

# X アームの基線長伸縮

三代浩世希

2018 年 8 月 27 日

## 目次

1	脈動の逆相成分は X アームでどれだけ低減されているのか？	1
1.1	同相成分と逆相成分	1
1.2	Common Differential Mode Rate (CDMR)	2
1.2.1	平面波モデル (CDMR <sub>seis</sub> )	3
1.2.2	平面波モデル (CDMR <sub>gif</sub> )	4
1.2.3	ノイズを含んで測定している場合	4
1.3	X アームの CDMR	5
1.3.1	地震計のスペクトル	5
1.3.2	地震計のコヒーレンス	6
1.3.3	CDMR <sub>seis</sub>	7
1.3.4	CDMR <sub>gif</sub>	8
1.4	IMC の CDMR	8
1.4.1	地震計のスペクトル	9
1.4.2	地震計のコヒーレンス	10
1.4.3	CDMR <sub>seis</sub>	11
1.5	まとめ	11
付録 A	スペクトルの誤差	12
付録 B	コヒーレンスの有意水準	12

## 1 脈動の逆相成分は X アームでどれだけ低減されているのか？

この文章は、道村さんからの 4 月 19 日のメール「KAGRA micro seism のコヒーレンス」に対する回答になる。質問の内容は、「脈動では、数 km の X アームはどれだけ同相成分を含んでいて、どれだけ逆相成分を低減できているか」というもの。経験的に、IMC のような数 10m スケールの基線長では、よく逆相成分が低減されていることが知られている。なので、基線長が長くなると同相成分と逆相成分の比がどう変わるのか。それを評価した。

## 1.1 同相成分と逆相成分

図1で示すような、Xアーム上の2点、 $x_1, x_2$ を考える。それぞれの場所での変位は変位場  $u(x, t)$  をもちいて、 $u(x_1, t), u(x_2, t)$  となる。ここで、これら2つの変位の同相成分  $u_{\text{com}}$  と逆相成分  $u_{\text{diff}}$  を

$$u_{\text{diff}} \equiv \frac{u_1 - u_2}{\sqrt{2}}, \quad (1)$$

$$u_{\text{com}} \equiv \frac{u_1 + u_2}{\sqrt{2}} \quad (2)$$

と定義する。パワーが保存するように、規格化定数は  $\sqrt{2}$  にしている。同相成分は、2点の重心移動をあらわし、逆相成分は2点の基線長伸縮を表す。

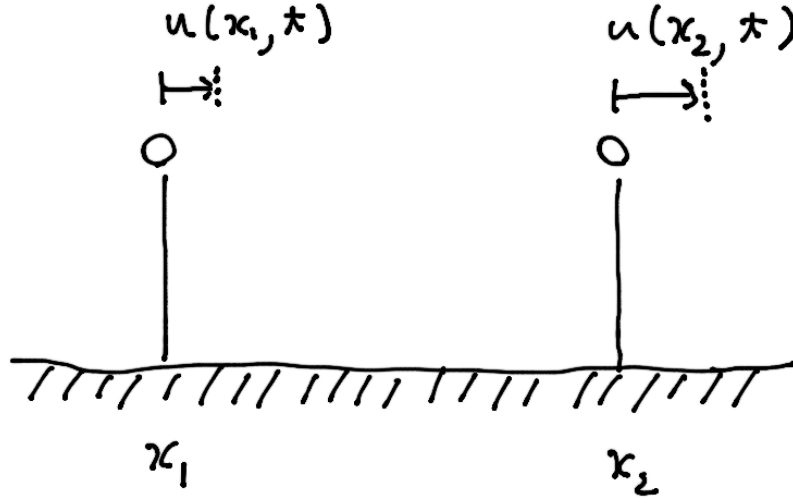


図1 Xアーム上の2点の変位。それぞれの位置を  $x_1, x_2$  とすれば変位はそれぞれ  $u(x_1, t), u(x_2, t)$  となる。

## 1.2 Common Differential Mode Rate (CDMR)

2点の逆相成分である、基線長伸縮がどの程度低減されているかを表す指標として、2つの信号の同相と逆相の振幅成分の比、Common Differential Mode Rate (CDMR) を

$$\text{CDMR} \equiv \sqrt{\frac{\text{同相成分のパワー}}{\text{逆相成分のパワー}}} = \sqrt{\frac{P_{\text{com}}(\omega)}{P_{\text{diff}}(\omega)}} \quad (3)$$

と定義する。 $P_{\text{com}}, P_{\text{diff}}$  は同相成分と逆相成分についてのパワースペクトル密度である。パワースペクトル密度は自己相関関数  $C(\tau)$  をフーリエ変換したものなので、まず自己相関関数  $C_{\text{diff}}$  を求める。自己相関関数  $C_{\text{diff}}$  は、各々の自己相関を  $C_{ij} \equiv \langle x_i(t)x_j(t+\tau) \rangle$ , ( $i = 1, 2, j = 1, 2$ ) と定義すれば、

$$C_{\text{diff}}(\tau) = \frac{1}{2} \langle [x_1(t) - x_2(t)] [x_1(t+\tau) - x_2(t+\tau)] \rangle \quad (4)$$

$$= \frac{1}{2} (C_{11}(\tau) - C_{12}(\tau) - C_{21}(\tau) + C_{22}(\tau)), \quad (5)$$

となるので、これをフーリエ変換すれば逆相成分のパワースペクトル密度  $P_{\text{diff}}(\omega)$  は

$$P_{\text{diff}}(\omega) = \frac{1}{2} (P_1(\omega) + P_2(\omega) - X_{12}(\omega) - X_{12}^*(\omega)) \quad (6)$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{P_1 P_2} \left( \sqrt{\frac{P_1}{P_2}} + \sqrt{\frac{P_2}{P_1}} - 2 \operatorname{Re} [\operatorname{coh}] \right), \operatorname{coh} \equiv \frac{X_{12}}{\sqrt{P_1 P_2}} \quad (7)$$

となる。 $P_1(\omega), P_2(\omega)$  はパワースペクトル密度、 $X_{12}(\omega)$  はクロススペクトル密度、 $\operatorname{coh}$  はコヒーレンスである。

さて、2つの信号  $x_1, x_2$  のパワーが同じ、つまり  $P_1 = P_2 \equiv P$  の場合、式 (7) はさらに計算できて、結果として  $P_{\text{diff}}$  は

$$P_{\text{diff}}(\omega) = P (1 - \operatorname{Re} [\operatorname{coh}]) \quad (8)$$

となる。同相成分も同様の計算をして、

$$P_{\text{com}}(\omega) = P (1 + \operatorname{Re} [\operatorname{coh}]) \quad (9)$$

となるので、CDMR は定義式 (3) より、

$$\text{CDMR} = \sqrt{\frac{1 + \operatorname{Re} [\operatorname{coh}]}{1 - \operatorname{Re} [\operatorname{coh}]}} \quad (10)$$

と書き表すことができる。式 (10) が示すように、同相成分と逆相成分のパワー比は2つの信号のコヒーレンスであらわすことができる。

### 1.2.1 平面波モデル (CDMR<sub>seis</sub>)

図1を平面波が伝搬している場合の CDMR を求める。変位場  $u(x, t)$  は、角周波数  $\omega$  と波数  $k$  を用いて、

$$u(x, t) = u_0 e^{i(\omega t - kx)} \quad (11)$$

と表すことができる。 $u_0$  は  $t = 0, x = 0$  での変位である。図1において、 $x_2$  にある点がもう一つの点  $x_1$  にたいして、 $x_2 = x_1 + L$  離れているとすると、これらの逆相成分  $u_{\text{diff}}(x, t)$  は

$$u_{\text{diff}}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( e^{i(\omega t - kx_1)} - e^{i(\omega t - kx_1 + kL)} \right) \quad (12)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} u(x_1, t) (1 - e^{ikL}) \quad (13)$$

$$= u(x_1, t) \times \sqrt{2} (-i) e^{i \frac{kL}{2}} \sin\left(\frac{kL}{2}\right) \quad (14)$$

となる。同相成分  $u_{\text{com}}(x, t)$  も同様の計算をして、

$$u_{\text{com}}(x, t) = u(x_1, t) \times \sqrt{2} e^{i \frac{kL}{2}} \cos\left(\frac{kL}{2}\right) \quad (15)$$

となるので、平面波が通過しているときの CDMR は

$$\text{CDMR}_{\text{seis}} = \left| \frac{u(x_1, t) \times \sqrt{2} e^{i \frac{kL}{2}} \cos\left(\frac{kL}{2}\right)}{u(x_1, t) \times \sqrt{2} (-i) e^{i \frac{kL}{2}} \sin\left(\frac{kL}{2}\right)} \right| = \frac{1}{\tan\left(\frac{\omega L}{2c}\right)} \quad (16)$$

で表すことができる。ここで、平面波の分散関係  $c = \omega/k$  を用いた。

### 1.2.2 平面波モデル (CDMR<sub>gif</sub>)

GIF と地震計を比較するために、式 3 の逆相成分を GIF のひずみ計で置き換えた CDMR<sub>gif</sub> を計算する。GIF のひずみ計は 1500m 離れた 2 点間のひずみ  $\varepsilon_{\text{gif}}$  を測っている。そのため、3km 離れた二点の地面振動の逆相成分  $x_{\text{diff\_gif}}$  は、

$$x_{\text{diff\_gif}} = \varepsilon_{\text{gif}} \times \frac{3000}{\sqrt{2}} \quad (17)$$

と換算することができる。<sup>\*5</sup>

平面波が伝搬しているとき、速度  $v(x, t)$  は  $v(x, t) \equiv \frac{\partial u}{\partial t} = i\omega u(x, t)$  であり、ひずみ  $\epsilon(x, t)$  は  $\epsilon(x, t) \equiv \frac{\partial u}{\partial x} = -iku(x, t)$  となるので、両者の振幅比は

$$\left| \frac{A_v}{A_\epsilon} \right| = c \quad (18)$$

となって、位相速度  $c$  で表すことができる。

さて、GIF で逆相成分を置き換えた CDMR<sub>gif</sub> は、式 9 と式 17 をもちいて、

$$\text{CDMR}_{\text{gif}} = \frac{u(x_1, t) \times \sqrt{2} e^{i\frac{kL}{2}} \cos(\frac{kL}{2})}{A_\epsilon L / \sqrt{2}} \quad (19)$$

となるが、コヒーレンスは  $\text{coh} = e^{ikL}$  なので、計算すると

$$\boxed{\text{CDMR}_{\text{gif}} = \sqrt{2(1 + \cos(kL))} \frac{A_v}{A_\epsilon} \frac{\omega}{L} = \frac{2c}{\omega L} \cos(\frac{\omega L}{2c})} \quad (20)$$

となる。

### 1.2.3 ノイズを含んで測定している場合

<sup>\*15</sup>

ノイズが同じ測定器でこの信号を測定すれば、変位はそれぞれ

$$x_1 = u(x_1, t) + n(t) \quad (21)$$

$$x_2 = u(x_2, t) + n(t) \quad (22)$$

のように表すことができる。このときの  $x_1$  と  $x_2$  の相互相関関数  $C_{12}$  は、ノイズは信号と無相関になるので、

$$C_{12} = C_{u_1, u_2} \quad (23)$$

のように信号同士の相互相関関数で簡単に表すことができる。つまりコヒーレンスは

$$\text{coh} \equiv \frac{X_{12}}{\sqrt{P_1 P_2}} = \frac{X_{u_1, u_2}}{\sqrt{(P_{u_1} + P_n)(P_{u_2} + P_n)}} \quad (24)$$

$$= \frac{X_{u_1, u_2}}{P_s + P_n} \quad (25)$$

$$= \frac{X_{u_1, u_2}}{P_s} \frac{P_s}{P_s + P_n} \quad (26)$$

$$= \frac{X_{u_1, u_2}}{P_s} \frac{\text{SNR}}{1 + \text{SNR}} \quad (27)$$

$$(28)$$

<sup>\*5</sup> 数 km スケールの基線長のひずみ応答は数 Hz まで平坦なので、脈動以下の周波数帯域では、単純にスケール倍すればいい。

<sup>\*15</sup> これは、後述する IMC の測定結果が、SN が悪いせいでモデルと一致しないだろうと思ったので計算した。まだこれをこの Document に反映していないので、この項は読み飛ばしても問題ない。

となる。振幅が減衰しない平面波が通過しているので、ここで  $P_{u1} = P_{u2} = P_s$  とした。また、信号雑音比 SNR を  $\text{SNR} = \frac{P_s}{P_n}$  と定義した。さてノイズのない平面波を測定した場合、変位を  $u(x, t) = e^{i(\omega t - kx)}$  とすると、コヒーレンスは  $\text{coh} = e^{ikL}$  となる。したがって、式 (28) に代入すると、

$$\text{coh} = \frac{\text{SNR}}{1 + \text{SNR}} e^{ikL} \quad (29)$$

$$(30)$$

となる。

式 (30) より、 $kL = 2\pi n$ , ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) のとき、つまり弾性波の波長  $\lambda$  が

$$\lambda = Ln, (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (31)$$

の条件のとき、位相は 0 度になり同相成分のみの変化になることがわかる。この条件から波長が変化すると、次第に同相成分が減り、逆相成分が増え始める。最終的に、 $n$  が半整数のとき、逆相成分のみになる。また振幅については、SNR で表すことができる。<sup>\*16\*17</sup>

### 1.3 X アームの CDMR

X アームの CDMR を求める。エンドとセンターの 2 階においた地震計の X アーム方向の信号をつかった。

#### 1.3.1 地震計のスペクトル

まず図 2 に、X エンドとセンターに置いた地震計の出力を変位にした Amplitude Spectrum Density (ASD) を示す。0.1-0.3Hz の帯域では大きさが一致している。それ以上の周波数では、センターエリアに置いた地震計は ADC ノイズで埋もれているため、両者は一致しない。<sup>\*6</sup> また低周波では、傾き成分のカップリングにより両者は一致していない。<sup>\*7</sup>

<sup>\*16</sup> これを逆につかえば、実測したコヒーレンスをつかって、SNR がわかり、そこからノイズを求めることができる。

<sup>\*17</sup> ちなみに、式 10 を逆に読めば、コヒーレンスは CDMR で表せることを意味している。つまり SN がよくても、CDMR が悪いとコヒーレンスは小さくなる場合がある。(X アームはその例。)

<sup>\*6</sup> プリアンプを入れる予定。KAGRA でよういされているホワイトニングフィルターが横澤さんのおかげで使えるのでそれをつかう。X エンドはそれをつかっている。。

<sup>\*7</sup> 積極的に、傾きのカップリングだとは言えない気がする。

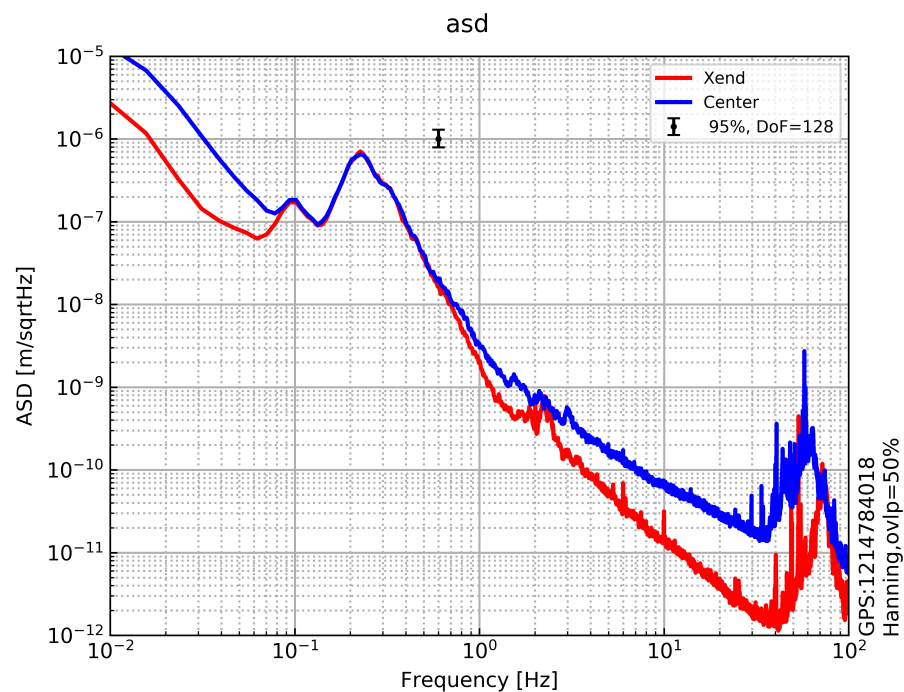


図2 X エンドとセンターエリアにおいた地震計の X アーム方向の ASD。速度出力の地震計の信号を  $2\pi f$  で割って変位に換算している。エラーバーは 95 % の信頼区間。時系列データは 2018/07/05 00:00:00 (JST) から  $2^{13}$  秒 (2.3 時間) 分をつかった。平均回数は 64 回で、窓関数は Hanning 窓をつかった。

### 1.3.2 地震計のコヒーレンス

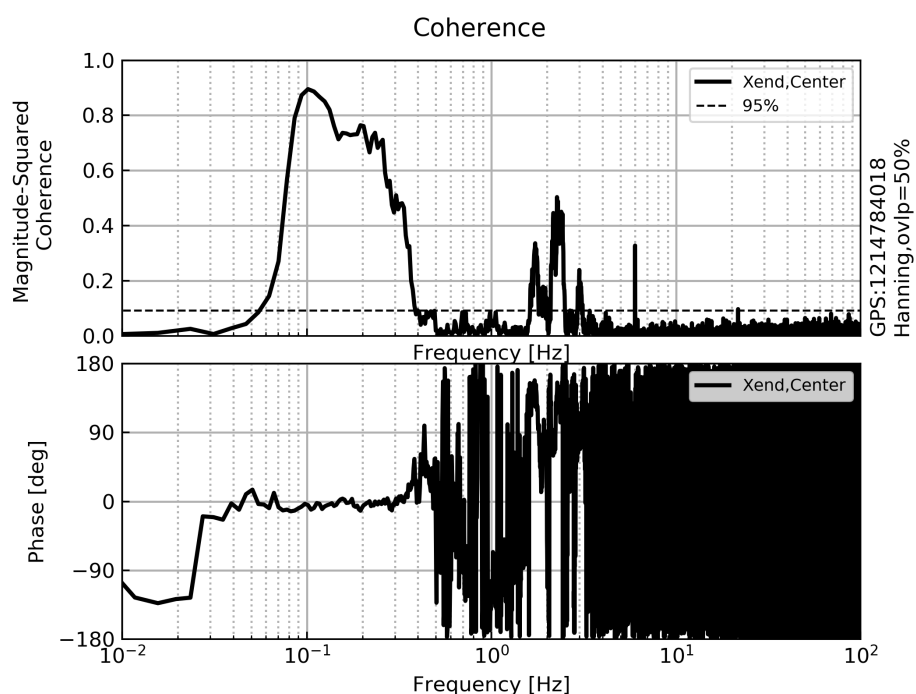


図3 X エンドとセンターエリアにおいた地震計の X アーム方向同士のコヒーレンス。破線より上にあれば、5 % の有意水準でコヒーレンスがないという帰無仮説を棄却でき、コヒーレンスがあると言える。

図 3 に、X エンドとセンターの地震計同士のコヒーレンスを示す。コヒーレンスは、0.1-0.3Hz と 2Hz 周辺で有意に存在する。前者の帯域では位相差は 0 度になっており同相成分が多いことが期待できる。これは脈動由来だと考えられるが、一方で後者の由来はまだわからない。<sup>\*8</sup>低音懸架の 1.6Hz の基線長方向の共振モードと被っているので、RMS を大きくしてしまうので注意が必要。

### 1.3.3 CDMR<sub>seis</sub>

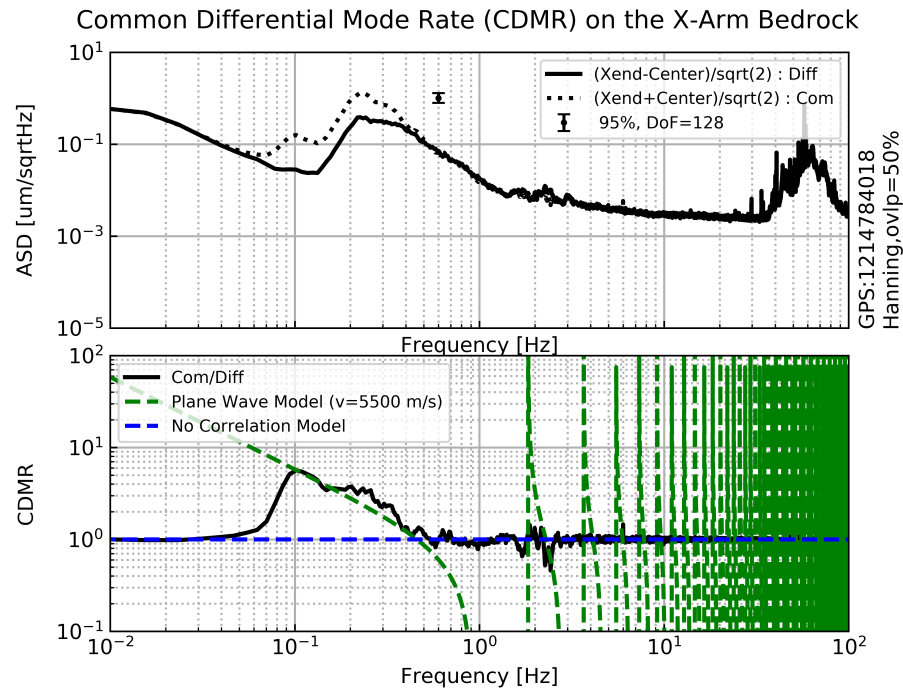


図 4 上図:3km 離れた二点の地面振動の同相成分と逆相成分の ASD。0.1-0.2Hz 付近にピークをもつ脈動では同相成分のほうが逆相成分よりも大きい。下図:同相成分と逆相成分の比 (CDMR)。緑色の破線は、位相速度 5500 m/s 平面波が X アームを伝搬した場合の CDMR を示す。青色の破線は、相関がない場合の CDMR を示す。脈動はコヒーレンスがあり、波長は KAGRA の基線長よりも長いので、同相雑音が低減されている。

式 16 に P 波の位相速度 5500 m/s を代入した<sup>\*9</sup>ものを図 4 の下図に緑色の破線で示す。この平面波のモデルと、実測データから求めた CDMR を比較すると、コヒーレンスがある帯域で一致することがわかる。その他の帯域では、ADC ノイズや傾斜ノイズによってコヒーレンスがなくなっているため、式 10 より、CDMR は 1 となる。(図 4 下図の青色破線)。<sup>\*10</sup>

<sup>\*8</sup> いろんな時系列で同じ解析をしていないので、なんともいえないけれど、このピークはいつもは現れない。雨が多く降ったときにみえる。

<sup>\*9</sup> 本来はレイリー波の速度が適している？

<sup>\*10</sup> 思いの外、平面波のモデルと実測したものが一致している。他の期間でも同じ解析してみて、どうなるか気になる。

### 1.3.4 CDMR<sub>gif</sub>

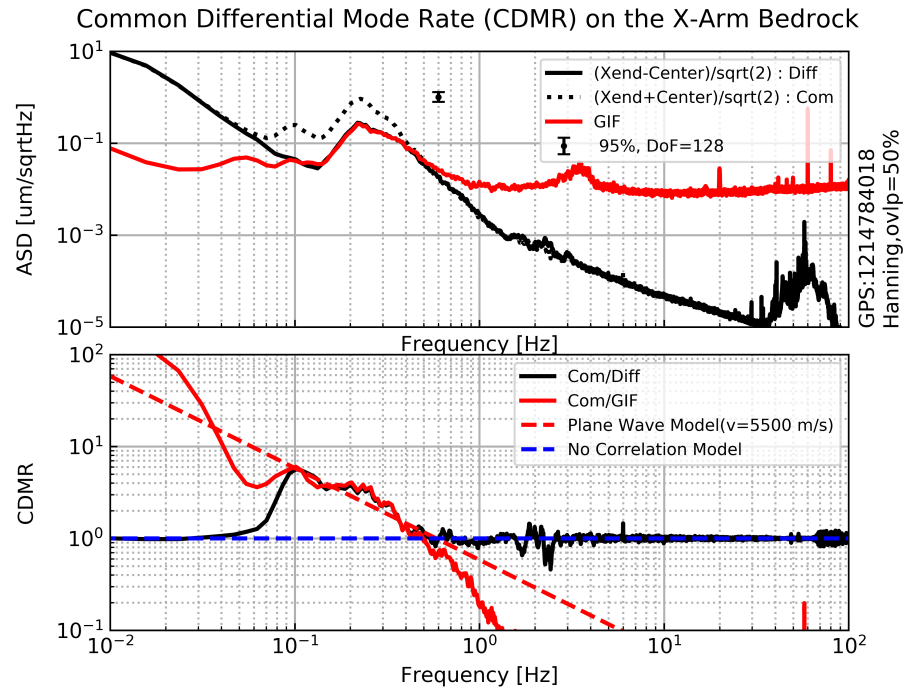


図5 図4にGIFで推定した逆相成分を加えて比較。上図:変位のASD。下図:逆相成分をGIFに置き換えたCDMR<sub>gif</sub>を赤線でプロット。

図3に、3000mの2点における逆相成分をGIFのひずみ信号から換算したものを赤線でプロットしたものを、図4に示す。図4上図のASDをみると、GIFと地震計は脈動の帯域ではよく一致している。高周波側は、GIFは周波数ノイズで埋もれている。低周波側はGIFのほうが小さいが、これは地震計が傾きのカップリング成分で埋もれているためと考えられる。原理的にはGIFは、傾き成分から基線長伸縮へのカップリングはないため、地震計とくらべて、脈動以下ではGIFは低ノイズな基線長伸縮モニターとなることがわかる。<sup>\*11</sup>

式(20)の位相速度に花崗岩の弾性波速度である5500m/sを代入して図4の下図に赤色の破線で示す。地震計と同様に脈動の帯域では平面波のモデルと一致する。

## 1.4 IMCのCDMR

IMCのCDMRを求める。MCiとMCeにTrilliumCompactを置き、基線長方向の信号をつかってCDMRをもとめた。

\*11 これが、自分のオリジナリティを支える部分になると思う。



#### 1.4.1 地震計のスペクトル

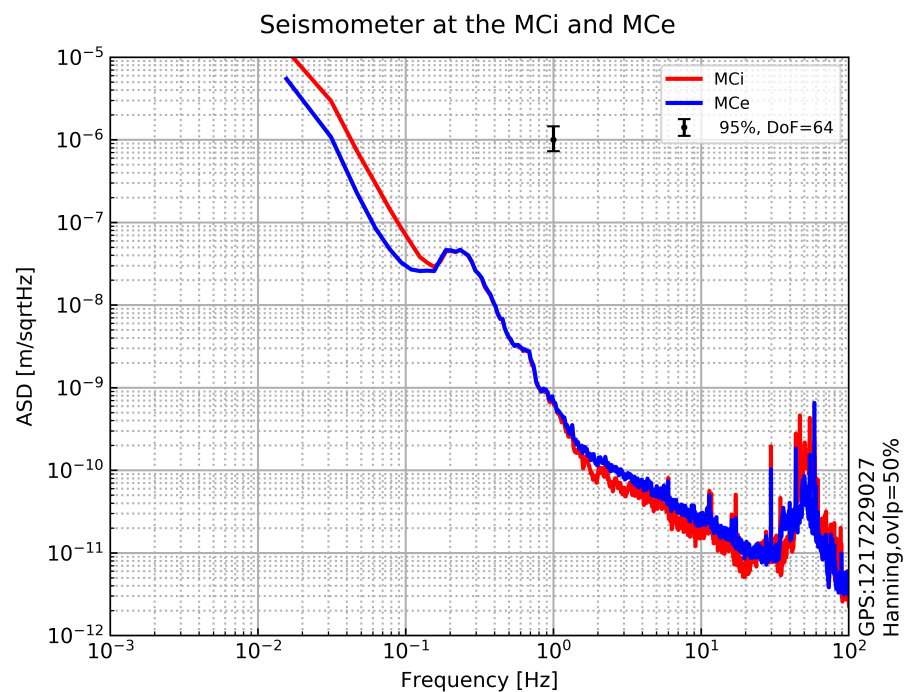


図6 MCI と MCE の ASD。時系列データは 2018/08/02 07:10:09 (JST) から  $2^{13}$  秒 (2.3 時間) 分をつかった。平均回数は 64 回で、窓関数は Hanning 窓をつかった。

図6に MCI と MCE においた地震計の ASD を示す。エラーバーは 95 % の信頼区間を示す。0.2Hz から 1Hz で 2 点は同じ地面振動レベルを示している。1-10Hz の帯域では、それぞれ ADC ノイズに埋もれている。MCI の地震計は 33 倍のアンプを入れているので ADC ノイズの換算雑音は小さい。

### 1.4.2 地震計のコヒーレンス

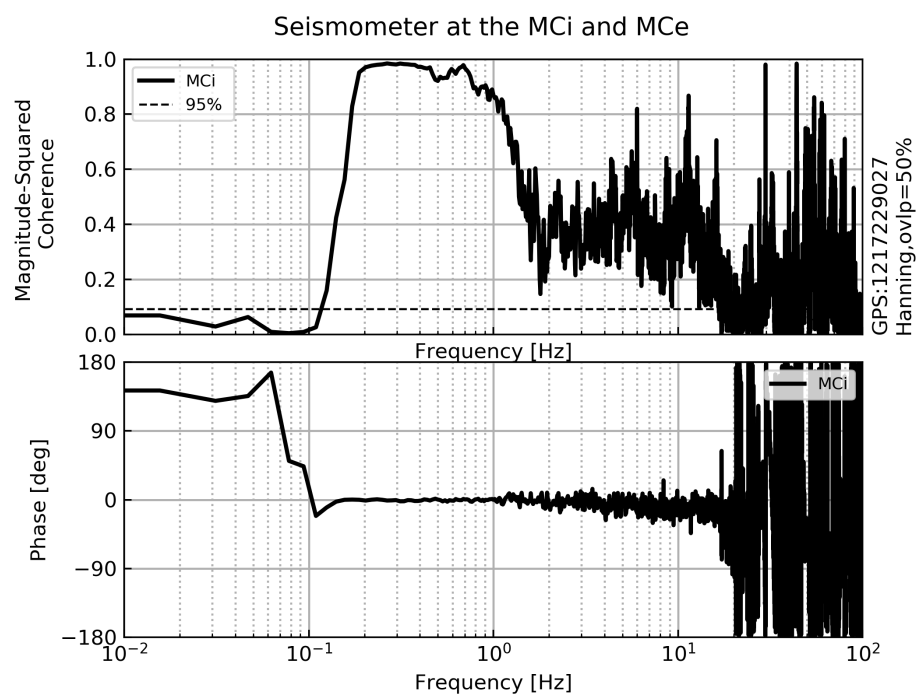


図7 MCI と MCE のコヒーレンス。

図7にMCIとMCEのコヒーレンスを示す。0.2Hzから10Hzまで有意にコヒーレンスをもっている。とくに0.2－1Hzの帯域では非常にコヒーレンスが高い。また位相差が0となっているため、2点は同相で動いていることがわかる。

### 1.4.3 CDMR<sub>seis</sub>

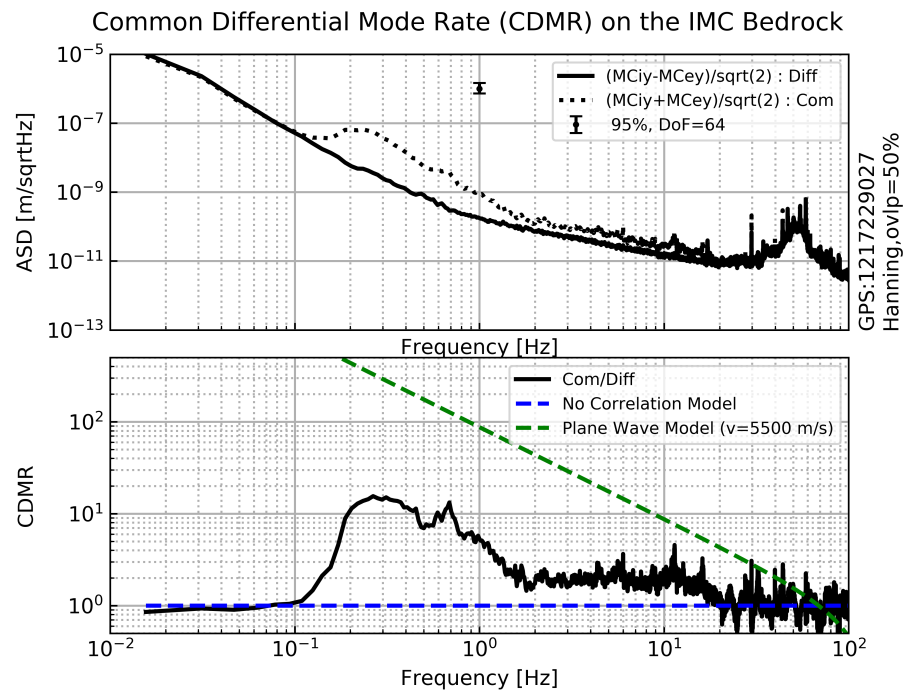


図 8 aa

図 8 に CDMR を示す。図 7 で、位相差 0 度でコヒーレンスのあった帯域では、逆相成分は同相成分よりも小さいことがわかる。図 8 下の緑色の破線で示している平面波のモデルとは一致していないが、これは、逆相成分が地震計の Self ノイズで埋もれてしまっているからだと考えられる。<sup>\*12</sup>

## 1.5 まとめ

本章では、同相成分と逆相成分の比である Common Differential Mode Ratio (CDMR) という量を定義して、X アームで脈動はどれだけ逆相成分を低減されているのか、評価した。その結果、最大で CDMR は 4 あり、逆相成分が同相成分よりも小さくなっていることが確認できた。これは、基線方向を平面波が伝搬するモデルで予想される値とよく一致している。

さらに、この評価をおよそ 30m の IMC の基線長についても行った。その結果、CDMR は最大で 10 あった。この値は平面波のモデルと比較すると、1 桁ほど小さい値になっているが、これは地震計の Self ノイズか地面振動のノイズレベルで SN が悪くなっているためだと考えられる。

今後は、いくつかの時期で CDMR をもとめ、基線長伸縮スペクトルの代表値をもとめる。

<sup>\*13</sup>

<sup>\*12</sup> Self ノイズのプロットは後日。個々の Self ノイズは一緒だとして、その ASD を  $\sqrt{2}$  倍すればいい。(時系列データが神岡のサーバから柏に移動して見れないので、もう一度グラフをつくるのが面倒。) あと、もしくはもとの無相関な地面振動のノイズレベルで埋もれているのかも。

<sup>\*13</sup> いまの解析コードだと、直近 1 周間のデータしか解析できない。なので、たとえばこの時期周辺の時系列データを解析しようと思ったら、柏のデータサーバにアクセスしないといけなくなるけど、対応しているデータの読み出しの方法が神岡と柏で違うので解析コードを改良しないといけない。これが結構面倒。

付録 A スペクトルの誤差

付録 B コヒーレンスの有意水準