

## Κεφάλαιο 1

# Μοριακά Νέφη και η Ύλη μεταξύ των Αστέρων

Στον μεσοαστρικό χώρο υπάρχει μια τεράστια ποσότητα ύλης υπό τη μορφή αερίου και σκόνης. Το υλικό αυτό είναι η πρωτογενής αιτία της δημιουργίας των αστέρων άρα η έρευνα για τη σύνθεση και τα χαρακτηριστικά της είναι απαραίτητη για την βαθύτερη κατανόηση της πρώιμης δημιουργίας των αστέρων.

ποσοστό στο γαλαξία?

διατύπωση

Σήμερα γνωρίζουμε ότι η ύλη μεταξύ των αστέρων αποτελείται περίπου κατά 99% από αέριο και κατά 1% από σκόνη με τη συνολική της μάζα στο γαλαξία μας να είναι της τάξης των  $M_{\odot}$  ενώ η πυκνότητα της κυμαίνεται από  $10^{-4}$  έως  $10^6$  σωματίδια ανά  $cm^3$ .

διατύπωση

μάζα αερίου

**Μεσοαστρικό Αέριο** Το Μεσοαστρικό Αέριο παρατηρείται σε νεφελώδη μορφή και αποτελείται κυρίως (περίπου το 90%) από υδρογόνο σε ατομική, ιονισμένη και μοριακή κατάσταση. Δεύτερο σε αναλογία είναι το Ήλιο (περίπου 9%) ενώ το υπόλοιπο 1% είναι βαρύτερα στοιχεία (C,O,Ne,Mg,Fe, κ.α.) και μόρια (CO,CS, κ.α.). Τα μόρια

**Μεσοαστρική Σκόνη** Η Μεσοαστρική Σκόνη αποτελείται κυρίως από άνθρακα και πυρίτιο σε ενώσεις με Υδρογόνο, Οξυγόνο, Μαγνήσιο και Σίδηρο ενώ το μέγεθος των κόκκων της σκόνης κυμαίνεται από 0.01  $\mu m$  έως 1  $\mu m$  ακολουθώντας μια κατανομή δύναμης όπου τα μικρότερα μεγέθη είναι πολυπληθέστερα από τα μεγαλύτερα. Η Μεσοαστρική Σκόνη παρατηρείται στις σπείρες του Γαλαξία μας (αλλά και σε άλλους γαλαξίες) με τη χαρακτηριστική μορφή τεράστιων σκοτεινών "δρόμων" λόγω της επισκότισης των όπισθεν αστέρων λόγω της απορρόφησης και σκέδασης του ορατού φωτός.

φωτο σκονης

## 1.1 Φάσεις και χαρακτηριστικά της Μεσοαστρικής Ύλης

Η Μεσοαστρική Ύλη (ISM) απαντάται σε τρεις φάσεις με διαφορετικά φυσικά και χημικά χαρακτηριστικά: <sup>1</sup> τη **ψυχρή**, με θερμοκρασίες κάτω των 100 K, πυκνότητα  $30 - 50 \text{ cm}^{-3}$  και ποσοστό ιονισμού κάτω του 0.1%, που αποτελείται από μοριακό και ατομικό αέριο Υδρογόνου και σκόνη, τη **θερμή**, με θερμοκρασίες της τάξης των  $10^3 - 10^4 \text{ K}$ , πυκνότητες  $0.3 \text{ cm}^{-3}$ , που αποτελείται από ατομικό και ιονισμένο αέριο Υδρογόνο (ποσοστό ιονισμού 2-20%) και την **υπέρθερμη** που οφείλεται σε κρουστικά κύματα εκρήξεων supernova και αστρικών ανέμων με θερμοκρασίες τάξης  $10^6 \text{ K}$  και πυκνότητες μικρότερες των  $0.01 \text{ cm}^{-3}$ .

### 1.1.1 Ενεργειακή ισορροπία

Η κινητική θερμοκρασία <sup>2</sup> της Μεσοαστρικής Ύλης κυμαίνεται σε ένα εύρος τιμών 6 τάξεων μεγέθους όπως παρατηρούμε και από τον πίνακα 1.1. Για να περιγράψουμε και να μοντελοποιήσουμε την ενεργειακή ισορροπία στη Μεσοαστρική Ύλη άρα να εξηγήσουμε και τις παρατηρούμενες θερμοκρασίες θα πρέπει να υπολογίσουμε τις διαδικασίες θέρμανσης και ψύξης. Η κύρια διαδικασία ψύξης είναι η εκπομπή ακτινοβολίας είτε μέσω αυθόρμητης αποδιέγερσης ή αποδιέγερσης λόγω κρούσης. Ενώ για τη θέρμανση έχουμε μια πληθώρα διαδικασιών θέρμανσης οι οποίες μπορούν να ταξινομηθούν σε 3 κατηγορίες:

- θέρμανση από πεδία ακτινοβολίας: φωτοηλεκτρική απορρόφηση σε ουδέτερα στοιχεία, φωτοδιάσπαση στα μόρια, φωτοιονισμός.
- θέρμανση μέσω συγκρούσεων: από τυρβώδες ροές, κρουστικά κύματα καταλοίπων supernova και κοσμικής ακτινοβολίας.
- θερμική ανταλλαγή μεταξύ της σκόνης και νεφών αερίου, αλληλεπίδραση ιονισμένου αερίου με μαγνητικά πεδία, βαρυτική κατάρρευση.

### 1.1.2 Παρατηρήσεις της Μεσοαστρικής Ύλης

Η παρατήρηση και μελέτη της Μεσοαστρικής Ύλης ποικίλει αναλόγως τη φάση στην οποία βρίσκεται.

φωτογραφία 21 cm

**Παρατήρηση 21.1 cm** Η καλύτερη μέχρι σήμερα δυνατή μέθοδος για την παρατήρηση του **Ουδέτερου Υδρογόνου HI** είναι η εκπομπή της γραμμής 21.1 cm στα ραδιοκύματα που οφείλεται στη μετάπτωση αντιστροφής του spin του πρωτονίου και του ηλεκτρονίου στη βασική κατάσταση του ατόμου του Υδρογόνου. Η ενεργειακή

<sup>1</sup>Για τα χημικά χαρακτηριστικά αναφερόμαστε στη σύνθεση των μορίων και στην αναλογία των στοιχείων. Στα φυσικά χαρακτηριστικά αναφερόμαστε στη πυκνότητα και τη θερμοκρασία της Ύλης

<sup>2</sup>Το ψυχρό μεσοαστρικό αέριο λόγω της γενικά χαμηλής του πυκνότητας δεν βρίσκεται σε θερμοδυναμική ισορροπία. Επομένως όταν μιλάμε για θερμοκρασία αναφερόμαστε στη κινητική του θερμοκρασία.[2, p. 28]

Πίνακας 1.1: Χαρακτηριστικά της μεσοαστρικής ύλης και περιοχές παρατήρησης

Κατηγορία	Κατάσταση Υδρογόνου	Θερμοκρασία (K)	Πυκνότητα ( $cm^{-3}$ )	Περιοχή Παρατηρήσεων
Μοριακά Νέφη	Μοριακό $H_2$	10-50	$> 10^3$	Μοριακή εκπομπή - απορρόφηση στο Ράδιο και στο Υπέρυθρο
Ψυχρά Νέφη HI	Ατομικό H	100	30	Γραμμή απορρόφησης 21 cm
Θερμό HI	Ατομικό H	$10^3$	0.1	Γραμμή εκπομπής 21 cm
Θερμό HII	Ιονισμένο $H^+$	$10^4$	$10^{-2}$	Γραμμή Εκπομπής $H\alpha$
Περιοχές HII	Ιονισμένο $H^+$	$10^4$	$> 100$	Γραμμή Εκπομπής $H\alpha$
Υπέρθερμο Ιονισμένο αέριο	Ιονισμένο $H^+$	$10^6 - 10^7$	$10^{-3}$	Εκπομπή ακτινοβολίας X, Απορρόφηση από ιονισμένα μέταλλα

διαφορά των καταστάσεων με συνολικό spin  $F = 1$  (τα spin  $p^+$  και  $e^-$  είναι παράλληλα) και  $F = 0$  (τα spin  $p^+$  και  $e^-$  είναι αντιπαράλληλα) είναι  $h\nu = 6 \times 10^{-6} eV$  η οποία αντιστοιχεί στη γραμμή των 21 cm. Ο συντελεστής Einstein για την αυθόρμητη εκπομπή είναι  $A_{10} \simeq 3 \times 10^{-15} s^{-1}$  που αντιστοιχεί σε μια χρονική κλίμακα των  $10^7$  ετών στην οποία παραμένει ένα διεγερμένο άτομο Υδρογόνου μέχρι να αποδιεγερθεί αυθόρμητα εκπέμποντας το παρατηρούμενο φωτόνιο. Ο πολύ μικρός αυτός ρυθμός εκπομπής αντιπαραβάλλεται εν τέλει από τη τεράστια ποσότητα του ατομικού υδρογόνου έτσι ώστε να είναι

Περιοχές  $H\alpha$ 

διατύπωση

ολοκλήρωση

φάσματα απορρόφησης 21 cm

φωτογραφία  $H\alpha$ 

## 1.2 Μοριακά Νέφη

Οί πιο ενδιαφέρουσες, από τη σκοπιά της δημιουργίας αστέρων, περιοχές του Μεσοαστρικού Υλικού είναι τα Μοριακά Νέφη (Molecular Clouds). Τα Μοριακά Νέφη είναι περιοχές όπου ψυχρή μεσοαστρική ύλη έχει πυκνότητες ικανοποιητικά μεγαλύτερες από τη μέση πυκνότητα του μεσοαστρικού υλικού ώστε η ιδιοβαρύτητα του νέφους να παίζει σημαντικό ρόλο στη δυναμική του. Αν θέλαμε να υπεραπλουστεύαμε την όλη διαδικασία της δημιουργίας αστέρων η εικόνα θα ήταν ότι το νέφος καταρρέει και κατακρημνίζεται σε όλο και πιο συμπυκνωμένες δομές έως ότου η πυκνότητα και η μάζα σε μια τέτοια περιοχή είναι αρκετή ώστε να γεννηθούν νέα άστρα.

Όπως φαίνεται και από το όνομα τους τα Μοριακά Νέφη αποτελούνται κυρίως από μοριακό Υδρογόνο  $H_2$ . Στο γαλαξία μας πάνω από το 80% του μοριακού Υδρογόνου βρίσκεται σε μοριακά νέφη κατανεμημένα πάνω στις σπείρες του δίσκου αλλά κυρίως σε ένα δακτύλιο ακτίνας 3 με 5 kpc από το κέντρο του γαλαξία. Από παρατη-

μεγεθη

γενικά όχι, στους πυρήνες

με τα γιγαντιαία μοριακά νέφη τι γίνεται?

βιβλιογραφία

Πίνακας 1.2: Χαρακτηριστικά και διαφορετικοί τύποι Μοριακών Νεφών

Κατηγορία	Μέση ακτίνα (pc)	Θερμοκρασία (K)	Πυκνότητα $H_2$ ( $cm^{-3}$ )	Μάζα ( $M_\odot$ )
Γιγαντιαίο Μοριακό Νέφος	20	15	100	$10^5$
Μοριακό Νέφος clump	5 2	10 10	300 $10^3$	$10^4$ $10^3$
Πυρήνας Νέφους	0.08	10	$10^5$	10

ρήσεις στο CO τα μοριακά νέφη δείχνουν να έχουν μάζες που κυμαίνονται από  $10^3 M_\odot$  μέχρι και  $10^6 M_\odot$  με κατανομή νόμου δύναμης  $-1.6$ . [3]

Για να δημιουργηθεί το Μοριακό Υδρογόνο καταλυτικό ρόλο παίζει η μεσοαστρική σκόνη. Όταν δύο άτομα Υδρογόνου ενώνονται και δημιουργούν ένα μόριο  $H_2$  αυτό κερδίζει ενέργεια η οποία όμως δεν μπορεί να αποδοθεί στο περιβάλλον με αποτέλεσμα το μόριο να διασπάται. Αν όμως η διαδικασία αυτή γίνει πάνω σε έναν κόκκο σκόνης, τότε αυτός λειτουργεί καταλυτικά απορροφώντας το πλεόνασμα ενέργειας και το μόριο παραμένει σταθερό. Έτσι το ουδέτερο Υδρογόνο λειτουργεί σαν

formation rate

καύσιμο που τροφοδοτεί τις πυκνότερες περιοχές του μοριακού Υδρογόνου.

Ένα τυπικό μοριακό νέφος επιβιώνει για  $3 \times 10^7 \text{ yr}$  πριν καταστραφεί από τουε βίαιους αστρικούς ανέμους των αστερών τύπου O και B που έχουν δημιουργηθεί στο εσωτερικό του. Κατά τη διάρκεια της ζωής του το νέφος αποδίδει τελικά ένα 3% της μάζας του σε αστέρες. Έτσι για παράδειγμα αν θεωρήσουμε μια τιμή της συνολικής μάζας του μοριακού  $H_2$  στο Γαλαξιακό δίσκο  $2 \times 10^9 M_\odot$  βρίσκουμε ότι ο ρυθμός δημιουργίας αστερών (SFR) στο Γαλαξία μας είναι περίπου  $2 M_\odot$  ανά έτος.

### 1.2.1 Ενεργειακή ισορροπία στα Μοριακά Νέφη

Όπως αναφέραμε γενικότερα στη παράγραφο 1.1.1 η θερμοκρασία ενός νέφους είναι αποτέλεσμα στις ενεργειακής ισορροπίας μεταξύ των μηχανισμών θέρμανσης και ψύξης. Για τα Μοριακά Νέφη συγκεκριμένα η θέρμανση είναι αποτέλεσμα της θερμότητας που παρέχεται από κοντινά άστρα ή μέσω της κοσμικής ακτινοβολίας, ενώ η ψύξη επιτυγχάνεται μέσω διαδικασιών απορρόφησης και κρούσης με τα σωματίδια της σκόνης ή του αερίου. Η ενέργεια τελικά αποδίδεται μέσω της εκπομπής υπέρυθρης ακτινοβολίας.

διατύπωση, ανολοκλήρωτο

### 1.2.2 Δυναμική και Μορφολογία των Μοριακών Νεφών

γραψε κάτι εισαγωγικό

### 1.2.2.1 Καταστατική εξίσωση

Θεωρούμε ότι το μοριακό νέφος συμπεριφέρεται σαν ένα ιδανικό αέριο με καταστατική εξίσωση

$$P = \frac{k}{\mu m_H} \rho T \quad (1.1)$$

όπου  $P$  η πίεση,  $k$  η σταθερά του Boltzmann,  $\mu$  το μέσο μοριακό βάρος,  $m_H$  η μάζα ενός ατόμου Υδρογόνου,  $T$  η θερμοκρασία και  $\rho$  η πυκνότητα την οποία σε πρώτη προσέγγιση τη θεωρούμε σταθερή.

### 1.2.2.2 Εξισώσεις ρευστοδυναμικής

Το αέριο του μοριακού νέφους δεν είναι στατικό. Η κίνηση μπορεί να περιγραφεί από τις εξισώσεις διατήρησης της μηχανικής ρευστών μέσα σε βαρυτικό πεδίο:

$$\text{Εξίσωση διατήρησης της Μάζας: } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{v}) = 0 \quad (1.2)$$

$$\text{Εξίσωση διατήρησης της Ορμής: } \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \frac{\nabla P}{\rho} - \vec{g} = 0 \quad (1.3)$$

όπου  $\vec{v} = v(x, y, z, t)$  είναι η ταχύτητα του ρευστού σε κάθε σημείο και  $\vec{g} = g(x, y, z)$  η επιτάχυνση της βαρύτητας σε κάθε σημείο. Η τελευταία εξίσωση η οποία ονομάζεται και εξίσωση Euler είναι ουσιαστικά ο νόμος του Νεύτωνα για ένα συνεχές μέσο. Έχουμε παραλείψει τους όρους του ιξώδους καθώς στο αραιό μεσοαστρικό χώρο είναι αμελητέοι. Στη ολοκληρωμένη περίπτωση όπου συμπεριλαμβάναμε και τους όρους του ιξώδους τότε θα είχαμε την εξίσωση Navier-Stokes (με  $\nu$  ο συντελεστής του κινηματικού ιξώδους):

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \frac{\nabla P}{\rho} - \vec{g} - \nu \nabla^2 \vec{v} = 0$$

**Σε όλες τις παραπάνω εξισώσεις έχουμε κάνει τη παραδοχή ότι η πυκνότητα είναι σταθερή και άρα το ρευστό είναι ασυμπίεστο δηλαδή  $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ .**

Μια δεύτερη παραδοχή που έχουμε κάνει μέχρι αυτό το σημείο είναι ότι οι μοναδικές δυνάμεις που ασκούνται στο υλικό μας είναι η θερμικές (μέσω της βαθμίδας της πίεσης) και η βαρυτική. Στη πραγματικότητα πολύ σημαντικό ρόλο στη διαμόρφωση των μοριακών νεφών και τελικά στη κατάρρευση προς τη δημιουργία πρωτοαστέρων παίζει το μεσοαστρικό μαγνητικό πεδίο. Άρα μια ακριβής απεικόνιση της συμπεριφοράς του νέφους θα πρέπει να γίνει μέσω της Μαγνητοϋδροδυναμικής προσέγγισης όπου συμπεριλαμβάνονται οι εξισώσεις του Maxwell και στην εξίσωση της ορμής η δύναμη Lorentz.

### 1.2.2.3 Βαρυτική αστάθεια

Μένοντας στη πρώτη προσέγγιση που έχουμε κάνει με ένα άπειρο, ομογενές, στατικό μοριακό νέφος όπου στο κάθε σημείο του ασκούνται δυνάμεις ιδιοβαρύτη-

τας ενώ ταυτόχρονα θεωρούμε ότι η θερμοκρασία του παραμένει κάθε στιγμή σταθερή, άρα  $\frac{P}{\rho} = \frac{kT}{\mu m_H} = C_s^2 = \text{constant}$  όπου  $C_s$  είναι η ταχύτητα του ήχου για τη θερμοκρασία  $T$ .

Τώρα θεωρούμε ότι σε κάποια περιοχή του ρευστού έχουμε μια τυχαία διαταραχή της πυκνότητας όπου γίνεται πυκνότερο κατά  $\delta\rho$ . Αν θεωρήσουμε επίσης ότι η περιοχή αυτή είναι σφαιρική ακτίνας  $r$  τότε θέλουμε να καταλάβουμε το μέγεθος που θα πρέπει να έχει η περιοχή έτσι ώστε η ιδιοβαρύτητα του ρευστού να γίνει αρκετή ώστε να υπερνικήσει την εσωτερική πίεση.

Από την εξίσωση της ορμής 1.3 βλέπουμε ότι οι δυνάμεις ανά όγκο εκφρασμένες σαν επιτάχυνση είναι:  $\frac{\nabla P}{\rho}$  η δύναμη της εσωτερικής πίεσης και  $\vec{g} = -g\hat{r}$  η δύναμη της βαρύτητας θεωρώντας ότι ασκείται σφαιρικά προς το κέντρο της πυκνότερης περιοχής. Άρα η κρίσιμη τιμή της ακτίνας θα βρεθεί από την εξίσωση

$$\frac{\nabla P}{\rho} = -g \quad (1.4)$$

Δεν μας ενδιαφέρει μια ακριβής επίλυση αλλά μια προσέγγιση τάξης μεγέθους της ακτίνας, άρα μπορούμε να προσεγγίσουμε την επιτάχυνση λόγω πίεσης σαν  $\frac{\nabla P}{\rho} \sim \frac{P/r}{\rho} = \frac{P}{r\rho}$  ενώ για τη επιτάχυνση λόγω βαρύτητας  $g = \frac{GM}{r^2}$  όπου  $M$  η μάζα που περικλείεται μέσα στη σφαιρική περιοχή δηλαδή  $M \sim r^3\rho$ .

Άρα τελικά, από την 1.4 βρίσκουμε:

$$\frac{P}{\rho r} = \frac{GM}{r^2} \quad (1.5)$$

$$\frac{C_s^2 \rho}{\rho r} = \frac{Gr^3 \rho}{r^2} \quad (1.6)$$

$$r_J = \frac{C_s}{(G\rho)^{1/2}} \quad (1.7)$$

όπου  $r_J$  είναι η ζητούμενη ακτίνα η οποία ονομάζεται και ακτίνα Jeans. Αν η περιοχή μας είναι μικρότερη από την ακτίνα αυτή τότε θα από την εξίσωση του νεύτωνα θα έχουμε:

$$\ddot{r} \sim \frac{\nabla P}{\rho} - \frac{GM}{r^2} > 0 \quad (1.8)$$

άρα η δύναμη λόγω της εσωτερικής πίεσης θα υπερिσχύσει και το ρευστό δεν θα καταρρεύσει. Αντίστροφα αν η ακτίνα της συμπύκνωσης είναι μεγαλύτερη από  $r_J$  τότε θα καταρρεύσει.

Ισοδύναμα με την ακτίνα Jeans μπορούμε να ορίσουμε την συνολική Μάζα της περιοχής, δηλαδή

$$M_J \sim \frac{4}{3}\pi\rho r_J^3 \sim \frac{4\pi C_s^3}{3(G^3\rho)^{1/2}} \quad (1.9)$$

Η ταχύτητα του ήχου εξαρτάται μόνο από τη Θερμοκρασία:  $C_s \simeq T^{1/2}$  άρα για τη μάζα Jeans παρατηρούμε ότι:

$$M_J \propto T^{3/2} \quad (1.10)$$

Για τυπικές τιμές ενός μοριακού πυρήνα σε ένα νέφος θερμοκρασίας  $10\text{ K}$  πυκνότητας  $10^5\text{ cm}^{-3}$  και μέσου μοριακού βάρους 2.3 (μοριακό Υδρογόνο) βρίσκουμε  $r_J = 0.05\text{ pc}$  και  $M_J = 2\text{ }M_\odot$ .

#### 1.2.2.4 Κατακρήμνιση

Αν υποθέσουμε ότι μια περιοχή του μοριακού νέφους με μάζα μεγαλύτερη της μάζας Jeans αρχίζει να καταρρέει ισόθερμα λόγω της ιδιοβαρύτητας της. Η πυκνότητα τότε στο εσωτερικό της θα αρχίσει να αυξάνεται.

Η μάζα Jeans εξαρτάται από τη πυκνότητα  $M_J \propto \rho^{-1/2}$ . Άρα καθώς η πυκνότητα στο εσωτερικό της περιοχής αυξάνεται η μάζα Jeans μικραίνει. Άρα στο εσωτερικό της περιοχής διαταραχές της πυκνότητας είναι πιο πιθανό να είναι βαρυτικά ασταθείς και να ξεκινήσουν να καταρρέουν ανεξάρτητα από την αρχική περιοχή.

Αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται και στις μικρότερες περιοχές, με τελικό αποτέλεσμα το φαινόμενο της ιεραρχικής κατακρήμνισης.

Η κατακρήμνιση συνεχίζεται όσο τα αυτόνομα θραύσματα σταματήσουν να αποκρίνονται ισόθερμα, δηλαδή όσο συνεχίζουν να ακτινοβολούν την ενέργεια που αποκτούν από τη βαρυτική κατάρρευση, δηλαδή όσο παραμένουν διαφανή.

Μόλις φτάσουν στο σημείο να είναι αδιαφανή ή ακτινοβολία παγιδεύεται στο εσωτερικό τους με αποτέλεσμα να θερμαίνονται και έτσι να σταματάει η κατάρρευση.

#### 1.2.2.5 Χρόνος ελεύθερης πτώσης

Από την εξίσωση 1.8 αν θεωρήσουμε αμελητέα την εσωτερική πίεση, μια λογική προσέγγιση αν η κατάρρευση είναι στα αρχικά της στάδια, τότε η εξίσωση του νεύτωνα γίνεται:

$$\ddot{r} = -\frac{GM}{r^2} \quad (1.11)$$

Κάνοντας ανάλυση κλίμακας όπως προηγουμένως, βρίσκουμε τη χαρακτηριστική χρονική κλίμακα κατάρρευσης:

$$t_{ff} \simeq \left( \frac{R^3}{GM} \right)^{1/2} \simeq \left( \frac{1}{G\rho} \right)^{1/2} \simeq \frac{r_J}{C_s} \quad (1.12)$$

Η ακριβής επίλυση της εξίσωσης αν "ξεφορτωθούμε" και τη κλίμακα μήκους  $R$  μέσω της σχέσης  $M/R^3 \simeq \rho$  μας δίνει αποτέλεσμα:

$$t_{ff} = \left( \frac{3\pi}{32G\rho} \right)^{1/2} \sim 2.1 \times 10^3 \rho^{-1/2} \text{ s} \quad (1.13)$$

Για ένα μοριακό νέφος αρχικής πυκνότητας  $10^{-13}\text{ g cm}^{-3}$  ο χρόνος αυτός είναι  $\sim 2 \times 10^5\text{ yr}$ .

### 1.2.2.6 Θεώρημα Virial

Για να μελετήσουμε με λιγότερες προσεγγίσεις, που είναι προφανώς λάθος, τη δυναμική ενός απομονωμένου νέφους θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Virial, δηλαδή την εξίσωση της ενέργειας. Το θεώρημα Virial προκύπτει από τη διαφορίση της ροπής αδράνειας του νέφους, όπου η ροπή αδράνειας ορίζεται ως

$$I = \int \rho |\vec{r}|^2 dV \quad (1.14)$$

Η εξίσωση της ενέργειας παράγεται από τη δεύτερη χρονική παράγωγο της ροπής αδράνειας η οποία μας οδηγεί στη:

$$\frac{1}{2} \ddot{I} = 2\mathcal{T} + 2\mathcal{U} + \mathcal{W} + \mathcal{M} - 3P_{surf}V \quad (1.15)$$

όπου  $\mathcal{T}$  η ολική κινητική ενέργεια λόγω της κίνησης του νέφους στην οποία συμπεριλαμβάνεται η τύρβη και η περιστροφή του νέφους:

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \int \rho |\vec{u}|^2 dV \quad (1.16)$$

$\mathcal{U}$  η εσωτερική ενέργεια λόγω θερμικών κινήσεων:

$$\mathcal{U} = \frac{3}{2} \int nk_B T dV = \frac{3}{2} \int P dV \quad (1.17)$$

$\mathcal{W}$  η βαρυτική δυναμική ενέργεια αν  $\Phi_g$  το βαρυτικό δυναμικό:

$$\mathcal{W} = \frac{1}{2} \int \rho \Phi_g dV \quad (1.18)$$

$\mathcal{M}$  η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου:

$$\mathcal{M} = \frac{1}{8\pi} \int |\vec{B}|^2 dV \quad (1.19)$$

$V$  ο όγκος του νέφους και  $P_{surf}$  η εξωτερική πίεση.

### 1.2.2.7 Στατική κατάσταση

καλύτερος τίτλος

Στη κατάσταση ισορροπίας το θεώρημα Virial γράφεται:

$$2\mathcal{T} + 2\mathcal{U} + \mathcal{W} + \mathcal{M} - 3P_{surf}V = 0 \quad (1.20)$$

Μπορούμε να απλοποιήσουμε τις παραπάνω σχέσεις παίρνοντας τον μέσο μέσα σε έναν όγκο ελέγχου. Έτσι για το κάθε όρο βρίσκουμε:

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_{turbulence} + \mathcal{T}_{rotation} = \frac{1}{2} M \Delta u_{turb}^2 + C_{rot} M R^2 \Omega^2 \quad (1.21)$$

$$\mathcal{U} = \frac{3}{2} P V = \frac{3}{2} C_s^2 \rho V = \frac{3}{2} M C_s^2 \quad (1.22)$$

$$\mathcal{W} = -C_{grav} \frac{GM^2}{R} \quad (1.23)$$

$$\mathcal{M} = C_{mag} \frac{\Phi^2}{3\pi^2 R} \quad (1.24)$$



$P, \rho$	οι μέσες τιμές της πίεσης και της πυκνότητας
$M$	η μάζα που εσωκλείεται στον όγκο ελέγχου
$C_s = \left( \frac{k_B T}{\mu m_H} \right)^{1/2}$	η ταχύτητα θερμικών κινήσεων των μορίων
$\Delta u$	η διασπορά της ταχύτητας λόγω τυρβώδους κίνησης
$\Omega$	η γωνιακή ταχύτητα του νέφους που τη θεωρούμε τοπικά ομογενή
$\Phi = \pi R^2 B$	η ροή του μαγνητικού πεδίου <sup>3</sup>
$C_{rot}$	παράμετρος που αφορά τη κατανομή της μάζας, στην ομογενή περίπτωση ισούται με $\frac{1}{5}$
$C_{grav}$	παράμετρος που αφορά τη κατανομή της μάζας, στην ομογενή περίπτωση ισούται με $\frac{3}{5}$
$C_{mag}$	παράμετρος που αφορά το σχήμα του νέφους και τη τοπολογία του μαγνητικού πεδίου, για σφαίρα $\frac{3}{4}$ ενώ για δίσκο $\frac{1}{\pi}$

Ορίζουμε σαν διασπορά ταχύτητας  $\sigma^2$  σε μια διεύθυνση το άθροισμα της διασποράς λόγω θερμικών κινήσεων  $C_s^2$  και της τυρβώδους ροής  $\Delta u_i$ , δηλαδή:

$$\sigma^2 = \frac{k_B T}{\mu m_H} + \Delta u^2 \quad (1.25)$$

### 1.2.2.8 Μάζα Virial

Για ένα σφαιρικό απομονωμένο νέφος μάζας  $M$ , ακτίνας  $R$  με διασπορά ταχύτητας  $\sigma$  (1.25), αγνοώντας τις επιδράσεις του μαγνητικού πεδίου και της περιστροφής από τη σχέση 1.20 για την ισορροπία βρίσκουμε:

$$\mathcal{W} \simeq M \sigma^2 \quad (1.26)$$

$$M_{virial} \sim \frac{\sigma^2 R}{G} \quad (1.27)$$

Αν η μάζα του νέφους ξεπερνάει τη μάζα Virial τότε το νέφος δεν βρίσκεται σε ισορροπία και θα καταρρεύσει αν δεν συγκρατηθεί από κάποιον άλλο μηχανισμό.

Στο θεώρημα Virial η μόνη αρνητική επίδραση είναι αυτή της βαρύτητας. Είναι η μόνη δύναμη που προσπαθεί να συμπυκνώσει το νέφος σε αντιπαράθεση με τη θερμική κίνηση των μορίων, τη τύρβη, το μαγνητικό πεδίο και τη περιστροφή του νέφους.

Χωρίς να επεκταθούμε παραπάνω, μπορούμε να εργαστούμε αναλόγως με τη μάζα Virial ώστε να υπολογίσουμε τη κρίσιμη μάζα του νέφους σε μια σειρά σεναρίων όπου θα λαμβάνονταν υπόψη και οι επιδράσεις της περιστροφής, του μαγνητικού πεδίου κλπ.

Η περιστροφή αν και λόγω της μικρής αρχικής γωνιακής ταχύτητας του νέφους ( $\Omega \sim 10^{-14} s^{-1}$ ) μπορεί να παίζει σημαντικό ρόλο καθώς αυτή αυξάνεται σε με-

γάλο βαθμό κατά τη κατάρρευση <sup>4</sup>. Οι παρατηρήσεις μας δείχνουν ότι η στροφορμή είναι αρκετά μικρότερη από την αναμενόμενη, κάτι που μάλλον οφείλεται στο φαινόμενο του "μαγνητικού φρεναρίσματος" δηλαδή την επιβράδυνση της περιστροφής του μοριακού πυρήνα - πρωτοαστέρα λόγω της μεταφοράς στροφορμής μέσω κυμάτων Alfven στις μαγνητικές γραμμές.

Για λόγους πληρότητας θα παραθέσουμε τις αντίστοιχες μάζες<sup>5</sup> Virial για ένα νέφος όπου η μαγνητική πίεση μαγνητικού πεδίου έντασης  $B$  ισορροπεί τη βαρύτητα:

$$M_{\phi} \sim 3.5 \times \frac{B^3}{G^{3/2} \rho^2} \quad (1.28)$$

και για νέφος όπου η στροφορμή  $J$  ισορροπεί τη βαρύτητα:

$$M_{rot} = 5.1 \left( \frac{\sigma J}{GM} \right) \quad (1.29)$$

### 1.2.2.9 Σχέσεις του Larson

Οι θερμικές τυχαίες κινήσεις ενός μορίου μαζί με τις τυχαίες ταχύτητες της τύρβης συνιστούν αυτό που ορίσαμε και προηγουμένως διασπορά της ταχύτητας  $\sigma$ . Αν από ένα νέφος αερίου παρατηρήσουμε μια γραμμή εκπομπής τότε λόγω της διασποράς το προφίλ της γραμμής θα "διογκωθεί" λόγω του φαινομένου Doppler.

Ένα χρήσιμο μέγεθος για τη παραμετροποίηση μια γραμμής εκπομπής είναι το πάχος της στο ύψος που αντιστοιχεί στο μισό της μέγιστης έντασης (Full Width at Half Maximum - FWHM). Εφόσον η γραμμή εκπομπής αντιστοιχεί σε μια κατανομή gauss τότε το πάχος αυτό είναι:  $\Delta u_{FWHM} = \sqrt{8 \ln(2)} \sigma_{SD}$  όπου  $\sigma_{SD}$  η τυπική απόκλιση της κατανομής.

Κινούμενοι αντίστροφα από το φαινόμενο Doppler μπορούμε να μεταφέρουμε τη καμπύλη των συχνοτήτων στο χώρο των ταχυτήτων. Μετρώντας τη τιμή FWHM στο χώρο των ταχυτήτων έχουμε μια καλή προσέγγιση για την τιμή της διασποράς της ταχύτητας  $\sigma$ .

Το 1981 ο Larson μετρώντας τη ταχύτητα διασποράς στις γραμμές εκπομπής CO, H<sub>2</sub>CO, NH<sub>3</sub> κ.α. διαφορετικών μοριακών νεφών κατέγραψε κάποιες εμπειρικές σχέσεις ή οποίες και ονομάζονται σχέσεις του Larson (Larson Laws). Στη συνέχεια παραθέτουμε τις αντίστοιχες σχέσεις από τους (Solomon, Rivolo, Barrett, Yahil 1987) καθώς αφορούν περισσότερα δεδομένα. Η πρώτη σχέση συνδέει τη διασπορά με το μέγεθος του νέφους:

$$\sigma \simeq (0.72 \pm 0.07) R^{(0.5 \pm 0.2)} \text{ km s}^{-1} \quad (1.30)$$

fwto larson R-s law

□ Αν η διασπορά της ταχύτητας ήταν λόγω μόνο των θερμικών κινήσεων τότε αυτή θα εξαρτιόταν μόνο από τη θερμοκρασία που όμως για τις παρατηρήσεις είναι σταθερή

<sup>4</sup>στη κατάρρευση του νέφους η ακτίνα του μειώνεται κατά έναν παράγοντα  $10^7$  άρα από τη διατήρηση της στροφορμής  $\Omega R^2 = \text{const.}$  βρίσκουμε η γωνιακή του ταχύτητα αυξάνεται κατά παράγοντα  $10^{14}$

<sup>5</sup>[schulz\_2012]

με τιμή περίπου στους 10 K. Η θερμική ταχύτητα γι αυτή τη θερμοκρασία είναι  $0.19 \text{ km s}^{-1}$ .

Άρα είναι εμφανές ότι η τύρβη παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στη δυναμική των μοριακών νεφών. Ένα δεύτερο συμπέρασμα που μπορούμε να βγάλουμε είναι ότι για μεγέθη μεγαλύτερα των 0.1 pc η τύρβη είναι υπερηχητική.

Η δεύτερη σχέση συνδέει τη μάζα του νέφους με τη διασπορά:

$$\sigma = 0.15 M^{0.25} \quad (1.31)$$

Από τη σχέση αυτή μπορούμε να βρούμε τη σχέση μάζας-ακτίνας:

fwto larson M-s law

$$M \propto R^2 \quad (1.32)$$

και εφόσον  $\rho = M/R^3$

$$\rho \propto R^{-1} \quad (1.33)$$

το οποίο συμπίπτει και με παρατηρησιακά δεδομένα ( $\rho \propto R^{-1.1}$ ).

fwto larson M-rho law

Από τις σχέσεις 1.31 και 1.30 μπορούμε να συγκρίνουμε τα πειραματικά αποτελέσματα με τη προσέγγιση Virial 1.2.2.8:

$$\frac{M}{R\sigma^2} \sim \frac{1}{G}$$

άρα θα έχουμε

$$\frac{M}{R} \propto \sigma^2 \rightarrow \frac{M}{R\sigma^2} = \text{const.} \quad (1.34)$$

δηλαδή φαίνεται η προσέγγιση Virial που κάναμε να είναι αρκετά ικανοποιητική.

### 1.2.3 Κατανομή μαζών των μοριακών πυρήνων

Όπως είπαμε και στην εισαγωγή, παρατηρήσεις στο CO σε διαφορετικά μοριακά νέφη, και σε διαφορετικές κλίμακες (μοριακά νέφη, clumps και πυρήνες) η κατανομή των μαζών φαίνεται να είναι της μορφής:

$$\frac{dN}{dM} \propto M^{-x} \quad (1.35)$$

όπου  $dN$  είναι ο αριθμός των νεφών με μάζες από  $M$  μέχρι  $M + dM$  με άνω όριο περίπου τις  $10^6 M_\odot$ . Για τα clumps η λογαριθμική κλίση είναι από 1.6 μέχρι 1.8. Αυτή η κατανομή είναι πολύ πλατύτερη της αντίστοιχης κατανομής μαζών των αστερών της κύριας ακολουθίας βλέπε παρακάτω 1.2.3.1. Αυτό μπορεί να εξηγηθεί καθώς ένα clump είναι μια περιοχή που δεν συνδέεται τόσο άμεσα με τη δημιουργία αστερών, καθώς υπάρχουν clumps που δεν θα δημιουργήσουν απαραίτητα αστέρες ή αστρικά σμήνη ή clumps που μπορεί να μην είναι καν βαρυτικά συνδεδεμένα (gravitationally bound).

φωτο mass clump spectrum

Φυσικά όμως αυτό δεν συμβαίνει και με τους μοριακούς πυρήνες, όπως θα δούμε στη συνέχεια αφού όμως δούμε πια είναι η κατανομή μαζών στους αστέρες.

### 1.2.3.1 Initial Mass Function

Η Initial Mass Function (IMF) είναι μια εμπειρική συνάρτηση που χαρακτηρίζει τη κατανομή των αστρικών μαζών στην αρχή της ζωής τους <sup>6</sup> για ένα συγκεκριμένο πληθυσμό αστερών. Η IMF παρουσιάζει ίδια μορφή με μικρές σχετικά αποκλίσεις μεταξύ διαφορετικών πληθυσμών αστερών. Πέρα από τη κατανόηση της σημασίας της παγκοσμιοτήτας της, η IMF είναι πάρα πολύ σημαντικό εργαλείο καθώς τα χαρακτηριστικά και η εξέλιξη ενός αστερά εξαρτώνται από τη μάζα του. Άρα η καλύτερη δυνατή προσέγγιση της IMF είναι στο κέντρο της έρευνας για την εξέλιξη αστρικών πληθυσμών και γαλαξιών.

Όντως? βιβλιογραφία?

**Μορφή της IMF** Η IMF συνήθως <sup>7</sup> ορίζεται σαν μια σειρά διαδοχικών νόμων δύναμης της μορφής

$$\frac{dN}{dm} \propto m^{-\alpha} \quad (1.36)$$

Ο Salpeter (1955) ήταν ο πρώτος που ασχολήθηκε με το συγκεκριμένο πρόβλημα υπολόγισε από παρατηρησιακά δεδομένα τη παράμετρο  $\alpha = 2.35$ . Ο Kroupa (2001) χώρισε την IMF σε τρεις νόμους δύναμης με διαφορετικό εκθέτη:

$$\alpha = 0.3 \pm 0.7 \text{ για μάζες από } 0.01M_{\odot} \text{ έως } 0.08M_{\odot} \quad (1.37)$$

$$\alpha = 1.3 \pm 0.5 \text{ για μάζες από } 0.08M_{\odot} \text{ έως } 0.5M_{\odot} \quad (1.38)$$

$$\alpha = 2.3 \pm 0.3 \text{ για μάζες πάνω από } 0.5M_{\odot} \quad (1.39)$$

### 1.2.3.2 IMF και δημιουργία αστερών

Είναι προφανές το ενδιαφέρον του ερευνητικού κλάδου της δημιουργίας αστερών για την IMF καθώς κάθε θεωρία δημιουργίας αστερών θα πρέπει να είναι ικανή να εξηγήσει και τη "παγκόσμια" μορφή της IMF. Έτσι μέσω παρατηρήσεων των πυκνών πυρήνων στα μοριακά νέφη, βρήκαμε ότι η κατανομή των μαζών τους (Dense Core Mass Function - DCMF) μοιάζει με αυτή των αστερών της κύριας ακολουθίας με τη διαφορά ότι είναι μετατοπισμένη κατά ένα παράγοντα 3 προς τις μεγαλύτερες μάζες, με το σημείο αλλαγής της κλίσης να είναι στις  $2 - 3 M_{\odot}$  σε σχέση με τις  $0.5 M_{\odot}$  της IMF.

Αν και θα πρέπει να είμαστε ιδιαίτερα προσεκτικοί με τις συγκρίσεις των δύο κατανομών καθώς υπάρχουν μεγάλες απροσδιοριστίες στα άνω και κάτω όρια της DCMF [polychroni\_2010], το συμπέρασμα που βγάζουμε, με τα μέχρι τώρα αποτελέσματα, είναι ότι λόγω της επίδρασης των μαγνητικών πεδίων και των εκροών μάζας (outflows) από τους πρωτοαστέρες μέρος της ύλης επιστρέφει στο μοριακό νέφος με μια εκτίμηση για την απόδοση των πυκνών πυρήνων να είναι περίπου 30%.

<sup>6</sup>δηλαδή μόλις μπούν στη Κύρια Ακολουθία

<sup>7</sup>Πέρα από τη μορφή νόμου δύναμης, η IMF μπορεί να οριστεί και σαν λογαριθμική κανονική κατανομή [1]

### 1.3 Παρατηρήσεις των Μοριακών Νεφών

Παρά τη "κυριαρχία" του μοριακού υδρογόνου στα Μοριακά Νέφη είναι απίθανο να το παρατηρήσουμε καθώς η ενεργειακή διαφορά ακόμα και των χαμηλότερων διεγερμένων από τη βασική του στάθμη είναι πολύ μεγάλη, όπως θα δείξουμε παρακάτω. Έτσι στις χαμηλές θερμοκρασίες των Μοριακών Νεφών, η μόνη δυνατότητα να παρατηρήσουμε άμεσα το  $H_2$  είναι μέσω γραμμών απορρόφησης από πηγές στο υπόβαθρο<sup>8</sup>.

Ο εναλλακτικός τρόπος παρατήρησης του  $H_2$  είναι εμμέσως μέσω της εκπομπής διαφορετικών μορίων που είναι πιο "ευαίσθητα" στις χαμηλές θερμοκρασίες, όπως του Μονοξειδίου του Άνθρακα ( $^{12}CO$ ) και των ισοτόπων του ( $^{13}CO$ ,  $C^{18}O$ ), της αμμωνίας ( $NH_3$ ) και άλλων ( $CS$ ,  $H_2CO$ ,  $H_2O$ ,  $OH$ ). Γνωρίζοντας την αναλογία μεταξύ των μορίων μπορούμε να υπολογίσουμε τη ποσότητα του  $H_2$ .

Εκτός από τη παρατήρηση της μοριακής συνιστώσας του νέφους, έχουμε στη διάθεση μας και άλλες περιοχές παρατήρησης όπως η εκπομπή των κόκκων σκόνης στο Υπέρυθρο και η εξάλειψη από τους ίδιους του ορατού φώτος αστερών του υποβάθρου.

#### 1.3.1 Ενεργειακές μεταβάσεις του $H_2$

Το  $H_2$  είναι ένα πλήρως συμμετρικό μόριο άρα δεν έχει μόνιμη διπολική ροπή. Άρα αφού οι μεταβάσεις του ηλεκτρικού διπόλου είναι απαγορευμένες οι επόμενες είναι οι τετραπολικές. Η ενέργεια περιστροφής είναι  $E_{rot} = \frac{h^2}{2I_{H_2}} J(J+1)$  όπου  $J$  ο περιστροφικός κβαντικός αριθμός και  $I_{H_2} = 5 \times 10^{-48} \text{ kg m}^2$  η ροπή αδράνειας του  $H_2$ . Για τις τετραπολικές μεταβάσεις έχουμε ότι  $\Delta J = 0, \pm 2$ , άρα για το  $H_2$  αυτό μπορεί να βρίσκεται σε δύο μορφές, αυτή του παρά- $H_2$  όπου είναι κατειλημμένες μόνο οι καταστάσεις με  $J = 0, 2, 4, 6, \dots$  και η όρθο- $H_2$  όπου είναι κατειλημμένες μόνο οι καταστάσεις με  $J = 1, 2, 5, \dots$ . Άρα η χαμηλότερη ενεργειακή διαφορά από τη βασική κατάσταση ( $J = 0$ ) είναι η

$$\Delta E = E(J=2) - E(J=0) \simeq 4.7 \times 10^{-2} \text{ eV} \quad (1.40)$$

η οποία αντιστοιχεί σε θερμοκρασία  $510 \text{ K}$ . Από τη μετάβαση παράγεται ένα ένα φωτόνιο μήκους κύματος  $28.2 \mu m$  στο υπέρυθρο ενώ ο συντελεστής Einstein είναι  $A_{20} = 3 \times 10^{-11} \text{ s}^{-1}$ .

Αν εργαστούμε αντίστοιχα για τις ταλαντωτικές μεταβάσεις, βρίσκουμε ότι αυτές αντιστοιχούν σε θερμοκρασίες χιλιάδων βαθμών κέλβιν. Για τέτοιες θερμοκρασίες ένα διεγερμένο μόριο  $H_2$  φτάνει στη βασική του κατάσταση με συνδυασμό ταλαντωτικών και περιστροφικών μεταβάσεων. Οι εκπομπές αυτές είναι χαρακτηριστικές στα μέτωπα κυμάτων κρούσης όπου το  $H_2$  θερμαίνεται σε πολύ υψηλές θερμοκρασίες.

#### 1.3.2 Παρατηρήσεις στο CO

Εφόσον το  $H_2$  είναι δύσκολο να το παρατηρήσουμε χρησιμοποιούμε το Μονο-

Φωτογραφία CO

<sup>8</sup> μέσω των γραμμών απορρόφησης στο Υπεριώδες

## μετάφραση

Ξείδιο του Άνθρακα CO σαν tracer του μοριακού αερίου. Το CO είναι το δεύτερο σε αναλογία μόριο στο Σύμπαν (μετά το  $H_2$ ) και έχει μόνιμη διπολική ροπή άρα έχουμε περιστροφικές ενεργειακές μεταβάσεις με  $\Delta J = \pm 1$  το οποίο του επιτρέπει να εκπέμπει σημαντικά στο ραδιοφωνικό φάσμα. Σε αντιστοιχία με τη διαδικασία που κάναμε στη παράγραφο 1.3 βρίσκουμε για το CO για τη χαμηλότερη μετάβαση  $J = 1 \rightarrow 0$   $\Delta E = 4.8 \times 10^{-4} eV$  το οποίο αντιστοιχεί σε θερμοκρασία  $5.5 K$ . Η μετάβαση αυτή αποδίδει ένα ραδιοφωνικό φωτόνιο στα  $2.6 mm$  και ο συντελεστής Einstein για την αυθόρμητη αποδιέγερση είναι  $A_{10} = 7.5 \times 10^{-8} s^{-1}$ .

Ο κύριος μηχανισμός διέγερσης ενός μορίου CO στη  $J = 1$  είναι μέσω της σύγκρουσης του με ένα μόριο  $H_2$ . Αφού διεγερθεί η αποδιέγερση του μπορεί να γίνει είτε εκπέμποντας ένα φωτόνιο στα  $2.6 mm$  σε περιοχές με χαμηλή συνολική πυκνότητα είτε μεταφέροντας την ενέργεια του σε ξανά σε ένα μόριο  $H_2$  χωρίς να εκπέμψει φωτόνιο σε περιοχές με μεγάλη συνολική πυκνότητα. Για να βρούμε τη κρίσιμη πυκνότητα όπου διαχωρίζονται αυτές οι δύο περιοχές θεωρούμε ότι η πιθανότητα αυθόρμητης εκπομπής  $A_{ij}$  της μετάβασης  $i \rightarrow j$  είναι ίση με τη πιθανότητα εκπομπής λόγω σύγκρουσης  $n \gamma_{ij}$ . Άρα η κρίσιμη πυκνότητας είναι:

$$n_{crit} = \frac{A_{ij}}{\gamma_{ij}} \quad (1.41)$$

## Μπορώ να βρώ το διάγραμμα?

Για μια τυπική θερμοκρασία  $T = 10 K$  βρίσκουμε  $n_{crit} = 3 \times 10^3 cm^{-3}$ .