地面振動

三代浩世希

2018 年 11 月 23 日

概要

目次

1 地面振動

1.1 P 波と S 波

等方弾性体中では変位 $\boldsymbol{u}$ は以下の波動方程式に従う。

$$\rho\ddot{\boldsymbol{u}} = (\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u}) - \mu\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{u}) \tag{1}$$

ここで ρ は媒質の密度、λ, μ はラメ定数である。

この波動方程式は縦波である P 波と横波である S 波について解くことができる。そのためにまず Helmholtz decomposition をつかって変位 $\boldsymbol{u}$ を発散成分 $\boldsymbol{u}_{\mathrm{div}}$ と回転成分 $\boldsymbol{u}_{\mathrm{rot}}$ で表す。つまり、

$$\boldsymbol{u}_{\mathrm{div}} = \nabla\phi \tag{2}$$

$$\boldsymbol{u}_{\mathrm{rot}} = \nabla\times\psi \tag{3}$$

となるスカラーポテンシャル ϕ とベクトルポテンシャル $\boldsymbol{\psi}$ が存在し、変位 $\boldsymbol{u}$ は

$$\boldsymbol{u} = \nabla\phi + \nabla\times\psi \tag{4}$$

と表すことができる。式 (1) に式 (4) を代入し、かつベクトル解析の公式、$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) - \nabla^2\boldsymbol{A}$ を使うと、

$$\ddot{\phi} = v_L^2\nabla^2\phi \tag{5}$$

$$\ddot{\psi} = v_T^2\nabla^2\psi \tag{6}$$

のように 2 つの波動方程式を得る。ここで v_L, v_T は、

$$v_L = \sqrt{\frac{\lambda+\mu}{\rho}},\ v_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \tag{7}$$

である。

v_L, v_T らはそれぞれ縦波と横波の位相速度を表しているが、これを示す。まずスカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルは式 (5)、式 (6) の波動方程式に従うので、これらの一般解は

$$\phi = \phi_0(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}) \tag{8}$$

$$\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi_0}(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}) \tag{9}$$

で表すことができる。ここで ω, $\boldsymbol{k}$ は各周波数と波数ベクトルである。発散成分である $\boldsymbol{u}_{\mathrm{div}}$ は式 (2) に式 (8) を代入して、

$$\boldsymbol{u}_{\mathrm{div}} = \nabla\phi_0(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{k}\phi \tag{10}$$

となるので、変位の向きは波数ベクトルと平行である。つまり縦波でありP波に相当する。一方で回転成分である $\boldsymbol{u}_{\mathrm{rot}}$ は式 (3) に式 (9) を代入して、

$$\boldsymbol{u}_{\mathrm{rot}} = \nabla \times \boldsymbol{\psi_0}(\omega t - \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{\psi} \tag{11}$$

となるので、変位の向きは波数ベクトルと直行している。つまり横波でありS波に相当する。したがって v_L, v_T はそれぞれ縦波と横波の位相速度を示していることがわかった。また λ と μ は正の定数なので、

$$v_L > v_T \tag{12}$$

となって、縦波のほうが横波よりも速い。