

Berry 位相

Schrödinger 方程式

$$i \frac{\partial \psi(\varrho, t)}{\partial t} = \mathcal{H}(\varrho; R(t)) \psi(\varrho, t)$$

座標 ϱ が t (15') えは、外場

$$R(t) = (R_1(t), \dots, R_n(t))$$

の角速度

$$\psi(\varrho, t) = T \exp \left[-i \int_0^t \mathcal{H}(\varrho; R(t')) dt' \right] \psi(\varrho, 0)$$

時間順序積

$$T \exp \left[-i \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{H}(t) dt \right] := \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^N \exp \left[-i \mathcal{H}(t_k) \varepsilon \right]$$
$$\varepsilon = \frac{t_2 - t_1}{N}$$

∴ $R(t)$ の変化が非常に大きい(断熱变化)にあると、
 $\frac{dR(t)}{dt} \approx 0$ であり、断熱定理が適用できるよう(準位の差が十分大きい)

$$|\psi_n(t)\rangle = \exp[-i\int_0^t E_n(R(t')) dt'] |n(R(0))\rangle \cdots (*)$$

スケルト方程式

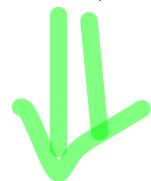


$$\mathcal{H}(R(0)) |n(R(0))\rangle = E_n(R(0)) |n(R(0))\rangle$$

時間軸を固定したときの正常 Schrödinger eq の解
 $|n(R(t))\rangle$ は位相の自由度があり、それは各時刻の snapshot で崩壊されてしまう

Q. 2つの時刻の関係は?

A. 時間依存 Schrödinger eq である



(*) これはダメ

實際は

$$|\psi_n(t)\rangle = \exp\left[i\int_n^t dt'\right] \exp\left[-i\int_0^t E_n(R(t')) dt'\right] |n(R(t))\rangle$$

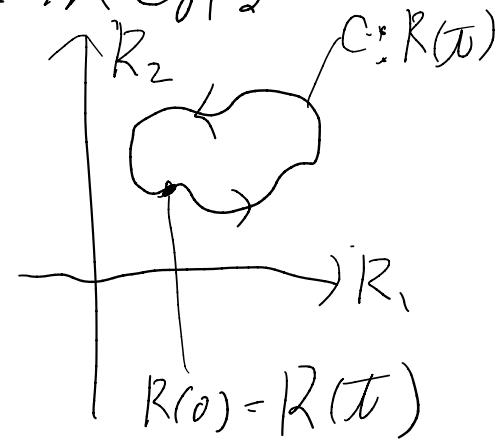
Berry位相

時空間依存 Schrödinger 方程式

$$\begin{aligned} (i\frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{H}(R(t))) |\psi_n(t)\rangle &= -\frac{dP_n(t)}{dt} \exp\left[i\int_n^t dt'\right] \exp\left[-i\int_0^t E_n(R(t')) dt'\right] |n(R(t))\rangle \\ &\quad + E_n(R(t)) \exp\left[i\int_n^t dt'\right] \exp\left[-i\int_0^t E_n(R(t')) dt'\right] |n(R(t))\rangle \\ &\quad + i \exp\left[i\int_n^t dt'\right] \exp\left[-i\int_0^t E_n(R(t')) dt'\right] \frac{d}{dt} |n(R(t))\rangle \\ &\quad - E_n(R(t)) \exp\left[i\int_n^t dt'\right] \exp\left[-i\int_0^t E_n(R(t')) dt'\right] |n(R(t))\rangle \\ &= 0 \quad \Rightarrow \text{たかが}\langle n(R(t))| \text{とおもひよる} \end{aligned}$$

$$i\frac{dP_n(t)}{dt} = \langle n(R(t)) | \frac{d}{dt} |n(R(t))\rangle = \sum_j \langle n(R(t)) | \frac{\partial}{\partial R_j} |n(R(t))\rangle \dot{R}_j(t)$$

∴ $t=0$ の時刻 $R(t)$ が n 時刻 $t=0$ と $t=T$ の時刻 $R(t)$ は等しい



$$i \frac{dP_n(t)}{dt} = \langle n(R(t)) | \frac{d}{dt} |n(R(t))\rangle = \sum_j \langle n(R(t)) | \frac{\partial}{\partial R_j} |n(R(t))\rangle \dot{R}_j(t)$$

\hat{n} 時刻 $[0, T]$ の和を計算する $P_n(0) = 0$ と

$$\begin{aligned} P_n[C] &= -i \int_0^T \sum_j \langle n(R(t)) | \frac{\partial}{\partial R_j} |n(R(t))\rangle \dot{R}_j(t) dt \\ &= - \oint_{R \in C} \sum_j i \langle n(R) | \frac{\partial}{\partial R_j} |n(R)\rangle dR_j \end{aligned}$$

$A_j = i \langle n(R) | \frac{\partial}{\partial R_j} |n(R)\rangle$: Berry 磁場

これは、復数形式で書くと $\int F$

$$P_n[C] = -i \oint_C \langle n | (d | n \rangle)$$

アイン-バンドルと接続

空間(多様体) M の各点にアイン- F という(直積)空間を矢張りさせたものをアイン-バンドルと呼ぶ。

直観的には直積 $M \times F$ が良さそう

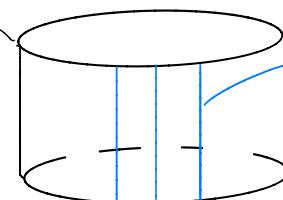
⇒ 直積では表せない場合がある

(例)

金縛りで

普通の帯

$M \times F$
と同一視
できる

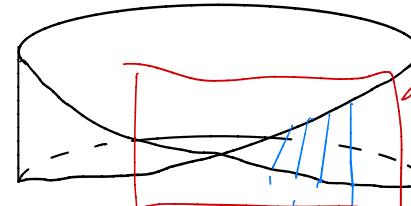


アイン- F

多様体 M
(底空間)

自明なバンドル

Möbius の帯



ねじれ,
どう表現するか?

局部的には
直積で表せる

⇒ アイン-バンドル



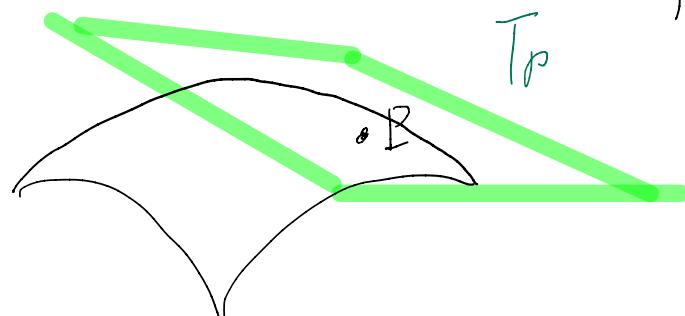
非自明なバンドル

アフィン-ベクトルの例

例1. 空間の各点は定義されたベクトル空間はアフィン

電場 $E(x)$ は Euclid 空間 \mathbb{R}^3 上の点で定義された 3 次元ベクトル
空間の元、つまりベクトル場の集合(ベクトルハンドル)はアフィン
ハンドルである。

例2. 曲面 M のある点 P での接平面 $T_P(M)$ はアフィン。



すなわち、 $T(M) = \bigcup_{P \in M} T_P(M)$
はアフィンハンドル。

曲面の微分幾何学(ベクトル解析)の概念

(曲率, Christoffel 級数, 共変微分など)をアフィンハンドルへ拡張
 \rightarrow 接箱 (29c)

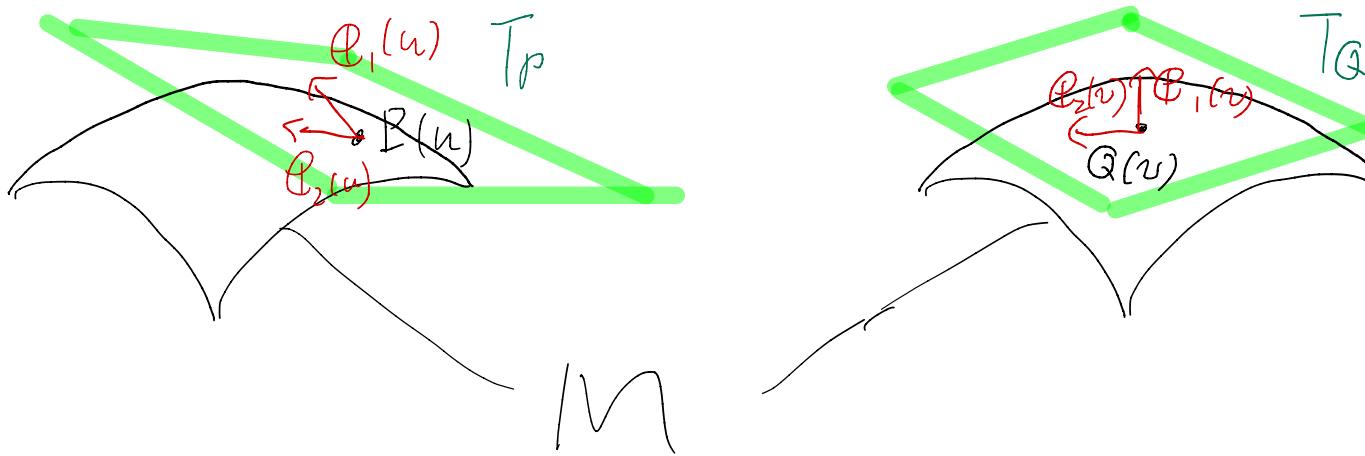
曲面の微分幾何

3次元 Euclidean 空間中の曲面 M 上の曲面上の点 P は

11° ラメータ $u = (u^1, u^2)$ を用い、 $H = H(u) \in \mathbb{R}^3$ と表され。

この接平面を張る基底は $\{\varphi_1(u), \varphi_2(u)\}$ と表される

一方で点 $Q \in M$ では $H = H(v)$ とし、接平面 T_Q の基底 $\{\varphi_1(v), \varphi_2(v)\}$



点が動くと接平面の基底も動く（動標架）

$$\Rightarrow \varphi_i(u+du) = \varphi_i(u) + \sum_{j=1}^3 w_{ij}^j(u) \varphi_j(u) \text{ すなはち } d\varphi_i = \sum_{j=1}^3 w_{ij}^j \varphi_j$$

接縦: $\Gamma_{ik}^j du^k$ $\varphi_3 := \varphi_1 \times \varphi_2 = \sum_{j=1}^3 w_{ij}^j \varphi_j + w_3^3 \varphi_1 \times \varphi_2$

$$d^2 = 0 \text{ が } \gamma$$

$$d(d\varrho_i) = d\left(\sum_{j=1}^3 w_i^j \varrho_j\right) = \sum_{j=1}^3 \left(dw_i^j - \sum_{k=1}^3 w_i^{jk} \wedge w_k^j\right) = 0$$

すなはち

$$\{w\}_{ij} = w_i^j \quad \text{ただし } \mathbb{R}^3 \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$$

$$dw = \underline{w} \wedge \underline{w} \quad \left(dw_i^j = \sum_{k=1}^3 w_i^{jk} \wedge w_k^j \text{ for } i, j = 1, 2, 3 \right)$$

~~これは~~ 今、標準平面内のベクトルを $dr = \sigma^1 e_1 + \sigma^2 e_2$ とすると

$$\begin{aligned} d(dr) &= d(\sigma^1 e_1 + \sigma^2 e_2) = (d\sigma^1) e_1 + \sigma^1 (de_1) + (d\sigma^2) e_2 + \sigma^2 (de_2) \\ &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 (d\sigma^i - \sigma^j \wedge w_i^j) e_j - \sum_{i=1}^2 \sigma^i \wedge w_i^3 e_3 = 0 \end{aligned}$$

E)

$$\begin{cases} d\sigma^i = \sum_{j=1}^2 \sigma^j \wedge w_j^i \quad \text{for } i=1, 2 & (\text{構造方程式}) \\ \sum_{i=1}^2 \sigma^i \wedge w_i^3 = 0 \end{cases}$$

Gauss曲率 K と $dw_2^1 = K \sigma^1 \wedge \sigma^2$ は定義

平行移動を $d\Gamma \parallel \mathcal{E}_3$ と定義すると

$$\begin{aligned} d\Gamma &= \sum_{j=1}^2 [(d\sigma^j) \mathcal{E}_j + \sigma^j (d\mathcal{E}_j)] \\ &= \sum_{j=1}^2 \left[(d\sigma^j) \mathcal{E}_j + \sigma^j \left(\sum_{k=1}^2 \omega_j^k \mathcal{E}_k + \omega_j^3 \mathcal{E}_3 \right) \right] \\ &= \sum_{j=1}^2 \left(d\sigma^j + \sum_{k=1}^2 \sigma^k \omega_k^j \right) \mathcal{E}_j + \sum_{j=1}^2 \sigma^j \omega_j^3 \mathcal{E}_3 \end{aligned}$$

$\therefore d\sigma^j + \sum_{k=1}^2 \sigma^k \omega_k^j = 0$

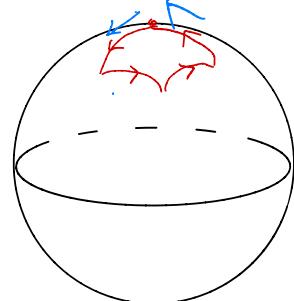
Christoffel/Symbol 1

$\Gamma = \mathcal{E}_N$ のとき、 $d\mathcal{E}_i = \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^3 \Gamma_{ij}^k \mathcal{E}_k dw^j$ と関係する

$$\sum_{j=1}^2 \Gamma_{ij}^k dw^j = \omega_i^k \quad \text{for } i=1, 2, k=1, 2, 3$$

平行移動電位を定義すると曲率テンソルが定義できる。

曲率(曲がり度合)とは? \Rightarrow 曲面上の(微小)領域のまわりを
1周した際には方向ベクトル(速度ベクトル)
の向きがどう変わったか?



du^1, du^2 あつくる "平行四辺形" を 1周した際の
ベクトル ∇ の変化は (計量図)

$$\left[\frac{\partial \Gamma_{jl}^i}{\partial u^k} - \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial u^l} + \Gamma_{il}^m \Gamma_{mk}^j - \Gamma_{jk}^m \Gamma_{ml}^i \right] \nabla_i du^k du^l$$

$$= R_{ikl}^i A_i du^k du^l$$

曲率テンソル

座空間上の累次2流のアベルの対応は?

⇒アベルハンドルについても曲面の概念をまとめて
接続、曲率を導入する

量子 Hall 効果の場合、アベルの Lie 群 G の場合が重要
である。これについて述べる。

左より \mathbb{R}^n -ラメーの空間 (今回 \mathbb{R}^n -ラメーの空間)

近傍 UCM の T^n -シ場 A を接続とみなして以下の接続形式
を定義する。

$$\omega = g^{-1} A g + g^{-1} d g$$

別の近傍 U' の T^n -シ場 A' とアベル元 g' への変換 T

$$g' = T g \quad , \quad A' = T^{-1} A T + T^{-1} d T$$

座標系によらず、
↓でまとめる

$$\omega' = g'^{-1} A' g' + g'^{-1} d g' = \omega \text{ つまり、接続形式は一致する。}$$

これを代入して曲率形式を

$$\Omega = dw + w \wedge w$$

とおき

接線束を $w_i^j = \sum_k P_{ki}^j du^k$ とおき

と $\Omega = R_{ikl}^i du^k \wedge du^l$ とおき

今の場合尤も接線束と L2 Berry 接線束

$$A_i = i \left\langle n \left| \frac{\partial}{\partial z_i} \right| n \right\rangle$$

と $U(1) = \{ e^{i\theta} \mid 0 \leq \theta < 2\pi \}$ とおき $= U(1)$ とおき

$$\int \Omega = C_1$$

は第 1 Chern 数と呼ばれる 3 次相不變量の整数値とおき

とおき

量子 Hall 效果のトポロジー

(M. Kohmoto, Ann. Phys. 160, 343 (1985))

⑤ 磁場の Brillouin Zone

同一周期ボテンシャル中の一群磁場中の2次元電子

$$\mathcal{H}_1 = \left[(\underbrace{p + e\alpha}_{\uparrow})^2 + V(x, y) \right] \psi = E \psi$$

Berry 磁場とまざる他の磁場には

八ヶ岳山脈は

$$V(x+L_1, y) = V(x, y), \quad V(x, y+L_2) = V(x, y)$$

ある \vec{R} に対して、格子八ヶ岳 $\vec{R} = m\vec{L}_1 + n\vec{L}_2$ の並進演算子は

$T_{\vec{R}} = \exp[i\vec{R} \cdot \vec{p}]$ たり \vec{p} が \vec{R} の正準運動量は

$$p + e\alpha = p + \frac{e}{2}(\vec{B} \times \vec{R}) + \text{const}$$

$$\tilde{T}_{\vec{R}} = \exp[i\vec{R} \cdot \{ p + \frac{e}{2}(\vec{B} \times \vec{R}) \}] = T_{\vec{R}} \exp[\frac{i}{2}e(\vec{R} \times \vec{B}) \cdot \vec{R}]$$

半導体導電率の時間依存性

$$\tilde{T}_{L_1} = T_{L_1} \exp\left[\frac{ie\theta}{2} L_1 z\right]$$

$$\tilde{T}_{L_2} = T_{L_2} \exp\left[-\frac{ie\theta}{2} L_2 x\right]$$

位相

$$\tilde{T}_{L_1} \tilde{T}_{L_2} = \exp[2\pi i \phi] \tilde{T}_{L_2} \tilde{T}_{L_1}$$

$$\phi = \frac{e\theta}{2\pi} L_1 L_2$$

$\phi = \frac{p}{q}$ (p, q :互いに素な整数) のとき、位相が $2\pi p/q$ の倍数

なら $\tilde{T}_{(qL_1, qL_2)} = \tilde{T}_{(L_1, L_2)}$ は可換である。

つまり、一周期の範囲下で Brillouin zone では $0 \leq k_1 \leq \frac{2\pi}{qL_1}, 0 \leq k_2 \leq \frac{2\pi}{L_2}$ で

$$\psi_{k_1, k_2}^{(\alpha)}(x, y) = e^{ik_1 x + ik_2 y} u_{k_1 k_2}^{(\alpha)}(x, y)$$

$$u_{k_1 k_2}^{(\alpha)}(x + qL_1, y) = e^{-i\frac{\pi}{L_2} k_2 y} u_{k_1 k_2}^{(\alpha)}(x, y), u_{k_1 k_2}^{(\alpha)}(x, y + L_2) = e^{i\frac{\pi}{qL_1} k_1 x} u_{k_1 k_2}^{(\alpha)}(x, y)$$

2. 12. 2 Block 12. 12 = P212

$$\mathcal{H}_{k_1 k_2} = (\mathbf{p} + \mathbf{k} + e\mathbf{a})^2 + V(x, y) \quad \text{with}$$

只管公式 12. 12. 2 T=0 时的 Hall 电导率

$$G_{xy} = -i \sum_{L_1 L_2} \frac{\langle m | J_y | n \rangle \langle n | J_x | m \rangle - \langle m | J_x | n \rangle \langle n | J_y | m \rangle}{(E_n - E_m)^2}$$

由上式得

$$\begin{aligned} \frac{\langle m | J_z | n \rangle}{e} &= \mathbb{E} \left\langle U_{k_1 k_2}^{(m)} \left| \frac{\partial \mathcal{H}_{k_1 k_2}}{\partial k_j} \right| U_{k_1 k_2}^{(n)} \right\rangle = \mathbb{E} (E_n - E_m) \left\langle U_{k_1 k_2}^{(m)} \left| \frac{\partial U_{k_1 k_2}^{(n)}}{\partial k_j} \right. \right\rangle \\ &= \mathbb{E} (E_m - E_n) \left\langle \frac{\partial U_{k_1 k_2}^{(m)}}{\partial k_j} \Big| n \right\rangle \end{aligned}$$

$$\mathcal{H}_{k_1 k_2} |U_{k_1 k_2}^{(n)}\rangle = E_n |U_{k_1 k_2}^{(n)}\rangle \Rightarrow$$

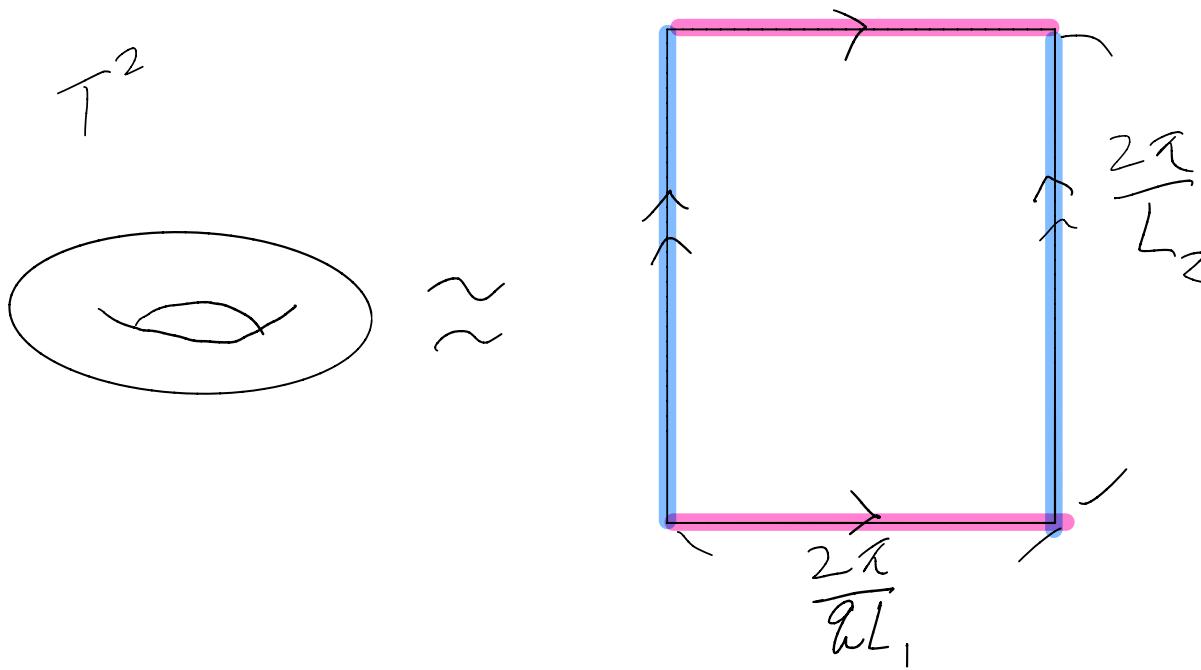
$$\frac{\partial \mathcal{H}_{k_1 k_2}}{\partial k_j} |U_{k_1 k_2}^{(n)}\rangle + \mathcal{H}_{k_1 k_2} \left| \frac{\partial U_{k_1 k_2}^{(n)}}{\partial k_j} \right\rangle = \frac{\partial E_n}{\partial k_j} |U_{k_1 k_2}^{(n)}\rangle + E_n \left| \frac{\partial U_{k_1 k_2}^{(n)}}{\partial k_j} \right\rangle$$

$$12. 12. 3 \langle U_{k_1 k_2}^{(m)} | \text{右边} \rangle$$

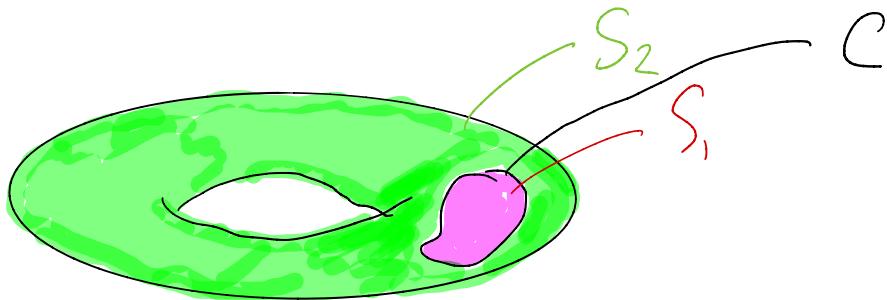
$$\partial_{xy} = -\frac{ie^2}{(2\pi)^2} \int_{T^2} dk_1 dk_2 \left\{ \left\langle \frac{\partial U_{k_1 k_2}^{(n)}}{\partial k_2} \mid \frac{\partial U_{k_1 k_2}^{(n)}}{\partial k_1} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial U_{k_1 k_2}^{(n)}}{\partial k_1} \mid \frac{\partial U_{k_1 k_2}^{(n)}}{\partial k_2} \right\rangle \right\}$$

$$= -\frac{ie^2}{(2\pi)^2} \int_{T^2} dk_1 dk_2 \left\{ \frac{\partial}{\partial k_2} \left\langle U_{k_1 k_2}^{(n)} \mid \frac{\partial}{\partial k_1} \right\rangle \left\langle U_{k_1 k_2}^{(n)} \right\rangle - \frac{\partial}{\partial k_1} \left\langle U_{k_1 k_2}^{(n)} \mid \frac{\partial}{\partial k_2} \right\rangle \left\langle U_{k_1 k_2}^{(n)} \right\rangle \right\}$$

\therefore U の定義範囲は $0 \leq k_1 \leq \frac{2\pi}{qL_1}, 0 \leq k_2 \leq \frac{2\pi}{L_2}$ のトーラス T^2 上である



\Rightarrow $T_2 \times S_1 \times S_2$ という 2 の多面体の 1/2 分割



S_1, S_2 はそれぞれ特異点 $t_2 - t_1^n$ を取り除いた後定まる

$$\int_{T_2} F = \int_{S_1} F + \int_{S_2} F$$

\Rightarrow $F = dA$ とか $|T_2$ の \Rightarrow Stokes th. $\int_S F = \int_{\partial S} A \Leftarrow$

$$\left(A = \sum_i i \left\langle U_{k_1, k_2}^{(n)} \left| \frac{\partial}{\partial k_1} \right| U_{k_1, k_2}^{(n)} \right\rangle dk_1 \times dk_2 \right)$$

$$\left(dA = i \left\{ \frac{\partial}{\partial k_1} \left\langle U_{k_1, k_2}^{(n)} \left| \frac{\partial}{\partial k_2} \right| U_{k_1, k_2}^{(n)} \right\rangle - \frac{\partial}{\partial k_2} \left\langle U_{k_1, k_2}^{(n)} \left| \frac{\partial}{\partial k_1} \right| U_{k_1, k_2}^{(n)} \right\rangle \right\} dk_1 \wedge dk_2 \right)$$

$$\int_{S_1} F = \int_{\partial S_1} A = \oint_C A \quad , \quad \int_{S_2} F = \int_{\partial S_2} A = - \oint_C A$$

$\hat{z} = \hat{e}^{\text{Berry 相}}$

$$P_n[c] = -\oint_C \sum_i i \langle U_{k,k_2}^{(n)} | \frac{\partial}{\partial k_i} | U_{k,k_2}^{(n)} \rangle dk_i = -\oint_C A$$

$|271^*27\rangle$ 表示

$$\begin{aligned} e^{iP_n[c]} &= e^{-i\oint_C A} = e^{-i\int_{S_1} F} \\ &= e^{i\int_{S_2} F} \end{aligned}$$

从 S_2 到 S_1 的

$$e^{i[\int_{S_1} F + \int_{S_2} F]} = 1$$

$$\Rightarrow \int_{T_2} F = \int_{S_1} F + \int_{S_2} F = 2\pi \times (\text{整数})$$

$$G_{xy} = \frac{e^2}{2\pi} \times \text{整数}$$

$$(G_{xy} = \frac{e^2}{h} \times \text{整数})$$

アインハイツトールと(2)の角算術

Snapshot 方程式だけでは立柱の自由度 ($U(1)$) は定まらず

$\Rightarrow \begin{cases} \text{底空間 } T_2 \text{ を底空間} \\ U(1) \text{ をアインハイツ} \end{cases}$ としたアインハイツトールと(2)の角算術になります。

接続規則(異なるアインハイツ間の元の関係)は時間発展 Schrödinger eq. から得る

底空間 T_2 を 4 分割する

$$i = 1, 2, 3, 4 \in \mathbb{N}_0$$

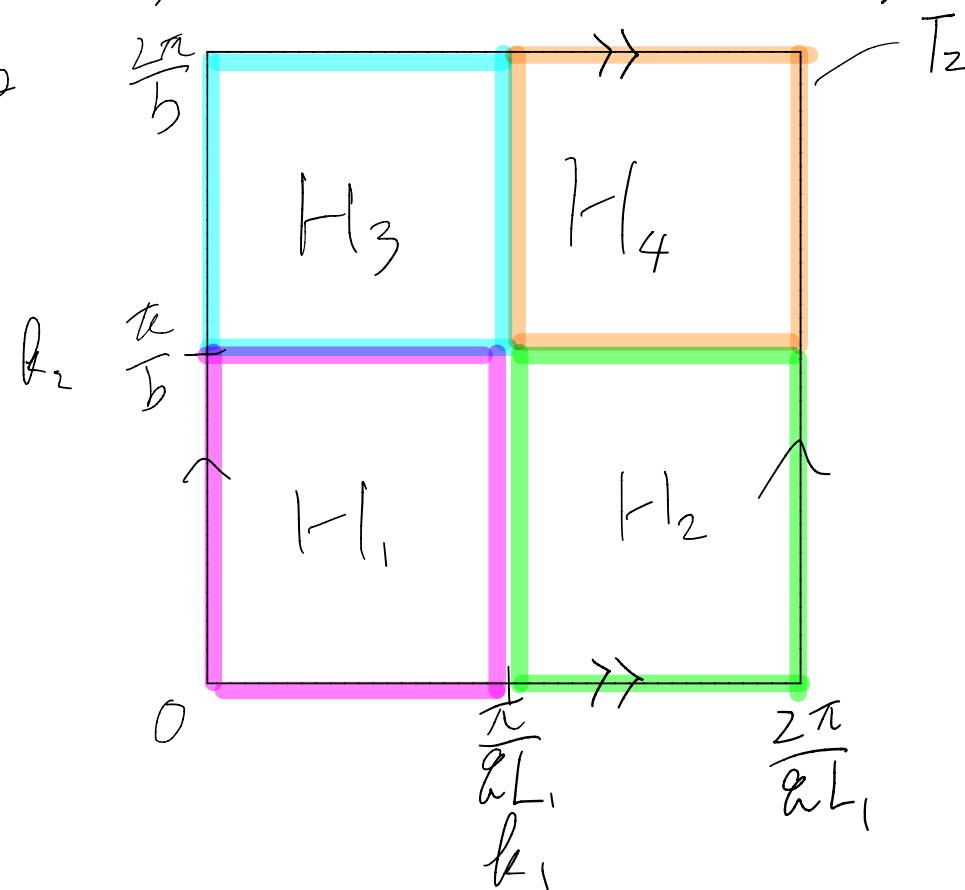
$$g_i = \exp[i\theta_i(k_1, k_2)]$$

$$T_{ij} = \exp[i(\theta_i - \theta_j)]$$

計算

$$g_j = T_{ji} g_i$$

を導換する。



複素形式と前の同様に

$$w = g^{-1} A g + g^{-1} d g = A + i d \theta$$

と定義すれば複素形式は

$$\Omega = dw + \underbrace{w \wedge w}_{=0} = dw = dA = F$$

$$= \cancel{A \wedge A} + \cancel{i A \wedge d \theta} + \cancel{i d \theta \wedge A} - \cancel{d \theta \wedge d \theta} \\ = 0$$

$$T = \exp[i(\theta' - \theta)] = \exp[i\varphi]$$

である。 T は $1/\lambda - \pi \lambda$ の複素数で $g' = Tg$ ($g = \exp(i\theta) \rightarrow g' = \exp(i\theta')$)

ゆえ

$$A' = \sum_j \left\langle U_{k_1 k_2}^{(n)} \left| \frac{\partial}{\partial k_j} \right| U_{k_1 k_2}^{(n)} \right\rangle dk_j$$

$$= A + \sum_j \exp[-i\varphi] \frac{\partial}{\partial k_j} \exp[i\varphi] dk_j$$

$$= A + i \sum_j \frac{\partial(\varphi)}{\partial k_j} dk_j = A + i d\varphi$$

$$\Rightarrow A' = T A T^{-1} + T d T^{-1} \text{ もとより } w' = w$$

下へから由来の積分

$$C_1 = \frac{i}{2\pi} \int \Omega = \frac{i}{2\pi} \int dA = \frac{i}{2\pi} \int \frac{\partial A_i}{\partial k_j} dk_j \wedge dk_i$$

は Chern 数 (整数) と呼ばれる

$$\sigma_{xy} = -\frac{e^2}{h} C_1$$