

No Title

三代浩世希

2018 年 7 月 20 日

目次

0.1	Michelson 干渉計	3
0.2	差動増幅システム	6
0.3	同相成分と逆相成分	7
0.4	山の歪み	10
0.5	X アームの安定化	11

0.1 Michelson 干渉計

Michelson 干渉計は、2 本の腕を往復した光の位相差を干渉信号として出力する装置である。

0.1.1 重力波の応答

+ モードの重力波が Michelson 干渉計平面に垂直な Z 軸方向から入射，つまり歪みテンソル $h_{\mu\nu}$ が

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+h(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-h(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

となって時空を歪ませる場合を考える。

Michelson 干渉計は 2 本の腕の位相差を測る装置なので、それぞれのアームを往復して生じる位相遅れ、 ϕ_x と ϕ_y をもとめる。さて、光は $ds^2 = h_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = 0$ の世界線に沿うので、例として X アームの場合は

$$dx = \frac{c}{\sqrt{1+h(t)}} dt \quad (2)$$

という条件をみたしながらレーザー光は X アームを走る。式 (2) の両辺を積分すると

$$2l_x = \int dx = \int_{t-\tau_x}^t \frac{c}{\sqrt{1+h(t')}} dt' \simeq \int_{t-\tau_x}^t c \left(1 - \frac{1}{2}h(t')\right) dt' \quad (3)$$

となる。 τ_x は往復にかかった時間である。式 (3) を τ_x について解くと、 τ_x は

$$\tau_x = \frac{2l_x}{c} - \frac{1}{2} \int_{t-\tau_x}^t h(t') dt' \simeq \frac{2l_x}{c} - \frac{1}{2} \int_{t-l_x/c}^t h(t') dt' \quad (4)$$

と表すことができる。ここで、 $h(t) \ll 1$ なので $\tau_x \sim 2l_x/c$ という近似をした。したがって、往復したあとのレーザー光の位相遅れは、

$$\phi_x = \omega_0 \tau = \frac{2\omega_0 l_x}{c} - \frac{\omega_0}{2} \int_{t-l_x/c}^t h(t') dt' \quad (5)$$

となる。一方で y アームを往復して遅れる位相は、 $h(t)$ の符号に注意して、同様の計算をすれば

$$\phi_y = \frac{2\omega_0 l_y}{c} - \frac{\omega_0}{2} \int_{t-l_y/c}^t h(t') dt' \quad (6)$$

となる。

両腕の位相差 $\phi_x - \phi_y$ は、 $l_x \sim l_y = l$ とみなせば、

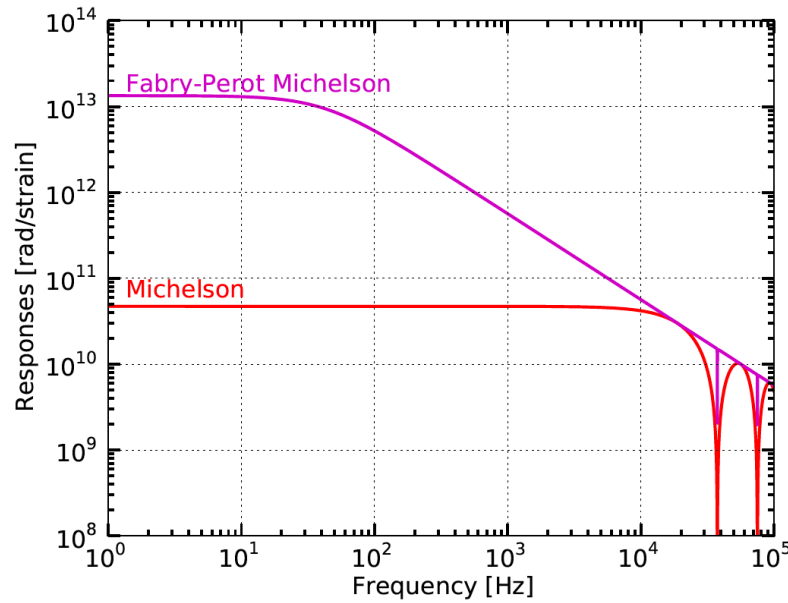
$$\phi_x - \phi_y = \frac{2\omega_0(l_x - l_y)}{c} + \Delta\phi_g \quad (7)$$

$$\Delta\phi_g \equiv \omega_0 \int_{t-l/c}^t h(t') dt' \quad (8)$$

となる。式 (8) の第 1 項はアームの非対称性による DC 成分、第二項は重力波による AC 分である。

最後に、重力波が干渉計を通ったときに生じる位相差への伝達関数は、式 (8) をラプラス変換して、以下の通りになる。

$$H_{MI}(\omega) \equiv \frac{\Delta\phi_g(\omega)}{h(\omega)} = \frac{2\omega_0}{\omega_g} \sin\left(\frac{\omega_g l}{c}\right) e^{-i\frac{\omega_g l}{c}} \quad (9)$$



式 (9) を ω_g の関数としてプロットしたものを図 0.1.1 に示す。まず DC では $\frac{\omega_g l}{c} \ll 1$ の条件をみたすので、DC ゲインは

$$|H_{MI(DC)}| \sim \frac{2\omega_0 l}{c} \quad (10)$$

となる。つまり基線長が長くなればなるほど重力波への感度は向上する。しかし高周波になると、

$$|H_{MI(AC)}| \sim 2\frac{\omega_0}{\omega_g} \left| \sin\left(\frac{\omega_g l}{c}\right) \right| \quad (11)$$

となって、1 次で感度が悪くなる。これは Michelson 干渉計で測る位相は重力波を時間積分しているためである。また

$$\sin\left(\frac{\omega_g l}{c}\right) = 0 \Leftrightarrow \omega_g = \pi \frac{c}{l} n, \quad (n \text{ は整数}) \quad (12)$$

$$\Leftrightarrow \lambda_g = \frac{l}{2} n, \quad (\lambda_g \equiv 2\pi c / \omega_g) \quad (13)$$

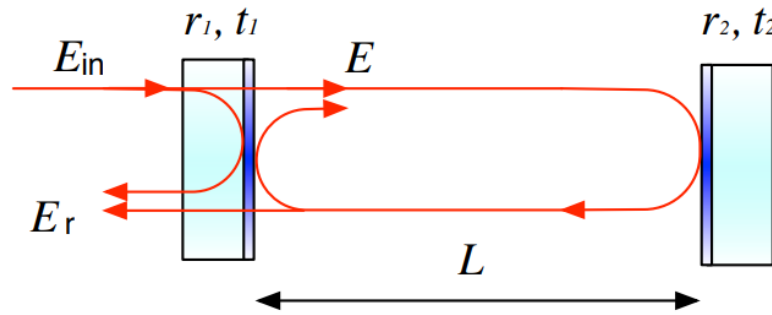
という条件では、ゲインが 0 になってしまい感度を持たないことがわかる。これは重力波の波長 λ_g が基線長の半整数倍のとき、BS とエンドミラーは節になって動いていないように見えるためである。カットオフ周波数 f は、 $\sin(\frac{\omega_g l}{c}) = 1$ とすれば、

$$2 \frac{\omega_0}{\omega_g} = 2 \frac{\omega_0 l}{c} \sin(\frac{\omega_g l}{c}) = 2 \frac{\omega_0 l}{c} \quad (14)$$

$$\rightarrow f_g = \frac{c}{2\pi l} \quad (15)$$

となり、基線長が長くなればなるほどカットオフ周波数が小さくなり、帯域が狭くなることがわかる。したがって観測帯域を 1 kHz まで取るには、50 km まで伸ばす必要がある。このような長基線は現実的ではないので、FabryPerot 共振器をつかって実行的な腕の長さを伸ばした、Michelson 干渉計がつかわれている。

0.1.2 腕を Fabry-Perot 共振器にしたときの応答



図より、共振器内部の電場 $E(t)$ と反射光の電場 $E_r(t)$ は以下のように関係している。

$$E(t) = t_1 E_{in} + r_1 r_2 E(t - 2T) e^{-i\Delta\phi(t)}, \quad (16)$$

$$E_r(t) = -r_1 E_{in} + r_2 t_1 E(t - 2T) e^{-i\Delta\phi(t)}, \quad (17)$$

$$\Delta\phi(t) = \frac{\omega_0}{2} \int_{t-2L/c}^t h(t') dt' \quad (18)$$

ここで $\Delta\phi(t)$ は共振器を往復したときに生じる位相差であり、式 (5) と同様にして計算した。

さて共振器内の電場 $E(t)$ のゆらぎを考えてみる。

$$E(t) = \bar{E} + \delta E(t) \quad (19)$$

のように表し、 $\Delta\phi(t)$ が十分に小さいとすれば、式 (17) は

$$\square \quad (20)$$

Fabry-Perot 共振器を大きな一枚の鏡だとみなしてみる。反射光の位相遅れ $\Delta\phi_r(\omega)$ は、

$$\Delta\phi_r(\omega) \equiv \frac{\delta E_r(\omega)}{\bar{E}_r} = \quad (21)$$

となる。

この Fabry-Perot 共振器を腕にもった Michelson 干渉計の、重力波の応答は

$$H_{FPMI}(\omega) \equiv \frac{2\Delta\phi_r(\omega)}{h(\omega)} = \frac{t_1^2 r_2}{(t_1^2 + r_1^2) r_2 - r_1} \frac{H_{MI}(\omega)}{1 - r_1 r_2 \exp(-2i\omega L/c)} \quad (22)$$

である。

0.1.3 Fabry-Perot 共振器の応答

周波数への応答

入射光の周波数が揺らいだときに、共振器内部の周波数がどのようにゆらぐのかもとめる。まず入射光を

$$E_{in}(t) = Ae^{i\Psi(t)} \quad (23)$$

のように表す。 $\Psi(t)$ は入射光の周波数ゆらぎから生じる位相ゆらぎを表している。このゆらぎが十分に小さい場合..... 内部パワーのゆらぎ $\delta E(t)$ は

$$\delta E(s) = i \frac{t_1 A}{1 - r_1 r_2 e^{-2sT}} \Psi(s) \quad (24)$$

となる。共振器内部で生じる位相遅れ $\Delta\phi(s)$ は、

$$\Delta\phi_f(\omega) \equiv -i \frac{\delta E(\omega)}{E} = \frac{1 - r_1 r_2}{1 - r_1 r_2 e^{-2sT}} \Psi(s) \quad (25)$$

となる。さらに、周波数ゆらぎは位相ゆらぎを微分すればもとまるので、入射光の周波数ゆらぎを $\Delta\nu_{laser} \equiv -i(s/2\pi)\Psi$ と定義し、 $\Delta\nu \equiv -i(s/2\pi)\Delta\phi$ と定義すると、入射光の周波数ゆらぎから共振器内部で生じる周波数ゆらぎへの応答は

$$C(s) = \frac{\Delta\nu}{\Delta\nu_{laser}} = \frac{1 - r_1 r_2}{1 - r_1 r_2 e^{-2sT}} \quad (26)$$

となる。

0.2 差動増幅システム

差動増幅システムは、2つの信号の差 (逆相) を増幅して信号を取り出すシステムである。たとえば、Michelson 干渉計は2本の腕の変位差 Δx を $2\pi/\lambda$ 倍にして干渉信号として増幅するシステムであるし、PDH 法をつかった Fabry-Perot 共振器長の取得システムは、2つの共振器鏡間の距離差をフィネスで増幅していると言える。

このように差動増幅をつかうにはいくつかのメリットがある。

0.2.1 Common Mode Rejection Rate (CMRR)

元来、CMRR は差動増幅回路の逆相利得 (差動利得) を同相利得で割ったもの、つまり

$$\text{CMRR} \equiv \frac{\text{逆相利得}}{\text{同相利得}} \quad (27)$$

で定義される。差動増幅回路の入力2つに、同相と逆相の単位信号を入力したときの伝達関数比である。理想的な差動増幅回路では、差動成分のみを増幅したいので CMRR は無限大である。しかし実際には差成分は厳密には0にはならず、同相成分も増幅して CMRR は小さくなってしまふ。

0.3 同相成分と逆相成分

0.3.1 同相成分と逆相成分

2点での変位 x_1 と x_2 について考える。これら2つの同相成分 x_{com} と逆相成分 x_{diff} を

$$x_{\text{diff}} \equiv \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}}, \quad (28)$$

$$x_{\text{com}} \equiv \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}} \quad (29)$$

と定義する。パワーが保存するように、規格化定数は $\sqrt{2}$ にしている。

0.3.2 Common Differential Rate (CDR)

2つの信号の同相成分と逆相成分の比、Common Differential Rate (CDR) を

$$\text{CDR} \equiv \frac{\text{同相成分のパワー}}{\text{逆相成分のパワー}} = \frac{P_{\text{com}}(\omega)}{P_{\text{diff}}(\omega)} \quad (30)$$

と定義する。 $P_{\text{com}}, P_{\text{diff}}$ は同相成分と逆相成分についてのパワースペクトル密度である。パワースペクトル密度は自己相関関数 $C(\tau)$ をフーリエ変換したものなので、まず自己相関関数 C_{diff} を求める。自己相関関数 C_{diff} は、

$$C_{\text{diff}}(\tau) = \frac{1}{2} \langle [x_1(t) - x_2(t)] [x_1(t + \tau) - x_2(t + \tau)] \rangle \quad (31)$$

$$= \frac{1}{2} (C_{11}(\tau) - C_{12}(\tau) - C_{21}(\tau) + C_{22}(\tau)), \quad (32)$$

$$C_{ij} \equiv \langle x_i(t) x_j(t + \tau) \rangle \quad (33)$$

となるので、これをフーリエ変換すれば逆相成分のパワースペクトル密度 $P_{\text{diff}}(\omega)$ は

$$P_{\text{diff}}(\omega) = \frac{1}{2} (P_1(\omega) + P_2(\omega) - X_{12}(\omega) - X_{12}^*(\omega)) \quad (34)$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{P_1 P_2} \left(\sqrt{\frac{P_1}{P_2}} + \sqrt{\frac{P_2}{P_1}} - 2 \text{Re}[\text{coh}] \right), \text{coh} \equiv \frac{X_{12}}{\sqrt{P_1 P_2}} \quad (35)$$

となる。 $P_1(\omega), P_2(\omega)$ はパワースペクトル密度、 $X_{12}(\omega)$ はクロススペクトル密度、coh はコヒーレンスである。

さて、2つの信号 x_1, x_2 のパワーが同じ、つまり $P_1 = P_2 \equiv P$ の場合、式 (35) はさらに計算できて、結果として P_{diff} は

$$P_{\text{diff}}(\omega) = P (1 - \text{Re}[\text{coh}]), \quad (36)$$

となる。そして CDR は定義式 (30) より、

$$\text{CDR} = \frac{1 + \text{Re}[\text{coh}]}{1 - \text{Re}[\text{coh}]} \quad (37)$$

と書き表すことができる。式 (37) が示すように、同相成分と逆相成分のパワー比は2つの信号のコヒーレンスであらわすことができる。

X アームの CDR

X アームの CDR を求める。エンドとセンターの 2 階においた地震計の信号をつかった。

図 1 に、2 つの地震計を変位換算した ASD を示す。地震計同士は 0.2Hz 付近の脈動では大きさが一致している。それ以上の周波数では、センターエリアに置いた地震計は ADC ノイズで埋もれているため、両者は一致していない。^{*1}また低周波では、傾き成分のカップリングにより両者は一致していないこともわかる。^{*2}

図 0.3.2 に、2 つの地震計のコヒーレンスを示す。コヒーレンスは 0.2Hz 付近で有意な値をもち、位相が 0 度であるため、2 点と同相で動いていることを意味している。したがって、脈動の帯域では、同相成分のほうが逆相成分よりも大きいことを示唆する。

さて、図 0.3.2 に式 (28) で定義した同相成分と逆相成分の ASD を上図に、CDR を下図に示す。脈動では CDR では 1 以上になっており、同相成分が逆相成分よりも大きいことがわかる。

図 0.3.2 の赤線は GIF のひずみ信号を変位換算したものである。GIF のひずみ計は 1500m 離れた 2 点間のひずみ差 ε_{gif} を測っている。そのため、3km 離れた二点の地面振動の逆相成分 $x_{diff(3000)}$ は、

$$x_{diff(3000)} = \Delta\varepsilon_{gif} \times \frac{3000}{\sqrt{2}} \quad (38)$$

と換算した。^{*3}

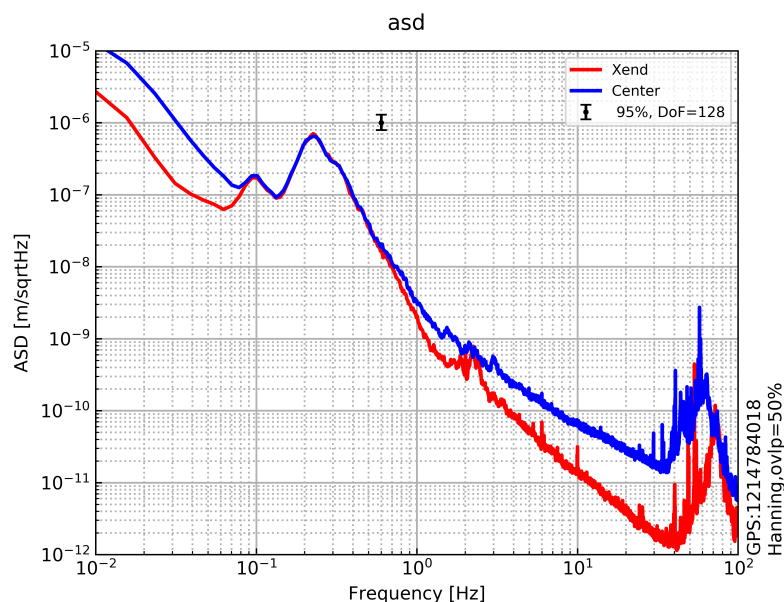


図 1 X エンドとセンターエリアにおいた地震計の X アーム方向の ASD。エラーバーは 95 % の有意水準。0.1Hz-0.5Hz の帯域では振幅の大きさが同じである。

脈動付近では、GIF と地震計による逆相成分は互いに一致している。

^{*1} ちゃんとホワイトニング入れておこう。

^{*2} 傾きをみている、と言うには積極的な証拠がない。並進成分を見えていないというのなら GIF と比較していると言える。コーナキューブは鏡が傾いても平行にビームを返すので、原理的には傾き成分は並進にカップルしないはず。

^{*3} 数 km スケールのひずみ応答は数 Hz まで平坦なので、脈動以下の周波数帯域でスケール換算する場合、妥当といえる。

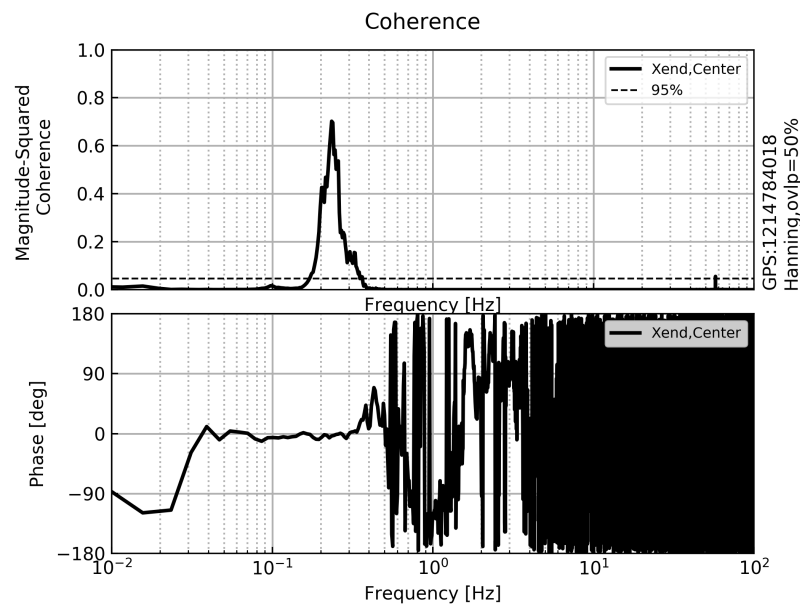


図2 X エンドとセンターエリアにおいた地震計の X アーム方向同士のコヒーレンス。破線よりもコヒーレンスが上であれば 95 %の有意水準でコヒーレンスは 0 ではないと言える。0.2Hz 付近にピークをもって有意にコヒーレンスがあることがわかる。

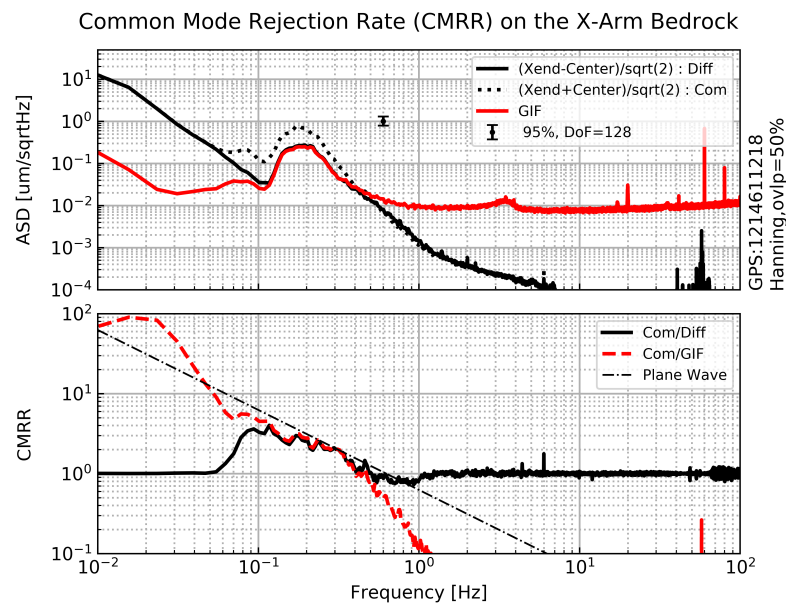


図3 上図:3km 離れた二点の地面振動の同相成分と逆相成分の ASD。ひずみ計との比較のために GIF は赤線で示している。脈動では同相成分のほうが逆相成分よりも大きい。GIF と逆相成分は脈動で等しい大きさになっている。 下図:同相成分と逆相成分の比 (CDR)。黒線は地震計をつかった CDR, 赤線は逆相成分を GIF で置き換えた CDR である。破線は、位相速度 5500 m/s 平面波がアームを通過したと仮定した場合のモデル。脈動付近ではこのモデルとよく一致する。

平面波が X アームに入射したとする。そのときの変位は $u(x, t) = e^{i(\omega t - kx)}$ となるので、速度とひずみはそれぞれ

$$v(x, t) \equiv \frac{\partial u}{\partial t} = i\omega u(x, t) \quad (39)$$

$$\epsilon(x, t) \equiv \frac{\partial u}{\partial x} = -iku(x, t) \quad (40)$$

と表すことができるので、両者の振幅比は、

$$\left| \frac{v(x, t)}{\epsilon(x, t)} \right| = c \quad (41)$$

となって、位相速度 c で表すことができる。

さてここで、2つの地震計からもとめた CDR の分母を GIF で置き換えた値は、

$$\frac{P_{\text{com}}}{P_{\text{diff}(1500)}} = \text{hoge} \quad (42)$$

となる。式 () の位相速度に花崗岩の弾性波速度である 5500m/s を代入して図の下図に破線で示す。脈動付近では、平面波のモデルとよく一致する。それ以外の帯域では、ノイズによって2点の地面振動の振幅がことなるため、一致しない。

ところで、脈動よりも低周波では地震計と GIF でもとめた逆相成分は、最大で2桁も振幅が異なる。これは地震計の信号に地面の傾き成分がノイズとしてカップルしているためである。一方で、GIF は反射鏡にコーナーキューブを使用しているので、原理的には傾き成分は基線長伸縮の信号にはカップルしない。したがって、GIF は基線長モニターとして地震計よりも広帯域で基線長伸縮を測ることが可能である。

0.4 山の歪み

回転しない場合、ひずみテンソルは垂直ひずみ成分とせん断ひずみ成分に分けることができる。またさらに垂直ひずみ成分は、同相成分と逆相成分とに分けることができる。つまり、

$$aa \quad (43)$$

となる。

同相成分

同相成分は、すべての軸が同じ大きさで伸縮するひずみであり、体積ひずみや面積ひずみともよばれている。そのため、同相成分であれば、X アームで計測したものは Y アームでも同じになると言える。この同相成分は KAGRA のメインレーザーの周波数安定化に使われる。

一様等方性を仮定すれば、同相成分はおもに大気圧による等方圧縮もしくは等方膨張からなる。^{*4}

図 () に大気圧と GIF のコヒーレンスを示す。およそ数 10mHz 以下ではコヒーレンスは有意であり、大気圧応答をみていると考えられる。このときの気圧ひずみ応答の係数は〇〇であり、▲▲と矛盾しない結果となつ。したがって、この帯域では Y アームの推定に使える。

^{*4} しかし、一様等方な岩盤であれば同相成分のみに寄与するが、非等方性がある山の中の場合、他の逆相成分やせん断ひずみ成分にもカップリングすると思われる。そのた有限要素法で地形をモデリングする必要がある。これは最低限 D 論の内容にふくめたい。他の成分に

逆相成分

逆相成分は、ある一方の軸が膨張したとき、他方の面が同じ大きさで伸縮するひずみである。逆相成分には重力波信号が含まれている。

岩盤の非一様性や非等方性などにより、他の同相成分やせん断ひずみ成分からカップルする。

せん断成分

せん断成分は、干渉計の基線長変化には影響しない。鏡の角度揺れに対応するが、多分影響はちいさいので無視する。^{*4}

本質的に、自由度が1つしかないので、逆相成分はわからない。

自由度が1つしかないので、せいぜい $\sqrt{2}$ 程度しか低減できない。(とはいっても GIF のノイズレベルまで小さくできるはず。変位換算で 10^{-10} m までは。)

まずは、X アームの安定化を考える。

0.5 X アームの安定化

0.5.1 アーム安定化の必要性

和泉さんの D 論の引き込みに必要な要求値をここで議論する。逆相成分でどれだけ揺れを小さくしないといけないか、ここで明記する。

0.5.2 制御設計

GIF では測った逆相信号をそのまま ITMX と ETMX にもどす。その時の制御設計は、Lucia の D 論を参考にする。

^{*4} ほんとうか？