

3-2 Goldstone mode

分配関数は

$$Z = \int Dp(\tau) D\chi(\tau) \exp \left[- \int_0^{\beta\hbar} d\tau \left\{ -i p(\tau) \dot{\chi}(\tau) + \frac{p(\tau)^2}{2m} + V(\chi(\tau)) \right\} \right]$$

$$= \int D\chi(\tau) \exp \left[- \int_0^{\beta\hbar} d\tau \left\{ \frac{m}{2} \dot{\chi}(\tau)^2 + V(\chi(\tau)) \right\} \right]$$

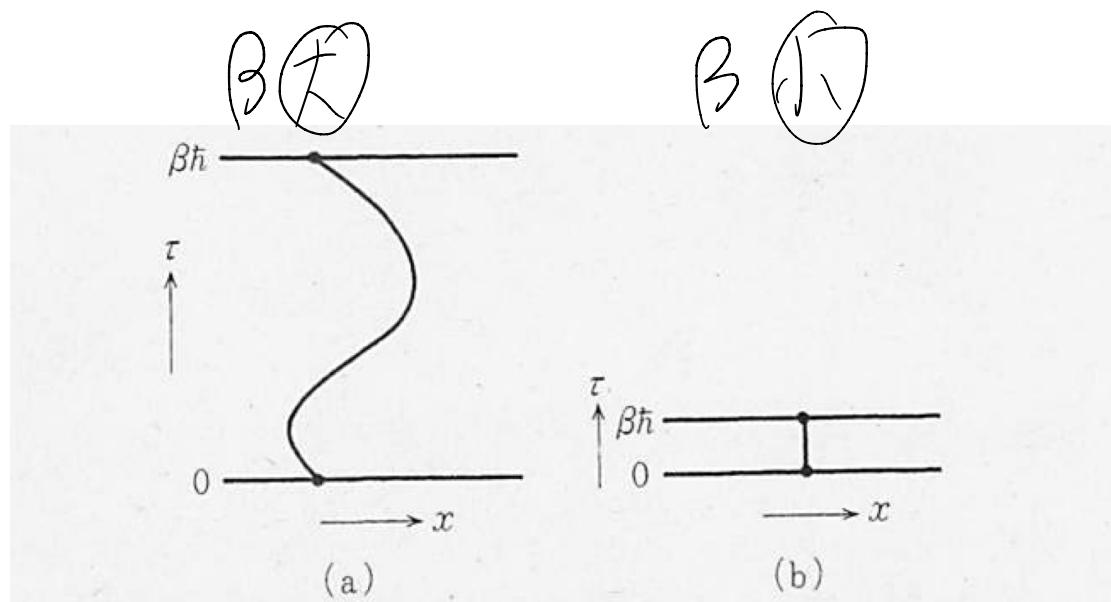


図 3-6 低温(a)の場合と高温(b)の場合の特徴的な経路

高温 ($\beta \textcircled{B}$) だと $\chi(\tau)$ のてんとう性が小さくなるので個性が出てない
(f) エネルギー等分配則

伍). 简单系の重力子 $V = \frac{m}{2}(\omega x)^2$

$$Z = \int_{x(0)=x(\beta)} D\chi(\tau) \exp \left[- \int_0^{\beta} d\tau \frac{m}{2} (\dot{x}^2(\tau) + \omega^2 x^2(\tau)) \right]$$

$x(0) = x(\beta)$ の $\chi(\tau)$ を Fourier 級数展開は

$$\chi(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\beta h}} \sum_n e^{-i\omega_n \tau} \chi(\omega_n) \quad (\omega_n = \frac{2\pi}{\beta h} n)$$

代入すると $D\chi(\tau) = \prod_i d\chi(\tau_i) = \prod_n d\chi(\omega_n)$ であるから (ユニタリ性)

$$Z = \prod_n \int d\chi(\omega_n)$$

$$\exp \left[- \frac{m}{2\beta h} \int_0^{\beta} d\tau \left[\sum_{n,m} \{ (-i\omega_n)(-i\omega_m) + \omega^2 \} e^{-i(\omega_n + \omega_m)\tau} \right] \chi(\omega_n) \chi(\omega_m) \right]$$

$$= \prod_n \int d\chi(\omega_n) \exp \left[- \frac{m}{2} \sum_n (\omega_n^2 + \omega^2) \chi(\omega_n) \chi(-\omega_n) \right]$$

$$\int_0^{\beta} d\tau \exp[-i(\omega_n + \omega_m)\tau] = \begin{cases} \beta h & (n = -m) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

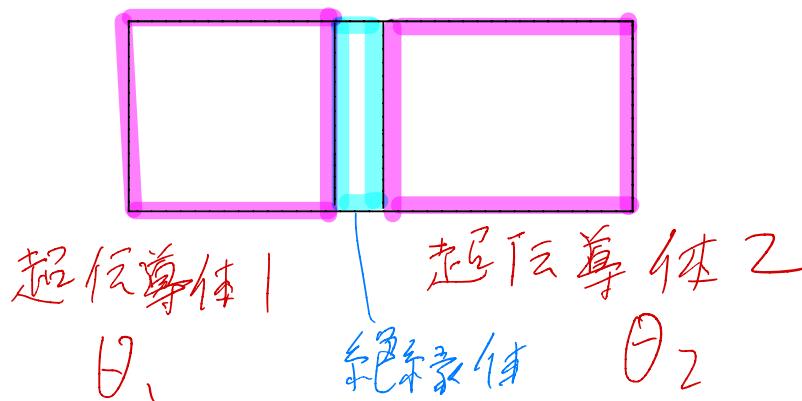
$$= \chi^*(\omega_n) \quad (\because \chi(\tau) が実数)$$

$$= \prod_n \int d\chi(\omega_n) \exp \left[- \frac{m}{2} \sum_n (\underline{\omega_n^2 + \omega^2}) |\chi(\omega_n)|^2 \right] \quad (3-2-4)$$

$\frac{2\pi}{\beta h} \gg \omega$ のとき $\omega_0 = 0$ ($\chi(\tau) = \text{const.}$) が成立する。

⇒ 量子ダイナミクス：低温での量子力学

例) Josephson 素子



超伝導体は位相 θ を order parameter と呼ぶ。

↓

緑色線素体を介して 2つの超伝導体を接合させると 2つの位相 θ_1, θ_2 が coupling する

(Cooper対の数を n_{ij} とする) ($2e = h = C$ の単位系)

$$[\hat{n}_j, \hat{\theta}_k] = i\delta_{jk} \leftrightarrow [\hat{x}, \hat{p}_k] = i\hbar\delta_{jk}$$

θ_j 表示を用いる $\hat{n}_j = i\frac{\partial}{\partial\theta_j}$ \leftrightarrow x 表示の波動関数を用いたとき $\hat{x} = i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$

$$\hat{H} = \sum_j \frac{\hat{n}_j^2}{2C} - J \sum_{\langle j, k \rangle} \cos(\hat{\theta}_j - \hat{\theta}_k) = - \sum_j \frac{1}{2C} \frac{\partial^2}{\partial \theta_j^2} - J \sum_{\langle j, k \rangle} \cos(\theta_j - \theta_k)$$

$\left(\frac{\hbar^2}{2C} \right)$ Cooper対のエネルギー
(C :キャパシタンス)

位相の coupling
(J :カップリング定数)

* Josephson Junction

$$H(n; \theta) = \sum_j \frac{n_j^2}{2C} - J \sum_{\langle j, k \rangle} \cos(\theta_j - \theta_k)$$

\sqrt{H}

$$\dot{\theta}_j = -\frac{\partial H}{\partial n_j} = -\frac{n_j}{C}$$

を用いて

$$H(\theta, \dot{\theta}) = \sum_j \frac{C}{2} \dot{\theta}_j^2 - J \sum_{\langle j, k \rangle} \cos(\theta_j - \theta_k)$$

分配関数は虚時空間形式を用いて

$$Z = \int \prod_j D\theta_j \exp \left[- \int_0^\beta d\tau L_E(\theta(\tau), \dot{\theta}(\tau)) \right]$$

$$= \int \prod_j D\theta_j(\tau) \exp \left[- \int_0^\beta d\tau \left(\sum_j \frac{C}{2} \dot{\theta}_j^2 - J \sum_{\langle j, k \rangle} \cos(\theta_j - \theta_k) \right) \right]$$

$$\frac{\partial H}{\partial n_j} = \frac{n_j}{C} = -\dot{\theta}_j$$

$$\frac{\partial H}{\partial \theta_j} = \frac{\partial V}{\partial \theta_j} = +n_j$$

(2.1.29)

$$Z = \int Dx(\tau) \exp \left[- \int_0^\beta d\tau \left(\frac{m\dot{x}^2}{2} + V(x) \right) \right]$$

$$L = \sum_j n_j \dot{\theta}_j - H$$

$$= \frac{C}{2} \dot{\theta}_j^2 + J \cos(\theta_j - \theta_k)$$

Wick rot.

$$\xrightarrow{(\partial_x \theta)^2 \rightarrow (i\partial_\tau \theta)^2} -L_B = -\frac{C}{2} \dot{\theta}_j^2 + J \cos(\theta_j - \theta_k)$$

$$= -\frac{C}{2} \dot{\theta}_j^2 + J \cos(\theta_j - \theta_k)$$

運動導體 i の巨視的位相 $\langle \theta \rangle$ が $\alpha-\beta-11^\circ\text{ラメタ}$ となる。

$\alpha-\beta-11^\circ\text{ラメタ}$ まわりの展開 $\theta_j(\tau) = \langle \theta \rangle + S\theta_j(\tau)$ となる

$$S_0 = \int_0^{\beta} d\tau \left[\sum_j \frac{1}{2} (S\dot{\theta}_j(\tau))^2 + \frac{3}{2} \sum_{(j,k)} (S\theta_j(\tau) - S\theta_k(\tau))^2 \right]$$

$S\theta_j(\tau)$ は波数 k 及 w 松原振動数 $i\omega_n$ へ Fourier 変換すると

$$S\theta_j(\tau) = \frac{1}{\sqrt{BN}} \sum_{n,k} \exp(-i\omega_n \tau) \exp(i k \cdot R_j) \Theta(i\omega_n, k)$$

素子の構造 \mathcal{S}_d 次元津純立法格子 \mathcal{G}_d (格子点 \mathbf{r}_{ℓ})
 $\ell = 1, \dots, d$

$$\sum_j (S\theta_j(\tau))^2 = \frac{1}{BN}$$

$$\sum_j \sum_{n,n',|k|,|k'|} \underbrace{\exp[i((k+k') \cdot |R_j| - i(\omega_n + \omega_{n'}))\tau]}_{NS_{|k|,-|k'|}} \Theta(i\omega_n, |k|) \Theta(i\omega_{n'}, |k'|)$$

$$= \frac{1}{B} \sum_{n,|k|} \Theta(i\omega_n, |k|) \Theta(-i\omega_n, -|k|)$$

$$\sum_j \left(S \dot{\theta}(c) \right)^2 = \frac{1}{\beta} \sum_{n, lk} (i\omega_n) (-i\omega_n) \Theta(i\omega_n, lk) \Theta(-i\omega_n, -lk)$$

$$= \frac{1}{\beta} \sum_{n, lk} \omega_n^2 \Theta(i\omega_n, lk) \Theta(-i\omega_n, -lk)$$

$$\sum_{j, k} \theta_j(\tau) \theta_k(\tau) = \frac{1}{\beta N} \sum_j \sum_{\ell=1}^d \sum_{n, n', lk, lk'}^{d}$$

$$\left\{ \exp[i(lk \cdot R_j + lk' \cdot (R_j + \alpha_\ell))] + \exp[i(lk \cdot R_j + lk' \cdot (R_j - \alpha_\ell))] \right\}$$

$$\exp[-i(\omega_n + \omega_n')\tau] \Theta(i\omega_n, lk) \Theta(i\omega_n, lk')$$

$$= \frac{2}{\beta} \sum_{n, lk} \cos(lk \cdot \alpha_\ell) \Theta(i\omega_n, lk) \Theta(-i\omega_n, -lk)$$

FY

$$S_0 = \sum_{n, lk} \left[\frac{c}{2} \omega_n^2 + J \sum_{\ell=1}^d (1 - \cos(lk \cdot \alpha_\ell)) \right] \Theta(i\omega_n, lk) \Theta(-i\omega_n, -lk)$$

($\sum_{\ell=1}^d$ の定義次第では $-2J$ となるかも?)

$$S_0 = \sum_{n,|k|} \left[\frac{C}{2} w_n^2 + J \sum_{\ell=1}^d (1 - \cos(k \cdot \alpha_\ell)) \right] \Theta(iw_n, |k|) \Theta(-iw_n, -|k|)$$

\Leftrightarrow 質量 C , 周波数 $w_k = \frac{2J}{C} \sum_{\ell=1}^d (1 - \cos(k \cdot \alpha_\ell))$ の調和振動子

$$c.f.) (\text{前掲}) (3-2-4) Z = \int \prod_n dX(w_n) \exp \left[-\frac{m}{2} \sum_n (w_n^2 + w^2) |X(w_n)|^2 \right]$$

$w_k = \frac{2J}{C} \sum_{\ell=1}^d (1 - \cos(k \cdot \alpha_\ell))$ の分散と関係を調べ

$|k=0$ における分散関数

$$w_k = \frac{J}{C} \sum_{\ell=1}^d (k \cdot \alpha_\ell)^2 + O(k^4)$$

$$= \frac{Ja^2}{C} k^2 + O(k^4)$$

音速 $v = \sqrt{\frac{Ja^2}{C}}$ の音波

$k \rightarrow 0$ で $w_k \rightarrow 0$ のモード
“ナニバー-Goldstone mode”

* 南部 - Goldstone mode

ままだらスピンの性質をもつ。 $\$ = \begin{pmatrix} \$' \\ \vdots \\ \$^n \end{pmatrix}$ エルゴン強磁性モデル

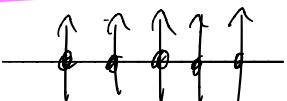
$$H = -J \sum_{\langle j, k \rangle} \$_j \cdot \$_k = -J \sum_{\langle j, k \rangle} \sum_{\alpha=1}^n S_j^\alpha S_k^\alpha$$

- $n=1$: Ising model ($\$ = \uparrow$ or \downarrow)
- $n=2$: XY model
- $n=3$: Heisenberg model
- $n \rightarrow \infty$: 球形模型

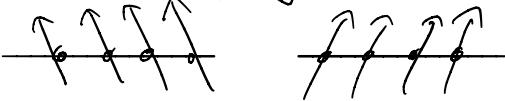
$n=1$ や $n \geq 2$ では質的に異なる点がある "連続対称性"

- $n=1$ の対称性 \Rightarrow 反転対称性 $S = -\$$: 高角散射対称性 (Z_2)
- $n \geq 2$ の対称性 \Rightarrow 回転対称性, $S_j^\beta = \sum_{\alpha} \epsilon_{\alpha\beta} S_j^\alpha$: 連続対称性 ($O(n)$)

$n=1$ $\xrightarrow{\text{対称}}$



$n=2$ $\xrightarrow{\text{対称}}$



回転 $\xrightarrow{\text{対称}}$

連續対称性を持つ系はこの対称性が自發的に破れた
基底状態には $\langle \psi \rangle$ をとったけ回転した状態も縮退しているので
エネルギーの制約と共に $\langle \psi \rangle = 0$ の南部 Goldstone mode
Ising model の $\{\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\}$ と $\{\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow\}$ は縮退しているが、
"上下対称" の変化でしかなければ

南部 Goldstone の定理 (Lorentz invariant case)

基底状態の大域的な連續対称性が破れたとき、
破れた対称性の次元の数だけ質量の粒子が表れる

{ ハミルトニアの連續対称性 G 、
基底状態の連續対称性 H } $\Rightarrow \dim H \leq \dim G$
(G, H : Lie 群)

余が Lorentz 不変なら、 $\dim G - \dim H = n_{BS}$: 力起 gap の数
 n_{BS} : 破れた対称性の次元 集団力起モードの数

参考 物性における南部 Goldstone の定理

物性の Lorentz 不変でない、有交代模型では (Lorentz 不変の)
南部 Goldstone の定理が成り立たない場合がある。

例) 強磁性体のスピinn波

x, y, z 軸
 \downarrow の回転

強磁性体 Heisenberg model ($SO(3)$) の連続対称性は 3 つ

基底状態の連續対称性は 1 つ \leftarrow 磁化軸の回転

強磁性体のスピinn波のモード: 1 つ

$3 - 1 \neq 1$ より、南部 Goldstone Th. は成り立たない

\Rightarrow H. Watanabe, H. Murrayama, Phys. Rev. Lett. 115 251602 (2012)

定理

有交代ランジアンについて $n_{BG} = n_{NG} + \frac{1}{2} \text{rank} \langle \hat{Q}_a, \hat{Q}_b \rangle$
(非相対論的場合に成立)

Charge

今が似て

前掲の(3')

$$(3-2-1) S_0 = \int_0^{\beta} d\tau \left[\sum_j \frac{C}{2} (\dot{\delta\theta}_j(\tau))^2 + \frac{1}{2} \sum_{j,k} (\delta\theta_j(\tau) - \delta\theta_k(\tau))^2 \right]$$

12行目(i) 累乗 $\langle \cos(\theta_j - \theta_k) \rangle_0$ or $\langle \sin(\theta_j) \rangle_0$

$$\left. \begin{aligned} & \text{(ii) 相関関数 } C(R_j - R_k) = \langle \cos(\theta_j - \theta_k) \rangle_0 \\ & \quad \end{aligned} \right] \text{ の計算}$$

累乗 $\langle \cos(\theta_j - \theta_k) \rangle_0$ の計算

$$\begin{aligned} \langle \cos(\theta_j - \theta_k) \rangle_0 &= \frac{1}{2} \langle \exp(i(\langle \theta \rangle + \delta\theta_j)) + \exp(-i(\langle \theta \rangle + \delta\theta_j)) \rangle_0 \\ &= \frac{1}{2} [\exp(i\langle \theta \rangle) \langle \exp(i\delta\theta_j) \rangle_0 + \exp(-i\langle \theta \rangle) \langle \exp(-i\delta\theta_j) \rangle_0] \\ &= \frac{\int D(\delta\theta) A \exp[-S_0]}{\int D(\delta\theta) \exp[-S_0]} = \frac{\int \prod_j D(\delta\theta_j(\tau)) A(\delta\theta) \exp[-S_0]}{\int \prod_j D(\delta\theta_j(\tau)) \exp[-S_0]} \end{aligned}$$

$$= \langle e^{i\delta\theta_j} \rangle = \langle e^{-i\delta\theta_j} \rangle$$

$$\langle e^{i\delta\theta_j} \rangle_0 = \left\langle \exp \left[i \frac{1}{\sqrt{BN}} \sum_{n,k} \exp(-i\omega_n t) \exp(i k \cdot R_j) \Theta(\omega_n, k) \right] \right\rangle_0$$

$$= \exp \left[-\frac{1}{2} \langle (\delta\theta_j)^2 \rangle \right]$$

Gauss 分布の特性関数

多変数 Gauss 分布の平均
(\because 作用が \sim 2次形式)

$$\langle e^{itx} \rangle_0 = \int e^{itx} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right) dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} (x-(\mu-i\sigma t))^2 \right] \exp \left(i\mu x - \frac{\sigma^2 t^2}{2} \right) dx$$

= (

$$= \exp \left(i\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2} \right)$$

ひろがる $\langle (\delta\theta_j)^2 \rangle_0$ について計算すれば $\langle \cos\theta_j \rangle, \langle \sin\theta_j \rangle$

$$\langle \cos\theta_j \rangle = \exp \left(-\frac{1}{2} \langle (\delta\theta_j)^2 \rangle_0 \right) \cos \langle \theta \rangle$$

はまる

$$\langle \sin\theta_j \rangle = \exp \left(-\frac{1}{2} \langle (\delta\theta_j)^2 \rangle_0 \right) \sin \langle \theta \rangle$$

$$\langle (S\theta_j)^2 \rangle_0 = \frac{1}{\beta} \frac{1}{N} \sum_{n,k} \langle \theta(i\omega_n, k) \theta(-i\omega_n, -k) \rangle_0$$

$$S_0 = \sum_{n,k} \frac{c}{2} (\omega_n^2 + \omega_k^2) \{ \underbrace{\theta(i\omega_n, k) \theta(-i\omega_n, -k)}_{\text{独立で}\rightarrow (S\theta, GR)} \}$$

$$\theta(i\omega_n, k) = \underbrace{\theta'(i\omega_n, k)}_{\text{Re } \theta} + i \underbrace{\theta''(i\omega_n, k)}_{\text{Im } \theta}$$

ここで $S\theta_j$ が 実であるが、

$$\begin{cases} \theta'(i\omega_n, k) = \theta'(-i\omega_n, -k) & \text{保} \\ \theta''(i\omega_n, k) = -\theta''(-i\omega_n, -k) & \text{持} \end{cases}$$

$$S_0 = \sum_n \sum_{\substack{k \\ \text{for } k_x > 0}} c (\omega_n^2 + \omega_k^2) \{ \underbrace{(\theta'(i\omega_n, k))^2 + (\theta''(i\omega_n, k))^2}_{\text{分岐}} \}$$

$\forall n, k (k_x > 0)$ は θ' と θ'' 獨立な実用和振動の子が 2つ ずつ

θ', θ''

$$\langle (\delta \theta_j)^2 \rangle_0 = \frac{2}{BN} \sum_n \sum_{\substack{k \\ (k, \omega_k > 0)}} \left\langle \{\theta'(i\omega_n, \omega_k)\}^2 + \{\theta''(i\omega_n, \omega_k)\}^2 \right\rangle$$

$$= \frac{2}{BN} \sum_n \sum_{\substack{k \\ (k, \omega_k > 0)}} \left[\frac{\int_{-\infty}^{\infty} d\theta'(i\omega_n, \omega_k) \{\theta'(i\omega_n, \omega_k)\}^2 \exp[-C(\omega_n^2 + \omega_k^2) \{\theta'(i\omega_n, \omega_k)\}^2]}{\int_{-\infty}^{\infty} d\theta'(i\omega_n, \omega_k) \exp[-C(\omega_n^2 + \omega_k^2) \{\theta'(i\omega_n, \omega_k)\}^2]} \right]$$

$\boxed{x^2 \int \exp(-\alpha x^2) dx}$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} = \frac{1}{2\alpha} \int \exp(-\alpha x^2) dx$$

$$+ \left(\{\theta''(i\omega_n, \omega_k)\}^2 \text{ の } \neq \text{ 事実} \right)$$

$$= \frac{2}{BN} \sum_n \sum_{\substack{k \\ (k, \omega_k > 0)}} \frac{1}{2C(\omega_n^2 + \omega_k^2)} \times 2$$

$$\downarrow \frac{1}{N} \sum_k \overrightarrow{\sum_{n \in \omega_k}} a^d \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d}$$

$$= \frac{a^d}{\beta} \sum_n \int_{\substack{k > 0 \\ (k, \omega_k > 0)}} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \underbrace{\frac{2}{C(\omega_n^2 + \omega_k^2)}}_{k \propto 1/n \propto 1/\omega_n}$$

$$= \frac{a^d}{\beta} \sum_n \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{C(\omega_n^2 + \omega_k^2)}$$

$\leftarrow \begin{array}{l} \text{なぜ } \omega_k \propto \omega_n = \frac{2\pi}{\beta} n \\ \text{なぜ } \omega_k \propto 1/k? \end{array}$

$w_n = \frac{2\pi}{\beta} n$ としたり $\sum_n F(iw_n)$ の値を求めた

⇒ 級複素関数論

定理：Laurent級数

複素平面上で定義された関数 $F(z)$ が Jordan 閉曲線の経路 C の内部 D に 孤立特異点 $z=z_0$ をもつとき、以下の Laurent 展開 が成り立つ。

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad (z \in D)$$

$\dots z$



$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{F(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz. \quad \text{よしに } a_{-1} =: \underset{z=z_0}{\operatorname{Res}} F(z) \text{ を留数と呼ぶ。}$$

定義：特異点の分類

Laurent 展開の負べきの項が一列で打ち切られるととき、

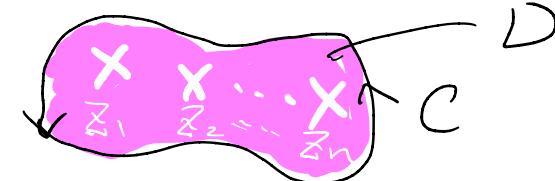
$$F(z) = \sum_{m=-n}^{\infty} a_m (z-z_0)^m$$

この孤立特異点を n位の極 という。

定理：留数定理

(正の向きの) Jordan 閉曲線 C とその内部 D に大 \mathbb{C} し、定義された複素関数 $F(z)$ が n 個の孤立特異点 $z=z_1, \dots, z_n \in D$ をもつとき以下が成立する

$$\int_C F(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_j} F(z)$$



留数を求める公式

$z=z_0$ が $F(z)$ の n 位の極であるとき、

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} F(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \{(z-z_0)^n F(z)\} \right]$$

これを用いて本章複雑重力数 iw_n の和を実行する

* $i\omega_n$ の極のとり方

Bose 分布 $n_B = (e^{\beta E} - 1)^{-1}$ を複素平面に解析接続した関数

$$n_B(z) = \frac{1}{e^{\beta z} - 1} \quad \text{は}$$

- (i) $z = i\omega_n = i\frac{2\pi}{\beta} n \quad (n \in \mathbb{Z})$ は全て 1 位の極
- (ii) $z = i\omega_n$ で $e^{\beta z}$ の極は全て β^{-1}

$e^{i\beta\omega_n} = e^{i2\pi n} = 1$ より $z = i\omega_n$ が $n_B(z)$ の孤立特異点なのは明らか。関数論で 12 章で $e^{\beta z}$ は

$$e^{\beta z} := 1 + \beta z + \frac{1}{2!}(\beta z)^2 + \frac{1}{3!}(\beta z)^3 + \dots$$

$z = i\omega_n$ で正則

\Rightarrow Taylor 展開式

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j (z - i\omega_n)^j$$

で定義される z

$$e^{\beta z} = e^{\beta(z - i\omega_n)} = 1 + \beta(z - i\omega_n) + \frac{1}{2!}(z - i\omega_n)^2 + \dots$$

も成り立つから

$$n_B(z) = \frac{1}{-1 + e^{\beta z}} = \frac{1}{\beta(z - i\omega_n)}$$

$$\boxed{\frac{1}{1 + \frac{1}{2!}(z - i\omega_n) + \frac{1}{3!}(z - i\omega_n)^2 + \dots}}$$

よし $z = i\omega_n$ は $n_B(z)$ の 1 位の極 \tilde{z} $\underset{z=i\omega_n}{\operatorname{Res}} n_B(z) = \frac{1}{\beta}$

γ の事實を用ひて $\sum_n F(i\omega_n)$ を実行できる。

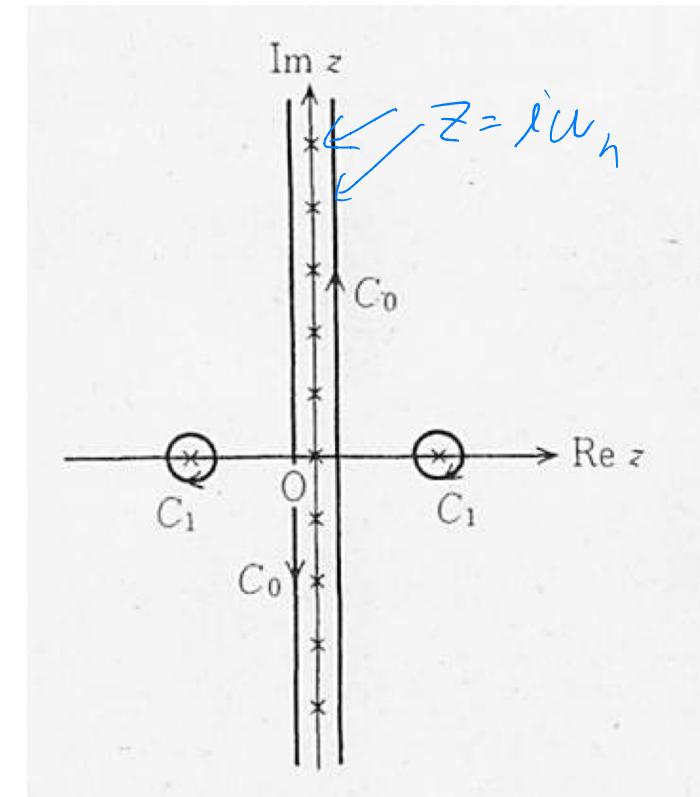
$F(z) \neq 0$ $z = i\omega_n$ で正則なとき

$$\int_{C_0} \frac{F(z)}{e^{\beta z} - 1} dz = \sum_n F(i\omega_n) \operatorname{Res}_{z=i\omega_n} h_\beta(z)$$

\uparrow

$\gamma_h, z = i\omega_n$ を用ひ
Jordan 曲線

$$= \frac{1}{\beta} \sum_n F(i\omega_n)$$



今回の場合、

$$F(z) = \frac{1}{C(\omega_k^2 - z^2)}$$

は虚軸に極 $\pm i\omega_k$

たなみので γ_h のように C_0 とすればよい。

さうして $F(z)$ は $z = \pm i\omega_k$ 位の極もつて z

$$\begin{aligned} \int_{C_0} \frac{F(z)}{e^{\beta z} - 1} dz &= \int_{C_1} \frac{F(z)}{e^{\beta z} - 1} dz = \int_{C_1} \frac{1}{e^{\beta z} - 1} \frac{-1}{2i\omega_k} \left(\frac{1}{z - i\omega_k} - \frac{1}{z + i\omega_k} \right) dz \\ &= \frac{1}{2i\omega_k} \left(\frac{1}{e^{\beta i\omega_k} - 1} - \frac{1}{e^{-\beta i\omega_k} - 1} \right) = \frac{1}{i\omega_k} \left(n_B(\omega_k) + \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

開言題 休題. $\langle (\sin \theta)^2 \rangle = \frac{a^d}{\beta} \sum_n \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{C(\omega_{ik}^2 + \omega_n^2)}$ は

$$\langle (\sin \theta_i)^2 \rangle_0 = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{a^d}{C \omega_{ik}} \left[n_B(\omega_{ik}) + \frac{1}{2} \right]$$

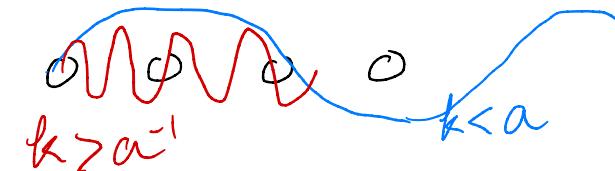
d次元球の表面積
 $\propto k^{d-1}$

この3、3まいを空間でたまに漸近平衡

$|k| = k$ と $(2 \pi dk)$ を dk の積分に直す. $dk \sim k^{d-1} dk$

ここで $\int dk$ の積分範囲について、下限は 0 だが、上限は $k \sim a^{-1}$
程度までしか意味がない。

(UV cutoff)



被積分函数

ω_k が分母にあること、 $k \rightarrow 0$ で $\omega_k \rightarrow 0$ となることから主要な項は $k \sim 0$ 附近であり、ここでは $\omega_k \sim k$, $n(\omega_k) \sim \begin{cases} \frac{1}{\beta k} & (T > 0) \\ 1 & (T=0) \end{cases}$

$$\langle (\sin \theta_i)^2 \rangle_0 \sim \int_0^{a^{-1}} \frac{k^{d-1}}{\beta k} \frac{1}{\omega_k} dk \sim T \int_0^{a^{-1}} k^{d-3} dk \quad (T > 0)$$

$\Rightarrow d \leq 2$ の場合

$$\int_0^{a^{-1}} \frac{k^{d-1}}{k} dk \sim \int_0^{a^{-1}} k^{d-2} dk \quad (T=0)$$

$$\langle \cos \theta_i \rangle_0 \sim \exp(-\frac{1}{2} \langle (\sin \theta_i)^2 \rangle_0) \Rightarrow \langle (\sin \theta_i)^2 \rangle_0 \rightarrow 0 \quad \Rightarrow d=1 の場合$$

* Mermin - Wagner の定理 (注) Mermin - Wagner 定理と T_2 のは
Heisenberg model が $d \geq 2$ で以下で Ferro & Antiferro
性質をもつ。

Mermin - Wagner の定理

連續対称性を持つ d 次元以下の系は
有限温度で長距離秩序をもつ。

$\left. \begin{array}{l} \text{Heisenberg} \\ XY \end{array} \right\} \Rightarrow d \leq 2 \text{ で } \underbrace{\text{長距離秩序をもたない}}_{(\text{Ferro, Antiferro etc.})}$
($d \geq 3$ で相転移するかは言及していない)

Ising $\Rightarrow d=2$ で長距離秩序をもつ
(2D Ising model の厳密解 (Onsager))

〔導出: ライエンツ「統計力学」, ランダウ, リフシツ「統計物理学」〕

※ 相関関数

基本的には同様の計算

$$\begin{aligned} C(R_j - R_k) &= \langle \cos(\theta_j - \theta_k) \rangle_0 \\ &= \frac{1}{2} [\langle e^{i(\delta\theta_j - \delta\theta_k)} \rangle + \langle e^{-i(\delta\theta_j - \delta\theta_k)} \rangle] \\ &= \frac{1}{2} \exp \left[-\frac{1}{2} \langle (\delta\theta_j - \delta\theta_k)^2 \rangle_0 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle (\delta\theta_j - \delta\theta_k)^2 \rangle_0 &= \frac{1}{\beta N} \sum_{n, \parallel k} 2 \left(1 - \underbrace{\cos[\vec{k} \cdot (R_j - R_k)]}_{\text{S}\theta; S\theta \text{ 部分}} \right) \langle \theta(ien, k) \theta(-ien, k) \rangle_0 \\ &= \int \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} \frac{2a^d}{C w_{\parallel k}} \left[n_B(w_{\parallel k}) + \frac{1}{2} \right] (1 - \cos[\vec{k} \cdot (R_j - R_k)]) \end{aligned}$$

$\|R_j - R_k\| \rightarrow \infty$ の漸近評価 (行)

$\langle (\delta\theta_i)^2 \rangle$ のとてて $(1 - \cos[k \cdot (R_j - R_k)])$ の項が、

積分内部の因子にかかる。 R_j > a^{-1} \Rightarrow |k| \text{ の} \sin \text{ の} \text{支} \text{が} \text{な} \text{い} \text{のは} \langle (\delta\theta_i)^2 \rangle \text{ の} \text{と} \text{き} \text{に} \text{無} \text{効}

- $|R_j - R_k| > a^{-1}$ と \cos の項は振動するので $\ll a^{-1}$ の主要
- $[1 - \cos[k \cdot (R_j - R_k)]]$ は $|R_j - R_k|$ が大きくなると展開できないが、
 $\ll \frac{1}{|R_j - R_k|}$ の範囲では ~ 0 のため積分を寄与する。
(IR cutoff)

$$\Rightarrow |R_j - R_k|^{-1} < k < a^{-1} \quad \underbrace{1 - \cos[k \cdot (R_j - R_k)]}_{O(1)} \sim O(1) \quad (\because -1 \leq \cos x \leq 1)$$

$$\langle (\delta\theta_i - \delta\theta_k)^2 \rangle_0 \sim \begin{cases} \int_{|R_j - R_k|^{-1}}^{a^{-1}} \frac{T}{k^2} k^{d-1} dk & (T > 0) \\ \int_{|R_j - R_k|^{-1}}^{a^{-1}} \frac{1}{k} k^{d-1} dk & (T = 0) \end{cases}$$

具休的(2 章 + 答) (2H3)

$T > 0$ case

$$(d=1) \left\{ (\delta\theta_j - \delta\theta_k)^2 \right\}_0 \sim T |R_j - R_k| \quad C(R_j - R_k) \sim e^{-\gamma T |R_j - R_k|}$$

$$(d=2) \left\{ (\delta\theta_j - \delta\theta_k)^2 \right\}_0 \sim T \ln |R_j - R_k| \Rightarrow C(R_j - R_k) \sim |R_j - R_k|^{-nT}$$

$T = 0$ case

$$(d=1) \langle (\delta\theta_j - \delta\theta_k)^2 \rangle_0 \sim \ln |R_j - R_k| \Rightarrow C(R_j - R_k) \sim |R_j - R_k|^{-\delta}$$

$$T > 0 \\ d=1 \Rightarrow \text{相關長} \xi = \frac{1}{\gamma T}$$

$d=2 \Rightarrow \text{相關長} \xi \propto \text{距離}^{\alpha}$: 何時何處距離遠

$$C(R_j - R_k) \sim \exp\left(-\frac{1}{2} \langle (\delta\theta_j - \delta\theta_k)^2 \rangle_0\right)$$

* 参考文献

高橋, 西森 「相転移・臨界現象とくに2次元」 丸善出版(2013)

渡辺, 村山 「南部-ゴールドストーンボソンの統一的理 解」

日本物理学会誌 68, 4 (2013)

* 补足

⑤ LC 回路の量子論

⑥ 20世紀の Mermin-Wagner Theorem

(場の量子論に慣れてからこそこの方がわかりやすくなる?)

* LC 回路の古典力学と量子力学

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{Q}{C} = L \frac{dI}{dt} \\ I = -\frac{dQ}{dt} \end{array} \right.$$

フリルを書く方法

$$\Phi = LI$$

を用いて書き出す

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\Phi} = \frac{Q}{C} \\ \dot{Q} = -\frac{\Phi}{L} \end{array} \right.$$

\Rightarrow 正準方程式と呼ばれる。

$Q \leftrightarrow \rho, \Phi \leftrightarrow x$

LC 回路のハミルトニアント

$$H = \frac{Q^2}{2C} + \frac{\Phi^2}{2L} \xrightarrow{\text{正準量化}} [\hat{Q}, \hat{\Phi}] = i\hbar, E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

(調和振動)

$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Mermin-Wagnerの定理

2次元以下のHeisenberg模型は有限温度で自発磁化を持たない

N. D. Mermin and H. Wagner, “Absence of ferromagnetism or antiferromagnetism in one- or two- dimensional isotropic heisenberg models,” Phys. Rev. Lett. **17**, 1133 (1966).

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N J_{ij} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j - h \sum_{j=1}^N S_j^z e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \quad (h \rightarrow 0)$$
$$[S_i^\mu, S_j^\nu] = i\delta_{ij} \sum_{\lambda=1}^3 \varepsilon_{\mu\nu\lambda} S_j^\lambda$$

今回は原論文と同様に量子系を扱うが古典系でも証明可能

準備 : Bogoliubovの不等式

$$\frac{\beta}{2} \langle \{A, A^\dagger\} \rangle \left\langle [C^\dagger, [H, C]] \right\rangle \geq |\langle [C^\dagger, A^\dagger] \rangle|^2 \text{ (Bogoliubovの不等式)を示す}$$

$$(A, B) := \int_0^\beta d\tau \langle A^+(\tau) B \rangle = \int_0^\beta d\tau \frac{1}{Z} \text{Tr}[e^{-\beta H} A^+(\tau) B]$$

$$A(\tau) := e^{\tau H} A(\tau) e^{-\tau H}, A^+(\tau) := e^{\tau H} A^\dagger e^{-\tau H}$$

とした時、 (A, B) は内積の性質を満たす。

$$\begin{aligned} 1) (B, A)^* &= \int_0^\beta d\tau \frac{1}{Z} \text{Tr}[A^\dagger e^{-\tau H} B e^{\tau H} e^{-\beta H}] \\ &= \int_0^\beta d\tau \frac{1}{Z} \text{Tr}[e^{-\beta H} e^{\tau H} A^\dagger e^{-\tau H} B] = (A, B) \end{aligned}$$

$$2) (A, bB + cC) = b(A, B) + c(A, C)$$

$$\begin{aligned} 3) (A, A) &= \frac{1}{\sum_n \langle n | e^{-\beta H} | n \rangle} \sum_{n,m} \frac{e^{-\beta E_m} - e^{-\beta E_n}}{E_n - E_m} |\langle m | A | n \rangle|^2 = 0 \\ &\Rightarrow A = 0 \end{aligned}$$

準備 : Bogoliubovの不等式

(A, B) は内積なのでCauchy-Schwartzの不等式を満たす。

$$(A, A)(B, B) \geq |(A, B)|^2 \cdots (*)$$

不等式 $\frac{e^{-y} - e^{-x}}{x-y} \leq \frac{1}{2}(e^{-x} + e^{-y})$ を用いると

$$\begin{aligned} (A, A) &\leq \frac{\beta}{2} \frac{1}{\sum_n \langle n | e^{-\beta H} | n \rangle} \sum_{n,m} (e^{-\beta E_m} + e^{-\beta E_n}) \langle n | A^\dagger | m \rangle \langle m | A | n \rangle \\ &= \frac{\beta}{2} \langle \{A, A^\dagger\} \rangle \cdots (1) \end{aligned}$$

また、 $B = [C^\dagger, H]$ とすると

$$\begin{aligned} (A, B) &= \frac{1}{Z} \int_0^\beta d\tau \frac{\partial}{\partial \tau} \text{Tr}[e^{-\beta H} (A^+(\tau) C^\dagger)] = \frac{1}{Z} \text{Tr}[e^{-\beta H} (A^+(\tau) - A^\dagger) C^\dagger] \\ &= \frac{1}{Z} \text{Tr}[e^{-\beta H} (C^\dagger A^\dagger - A^\dagger C^\dagger)] = \langle [C^\dagger, A^\dagger] \rangle \cdots (2) \end{aligned}$$

(2)で $A = B$ とすると

$$(B, B) = \langle [C^\dagger, B^\dagger] \rangle = \langle [C^\dagger, [H, C]] \rangle \cdots (3)$$

$(*)$ に(1),(2),(3)を代入して $\frac{\beta}{2} \langle \{A, A^\dagger\} \rangle \langle [C^\dagger, [H, C]] \rangle \geq |\langle [C^\dagger, A^\dagger] \rangle|^2$

Mermin-Wagnerの定理の証明

$$\begin{cases} A = S_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}}^y \\ C = S_{\mathbf{k}}^x \end{cases} \quad \left(S_{\mathbf{k}}^\mu := \sum_{j=1}^N S_j^\mu e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j} \right) \text{ とすると}$$

$$\frac{1}{2} \langle \{A, A^\dagger\} \rangle = \langle S_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^y S_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}}^y \rangle$$

$$\langle [C^\dagger, A^\dagger] \rangle = i \sum_{j=1}^N e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_j} \langle S_j^z \rangle =: iNm_{\mathbf{q}}$$

$$\langle [C^\dagger, [H, C]] \rangle = \sum_{i,j=1}^N \left[J_{ij} \left\langle S_i^y S_j^y + S_i^z S_j^z \right\rangle \left\{ 1 - \cos(\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)) \right\} \right] + Nhm_{\mathbf{q}}$$

となり、これをBogoliubovの不等式に代入すると

$$\beta \left\langle S_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^y S_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}}^y \right\rangle \geq \frac{N^2 |m_{\mathbf{q}}|^2}{\sum_{i,j=1}^N \left[J_{ij} \left\langle S_i^y S_j^y + S_i^z S_j^z \right\rangle \left\{ 1 - \cos(\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)) \right\} \right] + Nhm_{\mathbf{q}}}$$

Mermin-Wagnerの定理の証明

$$\frac{1}{N^2} \sum_{\mathbf{k}} \beta \left\langle S_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^y S_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}}^y \right\rangle = \frac{\beta}{N} \sum_i \left\langle (S_i^y)^2 \right\rangle \leq \frac{\beta}{N} \sum_i \langle (S_i)^2 \rangle = \beta S(S+1)$$

また、

$$1 - \cos(\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)) \leq \frac{1}{2} (\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j))^2 \leq \frac{1}{2} \mathbf{k}^2 (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2$$

$$\left\langle S_i^y S_j^y + S_i^z S_j^z \right\rangle \leq \frac{1}{2} \left\langle (S_i^y)^2 + (S_j^y)^2 + (S_i^z)^2 + (S_j^z)^2 \right\rangle \leq S(S+1)$$

より

$$\sum_{i,j=1}^N J_{ij} \left\langle S_i^y S_j^y + S_i^z S_j^z \right\rangle \left\{ 1 - \cos(\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)) \right\} \leq \frac{1}{2N} \sum_{i,j=1}^N |J_{ij}| (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2 k^2 S(S+1)$$

$\therefore \bar{J}$

なので

$$\beta S(S+1) \geq \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} \frac{|m_{\mathbf{q}}|^2}{\bar{J} S(S+1) \mathbf{k}^2 + h m_{\mathbf{q}}}$$

Mermin-Wagnerの定理の証明

熱力学極限($N \rightarrow \infty$)をとると、模型の次元を d として

$$\frac{\beta S(S+1)}{\text{有限}} \geq \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{|m_{\mathbf{q}}|^2}{JS(S+1)\mathbf{k}^2 + hm_{\mathbf{q}}}$$

となる。 $h \rightarrow 0$ の時を考えると

- $d > 2$ のとき、右辺の分母の積分は収束 $\Rightarrow m_{\mathbf{q}}$ に対する制限はない
- $d \leq 2$ のとき、右辺の分母の積分は発散 \Rightarrow 左辺が有限なので $m_{\mathbf{q}} = 0$
 - 分母の発散は $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ 近傍の寄与による
 - 波数の小さいモードの揺らぎが相転移を阻害

2次元以下のHeisenberg模型は有限温度で自発磁化を持たない

(注)：連續対称性のあるモデルであれば同様に2次元以下で自発磁化を持たない(例：XY模型)

2次元強磁性を発現させる模型

2次元で強磁性転移する模型はないのか

⇒Ising模型

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N J_{ij} S_i^z \cdot S_j^z - h \sum_{j=1}^N S_j^z e^{-iq \cdot r} \quad (h \rightarrow 0)$$

Heisenberg模型

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N J_{ij} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j - h \sum_{j=1}^N S_j^z e^{-iq \cdot r} \quad (h \rightarrow 0)$$

との違いは**異方性**

Ising-likeな相互作用であれば2次元系でも強磁性が発現し得る