

地面振動

三代浩世希

2018 年 11 月 23 日

概要

目次

1	地面振動	1
1.1	P 波と S 波	1
1.2	Rayleigh 波	2

1 地面振動

1.1 P 波と S 波

等方弾性体中では変位 \mathbf{u} は以下の波動方程式に従う。

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = (\lambda + 2\mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \mu \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) \quad (1)$$

ここで ρ は媒質の密度、 λ, μ はラメ定数である。

この波動方程式は縦波である P 波と横波である S 波について解くことができる。そのためにまず Helmholtz decomposition をつかって変位 \mathbf{u} を発散成分 \mathbf{u}_{div} と回転成分 \mathbf{u}_{rot} で表す。つまり、

$$\mathbf{u}_{\text{div}} = \nabla \phi \quad (2)$$

$$\mathbf{u}_{\text{rot}} = \nabla \times \psi \quad (3)$$

となるスカラーポテンシャル ϕ とベクトルポテンシャル ψ が存在し、変位 \mathbf{u} は

$$\mathbf{u} = \nabla \phi + \nabla \times \psi \quad (4)$$

と表すことができる。式 (1) に式 (4) を代入し、かつベクトル解析の公式、 $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ を使うと、

$$\ddot{\phi} = v_L^2 \nabla^2 \phi \quad (5)$$

$$\ddot{\psi} = v_T^2 \nabla^2 \psi \quad (6)$$

のように 2 つの波動方程式を得る。ここで v_L, v_T は、

$$v_L = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, v_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (7)$$

である。

v_L, v_T らはそれぞれ縦波と横波の位相速度を表しているが、これを示す。まずスカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルは式 (5)、式 (6) の波動方程式に従うので、これらの一般解は

$$\phi = \phi_0(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \quad (8)$$

$$\psi = \psi_0(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \quad (9)$$

で表すことができる。ここで ω , \mathbf{k} は各周波数と波数ベクトルである。発散成分である \mathbf{u}_{div} は式 (2) に式 (8) を代入して、

$$\mathbf{u}_{\text{div}} = \nabla \phi_0(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) = -\mathbf{k} \phi \quad (10)$$

となるので、変位の向きは波数ベクトルと平行である。つまり縦波であり P 波に相当する。一方で回転成分である \mathbf{u}_{rot} は式 (3) に式 (9) を代入して、

$$\mathbf{u}_{\text{rot}} = \nabla \times \boldsymbol{\psi}_0(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) = -\mathbf{k} \times \boldsymbol{\psi} \quad (11)$$

となるので、変位の向きは波数ベクトルと直行している。つまり横波であり S 波に相当する。したがって v_L, v_T はそれぞれ縦波と横波の位相速度を示していることがわかった。また λ と μ は正の定数なので、

$$v_L > v_T \quad (12)$$

となって、縦波のほうが横波よりも速い。

CLIO での弾性定数測定によると、P 波 (Longitudinal Wave) と S 波 (Transverse Wave) それぞれの速度は、 $v_L = 5.54 \pm 0.05 \text{ km/sec}$, $v_T = 3.05 \pm 0.05 \text{ km/sec}$ であった。さらに鉦山会社から報告されている岩石の密度 $\rho = 2.7 \text{ g/cm}^3$ に基づくと、表 1 のように弾性定数が得られる。[1]

表 1 CLIO サイトの弾性定数

弾性定数	計算値	単位
ラメ定数 λ	3.27×10^{11}	dyn/cm^2
剛性率 μ	2.51×10^{11}	dyn/cm^2
ポアソン比 σ	0.283	

1.2 Rayleigh 波

参考文献

- [1] 竹本修三, 新谷昌人, 赤松純平, 森井互, 東敏博, 福田洋一, 尾上謙介, 市川信夫, 川崎一郎, 大橋正健ほか. 神岡鉦山における 100 メートルレーザー伸縮計について. 2003.