

MCTA001-13-Algoritmos e Estruturas de Dados I

Aula 07

Árvores Balanceadas

Marcio K. Oikawa
(marcio.oikawa@ufabc.edu.br)

1o. Quadrimestre de 2020



Introdução

- Árvores são estruturas de dados muito eficientes para operações de busca.
- A ordem em que operações de inserção e remoção são realizadas podem levar a árvores com estruturas diferentes.
- Árvores balanceadas são árvores em que a quantidade de nós nas subárvores esquerda e direita é equilibrada.
- Árvores balanceadas possuem alturas menores (promovendo, portanto, buscas mais rápidas).

Introdução

Árvores A e B possuem os mesmos elementos. Compare suas alturas.

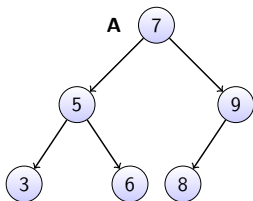


Figura: Árvore A possui altura (h_A) igual a 2.

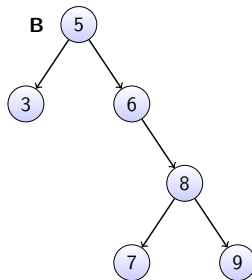


Figura: Árvore B possui altura (h_B) igual a 3.

Árvores Degeneradas

- Árvores não-balanceadas concentram muitos nós em um único ramo.
- O efeito é que a altura da árvore fica muito grande.
- No exemplo, vemos uma árvore degenerada, cujo desempenho de busca é similar a uma lista ligada (!)

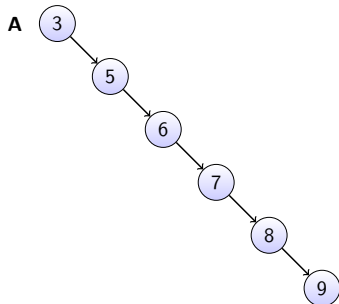


Figura: Árvore B possui altura (h_A) igual a 5.

Árvores Balanceadas

- Árvores balanceadas são árvores que conseguem distribuir seus nós de forma equilibrada entre seus filhos da esquerda e direita.
- São exemplos de árvores balanceadas:
 - Árvores AVL;
 - Árvores rubro-negras (*Red-Black*).

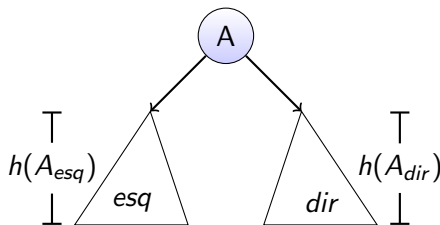
Árvores AVL

- Definida originalmente por Georgii **A**delson-**V**eslky e Evgenii Mikhailovich **L**andis, em 1962.
- Definições:
 - Uma árvore AVL é uma árvore binária de busca (ABB).
 - A diferença entre as alturas dos filhos de cada nó é, no máximo de 1 unidade.

Árvores AVL

Fator de Balanceamento

- Fator de balanceamento (FB_A) é uma medida que serve para comparar as alturas das sub-árvores esquerda e direita de cada nó.
- Não há padronização do cálculo, mas ele se resume à diferença entre alturas.
- $FB_A = h(A_{dir}) - h(A_{esq})$



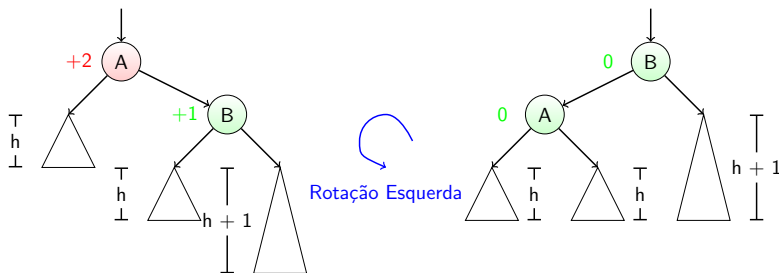
Árvores AVL

Rotações

- Rotações são operações que procuram redistribuir os nós da árvore de maneira que as alturas de todos os nós possam se equilibrar.
- Operações de inserção e remoção podem alterar o equilíbrio das alturas dos nós.
- Para fatores de balanceamento maiores que 1, ou menores que -1, deve-se rebalancear.
- O rebalanceamento é realizado por rotações:
 - Rotações simples.
 - Rotações duplas.

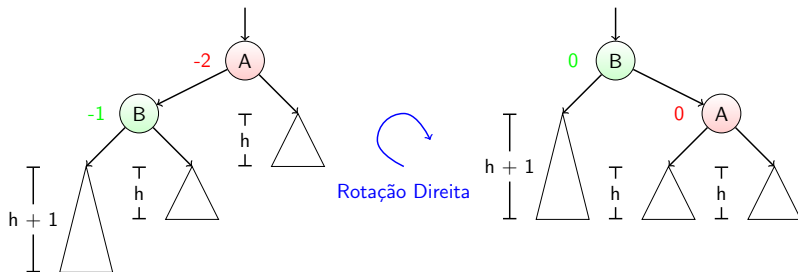
Árvores AVL

Desbalanceamento Direita-Direita (Rotação Simples Esquerda)



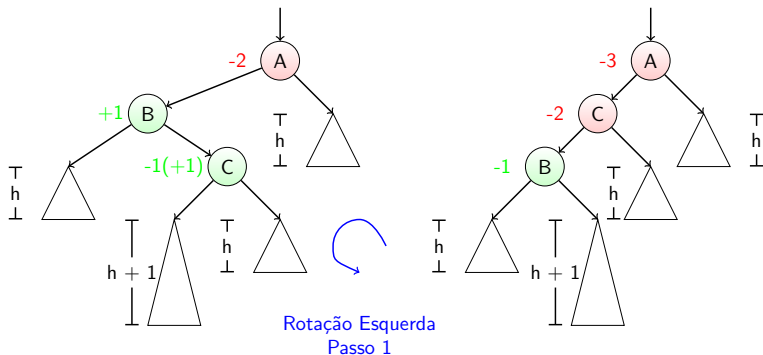
Árvores AVL

Desbalanceamento Esquerda-Esquerda (Rotação Simples Direita)



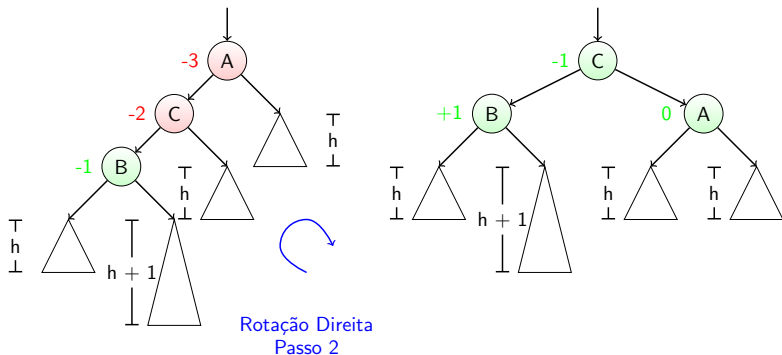
Árvores AVL

Desbalanceamento Esquerda-Direita (Rotação Left-Right)



Árvores AVL

Desbalanceamento Esquerda-Direita (Rotação Dupla Left-Right)



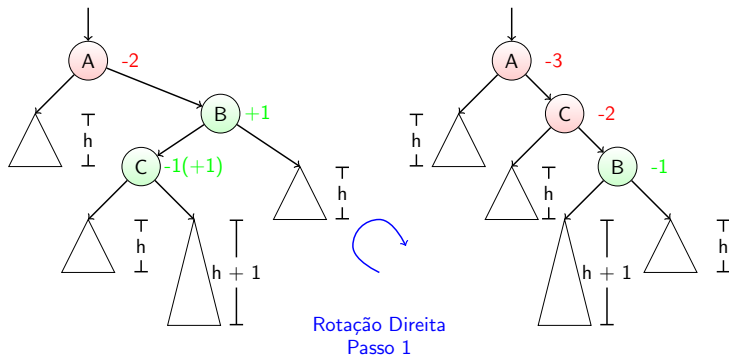
Árvores AVL

Desbalanceamento Direita-Esquerda (Rotação Dupla Right-Left)

- O processo para rotação dupla direita-esquerda é complementar à rotação esquerda-direita.
- O nó desbalanceado possui fator de balanceamento positivo (+2) e seu filho possui fator de balanceamento negativo (-1).

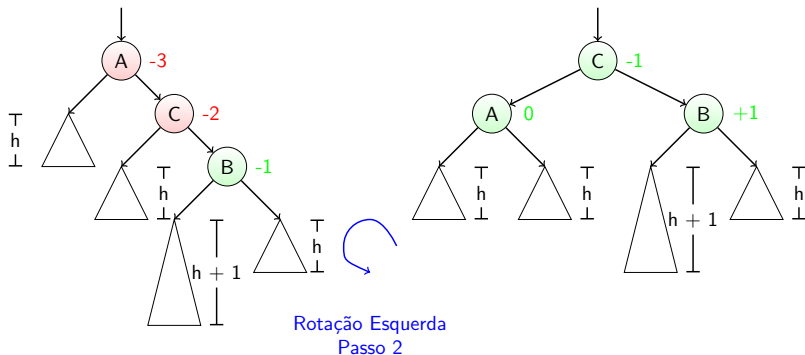
Árvores AVL

Desbalanceamento Direita-Esquerda (Rotação Right-Left)



Árvores AVL

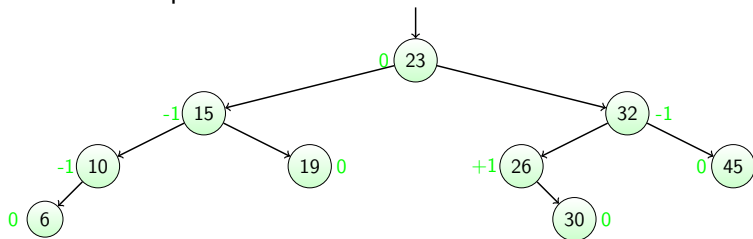
Desbalanceamento Direita-Esquerda (Rotação Dupla Right-Left)



Árvores AVL

Exemplos

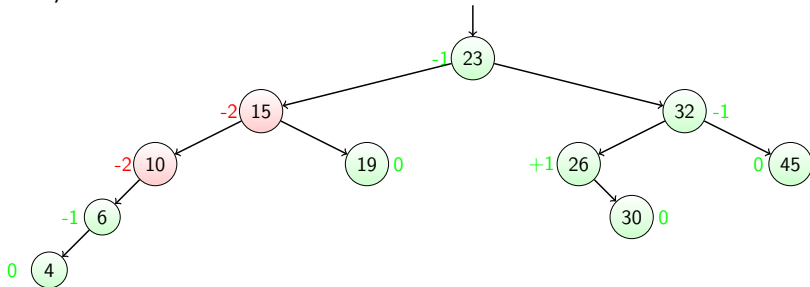
Árvore AVL Equilibrada



Árvores AVL

Exemplos

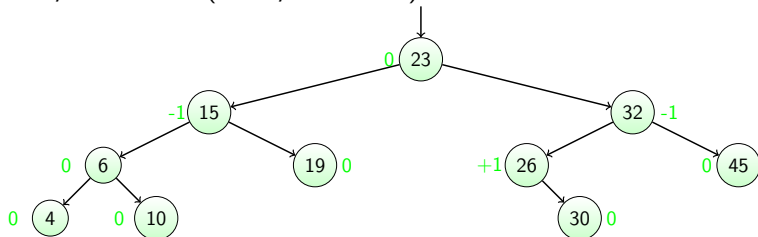
Inserção do nó 4:



Árvores AVL

Exemplos

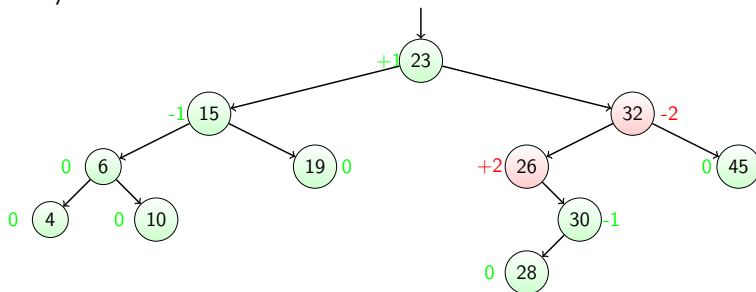
Inserção do nó 4 (Rotação Direita):



Árvores AVL

Exemplos

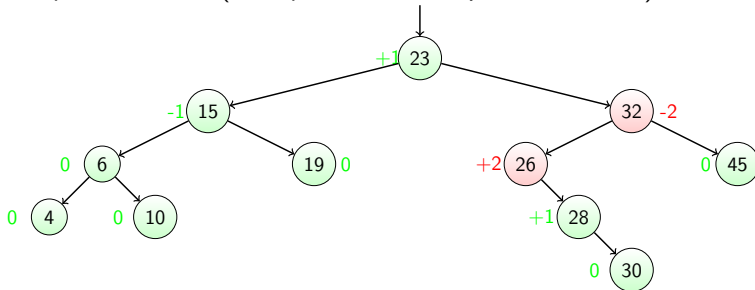
Inserção do nó 28:



Árvores AVL

Exemplos

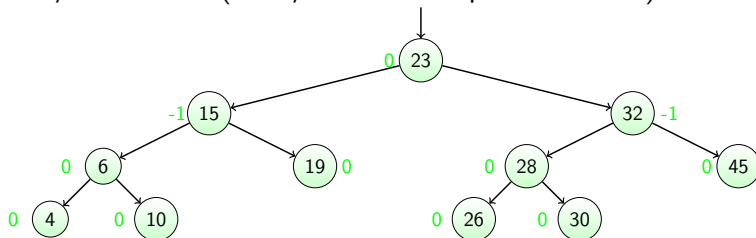
Inserção do nó 28 (Rotação Direita-Esquerda Passo 1):



Árvores AVL

Exemplos

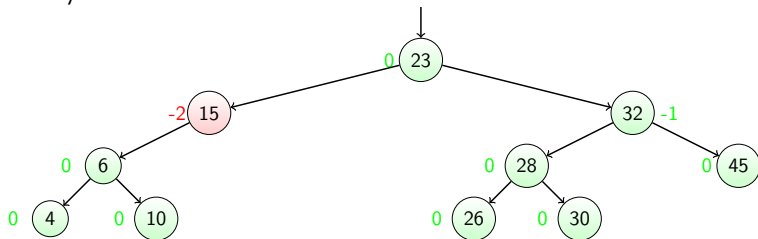
Inserção do nó 28 (Rotação Direita-Esquerda Passo 2):



Árvores AVL

Exemplos

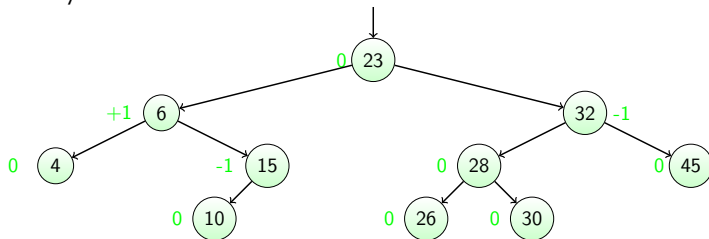
Remoção do nó 19:



Árvores AVL

Exemplos

Remoção do nó 19:



Árvores AVL

Avaliação

- Vantagens de Árvores-AVL:
 - Busca sempre em tempo logarítmico (árvores tem distribuição equilibrada de nós).
 - Operações de inserção, remoção e busca também consomem tempo logarítmico.
- Desvantagens de Árvores-AVL:
 - Implementação é mais difícil.
 - Dependendo das opções de implementação, pode demandar mais espaço (armazenamento de *altura* ou *fator de balanceamento*).

Árvores AVL Algoritmo

- O algoritmo de rotações é relativamente simples. A parte difícil é identificar os nós de deverão participar das rotações.
- Deve-se escolher os nós que tiveram alteração no fator de balanceamento no caminho da folha afetada até a raiz da árvore (nessa ordem).
- Pode ser útil ter uma função que identifica no nó-pai de uma sub-árvore.
- Algumas implementações sugerem a inclusão de campos a mais no nó (fator de balanceamento ou altura), a fim de tornar as operações de balanceamento mais eficientes.