

X アームの基線長伸縮 Ver1.02

三代浩世希

2018 年 12 月 25 日

概要

Ver1.01 の誤植を修正。地震計のノイズ評価について追記。

目次

1	X アームの基線長伸縮	1
1.1	同相成分と逆相成分	1
1.2	Common Differential Mode Rate (CDMR)	2
1.2.1	平面波モデル (CDMR _{seis})	3
1.2.2	平面波モデル (CDMR _{gif})	3
1.3	地震計のノイズ	4
1.3.1	コヒーレンスをつかったノイズ評価	4
1.3.2	測定 A:SelfNoise の評価	5
1.3.3	測定 B:ローカルな環境ノイズの評価	6
1.4	X アームの CDMR	6
1.4.1	地震計のスペクトル	6
1.4.2	地震計のコヒーレンス	7
1.4.3	CDMR _{seis}	8
1.4.4	CDMR _{gif}	9
1.5	IMC の CDMR	9
1.5.1	地震計のスペクトル	10
1.5.2	地震計のコヒーレンス	11
1.5.3	CDMR _{seis}	11
1.6	まとめ	12
付録 A	スペクトルの誤差	12
付録 B	コヒーレンスの有意水準	12

1 X アームの基線長伸縮

1.1 同相成分と逆相成分

図 1 で示すような, X アーム上の 2 点, x_1, x_2 を考える。それぞれの場所での変位は変位場 $u(x, t)$ をもちいて, $u(x_1, t), u(x_2, t)$ となる。ここで, これら 2 つの変位の同相成分 u_{com} と逆相成分 u_{diff} を

$$u_{\text{diff}} \equiv \frac{u_1 - u_2}{\sqrt{2}}, \quad (1)$$

$$u_{\text{com}} \equiv \frac{u_1 + u_2}{\sqrt{2}} \quad (2)$$

と定義する。パワーが保存するように、規格化定数は $\sqrt{2}$ にしている。同相成分は, 2 点の重心移動をあらわし, 逆相成分は 2 点の基線長伸縮を表す。

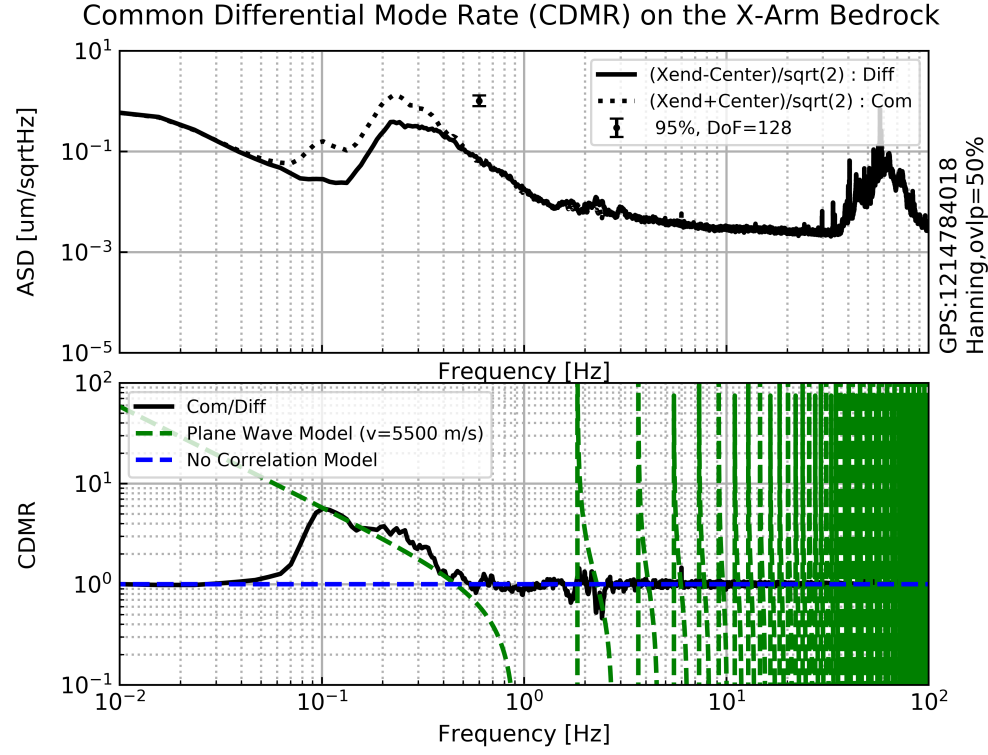


図 1 X アーム上の 2 点の変位。それぞれの位置を x_1, x_2 とすれば変位はそれぞれ $u(x_1, t), u(x_2, t)$ となる。

1.2 Common Differential Mode Rate (CDMR)

2 点の逆相成分である、基線長伸縮がどの程度低減されているかを表す指標として、2 つの信号の同相と逆相の振幅成分の比、Common Differential Mode Rate (CDMR) を

$$\text{CDMR} \equiv \sqrt{\frac{\text{同相成分のパワー}}{\text{逆相成分のパワー}}} = \sqrt{\frac{P_{\text{com}}(\omega)}{P_{\text{diff}}(\omega)}} \quad (3)$$

と定義する。 $P_{\text{com}}, P_{\text{diff}}$ は同相成分と逆相成分についてのパワースペクトル密度である。パワースペクトル密度は自己相関関数 $C(\tau)$ をフーリエ変換したものなので、まず自己相関関数 C_{diff} を求める。自己相関関数 C_{diff} は、各々の自己相関を $C_{ij} \equiv \langle x_i(t)x_j(t+\tau) \rangle$, ($i = 1, 2, j = 1, 2$) と定義すれば,

$$C_{\text{diff}}(\tau) = \frac{1}{2} \langle [x_1(t) - x_2(t)] [x_1(t+\tau) - x_2(t+\tau)] \rangle \quad (4)$$

$$= \frac{1}{2} (C_{11}(\tau) - C_{12}(\tau) - C_{21}(\tau) + C_{22}(\tau)), \quad (5)$$

となるので、これをフーリエ変換すれば逆相成分のパワースペクトル密度 $P_{\text{diff}}(\omega)$ は

$$P_{\text{diff}}(\omega) = \frac{1}{2} (P_1(\omega) + P_2(\omega) - X_{12}(\omega) - X_{12}^*(\omega)) \quad (6)$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{P_1 P_2} \left(\sqrt{\frac{P_1}{P_2}} + \sqrt{\frac{P_2}{P_1}} - 2\Re[\text{coh}] \right), \text{coh} \equiv \frac{X_{12}}{\sqrt{P_1 P_2}} \quad (7)$$

となる。 $P_1(\omega), P_2(\omega)$ はパワースペクトル密度、 $X_{12}(\omega)$ はクロススペクトル密度、coh はコヒーレンスである。

きっかけは道村さんからの 4 月 19 日のメール「KAGRA micro seism のコヒーレンス」に対する回答になる。質問の内容は、「脈動では、数 km の X アームはどれだけ同相成分を含んでいて、どれだけ逆相成分を低減できているか」というもの。経験的に、IMC のような数 10m スケールの基線長では、よく逆相成分が低減されていることが知られている。なので、基線長が長くなると同相成分と逆相成分の比がどう変わるのか。それを評価した。

さて、2つの信号 x_1, x_2 のパワーが同じ、つまり $P_1 = P_2 \equiv P$ の場合、式 (7) はさらに計算できて、結果として P_{diff} は

$$P_{\text{diff}}(\omega) = P(1 - \Re[\text{coh}]) \quad (8)$$

となる。同相成分も同様の計算をして、

$$P_{\text{com}}(\omega) = P(1 + \Re[\text{coh}]) \quad (9)$$

となるので、CDMR は定義式 (3) より、

$$\text{CDMR} = \sqrt{\frac{1 + \Re[\text{coh}]}{1 - \Re[\text{coh}]}} \quad (10)$$

と書き表すことができる。式 (10) が示すように、同相成分と逆相成分のパワー比は2つの信号のコヒーレンスであらわすことができる。

1.2.1 平面波モデル (CDMR_{seis})

図1を平面波が伝搬している場合の CDMR を求める。変位場 $u(x, t)$ は、角周波数 ω と波数 k を用いて、

$$u(x, t) = u_0 e^{i(\omega t - kx)} \quad (11)$$

と表すことができる。 u_0 は $t = 0, x = 0$ での変位である。図1において、 x_2 にある点がもう一つの点 x_1 にたいして、 $x_2 = x_1 + L$ 離れているとすると、これらの逆相成分 $u_{\text{diff}}(x, t)$ は

$$u_{\text{diff}}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{i(\omega t - kx_1)} - e^{i(\omega t - kx_1 + kL)} \right) \quad (12)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} u(x_1, t) (1 - e^{ikL}) \quad (13)$$

$$= u(x_1, t) \times \sqrt{2}(-i)e^{i\frac{kL}{2}} \sin\left(\frac{kL}{2}\right) \quad (14)$$

となる。同相成分 $u_{\text{com}}(x, t)$ も同様の計算をして、

$$u_{\text{com}}(x, t) = u(x_1, t) \times \sqrt{2}e^{i\frac{kL}{2}} \cos\left(\frac{kL}{2}\right) \quad (15)$$

となるので、平面波が通過しているときの CDMR は

$$\text{CDMR}_{\text{seis}} = \left| \frac{u(x_1, t) \times \sqrt{2}e^{i\frac{kL}{2}} \cos\left(\frac{kL}{2}\right)}{u(x_1, t) \times \sqrt{2}(-i)e^{i\frac{kL}{2}} \sin\left(\frac{kL}{2}\right)} \right| = \frac{1}{\tan\left(\frac{\omega L}{2c}\right)} \quad (16)$$

で表すことができる。ここで、平面波の分散関係 $c = \omega/k$ を用いた。

1.2.2 平面波モデル (CDMR_{gif})

GIF と地震計を比較するために、式3の逆相成分を GIF のひずみ計で置き換えた CDMR_{gif} を計算する。GIF のひずみ計は1500m離れた2点間のひずみ ε_{gif} を測っている。そのため、3km離れた2点の地面振動の逆相成分 $x_{\text{diff}_{\text{gif}}}$ は、

$$x_{\text{diff}_{\text{gif}}} = \varepsilon_{\text{gif}} \times \frac{3000}{\sqrt{2}} \quad (17)$$

と換算することができる。^{*5}

平面波が伝搬しているとき、速度 $v(x, t)$ は $v(x, t) \equiv \frac{\partial u}{\partial t} = i\omega u(x, t)$ であり、ひずみ $\epsilon(x, t)$ は $\epsilon(x, t) \equiv \frac{\partial u}{\partial x} = -iku(x, t)$ となるので、両者の振幅比は

$$\left| \frac{A_v}{A_\epsilon} \right| = c \quad (18)$$

^{*5} 数 km スケールの基線長のひずみ応答は数 Hz まで平坦なので、脈動以下の周波数帯域では、単純にスケール倍すればいい。

となって、位相速度 c で表すことができる。

さて、GIF で逆相成分を置き換えた CDMR_{gif} は、式 9 と式 17 をもちいて、

$$\text{CDMR}_{\text{gif}} = \frac{u(x_1, t) \times \sqrt{2} e^{i \frac{kL}{2}} \cos(\frac{kL}{2})}{A_\epsilon L / \sqrt{2}} \quad (19)$$

となるが、コヒーレンスは $\text{coh} = e^{ikL}$ なので、計算すると

$$\text{CDMR}_{\text{gif}} = \sqrt{2(1 + \cos(kL))} \frac{A_v \omega}{A_\epsilon L} = \frac{2c}{\omega L} \cos(\frac{\omega L}{2c}) \quad (20)$$

となる。

1.3 地震計のノイズ

1.3.1 コヒーレンスをつかったノイズ評価

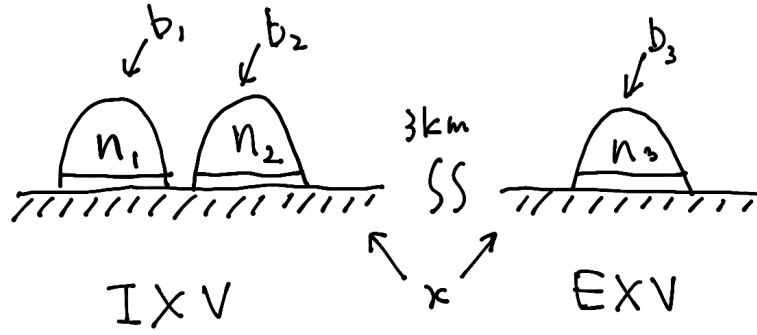


図2 ノイズ測定のための地震計の配置。IXV には 2 台の地震計を隣接して設置し、EXV には 1 台の地震計を設置する。 n_1, n_2, n_3 は地震計の SelfNoise、 b_1, b_2, b_3 はローカルな環境ノイズ。 x は地面振動。IXV にある地震計 2 つは隣接しているので $b_1 = b_2 = b$ とする。また今回の足踏では同じ Trillium120QA を使っているので、 $n_1 = n_2 = n_3 = n$ とした。

地震計のノイズは低周波になればなるほど増大するため、とくに静かなサイトでは、ノイズが地面振動を上回ってしまい計測を制限する。

信号とノイズを区別する方法としてコヒーレンスを用いたものがある [1]。この方法はランダムノイズとコモンモードノイズを区別する場合に有効であり、地震計に限らず他のセンサーに適用することができる [2]。たとえば 2 台の同一の地震計を隣接して置けば、地面振動はコモンモードノイズとして現れ、地震計内部から生じる SelfNoise はインコヒーレントなノイズなので、両者を区別することができる。しかし隣接して設置するとローカルな環境ノイズもコモンモードノイズとして現れるため、地面振動と区別することができない。そこでローカルな環境ノイズがインコヒーレントになるよう、半れた場所に地震計を置くと、環境ノイズと地面振動は区別できる。このようにすれば、地面振動と環境ノイズ、SelfNoise を区別し評価することができる。

Trillium120QA のノイズ評価のための実験セットアップを図 2 に示す。Y エンドの地震計をセンターに運び、センターに 2 台、X エンドに 1 台用意する。このとき、低周波地面振動はセンターと X エンドでコヒーレントな信号であり、 x とする。さらに SelfNoise を n_i 、ローカルな環境の外乱を b_i とする。添字の i は (IXV, EYV, EXV) に対応する。センターの 2 台は隣接しているので環境ノイズはコモンモードノイズとなり $b_1 = b_2 \equiv b$ とする。さらに同一の測定装置で計測するので $n_1 = n_2 \equiv n$ とする。一方で X エンドは ADC ノイズで高周波が制限されないよう 30db のプリアンプを通してあるので、SelfNoise の入力換算ノイズは IXV と EYV と異なり、 $n_3 \neq n_1, n_3 \neq n_2$ である。

上述したように、地面振動と環境ノイズ、SelfNoise を互いに区別するためには少なくとも 2 つの測定を行わなければならない。それらを測定 A、測定 B として後述する。

1.3.2 測定 A: SelfNoise の評価

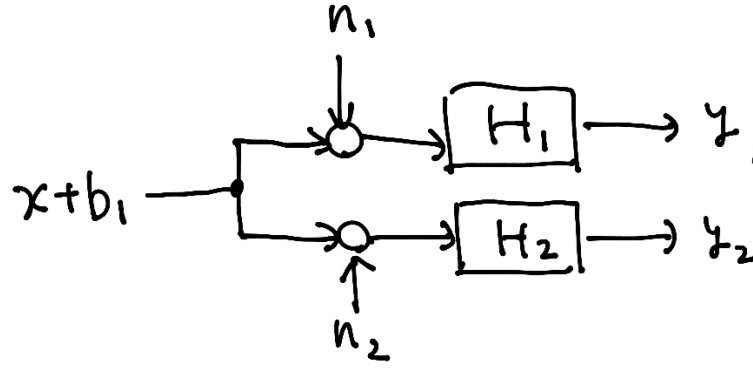


図 3

測定 A では隣接した地震計 2 つのコヒーレンスを求める。ブロック図を図 3 に示す。このときの地震計の出力信号はそれぞれ、

$$Y_1(\omega) = |H_1(i\omega)|^2 [X(\omega) + B(\omega) + N(\omega)] \quad (21)$$

$$Y_2(\omega) = |H_2(i\omega)|^2 [X(\omega) + B(\omega) + N(\omega)] \quad (22)$$

となる。 $Y(\omega)$, $X(\omega)$, $B(\omega)$, $N(\omega)$ はそれぞれ $y(t)$, $x(t)$, $b(t)$, $n(t)$ のパワースペクトル密度関数であり、 $H_1(i\omega)$, $H_2(i\omega)$ はそれぞれ地震計 1,2 の伝達関数である。SelfNoise は無相関なので、地震計 1,2 のクロススペクトル密度関数 Y_{12} は、

$$Y_{12}(i\omega) = H_1(i\omega)H_2^*(i\omega) [X(\omega) + B(\omega)] \quad (23)$$

のように表すことができ、2 乗コヒーレンス γ_{12}^2 は、

$$\gamma_{12}^2 = \frac{|Y_{12}(i\omega)|^2}{Y_1(\omega)Y_2(\omega)} \quad (24)$$

$$= \frac{|H_1(i\omega)H_2^*(i\omega) [X(\omega) + B(\omega)]|^2}{|H_1(i\omega)|^2 |H_2(i\omega)|^2 [X(\omega) + B(\omega) + N(\omega)]^2} \quad (25)$$

$$= \left(\frac{X(\omega) + B(\omega)}{X(\omega) + B(\omega) + N(\omega)} \right)^2 \quad (26)$$

$$= \left(\frac{\text{SNR}}{1 + \text{SNR}} \right)^2 \quad (27)$$

となる。ここで SNR は信号雑音比であり、 $\text{SNR} \equiv \frac{X(\omega) + B(\omega)}{N(\omega)}$ と定義した。この SNR はコヒーレンスがある信号とコヒーレンスがない信号の比になっている。式 (27) より SNR は 2 乗コヒーレンス γ_{12}^2 で求めることができる。

式 (21) を用いると、コヒーレンスがない SelfNoise 成分とコヒーレンスがある信号成分が以下のように求まる。

$$N(\omega) = \frac{Y_1(\omega)}{|H_1(i\omega)|} \frac{1}{1 + \text{SNR}} \quad (28)$$

$$X(\omega) + B(\omega) = \frac{Y_1(\omega)}{|H_1(i\omega)|} \frac{1}{(1 + \text{SNR})\text{SNR}} \quad (29)$$

測定 A ではローカルな環境ノイズ $B(\omega)$ がコヒーレンスを持っているためグローバルな地面振動 $X(\omega)$ と区別ができない。そのため環境ノイズがコヒーレンスを持たないよう十分離れた位置にある地震計とコヒーレンスを取り、地面振動と環境ノイズを分離する必要がある。これを測定 B とする。

1.3.3 測定 B:ローカルな環境ノイズの評価

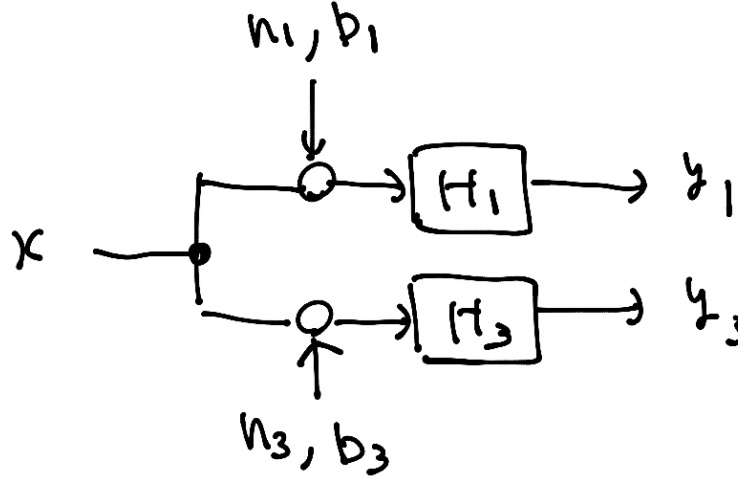


図 4

測定 B では IXV においた地震計 1 と EXV においた地震計 3 のコヒーレンスを求める。図 4 にブロック図を示す。測定 A とは異なり、ローカルな環境ノイズは相関を持たないため地震計 1 と地震計 3 のクロススペクトル密度関数 $Y_{12}(i\omega)$ は

$$Y_{13}(i\omega) = H_1(i\omega)H_3^*(i\omega)[X(\omega)] \quad (30)$$

$$(31)$$

となる。したがって 2 乗コヒーレンス γ_{13}^2 は、

$$\gamma_{13}^2 = \frac{|Y_{13}(i\omega)|^2}{Y_1(\omega)Y_3(\omega)} \quad (32)$$

$$= \frac{|H_1(i\omega)H_3^*(i\omega)|^2 X(\omega)^2}{Y_1(\omega)Y_3(\omega)} \quad (33)$$

となる。したがって、 $X(\omega)$ は

$$X(\omega) = \frac{\gamma_{13}}{|H_1(i\omega)H_3^*(i\omega)|} \sqrt{Y_1(\omega)Y_3(\omega)} \quad (34)$$

となる。式 (34) と式 (29) より、 $B(\omega)$ が求まる。

以上のようにして、地面振動 $X(\omega)$ と SelfNoise $N(\omega)$ を区別することができる。

1.4 X アームの CDMR

X アームの CDMR を求める。エンドとセンターの 2 階においた地震計の X アーム方向の信号をつかった。

1.4.1 地震計のスペクトル

まず図 5 に、X エンドとセンターに置いた地震計の出力を変位にした Amplitude Spectrum Density (ASD) を示す。0.1-0.3Hz の帯域では大きさが一致している。それ以上の周波数では、センターエリアに置いた地震計は ADC ノイズで埋もれているため、両者は一致しない。^{*6} また低周波では、傾き成分のカップリングにより両者は一致していない。^{*7}

^{*6} プリアンプを入れる予定。KAGRA でよういされているホワイトニングフィルターが横澤さんのおかげで使えるのでそれをつかう。X エンドはそれをつかっている。

^{*7} 積極的に、傾きのカップリングだとは言えない気がする。

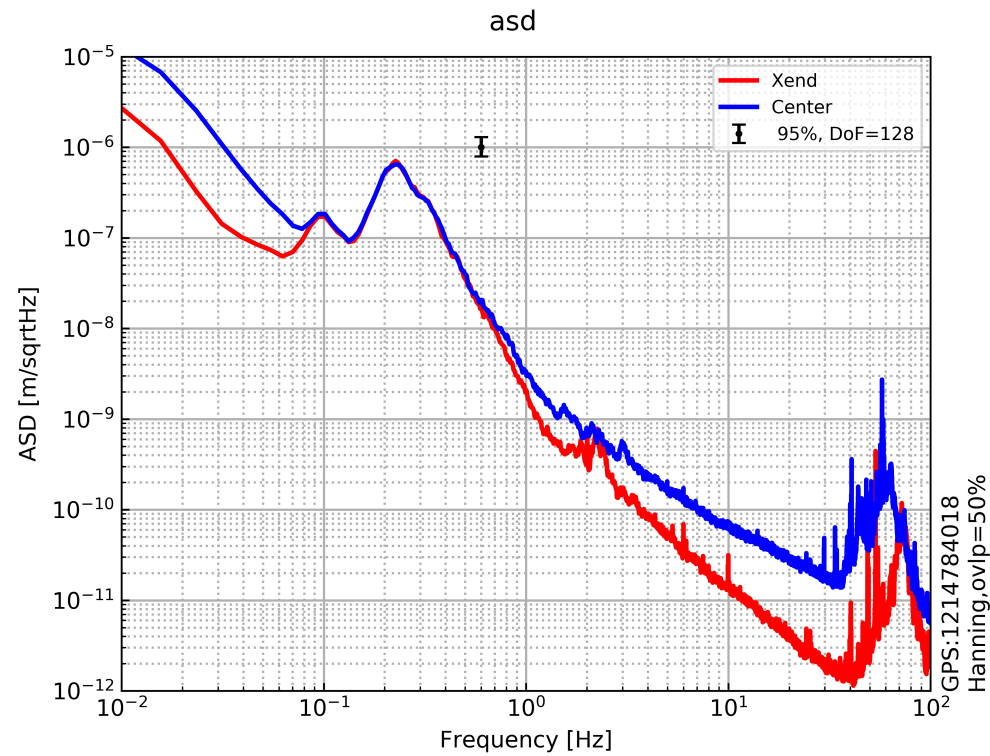


図5 X エンドとセンターエリアにおいた地震計の X アーム方向の ASD。速度出力の地震計の信号を $2\pi f$ で割って変位に換算している。エラーバーは 95 % の信頼区間。時系列データは 2018/07/05 00:00:00 (JST) から 2^{13} 秒 (2.3 時間) 分をつかった。平均回数は 64 回で、窓関数は Hanning 窓をつかった。

1.4.2 地震計のコヒーレンス

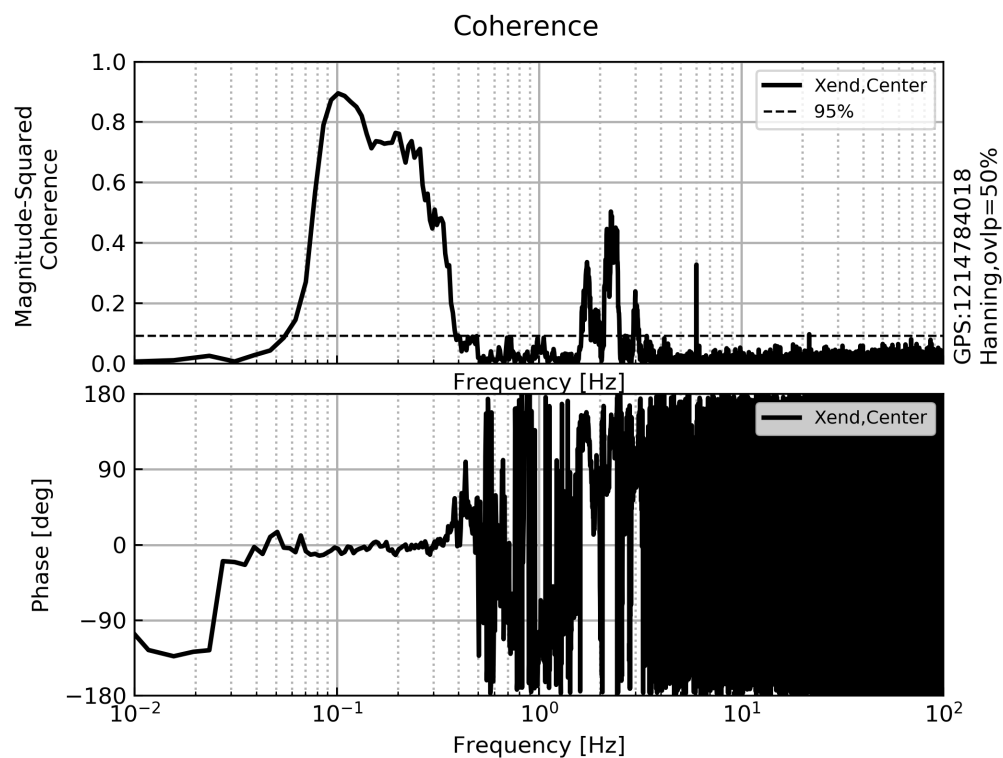


図6 X エンドとセンターエリアにおいた地震計の X アーム方向同士のコヒーレンス。破線より上にあれば、5 % の有意水準でコヒーレンスがないという帰無仮説を棄却でき、コヒーレンスがあると言える。

図6 に、X エンドとセンターの地震計同士のコヒーレンスを示す。コヒーレンスは、0.1-0.3Hz と 2Hz 周辺で有意に存在する。前者の帯域では位相差は 0 度になっており同相成分が

多いことが期待できる。これは脈動由来だと考えられるが、一方で後者の由来はまだわからない。^{*8}低音懸架の 1.6Hz の基線長方向の共振モードと被っているので、RMS を大きくしてしまうので注意が必要。

1.4.3 CDMR_{seis}

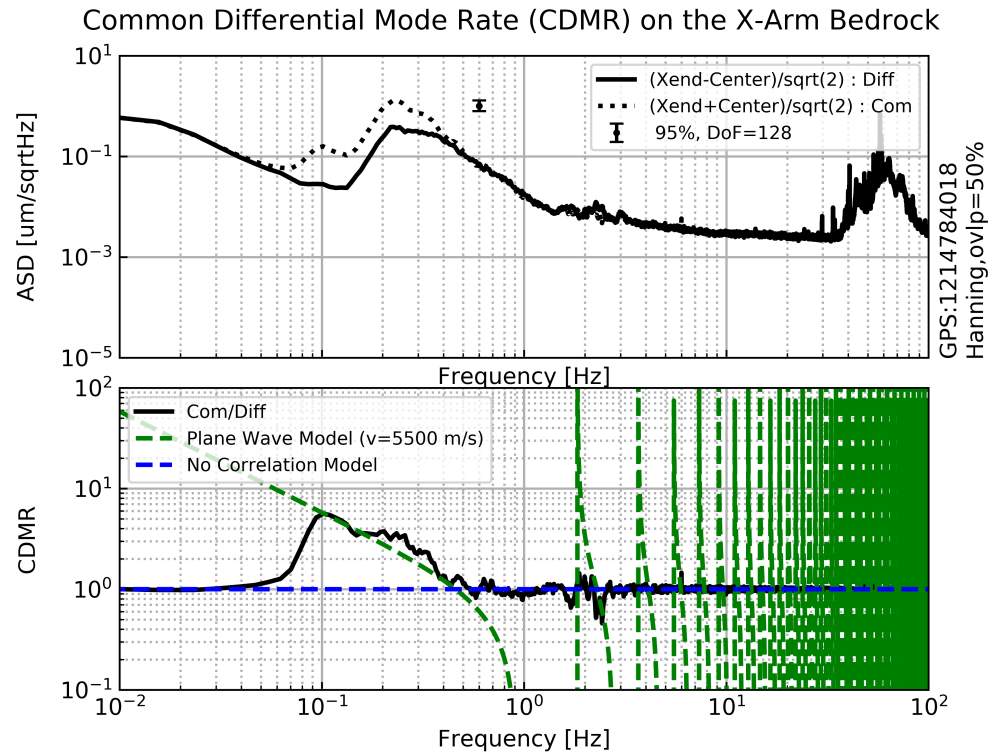


図 7 上図:3km 離れた二点の地面振動の同相成分と逆相成分の ASD。0.1-0.2Hz 付近にピークをもつ脈動では同相成分のほうが逆相成分よりも大きい。下図:同相成分と逆相成分の比 (CDMR)。緑色の破線は、位相速度 5500 m/s 平面波が X アームを伝搬した場合の CDMR を示す。青色の破線は、相関がない場合の CDMR を示す。脈動はコヒーレンスがあり、波長は KAGRA の基線長よりも長いので、同相雑音が低減されている。

式 16 に P 波の位相速度 5500 m/s を代入した^{*9}ものを図 7 の下図に緑色の破線で示す。この平面波のモデルと、実測データからもとめた CDMR を比較すると、コヒーレンスがある帯域で一致することがわかる。その他の帯域では、ADC ノイズや傾斜ノイズによってコヒーレンスがなくなっているため、式 10 より、CDMR は 1 となる。(図 7 下図の青色破線)。^{*10}

^{*8} いろんな時系列で同じ解析をしていないので、なんともいえないけれど、このピークはいつもは現れない。雨が多く降ったときにみえる。

^{*9} 本来はレイリー波の速度が適している？

^{*10} 思いの外、平面波のモデルと実測したものが一致している。他の期間でも同じ解析してみて、どうなるか気になる。

1.4.4 CDMR_{gif}

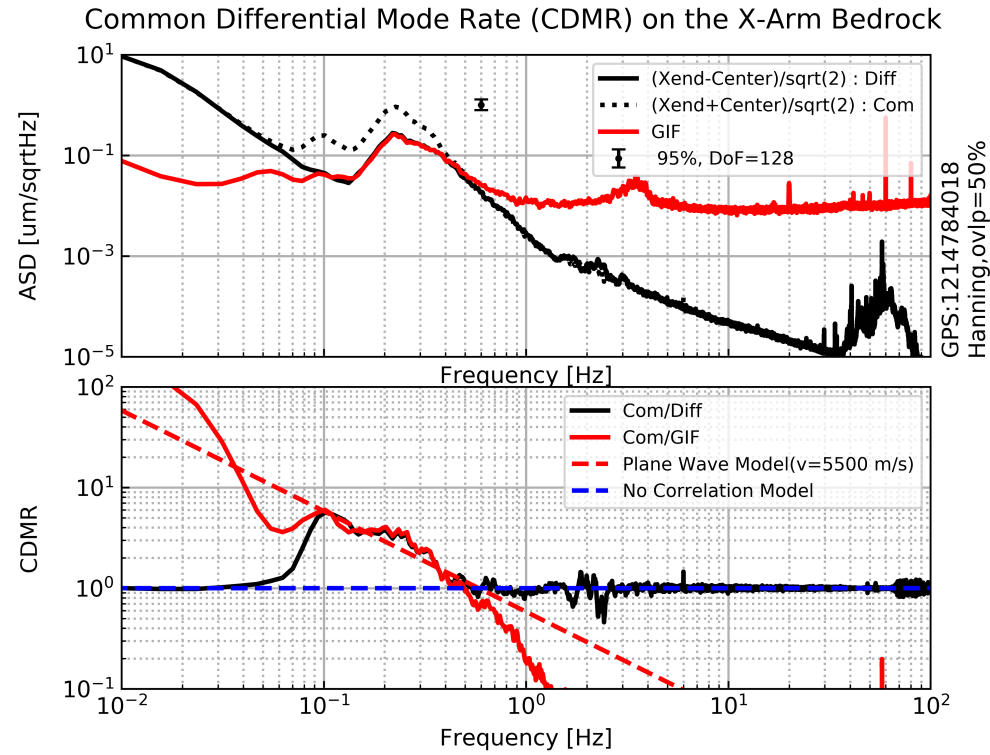


図8 図7に GIF で推定した逆相成分を加えて比較。上図:変位の ASD。下図:逆相成分を GIF に置き換えた CDMR_{gif} を赤線でプロット。

図6に、3000mの2点における逆相成分を GIF のひずみ信号から換算したものを赤線でプロットしたものを、図7に示す。図7上図の ASD をみると、GIF と地震計は脈動の帯域ではよく一致している。高周波側は、GIF は周波数ノイズで埋もれている。低周波側は GIF のほうが小さいが、これは地震計が傾きのカップリング成分で埋もれているためと考えられる。原理的には GIF は、傾き成分から基線長伸縮へのカップリングはないため、地震計とくらべて、脈動以下では GIF は低ノイズな基線長伸縮モニターとなることがわかる。^{*11}

式(20)の位相速度に花崗岩の弾性波速度である 5500m/s を代入して図7の下図に赤色の破線を示す。地震計と同様に脈動の帯域では平面波のモデルと一致する。

1.5 IMC の CDMR

IMC の CDMR を求める。MCi と MCerrre に TrilliumCompact を置き、基線長方向の信号をつかって CDMR をもとめた。

^{*11} これが、自分のオリジナリティを支える部分になると思う。

1.5.1 地震計のスペクトル

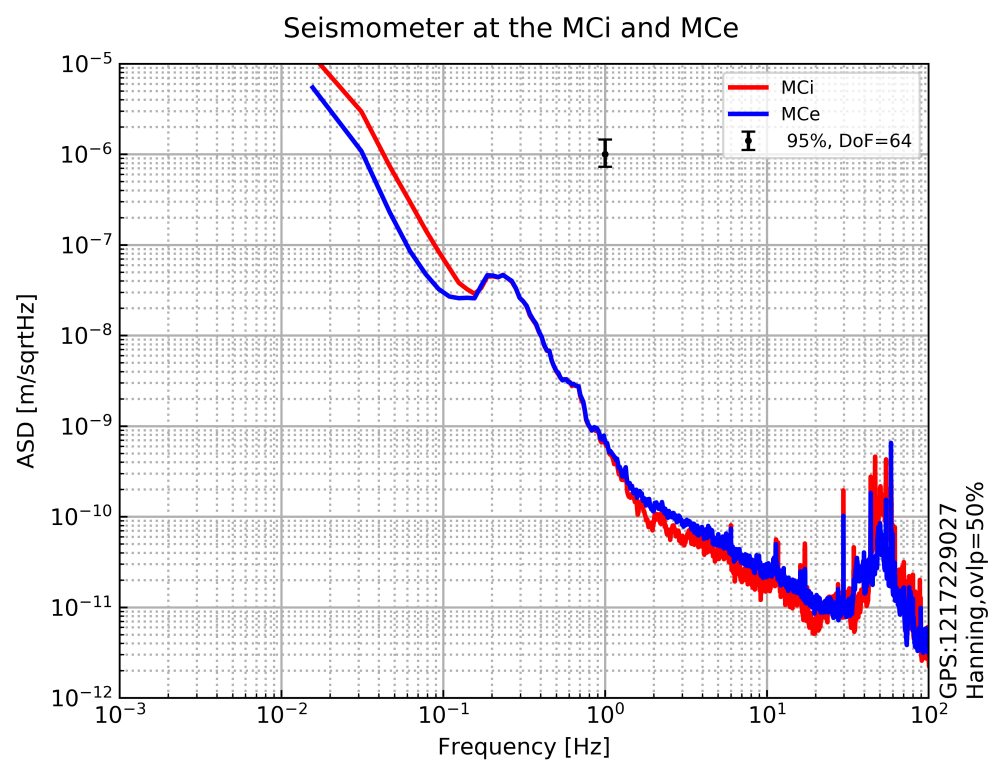


図9 MCI と MCerrre の ASD。時系列データは 2018/08/02 07:10:09 (JST) から 2^{13} 秒 (2.3 時間) 分をつかった。平均回数は 64 回で、窓関数は Hanning 窓をつかった。

図9に MCI と MCerrre においた地震計の ASD を示す。エラーバーは 95 %の信頼区間を示す。0.2Hz から 1Hz で 2 点は同じ地面振動レベルを示している。1-10Hz の帯域では、それぞれ ADC ノイズに埋もれている。MCI の地震計は 33 倍のアンプを入れているので ADC ノイズの換算雑音は小さい。

1.5.2 地震計のコヒーレンス

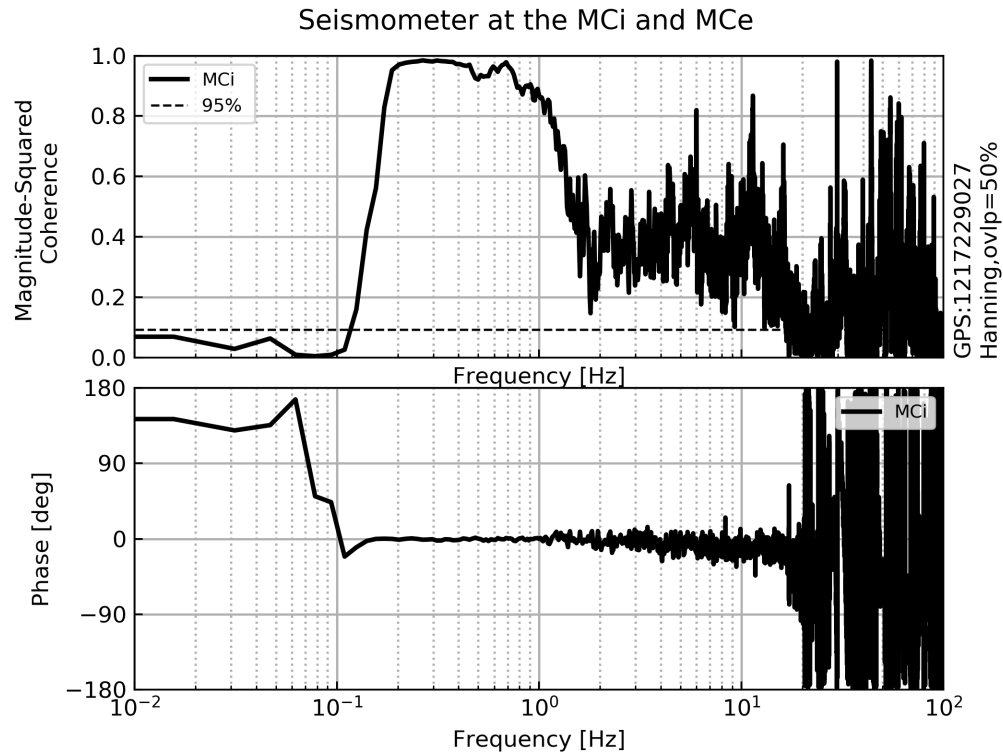


図 10 MCI と MCerre のコヒーレンス。

図 10 に MCI と MCerre のコヒーレンスを示す。0.2Hz から 10Hz まで有意にコヒーレンスをもっている。とくに 0.2 – 1Hz の帯域では非常にコヒーレンスが高い。また位相差が 0 となっているため、2 点は同相で動いていることがわかる。

1.5.3 $CDMR_{seis}$

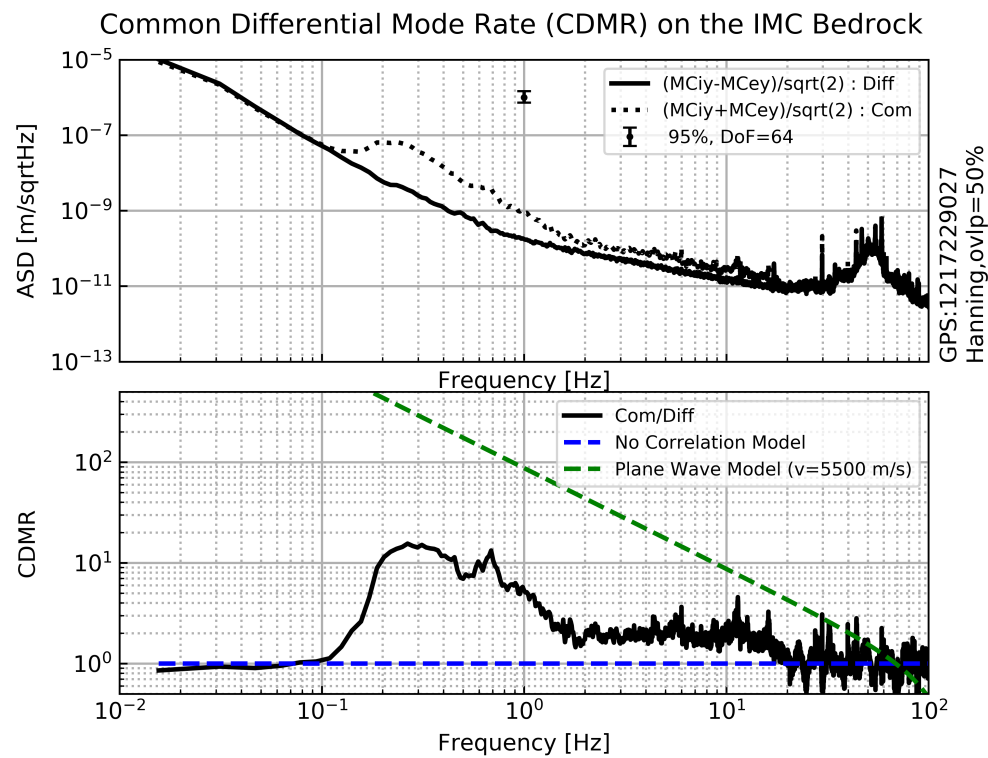


図 11 aa

図 11 に CDMR を示す。図 10 で、位相差 0 度でコヒーレンスのあった帯域では、逆相成分は同相成分よりも小さいことがわかる。図 11 下の緑色の破線で示している平面波のモデルとは一致していないが、これは、逆相成分が地震計の Self ノイズで埋もれてしまっているからだと考えられる。^{*12}

1.6 まとめ

本章では、同相成分と逆相成分の比である Common Differential Mode Ratio (CDMR) という量を定義して、X アームで脈動はどれだけ逆相成分を低減されているのか、評価した。その結果、最大で CDMR は 4 あり、逆相成分が同相成分よりも小さくなっていることが確認できた。これは、基線方向を平面波が伝搬するモデルで予想される値とよく一致している。

さらに、この評価をおよそ 30m の IMC の基線長についても行った。その結果、CDMR は最大で 10 あった。この値は平面波のモデルと比較すると、1 桁ほど小さい値になっているが、これは地震計の Self ノイズか地面振動のノイズレベルで SN が悪くなっているためだと考えられる。

今後は、いくつかの時期で CDMR をもとめ、基線長伸縮スペクトルの代表値をもとめる。^{*13}

付録 A スペクトルの誤差

付録 B コヒーレンスの有意水準

参考文献

- [1] Jon Peterson, Charles R Hutt, and L Gary Holcomb. Test and calibration of the seismic research observatory. Technical report, Geological Survey (US), 1980.
- [2] Aaron Barzilai, Tom VanZandt, and Tom Kenny. Technique for measurement of the noise of a sensor in the presence of large background signals. *Review of scientific instruments*, Vol. 69, No. 7, pp. 2767–2772, 1998.

^{*12} Self ノイズのプロットは後日。個々の Self ノイズは一緒だとして、その ASD を $\sqrt{2}$ 倍すればいい。(時系列データが神岡のサーバから柏に移動して見れないので、もう一度グラフをつくるのが面倒。) あと、もしくはもとの無相関な地面振動のノイズレベルで埋もれているのかも。

^{*13} いまの解析コードだと、直近 1 周間のデータしか解析できない。なので、たとえばこの時期周辺の時系列データを解析しようと思ったら、柏のデータサーバにアクセスしないといけなくなるけど、対応しているデータの読み出しの方法が神岡と柏で違うので解析コードを改良しないといけない。これが結構面倒。