

No Title

三代浩世希

2018 年 8 月 9 日

目次

1	基線長とその基線伸縮スペクトルの関係	1
1.1	同相成分と逆相成分	1
1.2	Common Differential Mode Rate (CDMR)	2
1.2.1	平面波をノイズを含んで測定している場合	3
1.2.2	平面波モデル (CDMR _{seis})	4
1.2.3	平面波モデル (CDMR _{gif})	4
1.3	X アームの CDMR	5
1.3.1	地震計の ASD	5
1.3.2	地震計のコヒーレンス	6
1.3.3	CDMR _{seis}	7
1.3.4	CDMR _{gif}	8
1.4	IMC の CDMR	8
1.4.1	地震計の ASD	9
1.4.2	地震計のコヒーレンス	9
1.4.3	CDMR _{seis}	10
1.5	長期データ	10
1.6	環境変動による X アームの基線長伸縮	10
1.6.1	波浪	10
1.6.2	地震	10
1.6.3	気圧	10
1.6.4	水圧	10
1.7	まとめ	10

1 基線長とその基線伸縮スペクトルの関係

基線長伸縮は共振器の制御信号に乗るので、小さく低減されるのが望ましい。とくに RMS が大きい脈動は、制御を不安定にする主な原因となっており、それを低減するための工夫を必要とする。一つの簡単な方法は、共振器をブレッドボードに乗せることである。これにより 2 つの鏡同士は相関をもち、脈動のような低周波地面振動では同相で鏡が動くため、逆相成分が同相成分と比べて相対的に低減される。この考えに立つと、KAGRA の腕共振器も飛驒片麻岩の上に固定しており、ある程度相関をもっていると思われる。本章では、どの程度 X アームで

逆相成分が低減されているか評価する。

1.1 同相成分と逆相成分

図 1 で示すような X アーム上の 2 点, x_1, x_2 について, これら 2 つの同相成分 x_{com} と逆相成分 x_{diff} を

$$x_{\text{diff}} \equiv \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}}, \quad (1)$$

$$x_{\text{com}} \equiv \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}} \quad (2)$$

と定義する。パワーが保存するように、規格化定数は $\sqrt{2}$ にしている。同相成分は、2 点の重心移動をあらわし、逆相成分は 2 点の基線長伸縮を表す。

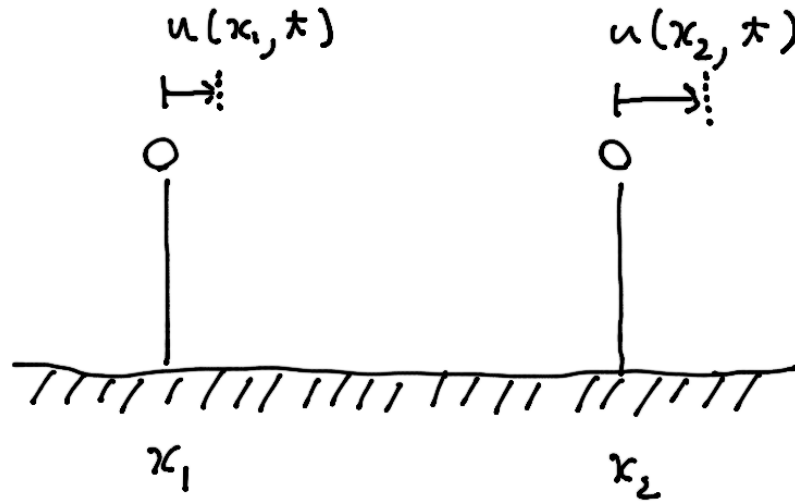


図 1 X アーム上の 2 点の変位。それぞれの位置を x_1, x_2 とすれば変位はそれぞれ $u(x_1, t), u(x_2, t)$ となる。

1.2 Common Differential Mode Rate (CDMR)

図 1 上の 2 点 x_1, x_2 がコヒーレンスを持っている場合を考える。2 点それぞれがノイズで埋もれている、つまり無相関な場合は、同相と逆相の成分比は 1 : 1 になる。一方でコヒーレンスが 1 の場合、2 点の位相差は 0 度となり同相で動くので、逆相成分は消え、同相成分のみになる。コヒーレンスが -1 の場合は、反対に逆相成分のみになる。このようにコヒーレンスは、同相と逆相の成分比と関係をもっている。

基線長伸縮がどの程度低減されているかを表す指標として、2 つの信号の同相と逆相の振幅成分の比、Common Differential Mode Rate (CDMR) を

$$\text{CDMR} \equiv \sqrt{\frac{\text{同相成分のパワー}}{\text{逆相成分のパワー}}} = \sqrt{\frac{P_{\text{com}}(\omega)}{P_{\text{diff}}(\omega)}} \quad (3)$$

と定義する。 $P_{\text{com}}, P_{\text{diff}}$ は同相成分と逆相成分についてのパワースペクトル密度である。パワースペクトル密度は自己相関関数 $C(\tau)$ をフーリエ変換したものなので、まず自己相関関

数 C_{diff} を求める。自己相関関数 C_{diff} は、各々の自己相関を $C_{ij} \equiv \langle x_i(t)x_j(t+\tau) \rangle$, ($i = 1, 2, j = 1, 2$) と定義すれば,

$$C_{\text{diff}}(\tau) = \frac{1}{2} \langle [x_1(t) - x_2(t)] [x_1(t+\tau) - x_2(t+\tau)] \rangle \quad (4)$$

$$= \frac{1}{2} (C_{11}(\tau) - C_{12}(\tau) - C_{21}(\tau) + C_{22}(\tau)), \quad (5)$$

となるので、これをフーリエ変換すれば逆相成分のパワースペクトル密度 $P_{\text{diff}}(\omega)$ は

$$P_{\text{diff}}(\omega) = \frac{1}{2} (P_1(\omega) + P_2(\omega) - X_{12}(\omega) - X_{12}^*(\omega)) \quad (6)$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{P_1 P_2} \left(\sqrt{\frac{P_1}{P_2}} + \sqrt{\frac{P_2}{P_1}} - 2 \text{Re}[\text{coh}] \right), \text{coh} \equiv \frac{X_{12}}{\sqrt{P_1 P_2}} \quad (7)$$

となる。 $P_1(\omega), P_2(\omega)$ はパワースペクトル密度、 $X_{12}(\omega)$ はクロススペクトル密度、coh はコヒーレンスである。

さて、2つの信号 x_1, x_2 のパワーが同じ、つまり $P_1 = P_2 \equiv P$ の場合、式 (7) はさらに計算できて、結果として P_{diff} は

$$P_{\text{diff}}(\omega) = P (1 - \text{Re}[\text{coh}]) \quad (8)$$

となる。同相成分も同様の計算をして、

$$P_{\text{diff}}(\omega) = P (1 - \text{Re}[\text{coh}]) \quad (9)$$

となるので、CDMR は定義式 (3) より、

$$\text{CDMR} = \sqrt{\frac{1 + \text{Re}[\text{coh}]}{1 - \text{Re}[\text{coh}]}} \quad (10)$$

と書き表すことができる。式 (10) が示すように、同相成分と逆相成分のパワー比は2つの信号のコヒーレンスであらわすことができる。

1.2.1 平面波をノイズを含んで測定している場合

CDMR はコヒーレンスで表すことができることがわかったので、次に具体的にコヒーレンスをもとめてみる。図 1 中の X アームに沿った二点の上を、平面波が伝搬している場合を考える。

ノイズが同じ測定器でこの信号を測定すれば、変位はそれぞれ

$$x_1 = u(x_1, t) + n(t) \quad (11)$$

$$x_2 = u(x_2, t) + n(t) \quad (12)$$

のように表すことができる。このときの x_1 と x_2 の相互相関関数 C_{12} は、ノイズは信号と無相関になるので、

$$C_{12} = C_{u_1, u_2} \quad (13)$$

のように信号同士の相互相関関数で簡単に表すことができる。つまりコヒーレンスは

$$\text{coh} \equiv \frac{X_{12}}{\sqrt{P_1 P_2}} = \frac{X_{u_1, u_2}}{\sqrt{(P_{u1} + P_n)(P_{u2} + P_n)}} \quad (14)$$

$$= \frac{X_{u_1, u_2}}{P_s + P_n} \quad (15)$$

$$= \frac{X_{u_1, u_2}}{P_s} \frac{P_s}{P_s + P_n} \quad (16)$$

$$= \frac{X_{u_1, u_2}}{P_s} \frac{\text{SNR}}{1 + \text{SNR}} \quad (17)$$

$$(18)$$

となる。振幅が減衰しない平面波が通過しているので、ここで $P_1 = P_2 = P_s$ とした。また、信号雑音比 SNR を $\text{SNR} = \frac{P_s}{P_n}$ と定義した。さてノイズのない平面波を測定した場合、変場を $u(x, t) = e^{i(\omega t - kx)}$ とすると、コヒーレンスは $\text{coh} = e^{ikL}$ となる。したがって、式 (18) に代入すると、

$$\text{coh} = \frac{\text{SNR}}{1 + \text{SNR}} e^{ikL} \quad (19)$$

$$(20)$$

となる。

式 (20) より、 $kL = 2\pi n$, ($n = 0, 1, 2, \dots$) のとき、つまり弾性波の波長 λ が

$$\lambda = Ln, (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (21)$$

の条件のとき、位相は 0 度になり同相成分のみの変化になることがわかる。この条件から波長が変化すると、次第に同相成分が減り、逆相成分が増え始める。最終的に、 n が半整数のとき、逆相成分のみになる。また振幅については、SNR で表すことができる。

1.2.2 平面波モデル (CDMR_{seis})

図 1 を平面波が伝搬している場合の CDMR を求める。変位場 $u(x, t)$ は、角周波数 ω と波数 k を用いて、

$$u(x, t) = e^{i(\omega t - kx)} \quad (22)$$

となるため、距離 L 離れた二点の逆相成分 $u_{\text{diff}}(x, t)$ は

$$u_{\text{diff}}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{i(\omega t - kx_1)} - e^{i(\omega t - kx_1 + L)} \right) \quad (23)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} u(x_1, t) \left(1 - e^{ikL} \right) \quad (24)$$

$$= u(x_1, t) \times \sqrt{2} i e^{i \frac{kL}{2}} \sin\left(\frac{kL}{2}\right) \quad (25)$$

となる。同相成分 $u_{\text{com}}(x, t)$ も同様の計算をして、

$$u_{\text{com}}(x, t) = u(x_1, t) \times \sqrt{2} e^{i \frac{kL}{2}} \cos\left(\frac{kL}{2}\right) \quad (26)$$

となるので、平面波が通過しているときの CDMR は

$$\text{CDMR}_{\text{seis}} = \left| \frac{u(x_1, t) \times \sqrt{2} e^{i \frac{kL}{2}} \cos\left(\frac{kL}{2}\right)}{u(x_1, t) \times \sqrt{2} i e^{i \frac{kL}{2}} \sin\left(\frac{kL}{2}\right)} \right| = \frac{1}{\tan\left(\frac{\omega L}{2c}\right)} \quad (27)$$

で表すことができる。ここで、平面波の分散関係 $c = \omega/k$ を用いた。

1.2.3 平面波モデル (CDMR_{gif})

GIF と地震計を比較するために、式 3 の逆相成分を GIF のひずみ計で置き換えた CDMR_{gif} を計算する。GIF のひずみ計は 1500m 離れた 2 点間のひずみ ε_{gif} を測っている。そのため、3km 離れた二点の地面振動の逆相成分 $x_{\text{diff_gif}}$ は、

$$x_{\text{diff_gif}} = \varepsilon_{\text{gif}} \times \frac{3000}{\sqrt{2}} \quad (28)$$

と換算することができる。^{*5}

平面波が伝搬しているとき、速度 $v(x, t)$ は $v(x, t) \equiv \frac{\partial u}{\partial t} = i\omega u(x, t)$ であり、ひずみ $\epsilon(x, t)$ は $\epsilon(x, t) \equiv \frac{\partial u}{\partial x} = -iku(x, t)$ となるので、両者の振幅比は

$$\left| \frac{A_v}{A_\epsilon} \right| = c \quad (29)$$

となって、位相速度 c で表すことができる。

さて、GIF で逆相成分を置き換えた CDMR_{gif} は、式 9 と式 28 をもちいて、

$$\text{CDMR}_{\text{gif}} = \frac{u(x_1, t) \times \sqrt{2} e^{i\frac{kL}{2}} \cos(\frac{kL}{2})}{A_\epsilon L / \sqrt{2}} \quad (30)$$

となるが、コヒーレンスは $\text{coh} = e^{ikL}$ なので、計算すると

$$\boxed{\text{CDMR}_{\text{gif}} = \sqrt{2(1 + \cos(kL))} \frac{A_v}{A_\epsilon} \frac{\omega}{L} = \frac{2c}{\omega L} \cos(\frac{\omega L}{2c})} \quad (31)$$

となる。

1.3 X アームの CDMR

X アームの CDMR を求める。エンドとセンターの 2 階においた地震計の X アームに水平な方向の信号をつかった。

1.3.1 地震計の ASD

まず図 2 に、X エンドとセンターの地震計の信号を変位換算した ASD を示す。脈動では大きさが一致している。それ以上の周波数では、センターエリアに置いた地震計は ADC ノイズで埋もれているため、両者は一致しない。^{*3} また低周波では、傾き成分のカップリングにより両者は一致していないこともわかる。^{*2}

^{*5} 数 km スケールの基線長のひずみ応答は数 Hz まで平坦なので、脈動以下の周波数帯域では、単純にスケール倍すればいい。

^{*3} ちゃんとプリアンプいれておこう。。

^{*2} これだけだと、積極的に傾きだとは言えない。どう示したらいいか？少なくとも GIF と比較すれば「並進ではない他のノイズをみている」とは言えそう。GIF はコーナキューブを使っているので原理的には、傾きが伸縮方向にカップルはしない。図 5 の上図で、地震計 2 つから計算した逆相成分と GIF から計算したものを比較するとたしかに、地震計の信号は GIF よりも大きい。なので、並進ではない他のノイズをみているとは言える。

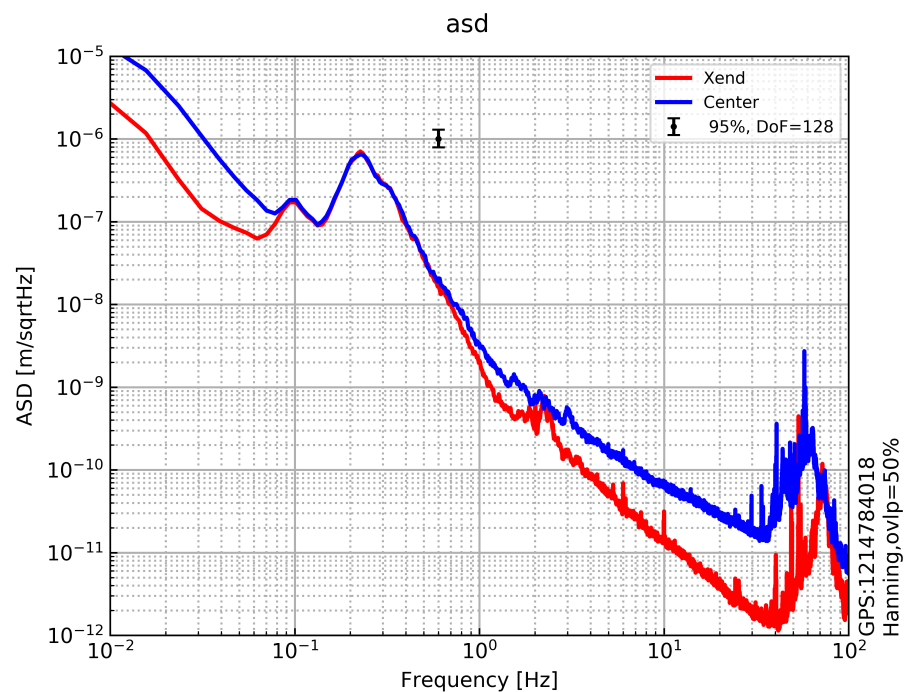


図 2 X エンドとセンターエリアにおいた地震計の X アーム方向の ASD。エラーバーは 95 % の有意水準。0.1Hz-0.5Hz の帯域では振幅の大きさが同じである。

1.3.2 地震計のコヒーレンス

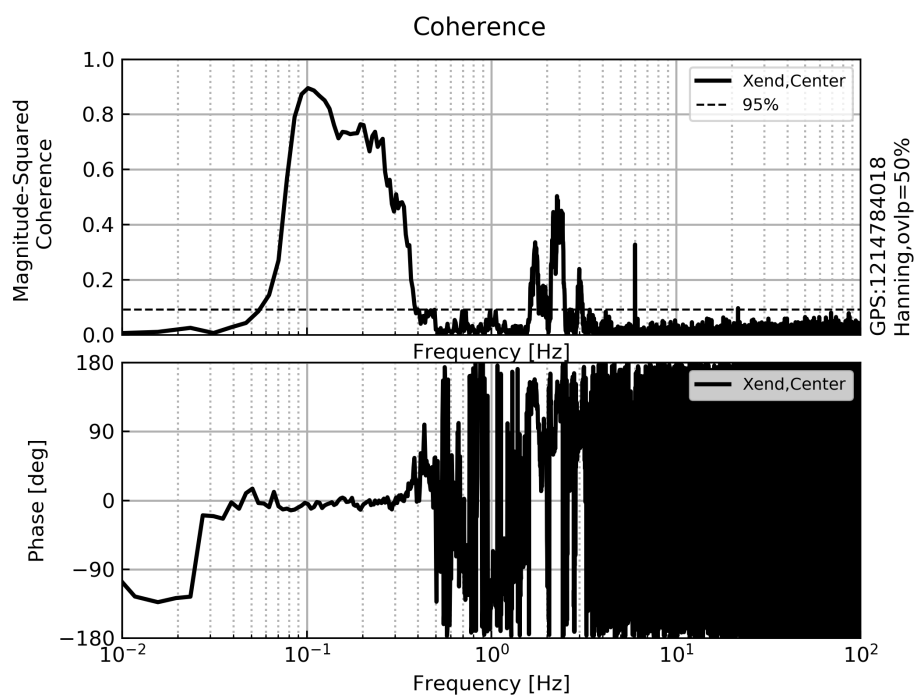


図 3 X エンドとセンターエリアにおいた地震計の X アーム方向同士のコヒーレンス。破線は 95 % の有意水準でコヒーレンスがゼロであるという帰無仮説。すなわちこれ以上では有意にコヒーレンスがあると言える。0.1-0.3Hz と 2Hz 付近にコヒーレンスがある。前者は脈動、後者は不明。

図 3 に、X エンドとセンターの地震計同士のコヒーレンスを示す。コヒーレンスは 0.2Hz 付近で有意な値をもち、位相が 0 度であるため、2 点が同相で動いていることを意味している。脈動の帯域では、同相成分のほうが逆相成分よりも大きいことを示唆する。

1.3.3 CDMR_{seis}

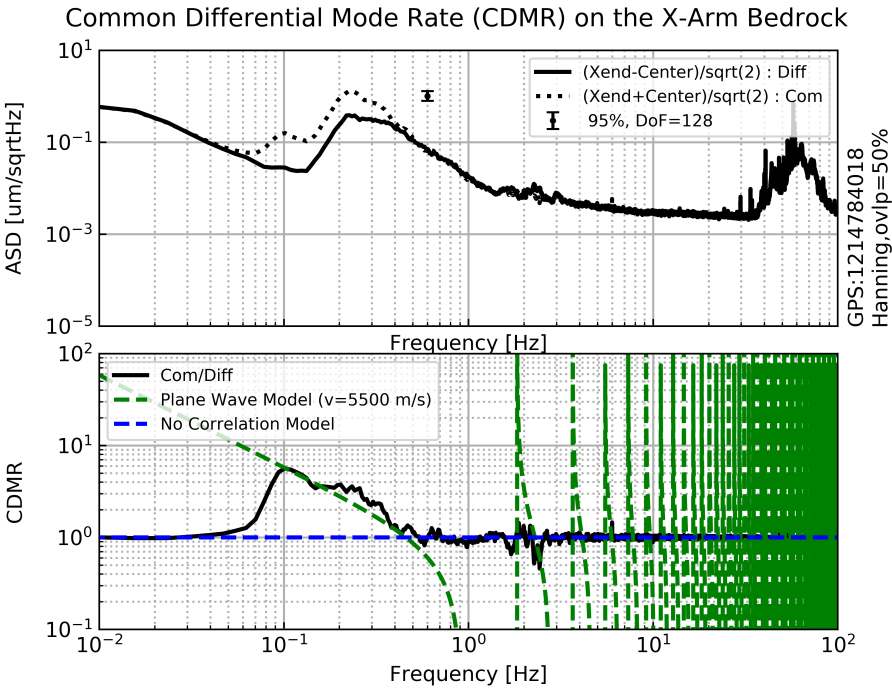


図 4 上図:3km 離れた二点の地面振動の同相成分と逆相成分の ASD。0.1-0.2Hz 付近にピークをもつ脈動では同相成分のほうが逆相成分よりも大きい。下図:同相成分と逆相成分の比 (CDMR)。緑色の破線は、位相速度 5500 m/s 平面波が X アームを伝搬した場合の CDMR を示す。青色の破線は、相関がない場合の CDMR を示す。脈動はコヒーレンスがあり、波長は KAGRA の基線長よりも長いので、同相雑音が低減されている。

式 27 に P 波の位相速度 5500 m/s を代入した*³ものを図 4 の下図に緑色の破線で示す。この平面波のモデルと、実測データからもとめた CDMR を比較すると、コヒーレンスがある帯域で一致することがわかる。その他の帯域では、ADC ノイズや傾斜ノイズによってコヒーレンスがなくなっているため、式 10 より、CDMR は 1 となる。(図 4 下図の青色破線)。

*³ レイリー波だともうけど、とりあえず P 波の位相速度で考えておく。

1.3.4 CDMR_{gif}

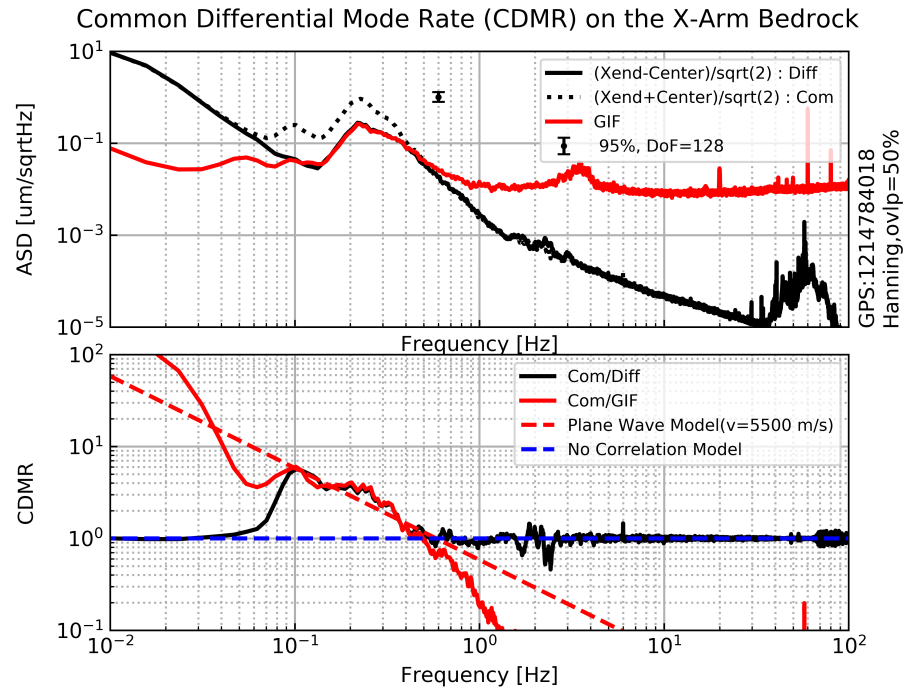


図5 図4に GIF で推定した逆相成分を加えて比較。上図:同相成分と逆相成分の比較。GIF で推定した逆相成分は、脈動の帯域では地震計でもとめたものと一致しているが、低周波では一致しない。これは、図4のこの帯域で、CDMR が1で2つの地震計が無相関だったことから、地震計がローカルなノイズをみていることがわかる。そのため GIF は地震計よりも低周波で感度をもつことが確認できる。下図:逆相成分を GIF で推定したものを加えて比較。式??で表される平面波モデル (赤線の破線) は、図4と同様に、脈動の帯域で実測値と一致する。その他の帯域では、先に述べたように、高周波は GIF が ADC ノイズで、低周波は地震計が傾きノイズをみているため、モデルとは一致しない。

式 (31) の位相速度に花崗岩の弾性波速度である 5500m/s を代入して図4の下図に赤色の破線で示す。地震計と同様に脈動の帯域では平面波のモデルと一致する。それより高周波では GIF は周波数ノイズに埋もれて地震計の同相成分よりも大きいので、CDMR は平面波のモデルよりも小さくなっている。一方で脈動より低周波では、GIF は基線長伸縮をみているがそれに対応する地震計の逆相成分は、GIF よりも大きい。この帯域では、図4で示したように、CDMR が1であったため、地震計同士が無相関で動いている。つまり、傾斜などのローカルなノイズをみている、基線長伸縮をみていないことがわかる。

1.4 IMC の CDMR

IMC の CDMR を求める。図??のように、MCi と MCe に TrilliumCompact を置いた。

1.4.1 地震計の ASD

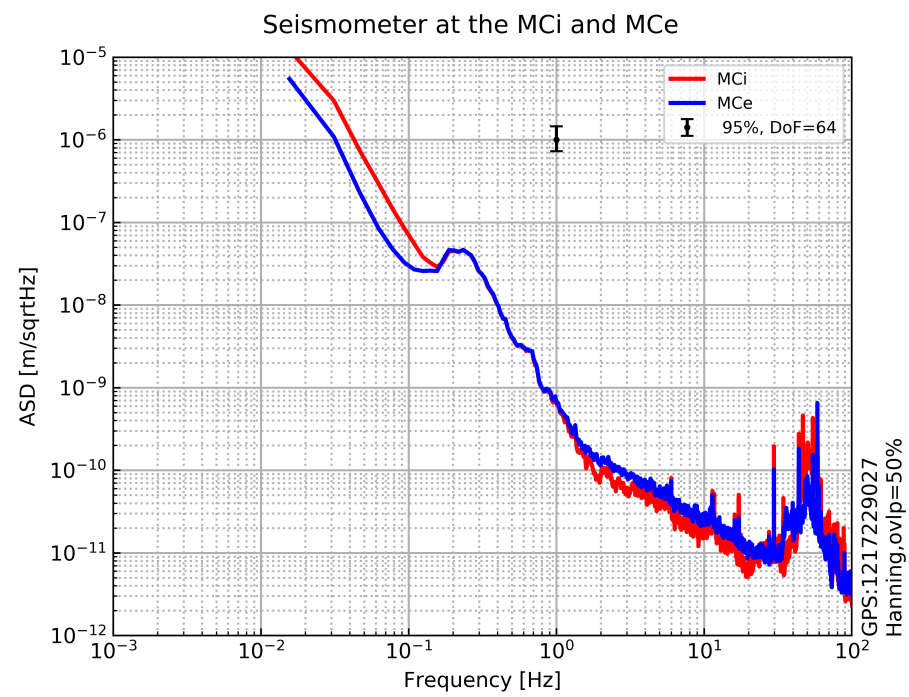


図 6

1.4.2 地震計のコヒーレンス

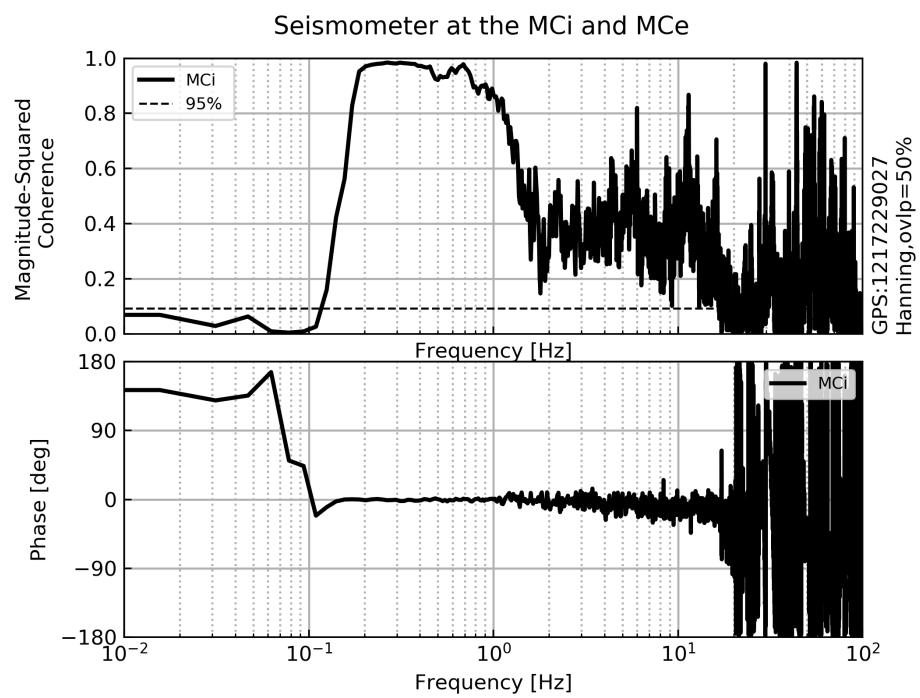


図 7

1.4.3 CDMR_{seis}

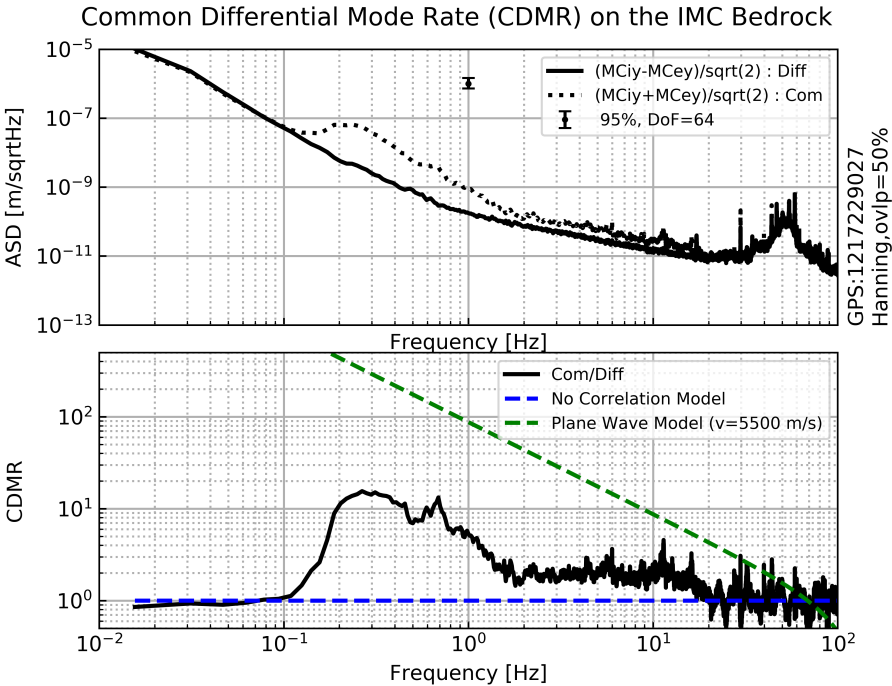


図 8

1.5 長期データ

長期間の基線長伸縮スペクトルをここでのべる。今後 KAGRA の基線長伸縮として引用できるようなもの。一年をとおしてデータを解析してみる。平均的なスペクトルを知りたいので地震や台風のときは除く、もしくは「うるさいとき」という感じで、スペクトルを乗せる。

1.6 環境変動による X アームの基線長伸縮

波浪や地震、気圧・水圧などの環境変化によって基線長伸縮がどう影響をうけるか述べる。

1.6.1 波浪

1.6.2 地震

1.6.3 気圧

1.6.4 水圧

1.7 まとめ

本章では、同相成分と逆相成分の比である Common Differential Mode Ratio (CDMR) という量を定義して、X アームを平面波が通過している簡単なモデルと、実測データを比較した。その結果、脈動ではセンターと X エンド同士で有意なコヒーレンスがあった。この帯域では、平面波のモデルと実測データが一致し、2 点は同相で動いていることがわかった。そして、CDMR を計算すると、最大で逆相成分が同相成分の 1/4 になっており、3km の基線長でも逆相成分の低減が確認できた。

また、地震計とひずみ計の比較もおこなった。

ひずみ計は 1500m の基線長伸縮を直接みており、地震計とは異なって、原理的には地面の

傾斜成分は並進方向にカップルしないため、低周波