέφη αποτελούνται κυρίως από μοριακό Υδρογόνο H_2 . Στο γαλαξία μας πάνω από το 80% του μοριακού Υδρογόνου βρίσκεται σε μοριακά νέφη καταναμεμένα πάνω στις σπείρες του δίσκου αλλά κυρίως σε ένα δακτύλιο ακτίνας 3 με 5 kpc από το κέντρο του γαλαξία [rathborne_2009](#) Από παρατηρήσεις στο CO τα μοριακά νέφη δείχνουν να έχουν μάζες που κυμαίνονται από 10^3 έως $10^6 M_\odot$ με μια κατανομή νόμου δύναμης -1.6 . [stahlern_2004](#)

Για να δημιουργηθεί το Μοριακό Υδρογόνο καταλυτικό ρόλο παίζει η μεσοαστρική σκόνη. Όταν δύο άτομα Υδρογόνου ενώνονται και δημιουργούν ένα μόριο H_2 αυτό κερδίζει ενέργεια η οποία όμως δεν μπορεί να αποδοθεί στο περιβάλλον με αποτέλεσμα το μόριο να διασπάται. Παρολαυτά αν η διαδικασία αυτή γίνει πάνω σε έναν κόκκο σκόνης, τότε αυτός λειτουργεί καταλυτικά απορροφώντας το πλεόνασμα ενέργειας και το μόριο παραμένει σταθερό. Έτσι το ουδέτερο Υδρογόνο λειτουργεί σαν καύσιμο που τροφοδοτεί τις πυκνότερες περιοχές του μοριακού Υδρογόνου.

Ένα τυπικό μοριακό νέφος επιβιώνει για 3×10^7 yrs πριν καταστραφεί από τους βίαιους αστρικούς ανέμους των αστέρων τύπου O και B που έχουν δημιουργηθεί στο εσωτερικό του. Κατά τη διάρκεια της ζωής του το νέφος αποδίδει τελικά ένα 3% της μάζας του σε αστέρες. Έτσι για παράδειγμα αν θεωρήσουμε μια τιμή της συνολικής μάζας του μοριακού H_2 στο Γαλαξιακό δίσκο $2 \times 10^9 M_\odot$ βρίσκουμε ότι ο ρυθμός δημιουργίας αστέρων (SFR) για το Γαλαξία μας είναι περίπου $2 M_\odot$ ανά έτος.

Πίνακας 2: Χαρακτηριστικά και διαφορετικοί τύποι Μοριακών Νεφών

Κατηγορία	Μέση ακτίνα (pc)	Θερμοκρασία (K)	Πυκνότητα H_2 (cm^{-3})	Μάζα (M_\odot)
Γιγαντιαίο Μοριακό Νέφος	20	15	100	10^5
Μοριακό Νέφος	5	10	300	10^4
clump	2	10	10^3	10^3
Πυρήνας Νέφους	0.08	10	10^5	10

4 Ενεργειακή ισορροπία

Η κινητική θερμοκρασία ² της Μεσοαστρικής Ύλης κυμαίνεται σε ένα εύρος τιμών 6 τάξεων μεγέθους όπως παρατηρούμε και από τον πίνακα 1. Για να περιγράψουμε και να μοντελοποιήσουμε την ενεργειακή ισορροπία στη Μεσοαστρική Ύλη και άρα να εξηγήσουμε και τις παρατηρούμενες θερμοκρασίες θα πρέπει να υπολογίσουμε τις διαδικασίες θέρμανσης και ψύξης.

Ο πιο γενικός διαχωρισμός των μηχανισμών θέρμανσης και ψύξης αφορά τις διαδικασίες που έχουν να κάνουν με θέρμανση λόγω φώτο-ιονισμού και διαδικασίες ψύξης λόγω διέγερσης από αλληλεπίδραση μεταξύ σωματιδίων. Παρακάτω θα παρουσιαστεί μια διαισθητική εικόνα των διαδικασιών αυτών.

• Φώτο-ιονισμός ουδέτερων ατόμων

Ένα φωτόνιο προσπίπτει σε ένα ουδέτερο άτομο επάγοντας τον ιονισμό του. Έχουμε λοιπόν ένα ελεύθερο ηλεκτρόνιο με ενέργεια E το οποίο μέσω συγκρούσεων με άλλα ουδέτερα σωματίδια του αερίου μεταφέρει ενέργεια στο αέριο, θερμαίνοντας το. Ωστόσο, λόγω επανασύνδεσης (recombination) η αποδιδόμενη ενέργεια είναι μικρότερη από την αρχική ενέργεια του ηλεκτρονίου.

• Αλληλεπιδράσεις μεταξύ σωματιδίων

Ελεύθερα σωματίδια αλληλεπιδρούν μέσω κρούσεων επάγοντας μεταβάσεις σε διεγερμένες ενεργειακές στάθμες. Κατά τις συνεπακόλουθες μεταβάσεις στην βασική κατάσταση εκπέμπονται φωτόνια, τα οποία εφόσον διαφύγουν από την περιοχή αντιστοιχούν σε απώλεια ενέργειας. Ακολουθεί μια αυστηρότερη περιγραφή των παραπάνω διεργασιών.

4.1 Θερμοδυναμική περιγραφή

Ξεκινάμε από τον πρώτο νόμο τις θερμοδυναμικής:

$$dE = \bar{d}Q - dW \quad (4.1.1)$$

Όπου dE η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας, $\bar{d}Q$ η θερμότητα που απορρόφησε το σύστημα και dW το έργο που έγινε από το σύστημα.

Για ιδανικά αέρια, η εσωτερική ενέργεια εξαρτάται μόνο από τη θερμοκρασία και η καταστατική εξίσωση γράφεται ως: $p = nk_bT$, όπου k_b η σταθερά του Boltzmann και n η αριθμητική πυκνότητα του αερίου. Ακολουθώντας, χρησιμοποιώντας το ότι η εσωτερική ενέργεια μονατομικού ιδανικού αερίου είναι $E = \frac{3}{2}NkT$ η απορροφούμενη θερμότητα ανά μονάδα όγκου είναι:

$$\frac{dQ}{V} = nd \left(\frac{3}{2}kT \right) - kTdn \quad (4.1.2)$$

Στη γενικότητα, οι διαδικασίες θέρμανσης και ψύξης εξαρτώνται από τον χρόνο και η ολική ενέργεια ανά μονάδα όγκου ανά μονάδα χρόνου ισούται με:

$$\Delta = n \frac{d}{dt} \left(\frac{3}{2}kT \right) - kT \frac{dn}{dt} \quad (4.1.3)$$

²Το ψυχρό μεσοαστρικό αέριο λόγω της γενικά χαμηλής του πυκνότητας δεν βρίσκεται σε θερμοδυναμική ισορροπία. Επομένως όταν μιλάμε για θερμοκρασία αναφερόμαστε στη κινητική του θερμοκρασία. [spitzer_1998](#)

Στην σχέση 4.1.3 αγνοήσαμε τη θερμική αγωγιμότητα η οποία δεν παίζει ιδιαίτερο ρόλο στις τυπικές θερμοκρασίες του μεσοαστρικού υλικού $T < 2 \cdot 10^4 K$. Γενικά θα έπρεπε να προσθέσουμε στο αριστερό μέλος την ποσότητα $\nabla \cdot (K \nabla T)$ όπου K η θερμική αγωγιμότητα. Εδώ θα πρέπει να σημειωθεί ότι σε περιοχές υψηλών θερμοκρασιών, η παρουσία μαγνητικών πεδίων επηρεάζει επιπλέον την θερμική αγωγιμότητα.

Έστω τώρα ότι η θερμότητα ανά μονάδα όγκου και χρόνου που προστίθεται στο αέριο από την αλληλεπίδραση των σωματιδίων ξ, n είναι $\Gamma_{\xi\eta}$ και όμοια, η συνεισφορά των αλληλεπιδράσεων αυτών στην ψύξη είναι $\Lambda_{\xi\eta}$. Ορίζουμε τις συναρτήσεις ψύξης (cooling function) και θέρμανσης (heating function) ως:

$$\Lambda = \sum_{\xi\eta} \Lambda_{\xi\eta} \quad (4.1.4)$$

$$\Gamma = \sum_{\xi\eta} \Gamma_{\xi\eta} \quad (4.1.5)$$

Συνεπώς έχουμε ότι:

$$\Delta = \Gamma - \Lambda \quad (4.1.6)$$

Μπορούμε να δούμε ότι αν η αριθμητική πυκνότητα και η θερμοκρασία δεν μεταβάλλονται με τον χρόνο ισχύει ότι

$$\Delta = 0 \Rightarrow \Gamma = \Lambda \quad (4.1.7)$$

Με βάση τη τελευταία σχέση μπορούμε να ορίσουμε τη *θερμοκρασία ισορροπίας*. Για τον ορισμό της τελευταίας χρειάζεται να γνωρίζουμε όλους τους μηχανισμούς θέρμανσης και ψύξης του αερίου. Στο υπόλοιπο κείμενο θα θεωρήσουμε ότι το αέριο βρίσκεται στη θερμοκρασία σταθερής κατάστασης εκτός και αν αναφέρεται κάτι διαφορετικό. Εν συνεχεία θα παρουσιάσουμε τις συναρτήσεις ψύξης/θέρμανσης για διάφορες φυσικές διαδικασίες.

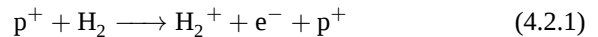
4.2 Μηχανισμοί Θέρμανσης

4.2.1 Κοσμική ακτινοβολία

Ένας πολύ σημαντικός μηχανισμός θέρμανσης της μεσοαστρικής ύλης και κατα συνέπεια και των μοριακών νεφών είναι η κοσμική ακτινοβολία. Η κοσμική ακτινοβολία αποτελείται επί το πλείστον από σχετικιστικά πρωτόνια μαζί με λιγότερα βαρύτερα στοιχεία ή ηλεκτρόνια. Η ενεργειακή κατανομή των κοσμικών αυτών σωματιδίων κυμαίνεται από ενέργειες των 10 έως 10^{14} MeV με κατανομή νόμου δύναμης $\Phi_{CR}(E) \sim E^{-2.7}$ (για τη ροή).

φωτο κατανομή κοσμικής ακτινοβολίας

Κατά την αλληλεπίδραση ενός πρωτονίου της κοσμικής ακτινοβολίας με το μοριακό υδρογόνο υπάρχουν δύο ενδεχόμενα. Το πιθανότερο είναι ο ιονισμός, δηλαδή η αντίδραση:

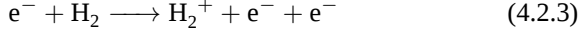


Καθώς το ηλεκτρόνιο που διαφεύγει αλληλεπιδρά με τα γειτονικά μοριακά υδρογόνα θερμαίνει το αέριο με ρυθμό

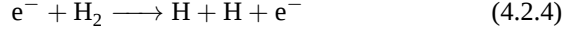
$$\Gamma_{CR}(H_2) = \zeta(H_2) n_{H_2} \Delta E(H_2) \quad (4.2.2)$$

όπου $\zeta(H_2)$ είναι ο ρυθμός ιονισμού ενός μορίου H_2 , n_{H_2} η αριθμητική πυκνότητα του μοριακού υδρογόνου και $\Delta E(H_2)$ η θερμική ενέργεια που προσδίδεται στο αέριο σε κάθε ιονισμό. Η ενέργεια αυτή εξαρτάται από την ενέργεια του κοσμικού πρωτονίου. Πρωτόνια με ενέργεια μεγαλύτερη του 1 GeV διεγείρουν το πυρήνα με αποτέλεσμα την εκπομπή ακτίνων γ και δεν εναποθέτουν ενέργεια στο αέριο. Παίρνοντας μια τυπική για το πρωτόνιο τιμή των 10 MeV η ενέργεια που αποδίδεται στο ηλεκτρόνιο είναι 30 eV.

Το ηλεκτρόνιο τώρα μπορεί είτε να ιονίσει περαιτέρω το μοριακό αέριο μέσω της



η οποία δεν προσδίδει θέρμανση αλλά εμπλουτίζει το χώρο με περισσότερα ενεργητικά ηλεκτρόνια ή να θερμάνει τελικά το αέριο μέσω της



Φώτο-ιονισμός ουδέτερων ατόμων Ένας από τους πιο σημαντικούς μηχανισμούς θέρμανσης του μεσοαστρικού αερίου προέρχεται από το φώτο-ιονισμό των ουδέτερων ατόμων. Σε αυτή τη διαδικασία ένα φωτόνιο με ενέργεια $h\nu$ ιονίζει ένα ηλεκτρόνιο δίνοντας του πλεόνασμα ενέργειας E . Το ηλεκτρόνιο μπορεί να συγκρουστεί με άλλα σωματίδια αναδιανέμοντας την ενέργεια αυτή υπό τη μορφή θέρμανσης

Ο ρυθμός φώτο-ιονισμού (ή πιθανότητα φώτο-ιονισμού ανά μονάδα χρόνου), $\beta_{j,ph}$ μπορεί να συσχετιστεί με την ενεργό διατομή $\sigma_{\nu,ph}$ των bound-free μεταβάσεων. Αρχικά θα χρειαστούμε την πιθανότητα της bound-bound μετάβασης από την στάθμη j στην στάθμη k , β_{jk} . Η ενέργεια ανά μονάδα όγκου και ανα μονάδα χρόνου είναι, **RybickiLightman** $U_\nu = \frac{1}{c} \int I_\nu d\Omega$, όπου I_ν η ειδική ένταση της ακτινοβολίας. Η απορροφούμενη ενέργεια θα πρέπει να είναι ανάλογη του γινομένου του συντελεστή απορρόφησης k_ν με την U_ν . Ο ρυθμός των μεταβάσεων $j \rightarrow k$ ανα μονάδα όγκου είναι:

$$R_{tr} = \int \frac{cU_\nu k_\nu}{h\nu} d\nu \quad (4.2.5)$$

Πολλαπλασιάσαμε με την ταχύτητα του φωτός για διαστατικούς λόγους καθώς ο συντελεστής απορρόφησης έχει μονάδες cm^{-1} . Η ζητούμενη πιθανότητα ανα μονάδα χρόνου των μεταβάσεων θα είναι ο ρυθμός των μεταβάσεων προς την αριθμητική πυκνότητα της αρχικής στάθμης j :

$$\beta_{jk} = \frac{1}{n_j} \int \frac{cU_\nu k_\nu}{h\nu} d\nu \quad (4.2.6)$$

Ακόμα ισχύει ότι $k_\nu = n_j \sigma$ συνεπώς:

$$\beta_{jk} = \int \frac{cU_\nu \sigma}{h\nu} d\nu \quad (4.2.7)$$

Όμοια για το φώτο-ιονισμό έχουμε:

$$\beta_{j,ph} = \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{cU_\nu \sigma_{ph}}{h\nu} d\nu \quad (4.2.8)$$

Όπου η ολοκλήρωση αρχίζει από την κρίσιμη συχνότητα ν_0 , κάτω από την οποία δεν επαρκεί η ενέργεια του φωτονίου ώστε να γίνει η μετάβαση.

Η απαίτηση της ισορροπίας μεταξύ ιοντισμών και επανασύνδεσης δίνει την ακόλουθη ισότητα:

$$\sum_j n_j(X^r) \beta_{j,ph} = \sum_j n(X^{r+1}) n_e a_j \quad (4.2.9)$$

όπου $n_j(X^r)$, $n(X^{r+1})$ οι αριθμητικές πυκνότητες των ιόντων X^r και X^{r+1} αντίστοιχα, ενώ $\beta_{j,ph}$, a_j οι ρυθμοί φώτο-ιονισμών και επανασύνδεσης. Η

τελευταία εξίσωση αναφέρεται ως εξίσωση ισορροπίας ιοντισμών (ionization equilibrium). Εν συνεχεία θα εξαχθεί η συνάρτηση θέρμανσης. Ξεκινάμε απο την εξ. 4.1.4 θεωρώντας αλληλεπιδράσεις μεταξύ ηλεκτρονίων και ιόντων.

$$\Gamma_{ei} = \sum_j (n_j(X^r)\beta_{j,ph} - \beta_{j,ph}E_{loss}) \quad (4.2.10)$$

Όπου E_{loss} είναι η ενέργεια του φωτονίου που προκύπτει απο την επανασύνδεση. Η παραπάνω έκφραση είναι συνάρτηση της ταχύτητας των ηλεκτρονίων. Πρέπει λοιπον να ληφθεί η μέση τιμή της.

$$\Gamma_{ei} = \int \sum_j (n_j(X^r)\beta_{j,ph} - \beta_{j,ph}E_{loss}) f(\vec{u})d^3\vec{u} \quad (4.2.11)$$

Υποθέτουμε ότι οι ταχύτητες των ηλεκτρονίων ακολουθούν κατανομή Maxwell. Αντικαθιστούμε το $n(X^{r+1})$ με την αριθμητική πυκνότητα των ιονισμένων ατόμων, n_i και $a_j = [\sigma_{cj}\nu]$.

$$\Gamma_{ei} = n_en_i \sum_j [< \sigma_{cj}\nu > \bar{E}_2 - < \sigma_{cj}\nu E_{loss} >] \quad (4.2.12)$$

Όπου \bar{E}_2 η μέση ενέργεια φωτοιονισμού. Ισχύει ότι $a = \sum_j a_j$ για τον συντελεστή επανασύνδεσης για το ενεργειακό επίπεδο j. Υποθέτοντας επιπλέον οτι οι φωτοιονισμοί προκύπτουν απο την βασική κατάσταση έχουμε:

$$\Gamma_{ei} = n_en_i \left(a\bar{E}_2 - \frac{1}{2}m_e \sum_j < \sigma_{cj}u^3 > \right) \quad (4.2.13)$$

Όπου αντικαταστήσαμε την ενέργεια του φωτονίου που προκύπτει απο την επανασύνδεση με την ποσότητα $1/2m_e u^2$ όπου u η θερμική ταχύτητα των ηλεκτρονίων καθώς η χρονική κλίμακα των συγκρούσεων είναι τέτοια ώστε να επιτευχθεί ανακατανομή της ενέργειας του ηλεκτρονίου πριν αυτό διαφύγει. Στο σημείο αυτό χρειαζόμαστε μια έκφραση για την ενέργεια \bar{E}_2 . Πρακτικά η ενέργεια αυτή είναι ο λόγος της ενέργειας των φωτοηλεκτρονίων ανα sec και του αριθμού των απορροφούμενων φωτονίων ανα sec, δηλαδή:

$$\bar{E} = \frac{\int_{\nu_0}^{\infty} \frac{h(\nu-\nu_0)\sigma_{\nu}cU_{\nu}}{h\nu} d\nu}{\int_{\nu_0}^{\infty} \frac{\sigma_{\nu}cU_{\nu}}{h\nu} d\nu} \quad (4.2.14)$$

Όπου ν_0 η συχνότητα κατωφλίου για την πραγματοποίηση του φωτοιονισμού. Το άνω όριο της ολοκληρωσής είναι το άπειρο τυπικά, στην πράξη όμως για συχνότητες μεγαλύτερες αυτής που αντιστοιχεί στην ενέργεια της βασικής στάθμης, η ποσότητα U_{ν} τείνει στο 0.

Τέλος, θέλουμε να υπολογίσουμε τον όρο $\sum_j < \sigma_{cj}u^3 >$.