

B-04 ソリトン波が伝搬可能な伝送線路理論の構築に向けた電信方程式の数値計算

Numerical Analysis of the Telegraph eqnarray Toward the Construction of a Transmission Line Theory Capable of Supporting Soliton Wave Propagation

5329 三浦颯大

指導教員 宮田 尚起

1. はじめに

第5世代移動通信システム（5G）の次世代規格であるBeyond 5Gを代表に、無線通信機器の高周波化が急速に進み、今後も THz 帯まで拡大していくことが予想される[1]。数百 GHz 帯の高周波領域ではコンデンサが電圧や周波数に依存して変化する[2]。また、非線形特性を持つコンデンサを用いた回路は既存の伝送線路理論（線形回路モデルに基づく理論）では説明しきれない伝播現象が確認されている[3]。特に、回路基板内を伝送する電気信号にソリトン波が存在することが報告されている。現在は、電信方程式を伝搬する波形に対して設計、開発を行っている。しかし数百 GHz 帯ではソリトン波が伝搬する。この波は非線形特性を持つため、現在用いられる電信方程式では表すことができない。そこでソリトン波が伝搬可能な伝送線路理論の構築することで、今後数百 GHz 帯でも新たな伝送理論を用いて設計、開発が行えるようになることが期待される。

そこで、既にソリトン解が得られることが確認できている KdV 方程式を数値的に解析し、ソリトン波の観測できる数値計算の手法を習得する。これを中間発表までに実施した。今後は、その数値計算の手法を非線形化させた電信方程式に応用し、ソリトン波が伝搬することを確認する。

2. ソリトン波

本研究で用いるソリトン波がどのような特性を持っているのか示す。ソリトン波とは、非線形方程式に従う安定したパルス状の波動で、伝搬している際に形状、速度が変わらないこと、ソリトン波同士が衝突した後でも、それぞれが元の波形と速度を保ったまま再びソリトン波として伝搬し続けるという特性を持つ。

3. 電信方程式

周波数が高くなることによって電信方程式に発生する問題を示す。電信方程式とは式(1)で示され、使用する周波数帯が数 GHz 帯になることによって波長が短くなり回路内で距離によって電圧、電流の値が変動す

ることにより、時間のみで回路が設計できなくなる問題に対して、時間に距離を加えた方程式である。ここで、 R, L, C, G はそれぞれ単位長あたりの抵抗、インダクタンス、キャパシタンス、ジーメンスである。前述したとおり、数百 GHz 帯の高周波領域では、電信方程式のキャパシタンス C の値が変数になるという問題が発生する。その問題を考慮した新しい伝送線路理論を構築する必要がある。

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + (RC + GL) \frac{\partial V}{\partial t} + GRV \quad (1)$$

4. ソリトン波の伝搬を確認する数値計算

KdV (Korteweg–de Vries) 方程式は、ソリトン解が得られている代表的な偏微分方程式であり、次式で表される。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad (2)$$

ここで、 $u(x, t)$ は波の振幅を示す。

本研究では、KdV 方程式をコンピューターで計算可能となるよう離散化する。まず、空間微分は中心差分法で近似した。中心差分法はフーリエ展開を利用するスペクトル法や高次差分法に比べて実装が簡単で、計算速度が速い点がメリットである。中心差分法で近似した結果を式(3)に示す。

$$\frac{du_i}{dt} = -6u_i \cdot \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} - \frac{u_{i+2} - 2u_{i+1} + 2u_{i-1} - u_{i-2}}{2\Delta x^3} \quad (3)$$

時間発展には誤差が小さく精度の高い4次のルンゲ=クッタ法 (RK4) で近似した。近似結果を式(4)に示す。RK4 法では、時刻 t_n における解ベクトル $u^n = \{u_i^n\}$ から次の時刻 u^{n+1} を求める更新は次式で

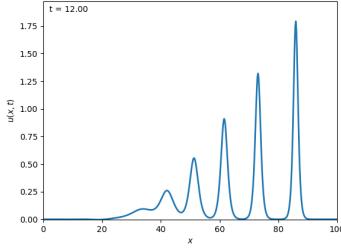


図 1 数値計算によって出力される時間が 12 秒の波

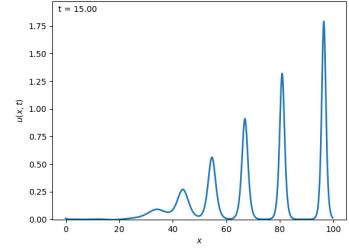


図 2 数値計算によって出力される時間が 15 秒の波

与えられる. ここで $f(u)$ は式 (3) の右辺を表す.

$$\begin{aligned} k_1 &= f(u^n), \\ k_2 &= f\left(u^n + \frac{\Delta t}{2}k_1\right), \\ k_3 &= f\left(u^n + \frac{\Delta t}{2}k_2\right), \\ k_4 &= f(u^n + \Delta t k_3), \\ u^{n+1} &= u^n + \frac{\Delta t}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{aligned} \quad (4)$$

この近似式にガウス波を初期条件として与え, シミュレーションを行い, 波形が伝搬する様子を確認した. 計算条件は以下の通りである. 計算領域の長さを $L_x = 100.0$, 空間刻み幅は $\Delta x = 0.2$, 時間刻み幅は $\Delta t = 0.0015$, 計算終了時刻を $T_{\text{end}} = 150.0$ とした. また初期条件は式 (5) で表される.

$$u(x, 0) = \exp\left[-\frac{(x - x_0)^2}{\sigma^2}\right] \quad (5)$$

ここで, パルスの中心位置は $x_0 = 30.0$ とし, 波の広がりは $\sigma = 5.0$ とした. さらに, 波が端に到達しても再び反対側から現れる周期境界条件を用いた.

KdV 方程式の数値計算より出力されたソリトン波を図 1, 図 2, 図 3, 図 4 に示す. それぞれ時間 $t = 12, 15, 28.50, 32.25$ の結果である. 図 1 の波形と図 2 の波形を比較した時, 振幅の低いソリトン波はほとんど位置が変化していないのに対し, 振幅の高いソリトン波は進んでいる. したがって, 振幅が大きいソリトン波ほど速く伝搬することが確認できる. さらに, ソリトン波同士が衝突しても, 波形が変わらず進んでいる様子を図 3, 図 4 の位置 $x = 50$ 付近で振幅の大きい波が小さい波を追い抜かしていることから分かる. また, 図 2 と図 4 の波形を比較しても波形の形に変化がないことから波形が崩れることなく形を保って伝搬することを確認できる. これらの結果から, KdV 方程式をもとにソリトン波の伝搬が確認できる数値計算例を示した.

5. おわりに

本研究では, 現在までに KdV 方程式を対象としてソリトン波の伝搬を確認数値計算によって確認した. 今

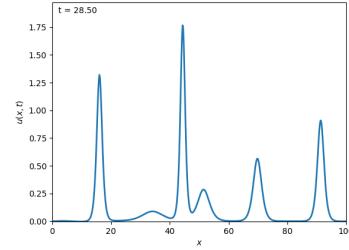


図 3 数値計算によって出力される時間が 28.5 秒の波

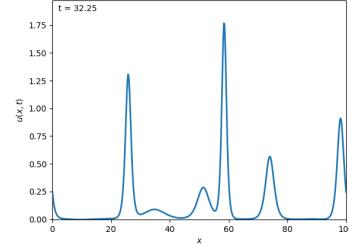


図 4 数値計算によって出力される時間が 32.25 秒の波

後は, この確認した数値計算方法を非線形化させた電信方程式に応用し, 同じようにソリトン波が伝搬するかの確認を行う.

参考文献

- [1] T. S. Rappaport et al., “Wireless Communications and Applications Above 100 GHz: Opportunities and Challenges for 6G and Beyond,” IEEE Access, vol. 7, pp. 78729 – 78857, 2019. doi:10.1109/ACCESS.2019.2921522
- [2] F. Martín and X. Oriols, “Simple model to study soliton wave propagation in periodic-loaded nonlinear transmission lines,” Appl. Phys. Lett., vol. 78, no. 18, pp. 2802 – 2804, Apr. 2001. doi:10.1063/1.1369619
- [3] R. Hirota and K. Suzuki, “Studies on Lattice Solitons by Using Electrical Networks,” J. Phys. Soc. Jpn., vol. 28, pp. 1366 – 1367, 1970.