THÉORIE ET ALGORITHMIQUE DES GRAPHES
LICENCE INFORMATIQUE

PHILIPPE LANGEVIN, IMATH, UNIVERSITÉ DE TOULON.

implantation.tex	2025–02–25 06:41:43.086607473
connexe.tex	2025–02–08 09:55:00.100829630
euler.tex	2025–01–31 18:27:03.514130446
hamilton.tex	2024–11–21 05:56:06.732702694
disjoint.tex	2023–11–28 20:08:56.880328716
acm.tex	2023–10–25 19:55:19.235104662
backtrack.tex	2023–10–25 19:55:19.230104633
zoologie.tex	2023–09–20 14:18:17.755754558
macros.tex	2023–09–11 06:52:42.818752797
topo.tex	2022–12–06 20:36:50.445934386
tag.tex	2022–12–06 20:36:50.444934380
reduction.tex	2022–10–23 12:05:47.177420402
coloriage.tex	2021–12–07 06:27:16.944313242
promenade.tex	2021–11–21 08:43:26.421554582
np.tex	2021–11–19 10:57:11.274290277
devoir.tex	2021–11–19 10:57:10.783287457
rush.tex	2021–11–19 10:57:08.567274735
planaire.tex	2021–11–19 10:57:06.481262757

Date: dernière compilation :6 mars 2025.

Table des matières

DEUXIÈME RÉCRÉATION.

LE JEU DES PONTS ET DES ILES.

PARMI les divers travaux des mathématiciens sur cette branche de la science de l'étendue que l'on nomme *Géométrie de situation*, on rencontre, dès l'origine, un fameux Mémoire d'Euler, connu sous le nom de *Problème des Ponts de Kœnigsberg;* nous donnons, d'après les *Nouvelles Annales de Mathématiques,* un commentaire de cet opuscule, qui a paru en latin dans les *Mémoires de l'Académie des sciences de Berlin* pour l'année 1759, et qui a pour titre : *Solutio problematis ad Geometriam situs pertinentis.*

LE MÉMOIRE D'EULER.

1° Outre cette partie de la Géométrie qui s'occupe de la grandeur et de la mesure, et qui a été cultivée dès les temps les plus reculés, avec une grande application, Leibniz a fait mention, pour la première fois, d'une autre partie encore très inconnue actuellement, qu'il a appelée *Geometria situs.* D'après lui, cette branche

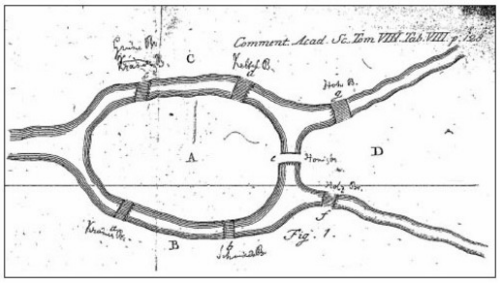


FIGURE 1 – Peut-on faire une promenade passant une et une seule fois par chacun des sept ponts de la ville de Koenigsberg ?

1. Chemin eulérien

La théorie des graphes s'est développée au cours du XX^e^ siècle, dans la note [19], Las Vergnas nous rappelle que terminologie de graphe a été introduite par Sylvester en 1877, et que le premier livre sur la théorie des graphes a été écrit par D. König en 1936. La génèse de la théorie des graphes semble être une étude de Léonard Euler, un très célèbre mathématicien du XVIII^e^ siècle. Dans un article publié en 1736, il traite un problème devenu classique, illustré par la devinette : peut on faire une promenade passant une fois par chacun des sept ponts de la ville de Koenigsberg ? Il suffit de faire quelques essais pour se convaincre de l'impossibilité de réaliser une telle promenade. L'objectif de cette section est de dégager un résultat général.

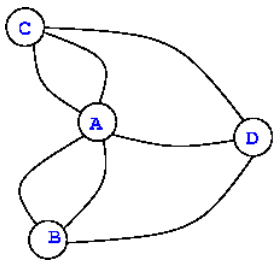


FIGURE 2 – 2-graphe.

La question se traduit directement dans le langage de la théorie des graphes par : existe-il un chemin passant une et une seule fois par les arêtes du graphe ? Dans la terminologie de Claude Berge [1], il s'agit d'un 2-graphe car certains sommets sont reliés par au plus deux arêtes. Dans la suite, nous nous intéressons uniquement aux graphes simples : sans arête multiple et sans boucle.

1.1. **Terminologie.** Un graphe $\Gamma(S, A)$ est la donnée de deux ensembles finis : un ensemble de sommets S et un ensemble d'arêtes A inclus dans $\mathcal{P}_2(S)$. Une arête est une paire de sommets, ce sont les extrémités de l'arête. Une arête $\{x, y\}$ est notée xy ou yx, les sommets

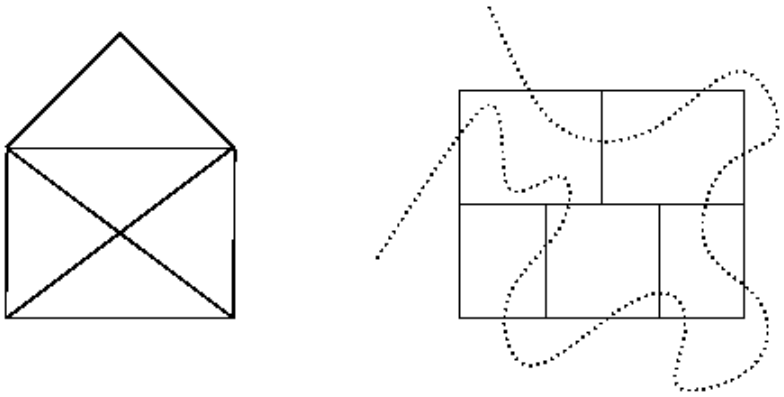


FIGURE 3 – Peut-on tracer la petite maison d'un trait de crayon sans passer deux fois par le même segment ? Peut-on tracer une courbe qui coupe une et une seule fois tous les segments de la figure ?

sont dits *adjacents* et l'arête $u = xy$ est dite *incidente* au sommet x. Nous utiliserons parfois les symboles – et — pour l'adjacence et l'incidence. Plus généralement, on dit que x est adjacent à $X \subseteq S$:

$$s - X \iff \exists x \in X, \quad s - x.$$

Deux arêtes u et v qui partagent un sommet sont dites *incidentes*. Plus généralement, on dit que $u \in A$ est incidente à $X \subseteq S$:

$$\exists x \in X, \quad u — x.$$

Un *chemin* de longueur n est une suite de sommets x_0, x_1, …, x_n tels que :

$$\forall i, \quad 0 \leq i < n \Longrightarrow x_i x_{i+1} \in A,$$

Les sommets x_0 et x_n sont les *extrémités du chemin*, x_0 est l'origine et x_n le sommet terminal. On parle de cycle quand $x_0 = x_n$. On dit que x est connecté à y, et on note $x \rightsquigarrow y$ quand il existe un chemin d'extrémité x et y. Il s'agit là d'une relation symétrique et transitive qu'il convient de prolonger par réflexivité. Un chemin est dit *simple* quand il ne passe jamais plus d'une fois par une même arête. Un chemin *élémentaire* ne passe pas deux fois par un même sommet. L'ensemble des sommets voisins d'un sommet x :

$$\text{voisin}(x) = \{y \in S \mid xy \in A\}, \quad \deg(x) = \sharp\text{voisin}(x),$$

le *degré* d'un sommet est égal au nombre d'arêtes incidentes. Un sommet de degré pair est dit pair, un sommet de degré impair est dit impair. Un sommet de degré nul est dit *isolé*. Un sommet adjacent à tous les autres sommets est dit *dominant*.

Nous avons l'amusante relation des paires et de l'impair :

Lemme 1 (parité des impairs)**.** *Dans un graphe,* $\Gamma(S, A)$ *:*

$$\sum_{x \in S} \deg(x) = 2|A|$$

en particulier, le nombre de sommets impairs est toujours pair !

Démonstration. Notons A_s les arêtes incidentes au sommet s,

$$A = \bigcup_{s \in S} A(s).$$

Une triple intersection des A_s est vide, une double intersection non vide est une arête du graphe. Le principe d'inclusion et d'exclusion [13] s'applique sans difficulté et donne :

$$|A| = \sum_{s \in S} \deg(s) - |A|.$$

□

Exercice 1 (dénombrement des graphes)**.** *Dénombrer les graphes d'ordre 8.*

Exercice 2. *Prouver qu'un graphe d'ordre supérieur à 1, possède deux sommets de degré identique.*

Exercice 3. *De tout parcours, on peut "extraire" un parcours élémentaire ayant les mêmes extrémités. Détaillez cette affirmation !*

Exercice 4. *Dans un graphe acyclique ayant au moins une arête, il existe un sommet de degré 1. Expliquez !*

Nous arrivons au problème de décision qui nous importe.

Problème 1 (chemin eulérien)**.** *Etant donné un graphe. Existe-t-il un chemin passant une et une seule fois par toutes les arêtes de ce graphe ?*

Remarque 1. *Dans la littérature, le graphe est dit eulérien quand il existe un cycle eulérien, semi-eulérien quand il existe un chemin eulérien non cyclique.*

À condition de poser $x \rightsquigarrow x$ pour tout sommet x, la relation $\rightsquigarrow$ est une relation d'équivalence : réflexive, symétrique et transitive. Les classes d'équivalence sont des composantes connexes. Le graphe est dit *connexe* quand il possède une seule composante connexe. Autrement dit, pour toute paire de sommets x et y, il existe un chemin d'extrémité x et y.

Remarque 2. *Nous utiliserons les lettres* m*,* n *et* p *pour le nombre d'arêtes, de sommets et de composantes connexes.*

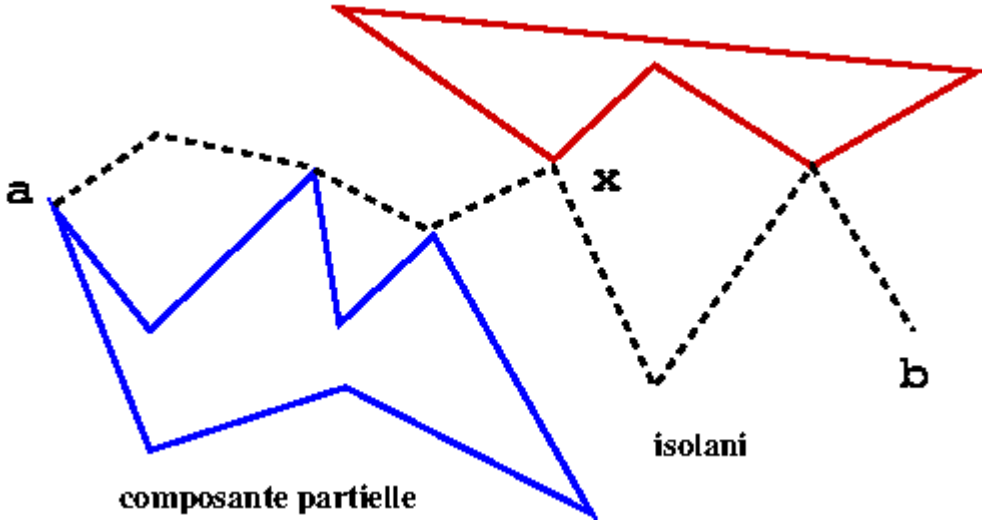


FIGURE 4 – Les composantes connexes du graphe partiel qui ne sont pas des singletons forment des cycles eulériens.

1.2. **Caractérisation.** Notons d'une part qu'un graphe eulérien sans point isolé est forcément connexe, et que d'autre part, deux sommets non isolés d'un graphe eulérien sont connectés.

Théorème 1. *Un graphe sans point isolé est eulérien si et seulement si il est connexe et tous ses sommets sont pairs. Un graphe sans point isolé est semi-eulérien si et seulement si il possède exactement 2 sommets impair.*

Démonstration. Tous les sommets sont sur une arête au moins. Comme un chemin eulérien passe par toutes les arêtes, il passe par tous les sommets. Le long d'un chemein, tous les sommets sont de degré pairs, sauf les deux éventuelles extrémités. Montrons par induction sur le nombre d'arêtes qu'un graphe connexe avec 0 ou 2 sommets impairs est eulérien. Supposons qu'il existe deux sommets impairs a et b. Il existe un chemin μ qui relie a et b. On construit un sous-graphe partiel par suppression des arêtes de ce chemin. Les composantes connexes de ce graphe partiel forment des sous-graphes dont les sommets sont tous pairs. Certaines de ces composantes sont réduites à un point, les autres forment des cycles eulériens.

Pour chacune de ces composantes, on choisit un sommet représentant le long du chemin μ. On obtient un chemin eulérien en remplaçant un représentant x de μ par le cycle eulérien μ_x du graphe partiel. □

Exercice 5. *Résoudre les deux puzzles* FIG. *(3).*

1.3. **Algorithme.** L'algorithme récursif `eulerien(s, G)` imprime un chemin eulérien d'origine s dans le graphe G. Il suppose que le chemin existe, et que le sommet s est bien de degré impair dans le cas non cyclique.

```
1 Eulerien( s:sommet, G:graphe )
2
3    P ← promenade( s, G )
4    pour chaque sommet x  de P
5         si degre( x ) > 0 alors
6            Eulerien(x, G)
7         sinon
8            imprimer( x )
```

La routine `promenade(s, G)` construit une chaîne simple et maximale d'origine s. Au cours de cette balade, les arêtes intermédiaires sont retirées du graphe de sorte à garantir l'arrêt du code et la simplicité des chemins.

Proposition 1. *`eulerien(s, G)` est quadratique en l'ordre du graphe.*

Démonstration. □

2. Mise en oeuvre

2.1. **organisation.** En pratique, nous réaliserons une bibliothèque en langage `C`. Les sources des procédures et fonctions destinées à être utilisées dans des expériences numériques sont déposées dans un répertoire unique. Elles sont compilées en des fichiers objets et intégrées dans une bibliothèque `libgraphe.a`.

La hiérarchie FIG. (5) est un modèle d'organisation de répertoire et de fichiers. Il ne faut pas hésiter à se faciliter la tâche en ajoutant des vatiables et `alias` dans votre fichier `.bashrc` :

```
1 export GRAPHE="$HOME/cours/graphe"
2 alias mklib="make -BC $GRAPHE/lib"
```

```
1  SRC=$(wildcard *.c)
2  OBJ=$(SRC:.c=.o)
3  CFLAGS = -Wall -g
4  ifeq ($(shell hostname), imath02.univ-tln.fr)
5      CFLAGS = -O2
6  endif
7
8  libgraphe.a : $(OBJ)
9      ar -cr libgraphe.a *.o
10     #nm libgraphe.a
11 %.o:%.c
12     gcc $(CFLAGS) -c $*.c
13 joli :
14     indent -kr *.c
15 clean:
16     rm -f *~ *.o
17 proper:
18     rm -f *.a
```

Listing 1 – La bibliothèque statique `libgraphe.a`

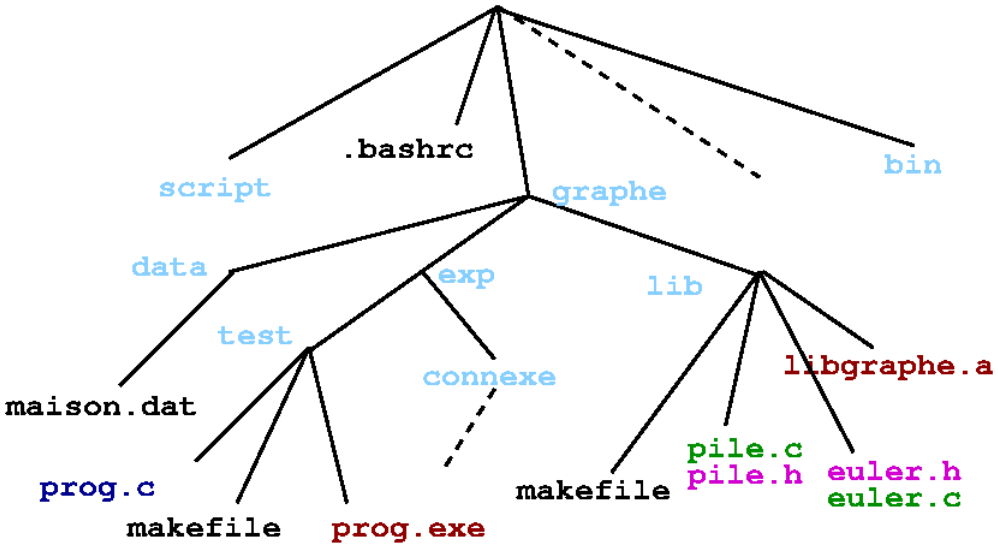


Figure 5 – Hiérarchie des fichiers.

commande	option	commentaire
man		
	-k	à propos
	-f	whatis
bash		interpète
make		compilation automatique
	-B	compiler tout
	-C	compiler ailleurs
	-n	juste pour voir
gcc		compilateur
	-Wall	avertissements courants
	-g	poduire un code débogable
gdb		débogueur
	-args	ligne agumentée
valgrind		débogueur

TABLE 1 – 6 commandes ...

```
1 OPTIONS= -Wall -g
2 OBJET=graphe.o inout.o
3 libgraphe.a : $(OBJETS)
4       ar crs libgraphe.a $(OBJETS)
5
6 graphe.o : graphe.c
7       gcc $(OPTIONS) -c graphe.c
8 inout.o : inout.c
9       gcc $(OPTIONS) -c inout.c
```

LISTING 2 – Un premier makefile pour la bibliothèque

Les structures de données et algorithmes de bases seront implantés dans des fichiers séparés pour constituer une bibliothèque. Les fonctions de la bibliothèque seront exploitées par des expériences qui seront codées dans des repertoires dédiés.

Les sources C de la bibliothèque sont déposées dans un répertoire unique piloté par un fichier `makefile` pour une mise à jour d'une archive statique `libXYZ.a`. Vous trouverez ci-dessous un exemple de fichier `makefile` pour la bibliothèque et un peu plus loin un makefile pour un répertoire de test.

Pour ce cours, les sources `C` seront considérées comme acceptables à condition de passer une compilation avec l'option `-Wall`, sans erreur ni avertissement. L'option de débogage `-g` est indispensable pour pouvoir utiliser les débogueurs `gdb` et `valgrind`.

Le programme `test.c` utilise la fonction `getop` de la glibc pour gérer quelques options sur la ligne de commande. Il code une commande pour construire et dessiner un graphe aléatoire.

```c
#include "graphe.h"
#include "inout.h"
#include <unistd.h>
extern int verb;
int main(int argc, char *argv[])
{
    char *option = "n:p:v";
    int opt, n=64;
    float p = 0.5;
    while ((opt = getopt(argc, argv, option)) != -1) {
    switch (opt) {
    case 'n' :
        n  = atoi( optarg );
        break;
    case 'p':
        p = atof( optarg );
        break;
    case 'v':
        verb++;
        break;
    case '?':
        exit (EXIT_FAILURE);
    }
    }
    graphe g = randGraphe( p, n );
    dessiner ( g, NULL );
    return 0;
}
```

Pratique 1 (Préliminaire)**.** *Préparer l'environnement de travail pour les séances à venir.*

```
1 OPTIONS= -Wall -g -I$(GRAPHE)/lib -L$(GRAPHE)/lib
2
3 prog.exe : prog.c
4       gcc $(OPTIONS) -o prog.exe -lgraphe
```

LISTING 3 – makefile pour un répertoire test

— *ajouter l'alias* `mklib` *et la variable* `GRAPHE` *dans le fichier de commande* `.bashrc` *;*
— *mettre en place la hiérarchie de fichiers ;*

2.2. **Format de fichier source.** On choisit un format de fichiers assez sommaire pour représenter les graphes. Un modèle de fichier texte pour décrire le graphe de la maison à 5 sommets est le suivant :

```
#          0
#        /   \
#       1 --- 2
#       |  X  |
#       3 --- 4
nbs=5
0 1
0 2
1 2
1 3
1 4
2 3
2 4
3 4
```

2.3. **matrice d'adjacence.** Un graphe $G(S, A)$ d'ordre s dont l'ensemble des sommets S est l'intervalle $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ est complètement défini par une matrice d'adjacence. Il s'agit de la matrice booléenne

$$A_{i,j} = 1 \Longleftrightarrow ij \in A.$$

Pratique 2 (commun)**.** *Dans les fichiers* `graphe.[ch]`*, coder les fonctions :*

```
1  typedef struct {
2      int       nbs;    // ordre du graphe
3      int      **mat;   // matrice dadjacence
4      //et plus tard des champs...
5      char*     idt;     // identificateur
6      liste     *adj;    // liste d'adjacence
7  } graphe;
8
9  graphe initGraphe( int nbs );
10 graphe aleatoire ( float p, int n );
11 void   liberer ( graphe G );
12 int degre( int s, graphe G );
```

LISTING 4 – graphe.h

— *graphe initGraphe(int n) : allocation et initialisation des champs.*
— *graphe aleatoire(float p, int n) : construction d'un graphe, p est la probabilité de connecter deux sommets.*
— *void liberer(graphe g) : libération de la mémoire.*
— *int degre(int s, graphe G).*

2.4. **Entrée-sortie.** Une fonction d'entrée-sortie n'est pas toujours commode à écrire. La facilité d'emploi d'une fonction d'entrée sortie est proportionnelle au temps qui aura été consacré par le programmeur !

```
#          0
#        /   \
#       1 --- 2
#       |  X  |
#       3 --- 4
nbs=5
0 1
0 2
1 2
1 3
1 4
```

```c
void minilire ( FILE * src )
{
    int nbs, x, y;
    while ( 0 == fscanf(src, "nbs=%d", &nbs ) ) fgetc( src );
    printf ("ordre=%d\n", nbs );
    // allocation
    while ( ! feof ( src) ) {
        if ( fscanf (src, "%d%d", &x, &y ) > 1 )
                printf ("x=%d y=%d\n", x, y );
        else fgetc ( src );
    }
```

LISTING 5 – Le service minimum en matière d'entrée/sortie !

```
2 3
2 4
3 4
```

Le service minimum de la fonction `minilire` n'aura pas couté bien cher en temps de développement ! Elle impose un format de fichier pas trés agréable pour l'utilisateur.

```
nbs=5
0 : 1 2
1 : 3 4
2 : 3 4
3 : 4
```

Exercice 6. *Ecrire une fonction de lecture pour le format xyz : `fgets`, `sscanf`, `strtok` etc.*

Pour analyser des fichiers plus complexes en terme d'entité lexicale, l'usage des automates est un moyen de bien faire. Pour gagner du temps, le développeur peut utiliser des outils de compilation comme `flex`, voire `bison`.

Exercice 7. *Utiliser l'outil de compilation `flex` pour la lecture des graphes au format xyz.*

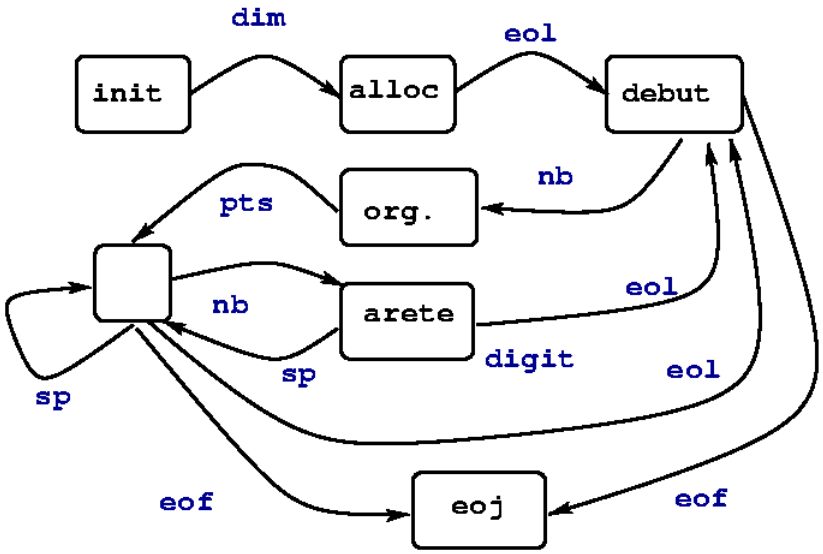


FIGURE 6 – Automate pour la lecture d'un graphe au format xyz.

Pratique 3 (entrée-sortie)**.** *Il s'agit d'implanter des fonctions d'entrées-sorties pour manipuler les petits graphes au format décrit dans (2.2) en vous appuyant sur l'automate de la figure* FIG. *(6) et l'analyseur lexical* LIST. *(9). Dans les fichiers* `inout.[ch]`*, coder les fonctions :*

- `graphe lireGraphe( char* nom )` *: lecture d'un graphe au format texte ;*
- `void ecrire( graphe G)` *: écriture au format texte ;*
- `void dessiner( graphe G )`*.*

```
DOT(1)   General Commands Manual                DOT(1)
NAME
       dot - filter for drawing directed graphs
       neato - filter for drawing undirected graphs
       ...
SYNOPSIS
       dot [options] [files]
       neato [options] [files]
```

La commande externe `dot` *(et ses cousines) du projet graphiz permet de dessiner des beaux graphes à partir d'une source texte. Elle sera utilisée dans la fonction* `void dessiner(graphe G)` *pour construire image du graphe G via un appel de la fonction* `system` *de la* `glibc`*.*

```
%{
    #include "graphe.h"
    int i, j, n, num = 0;
    graphe g;
%}
NB  [0-9]+
%s  NBS  ADJ
%%
<INITIAL>nbs[ ]+=  BEGIN(NBS);
<NBS>{NB} g = initGraphe(atoi(yytext));BEGIN(INITIAL);
<INITIAL>{NB} i = atoi(yytext);
<INITIAL>:    BEGIN(ADJ);
<ADJ>{NB}     g.adj[ i ][ j ] = g.adj[ j ][ i ] = 1;
#.*           ;
.             ;
\n            num++;
%%
int main(int argc, char **argv ) {
    yyin = fopen(argv[ 1 ], "r");
    yylex();
    dessiner( g );
    return 0;
}
```

Listing 6 – clin d'oeil au cours de compilation !

```
graphe lireGraphe( char* nom );
void   ecrireGraphe( graphe G );
void   dessiner( graphe G );
```

Listing 7 – `inout.h`

```
SYSTEM(3)  Manuel du programmeur Linux  SYSTEM(3)
NOM
        system - Executer une commande shell
SYNOPSIS
        #include <stdlib.h>
```

```
graph maison {
0 -- 1; 0 -- 2; 1 -- 2; 1 -- 3;
1 -- 4; 2 -- 3; 2 -- 4; 3 -- 4;
}
```

LISTING 8 – maison au format dot

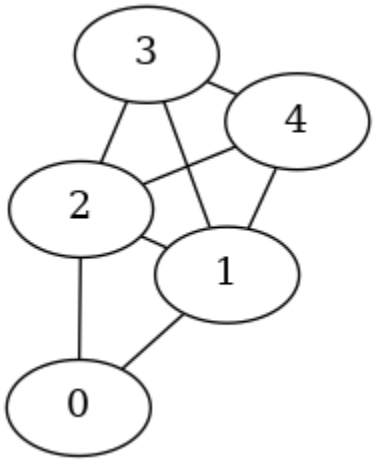


FIGURE 7 – neato -Tpng maison.dot -o maison.png.

```
int system(const char *command);
DESCRIPTION
La fonction de bibliotheque system() utilise fork
(2) pour crer un processus fils qui execute la
commande d'interpreteur indiquee dans command...
```

Exercice 8. *Comment construire l'image* FIG. *(8) à partir de la source* `pi.c` *?*

3. PILE ET PROMENADE

On choisit la structure de pile de sommets pour mettre en oeuvre l'algorithme `eulerien`.

Exercice 9. *Comment adapter l'algorithme* `eulerien(G)` *pour une promenade à pile.*

```
1  int getoken( FILE *src )
2  {
3      int car;
4      car = fgetc( src );
5      if ( car == '#' ) do car = fgetc(src) ; while ( car != '\n
       ' && car != EOF );
6      if ( car == ' ' ) {
7              while ( car == ' ' ) car = fgetc( src );
8              ungetc( car , src );
9              car = ' ';
10     }
11     switch( car ) {
12         case '=' : fscanf(src, "%d", &value); return DIM;
13         case ':' : return PTS;
14         case '\n' : return EOL;
15         case ' ' : return SP;
16         case EOF : return EOF;
17     }
18     if ( isdigit ( car ) ) {
19             ungetc( car, src );
20             fscanf(src, "%d", & value ); return NB;
21     }
22     return SMILE;
23 }
```

LISTING 9 – Un exemple d'analyseur lexical.

3.1. **pile de sommets.** Les n sommets d'un graphe d'ordre n seront systématiquemnt les entiers de 0 à $n-1$. Une pile de sommets est donc une pile d'entiers.

Exercice 10 (pile)**.** *Comment implanter la structure de pile sur la sytucture de* `liste` *?*

L'hypercube de dimension $r \geq 0$ est le graphe d'ordre $n = 2^r$ dont les sommets sont les entiers inférieurs à n, deux sommets sont adjacents si leurs représentations binaires diffèrent d'un chiffre.

Exercice 11 (hypercube)**.** *Quels sont les paramètres de l'hypercube de dimension r ? L'hypercube est-il eulérien ? Ecrire une fonction* `graphe`

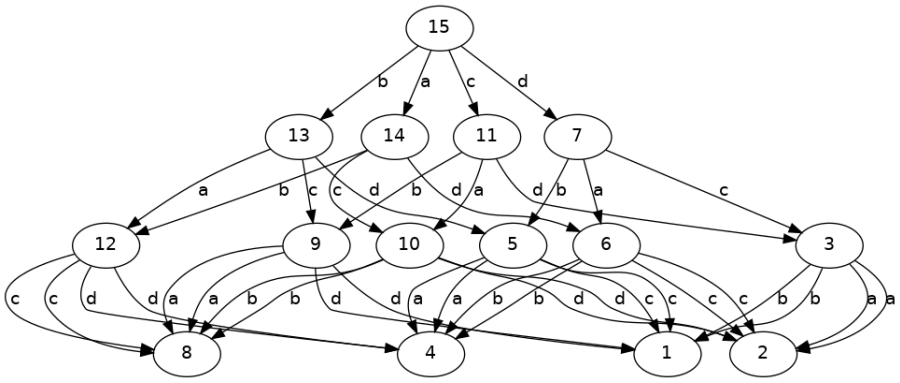


FIGURE 8 – Comment obtenir cette image à partir de la source `pi.c` ?

`hypercube(int r )` qui construit le graphe de l'hypercube de dimension r.

3.2. **Expérience eulérien.**

Pratique 4 (commande `/usr/bin/time`)**.**
Ecrire une commande `eulerien.exe` qui détermine un cycle eulerien dans l'hypercube de dimension r.
Utiliser la commande externe `time` pour déterminer la forme du temps de calcul en fonction de r.
Interpréter le résultat.

3.3. **Liste d'adjacence.** En pratique, la représentation par matrice d'adjacence peut se révéler octophage et chronophage. Typiquement, lors de la détermination des voisins d'un sommet.

Pratique 5. *Dans le fichier `graphe.[ch]`*
- *coder la fonction `void adjacence( graphe G)` qui construit la table des listes d'adjacence.*
- *Adapter la procédure `liberer( graphe G )`*

4. Composante Connexe

4.1. **Connexité.** À condition de poser $x \rightsquigarrow x$ pour tout sommet x, la relation $\rightsquigarrow$ est une relation d'équivalence : réflexive, symétrique et transitive. Les classes d'équivalence sont des composantes connexes. Le graphe est dit connexe quand il possède une seule composante connexe. Autrement dit, pour toute paire de sommets x et y, il existe un chemin d'extrémité x et y. Un parcours récursif des sommets d'un graphe permet de décider du caractère connexe d'un graphe.

```c
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
typedef unsigned int set;
#define single(x) ( ( (set) 1 ) << x )
void pi(set X)
{
    if (X) {
    set Y = X;
    while (Y) {
        int y = __builtin_ctz (Y);
        set Z = X ^ single(y);
        if (Z)
        printf ("%d -> %d [ label=\"%c\" ]\n", X, Z, y + 'a');
        pi(Z);
        Y ^= single(y);
    }
    }
}

int main(int argc, char *argv[])
{
    int n = atoi(argv[1]) ;
    puts("digraph pi {");
    set X = single(n) - 1;
    pi(X);
    puts("}");
    return 0;
}
```

LISTING 10 – What that ?

Problème 2 (connexe)**.** *Etant donné un graphe. Le graphe est-il connexe ?*

Exercice 12 (abondance)**.** *Montrer que les graphes connexes sont plus nombreux que les graphes déconnectés.*

Lemme 2. *Le étachement un sommet d'une petite composante vers une grande componaate et la lafusion de deux composantes sont deux transformations qui augmentent le nombre d'arêtes.*

Exercice 13 (Berge)**.** *(1) Quel est le nombre d'arêtes de* K_n *?*

```
pile promenade( sommet x , graphe G )
{
variable
  y : sommet
  P : pile
  initialiser(P)
  tantque    ( degre(x) > 0 )
    y ← un voisin de x
    empiler( y, P );
    deconnecter x et y
    x ← y;
}
retourner P
ftq
```

LISTING 11 – Promenade dans G à partir du sommet x

```
#ifndef PILE_H
#define PILE_H
typedef struct _liste_ {
     int s;
     struct _liste_  * svt;
} enrliste , * liste ;

void    empiler( int s, liste  *p );
int     depiler (  liste  *p );
#endif
```

LISTING 12 – Structure de pile basée sur des listes chainées

(2) Montrer dans un graphe à p composantes connexes

$$m \leq \frac{1}{2}(n-p)(n-p+1)$$

(3) Montrer qu'un graphe possédant plus de $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ arêtes est obligatoirement connexe.

```
1 typedef struct {
2     int       nbs;    // ordre du graphe
3     int      **mat;   // matrice dadjacence
4     //et plus tard des champs...
5     char*    idt;     // identificateur
6     liste    *adj;    // liste d'adjacence
7 } graphe;
8
9 void conversion( graphe G );
```

LISTING 13 – `graphe.h`

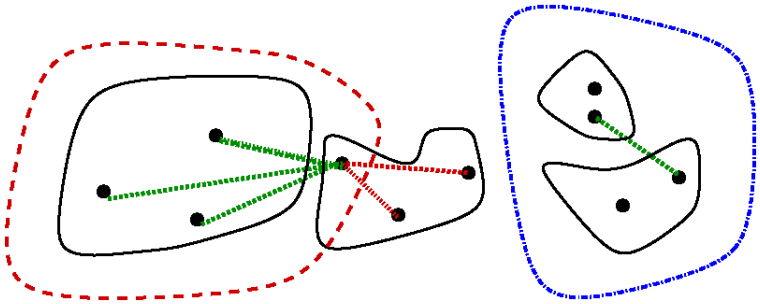


FIGURE 9 – augmentation du nombre d'arêtes d'un graphe non connexe...

4.2. **Parcours récursif.** L'algorithme `parcours(s,G)` effectue un parcours récursif et en profondeur du graphe G à partir du sommet s. Les sommets sont marqués au fur et à mesure de l'exploration du graphe. Le nombre de sommets marqués est maintenu dans la variable compteur. Le graphe est connexe quand tous les sommets sont marqués.

Les paramètres et variables locales d'une fonction sont stockés dans une zone particulière de la mémoire : la pile (stack). La taille de cette zone mémoire est souvent limitée et les appels récursifs peuvent conduire à un débordement de pile (stack overflow). La commande `ulimit` permet de connaître la taille par défaut de la pile d'un processus, elle permet de procéder à des réglages de cette ressource.

Exercice 14 (élimination de la récursivité)**.** *Comment utiliser explicitement une structure de de pile pour éliminer la récursivité de* LIST. *(14).*

```
1
2  parcours( x, G  )
3    marquer[x] ← 1
4    compteur++
5    pour chaque voisin y de x dans G
6         si marque[y] < 1  alors
7                  parcours( y , G )
8
9
10 connexe( graphe G )
11   initialiser les marques
12   compteur ← 0
13   choisir un sommet s
14   parcours( s , G )
15   retourner compteur == ordre(G)
```

LISTING 14 – Marquage des sommets par un parcours récursif en profondeur

```
1
2  void parcours( int s,  graphe G )
3  {
4  int t;
5  marque[s] = 1;
6  for( t = 0; t < G.nbs; t++ )
7     if ( G.mat[s][t] && ! marque[t] ) {
8        parcours( t , G );
9     }
10 }
```

Exercice 15. *Ecrire un algorithme pour dénombrer les composantes connexes d'un graphe.*

4.3. **Matrice d'ajacence.** Le temps de calcul pour l'identification des voisins d'un sommet dans le cas d'une implantation des graphes par matrice d'adjacence est proportionnel au nombre de sommet.

Proposition 2 (parcours par matrice d'adjacence)**.** *Dans le cas d'une implantation par matrice d'adjacence, le temps de calcul de* `connexe(G)`

```
1  typedef struct _ls_ {
2      sommet num;
3      struct _ls_ * next;
4  } enrliste , *liste ;
5
6  typedef struct {
7      int      nbs;
8      liste   *mat;
9  } graphe;
10
11
12 void parcours( int s,  graphe G )
13 {
14 liste   aux;
15 marque[s] = 1;
16 aux = G[s];
17 while ( aux ){
18     if  ( !  marque[ aux->num ] )
19         parcours( aux->num , G );
20     aux = aux->next;
21     }
22 }
```

LISTING 15 – liste d'adjacence

est quadratique en l'ordre n du graphe :

$$T(m,n) = \Theta(n^2)$$

Démonstration. Chaque sommet du graphe est visité une fois, le temps de calcul d'une visite est proportionnel à n. □

4.4. **Liste d'adjacence.** Dans le cas des graphes peu dense, il est préférable d'implanter les graphes au moyen de listes d'adjacence.

Proposition 3 (parcours par liste d'adjcence)**.** *Dans le cas d'une implantation par liste d'adjacence, le temps de calcul de* `connexe(G)` *vérifie :*

$$T(m,n) = \mathrm{O}(m+n)$$

où m est le nombre d'arêtes du graphe dont l'ordre n.

Démonstration. La recherche des voisins d'un sommet est proportionnelle à son degré. □

Exercice 16. *Coder* `int adjacent( sommet x, y, graphe g)` *qui retourne 1 xy est une arête du graphe.*

Exercice 17. *Coder* `void relier( sommet x, y, graphe g)` *qui ajoute l'arête xy au graphe.*

Exercice 18. *Ecrire une fonction* `void freeGraphe( graphe g)` *qui libère la mémoire allouée au graphe passé en argument dans le cas d'une implantation par liste d'adjacence.*

Pratique 6 (connexité)**.** *Dans un fichier* `connexe.c`*, implanter une fonction* `int connexe( graphe G, int mode )` *qui retourne le nombre de composante connexe du graphe G. Le paramètre permettra de décider du mode opératoire :*

(1) parcours récursif représentation matricielle ;

(2) parcours récursif sur des listes d'adjacences ;

(3) parcours profondeur représentation matricielle ;

(4) parcours profondeur sur des listes d'adjacences ;

Utiliser l'outil de profilage `gprof` *pour comparrer pour comparer les temps de calcul des différentes approches.*

4.5. **Profilage.** Le profilage d'un code consiste à mesurer le temps de calcul des différentes fonctions, pour d'éventuelles améliorations. La commande `gprof` rapporte le profilage d'un code compilé avec l'option `-pg` du compilateur `gcc`.

```
gcc -Wall -pg prog.c
./a.out 1000000
gprof -b a.out
```

LISTING 16 – un exemple de profilage de code

```
1 #include <stdlib.h>
2
3 int P(int t[], int k, int n)
4 {
5     int i, res = 0;
```

```
6       for (i = 1; i < n; i++)
7       if (t[i] > k) res += i * k;
8       return res;
9   }
10
11  int Q(int t[], int k, int n)
12  {
13      int i, res = 0;
14      for (i = 0; i < n; i++)
15      if (t[i] > k) res += i * k;
16      return res;
17  }
18
19  void melange(int t[], int n)
20  {
21      int i, j, tmp, r;
22      for (r = 0; r < n; r++) {
23      i = random() % n;
24      j = random() % n;
25      tmp = t[i];
26      t[i] = t[j];
27      t[j] = tmp;
28      }
29  }
30
31  int main(int argc, char *argv[])
32  {
33      int n = atoi(argv[1]);
34      int *t = calloc(n, sizeof(int));
35      for (int i = 0; i < n; i++) t[i] = i;
36      P(t, n / 2, n);
37      melange(t, n);
38      Q(t, n / 2, n);
39      return 0;
40  }
```

```
Flat profile:
Each sample counts as 0.01 seconds.
  %   cumulative   self    calls      self    total
```

```
 time    seconds   seconds          s/c     s/c     name
 90.98      2.17      2.17    1     2.17    2.17  melange
  4.23      2.28      0.10    1     0.10    0.10  Q
  4.23      2.38      0.10                        main
  1.69      2.42      0.04    1     0.04    0.04  P


    Call graph


[1]     100.0    0.10    2.32                     main [1]
                 2.17    0.00       1/1        melange [2]
                 0.10    0.00       1/1              Q [3]
                 0.04    0.00       1/1              P [4]
-----------------------------------------------------------
                 2.17    0.00       1/1           main [1]
[2]      90.0    2.17    0.00         1        melange [2]
-----------------------------------------------------------
                 0.10    0.00       1/1           main [1]
[3]       4.2    0.10    0.00         1              Q [3]
-----------------------------------------------------------
                 0.04    0.00       1/1           main [1]
[4]       1.7    0.04    0.00         1              P [4]
-----------------------------------------------------------
```

Exercice 19. *Analysez le profilage obtenu !*

4.6. **Classe polynomiale.**

Problème 3 (problème du cycle eulérien)**.** *Etant donné un graphe. Existe-t-il un cycle eulérien ?*

Pour une instance donnée, la réponse est VRAI ou FAUX. Le problème du cycle eulérien est un exemple de problème de décision sur les graphes.

La théorie de la complexité a pour objectif de classifier les problèmes de décision. La classe **P** est constituée des problèmes de décision pour lesquels il existe un algorithme de résolution polynomial.

Proposition 4. *Le problème du cycle eulérien est dans la classe* **P**.

Démonstration. □

4.7. **Graphe aléatoire.** Le graphe aléatoire de paramètre $t \in \mathbb{R}$, et $n \in \mathbb{N}$ s'obtient en reliant deux sommets distincts d'un graphe d'ordre n avec la probabilité $p = \frac{t+1}{n-1}$.

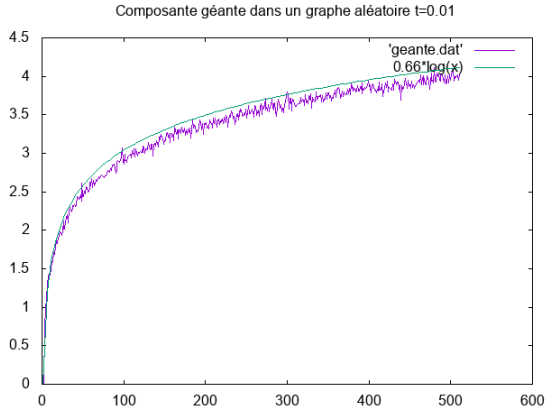


FIGURE 10 – Mise en évidence du paramètre $\frac{2}{3}$ (image Richard Sébastien).

Il est clair qu'une grande valeur de t à tendance à produire des graphes connexes alors qu'une petite valeur de t donne des sommets isolés et des composante de petite tailles.

Dans un article de 1960, les hongrois Paul Erdöz et Alfréd Rényi ont mis en évidence l'existence d'une composante "géante" à partir du seuil $t = 0$. La taille moyenne de la plus grande composante connexe de ces graphes a pour ordre de grandeur $n^{\frac{2}{3}}$ lorsque le paramètre t est positif et proche de 0.

Pratique 7 (Composante géante)**.** *Réaliser une expérience numérique pour mettre en évidence le comportement de la composante géante d'un graphe aléatoire.*

5. Ensembles Disjoints

5.1. **Structure d'ensembles disjoints.** Les chances d'un graphe d'être connexe augmentent avec le nombre de ses arêtes. On souhaite réaliser une expérience numérique pour mieux comprendre la corrélation entre connexité d'un graphe et le nombre de ces arêtes, en fonction de son ordre. Pour l'ordre n, on part d'un graphe sans arête auquel on ajoute des arêtes aléatoires jusquà obtenir un graphe connexe. L'évolution des composantes connexes de la suite de graphes peut-être modélisée par la structure de donnée d'ensembles disjoints sur l'ensemble des $\{0, 1, \ldots, n-1\}$. Une structure d'ensembles disjoints sur des objets est une structure avancée munie de trois opérations caractéristiques ;

— `singleton(objet t)` : initialise l'ensemble réduit au singleton de t ;

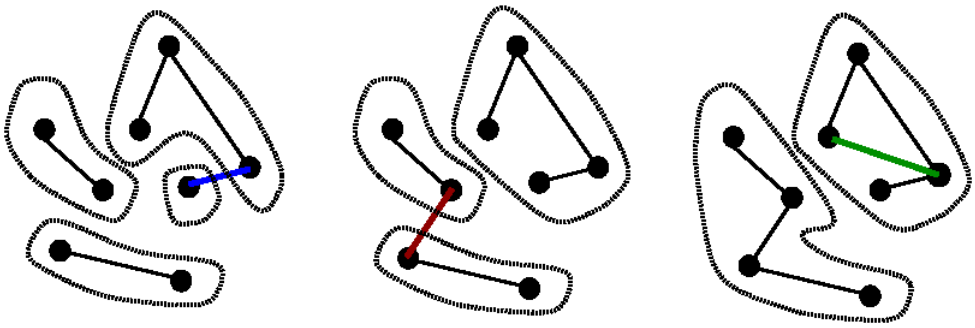


FIGURE 11 – Évolution d'une structure d'ensembles disjoints.

— `representant(disjoint x)` qui retourne le représentant de la classe de x.
— `union(disjoint x, y)` qui fusionne la classe de x et la classe de y.

5.2. **Implantation par liste.** On implante la structure d'ensemble disjoint à l'aide d'une liste chaînée.

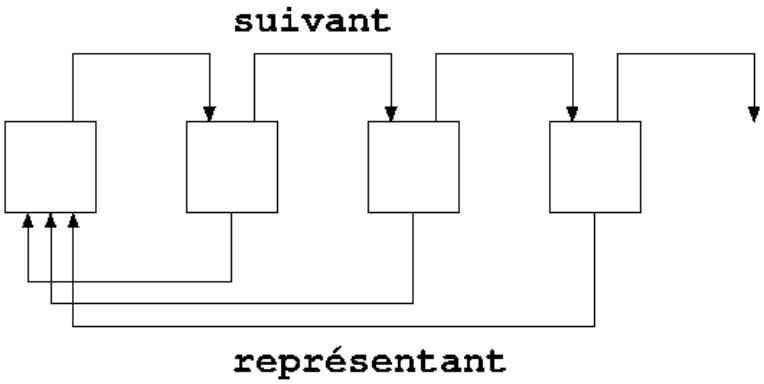


FIGURE 12 – Représentation par liste chaînée.

Dans cette version naïve, une succession de m opérations dont n opérations `singleton` peut coûter assez cher O($n + m^2$). On peut y remédier par une heuristique simple et puissante. L'heuristique de union pondérée qui consiste à modifier les représentants du plus petit des ensembles. En pratique, il suffit d'ajouter un champ, maintenu à jour sur les représentants uniquement, pour stocker le nombre d'éléments des classes.

Exercice 20. *Implanter l'heuristique de l'union pondérée.*

```
1  typedef struct _edl_ {
2      struct _edl_ *rep;
3      struct _edl_ *svt;
4      int num;
5  } enrdisjoint , *disjoint ;
6
7  disjoint representant(disjoint x);
8
9  disjoint singleton (int v);
10
11 void reunion(disjoint x, disjoint y)
12 {
13     disjoint aux;
14     aux = x;
15     while (aux->next)
16       aux = aux->next;
17     aux = aux->next = y->rep;
18     while (aux) {
19         aux->rep = x->rep;
20         aux->svt = aux;
21     }
22 }
```

LISTING 17 – implantation par liste chaînée.

Proposition 5 (union pondérée)**.** *Le temps de calcul d'une succession de m opérations dont n opérations* `singleton` *est* $\mathrm{O}(\, m + n \log n \,)$.

Démonstration. □

5.3. **Forêt d'ensemble disjoint.** Dans la représentation par arbre, un objet d'une structure d'ensemble disjoint pointe uniquement dans la direction de son représentant.

La détermination d'un représentant est l'opération la plus coûteuse. Pour éviter des arbres trop profonds, lors d'une union, le représentant le moins haut est greffé sur le plus grand. C'est l'heuristique de l'union par rang. Au départ les singletons sont des arbres de rang 0. L'union de deux classes de même rang r produit une classe de rang $r + 1$.

Exercice 21. *Implanter l'heuristique de l'union par rang.*

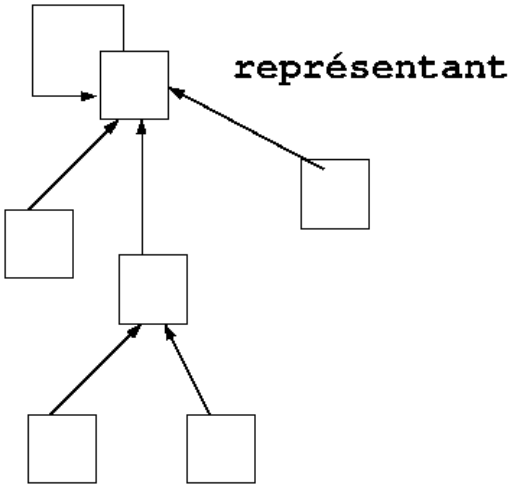


FIGURE 13 – Représentation arbre.

Proposition 6 (union par rang)**.** *Le temps de calcul d'une succession de m opérations dont n opérations* `singleton` *est* $\mathrm{O}(\, m \log n \,)$.

Démonstration. Il suffit de vérifier que le nombre d'éléments d'une classe de rang r est supérieur à 2^r. □

Lors de la détermination d'un représentant, on peut changer le champ `rep` des noeuds visités pour qu'ils pointent directement vers leur chef de classe. Les chemins vers les représentants racourcissent au fur et à mesure des recherches de représentants. C'est l'heuristique de la compression de chemin, d'une redoutable efficacité !

Exercice 22. *Implanter l'heuristique de la compression de chemin.*

Le logarithme itéré est défini sur les nombre réels par la formule récursive :

$$\log^*(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0; \\ 1 + \log^*(\log x) & \text{x/gt0.} \end{cases}$$

Exercice 23. *Compléter la table :*

n	*1*	*2*	*4*	*8*	*16*	*32*
2^n	*2*	*4*	*16*			
$\log^*(2^n)$	*1*	*2*	*3*			

Proposition 7 (compression de chemin)**.** *Le temps de calcul d'une suite de m opérations dont n opérations* `singleton` *est* $\mathrm{O}(\, m \log^* n \,)$.

Démonstration. Hors programme. □

```
1  typedef struct _edt_ {
2      struct _edt_ *rep;
3      int rang;
4      int num;
5  } enrdisjoint , *disjoint ;
6
7  disjoint representant(disjoint x){
8  while ( x->rep != x ) x = x -> rep;
9  return x;
10 }
11
12 disjoint singleton (int v);
13
14 void reunion(disjoint x, disjoint y)
15 {
16     // version de base...
17     x = representant(x);
18     y = representant(y);
19     x->rep = y->rep
20
21 }
```

LISTING 18 – implantation par forêt d'arbre.

5.4. **Expérience Numérique.** Il s'agit de réaliser l'expérience numérique pour mettre en évidence une fonction de seuil σ qui permette d'évaluer les chances pour un graphe d'ordre n d'être connexe en considérant uniquement le nombre de ces arêtes. On procéde de manière empirique pour déterminer la valeur de $\sigma(n)$ en partant d'un graphe d'ordre n dont tous les sommets sont isolés, on ajoute des arêtes aléatoirement jusqu'à obtenir un graphe connexe, $\sigma(n)$ correspond au nombre d'arêtes.

Dans une expérience numérique, il est souvent préférable de séparer les sources écrites en langage C qui calculent des données, des scripts qui exploitent les données. Ainsi, il sera possible d'utiliser le jeu de commandes offertes par le système d'exploitation pour mettre en forme le résultat d'une expérience numérique en évitant d'inutiles répétitions de calculs.

Exercice 24 (exemple de script)**.** *Que fait le script plotcov.sh ?*

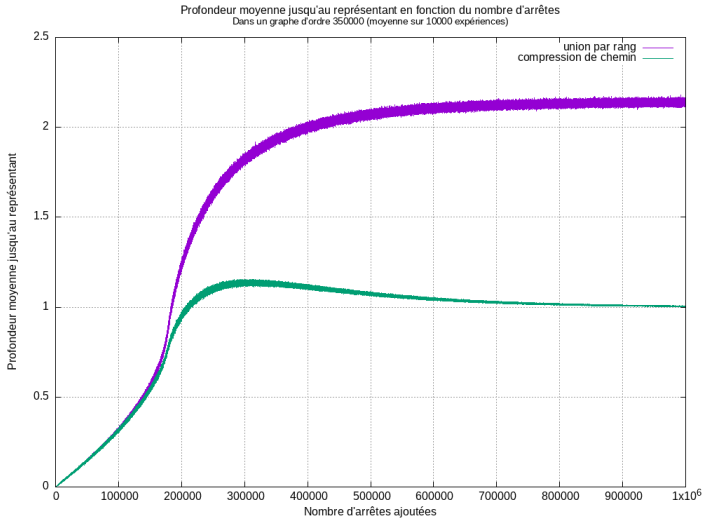


FIGURE 14 – Temps de calcul d'un représentant : compression de chemin vs union par rang, Sedkaoui Mathis 2023.

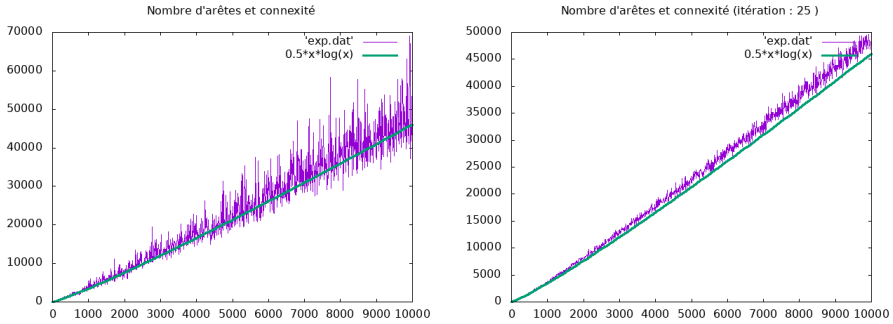


FIGURE 15 – Nombre d'arêtes et connexité.

Pratique 8 (scriptage empirique)**.** *Il s'agit de mettre en place une expérience numérique pour déterminer la fonction empirique σ décrite plus haut.*

(1) Implanter la structure d'ensembles disjoints dans des fichiers sources `disjoint.[ch]` *pour la bibliothèque des graphes.*

(2) Écrire une commande `sigma.exe` *pour réaliser un calcul empirique de $\sigma(n)$. La commande lit n sur la ligne de commande avant d'afficher n et $\sigma(n)$ sur la même ligne, deux nombres séparés par un espace.*

```
#!/bin/bash
if [ ! -f sigma.dat ] ; then
    for(( n=1; n < 1024; n++ )); do
        ./sigma.exe $n
    done > sigma.dat
fi
gnuplot <<< EOJ
   set term png
   set output 'sigma.png'
   plot 'sigma.dat', x*log(x)
EOJ
#$
```

LISTING 19 – script à compléter

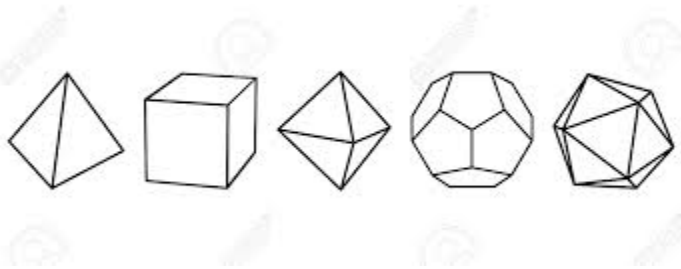


FIGURE 16 – Les cinq solides de Platon : tétraèdre, hexaèdre, octoèdre, dodécaèdre et icosaèdre sont-ils Hamiltonien ?

(3) Compléter le script LIST. *(19) pour pour dessiner et identifier avec* `gnuplot` *le graphe de la fonction empirique.*

6. GRAPHE HAMILTONIEN

6.1. **Le voyage autour du monde.** En 1856, l'astronome-mathématicien irlandais W. Hamilton, célèbre pour sa découverte du corps des quaternions, introduit le problème de l'existence d'un chemin fermé suivant les arêtes d'un polyèdre passant une et une seule fois par tous les sommets. En particulier, dans le jeu du voyage autour du monde, schématisé par un dodécaédre régulier (12 faces pentagonales) dont les sommets sont des villes, il s'agit de trouver une route fermée tracée sur les arêtes qui passe une et une seule fois par chaque ville.

Le dodécaédre est un graphe planaire apparaît hamiltonien dans sa représentation planaire. Le jeu se corse quand on cherche à compter le nombre de cycles hamiltoniens.

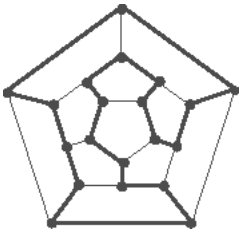


FIGURE 17 – Une route autour du monde.

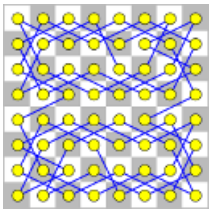


FIGURE 18

Notons que le contemporain de Philidor, Léonard Euler (encore lui) s'intéresse à des questions similaires. Dans "La Solution d'une question curieuse qui ne paraît soumise à aucune analyse", le mathématicien exibe la solution symétrique ci-contre. Il faut attendre une approche astucieuse de B. D. MacKay (1997) pour compter le nombre de tour de cavalier sur un échiquier 8x8 :

$$13267364410532 = 2 \times 2 \times 1879 \times 4507 \times 391661$$

Exercice 25. *Utiliser la relation d'Euler $f - m + n = 2$ pour dénombrer les nombres de faces, arêtes et sommets des cinq polyèdres de Platon.*

Problème 4 (chemin Hamiltonien)**.** *Etant donné un graphe. Existe-t-il un chemin élémentaire passant par tous les sommets du graphe ?*

Remarque 3. *Dans la littérature, le graphe est dit hamiltonien quand il existe un cycle hamiltonien, semi-hamiltonien quand il existe un chemin hamiltonien non cyclique.*

6.2. **Deux conditions suffisantes.**

Proposition 8 (G. A. . Dirac, 1952)**.** *Un graphe d'ordre n dont les sommets sont de degré supérieur ou égal $\frac{n}{2}$ est hamiltonien.*

Démonstration. □

Théorème 2 (Ø. Öre, 1961)**.** *Un graphe d'ordre n, dans lequel toute paire $\{x, y\}$ de sommets non adjacents vérifie :*

$$\deg(x) + \deg(y) \geq n,$$

possède un cycle Hamiltonien.

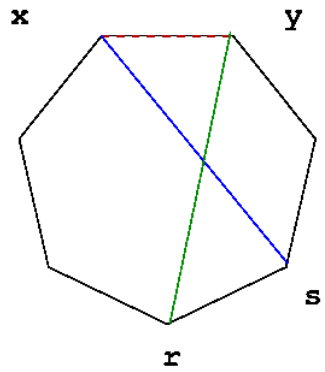


FIGURE 19

Démonstration. □

Démonstration. Par l'absurde, montrons qu'un graphe non hamiltonien ne peut pas vérifier les hypothèses du théorème. Quitte à ajouter des arêtes, on peut supposer le graphe non hamiltonien maximal. L'ajout d'une nouvelle arête xy ($x \neq y$) produisant un graphe hamiltonien, le graphe est obligatoirement semi-hamiltonien : il existe un chemin $x \rightsquigarrow y$ hamiltonien, reliant les deux sommets. Un argument de dénombrement permet alors d'affirmer que sur ce chemin, il existe deux sommets adjacents r et s tel que

$$xs \in A \quad \text{et} \quad ry \in A.$$

d'où l'on tire un cycle hamiltonien, et une contradiction. □

.

Le problème sonne comme celui du chemin eulérien, l'objectif de cette section est de se convaincre qu'ils sont en fait de difficulté sans doute très différente.

6.3. **Code de Gray.** La distance de Hamming entre deux mots binaires de m bits $x = (x_m \cdots x_2 x_1)$ et $y = (y_m \cdots y_2 y_1)$ compte le nombre de différence entre les composantes :

$$\mathrm{d_H}(x, y) = \sharp\{i \mid x_i \neq y_i\}.$$

L'hypercube de dimension m est un graphe dont les sommets sont les mots de m-bits, deux sommets x et y sont adjacents si et seulement si $\mathrm{d_H}(x, y) = 1$.

Exercice 26 (hypercube)**.** *Montrer que les hypercubes de dimension* 2, 3 *et* 4 *sont des graphes Hamiltonien. Montrer par induction sur la dimension qu'un hypercube est hamiltonien.*

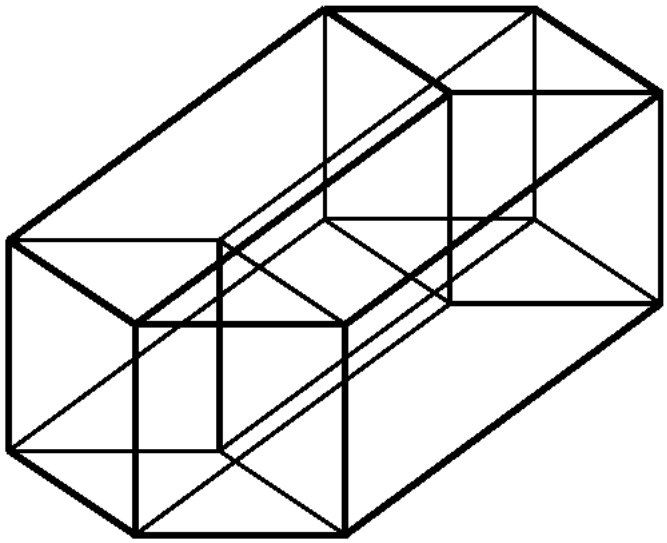


FIGURE 20
L'hypercube de dimension 4.

```
1  enumGray:
2  .LFB7:
3   .cfi_startproc
4   pushq %rbp
5   .cfi_def_cfa_offset 16
6   .cfi_offset 6, -16
7   movq %rsp, %rbp
8   .cfi_def_cfa_register 6
9   subq $32, %rsp
10  movl %edi, -20(%rbp)
11  movl -20(%rbp), %eax
12  movl $1, %edx
13  movl %eax, %ecx
14  sall %cl, %edx
15  movl %edx, %eax
16  movl %eax, -12(%rbp)
17  movl $0, -4(%rbp)
18  movl $1, -8(%rbp)
19  jmp .L5
20  .L6:
21  rep bsfl -8(%rbp), %eax
22  movl %eax, -16(%rbp)
23  movl -16(%rbp), %eax
24  movl $1, %edx
25  movl %eax, %ecx
26  sall %cl, %edx
27  movl %edx, %eax
28  xorl %eax, -4(%rbp)
29  movl -4(%rbp), %eax
30  movl -20(%rbp), %edx
31  movl %edx, %esi
32  movl %eax, %edi
33  call pbits
34  addl $1, -8(%rbp)
35  .L5:
36  movl -12(%rbp), %eax
37  cmpl %eax, -8(%rbp)
38  jb .L6
39  nop
40  nop
41  leave
42  .cfi_def_cfa 7, 8
43  ret
44  .cfi_endproc
```

```
45 .LFE7:
46 .size enumGray, .-
     enumGray
```

LISTING 20 – La procédure `enumGray` assemblée par `gcc` option -S du compilateur.

Exercice 27 (code de Gray)**.** *Le code* LIST. *(21) affiche un cycle Hamiltonien de l'hypercube de dimension m. Il est utilise la fonction `ctz` qui compte les zéros de poids faible d'un entier. Une opération sur la plupart des architectures. Retrouver son code opération dans le code mnémonique assembleur* LIST. *(20) de la fonction `enumGray` ?*

6.4. **Suite de de Bruijn.** Le graphe de de Bruijn de ransg n, est un graphe orienté d'ordre n dont les sommets sont les mots binaires de n-bit. Les arcs sont de la forme :

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \longrightarrow (x_2, x_3, \ldots, x_n, b), \quad b \in \{0, 1\}$$

Les circuits de ce graphe sont les suites de de Bruijn. Le graphe est Hamiltonien, et le nombre de circuits a été déterminé en 1864 par Camille Flye Sainte-Marie, voir la déclaration de de Bruijn.

Exercice 28. *Montrer que le nombre de circuit du graphe de de Bruijn sur n-bit est inférieur à 2^{n-1}.*

Pratique 9. *Ecrire un programme pour lister les suites de De Bruijn de rang 2, 3, 4, 5 et 6.*

7. Backtracking sur l'échiquier

Les algorithmes de backtracking parcourent l'arbre de décision d'un problème pour la recherche d'une solution. Rarement trés efficaces, ils permettent de résoudre les instances de petites tailles des problèmes difficiles de la théorie des graphe : cycle hamiltonien, clique maximale, couverture, ensemble stable etc...

7.1. **Les reines de l'échiquier.** De combien de façons peut-on placer n dames (reines) sur un échiquier sans qu'aucune de ces dames n'en contrôle une autre ? Le problème n'est pas facile à appréhender du point de vue mathématiques. Il semblerait que le grand Gauss n'ait pas réussi à trouver la totalité des 92 solutions pour l'échiquier standard. En convenant de noter $\mathfrak{Q}(n)$ le nombre de solutions, personne ne sait

```c
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

void pbits( int x, int m )
{
    while ( m--) {
        printf (" %d ", x & 1);
        x >>=1;
    }
    putchar('\n');
}

void enumGray( int  dimen )
{ int limite  = 1 << dimen;
    unsigned int x = 0, v;
    unsigned int i = 1;
    while ( i  < limite  ){
        v = __builtin_ctz  ( i  );
            x ^= 1 << v;
        pbits(x , dimen);
        i  = i + 1;
    }
}

int main( int argc, char* argv[] )
{
    enumGray( 3  );
}
```

Listing 21 – Énumération de Gray des mots binaires

prouver, par exemple, que pour n assez grand Q est croissante. De la célèbre encyclopédie des nombres en ligne OEIS de N. J. A. Sloane, nous tirons les première valeurs :

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mathfrak{Q}(n)$	1	0	0	2	10	4	40	92

La monotonie de Q est conjecturale mais notons le théorème de Pauls :

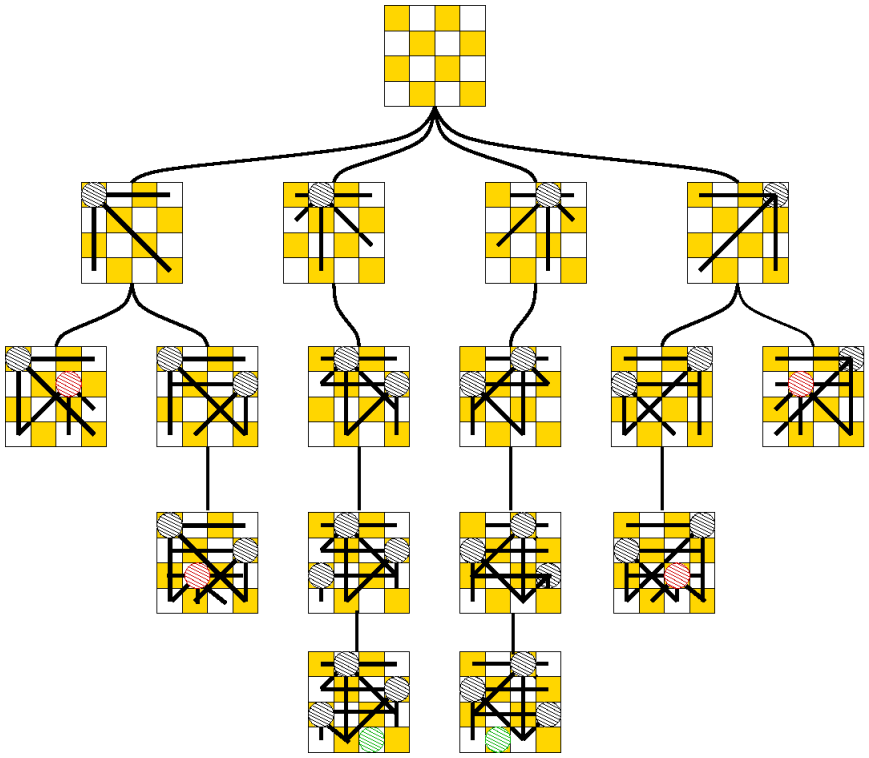


FIGURE 21 – L'arbre de backtracking pour $Q(4) = 2$.

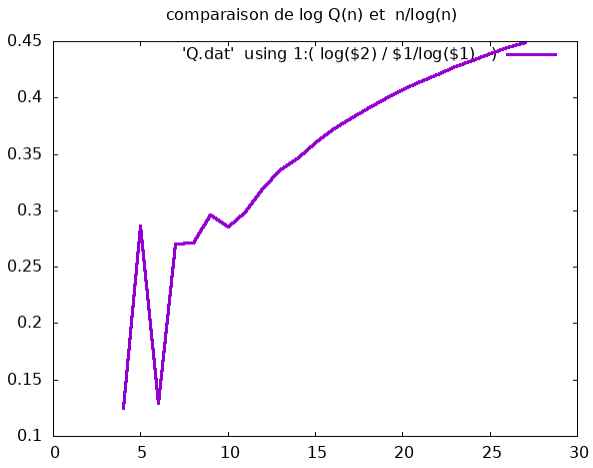


FIGURE 22 – Comparaison avec la fonction $n \log(n)$.

Problème 5 (Pauls, E. 1874)**.** *Pour* $n > 3$, $Q(n) > 0$.

```
placeDame( r : entier, pos : table )
si r > n alors
 traitement( pos )
 retourner
pour chaque colonne j
   si ( accept( r, j, pos ) ) alors
  pos[r] ← j
  place(r + 1, pos )


```

LISTING 22 – Une première solution algorithmique

Le nombre de solutions est comparable au nombre de permutations. On rappelle que $log(n!)$ est equivalent à $nlog(n) - n$. Le graphique FIG. (22), suggère l'équivalence $log(Q(n)) \sim 0.5n \log(n)$.

Un algorithme suffisant pour résoudre les instances de petites tailles est décrit par LIST. (22).

Exercice 29. *Compléter la fonction* `accept`

Pratique 10 (profilage de l'arbre de récursion)**.** .

(1) Implanter l'algorithme `Reine`*.*

(2) Faire des mesures de temps de calcul.

(3) Par extrapolation, quelles instances pourraient être traitées en 1 heure, 1 jour, 1 mois et 1 an ?

(4) Modifier les codes pour dessiner l'histogramme du nombre de noeuds visités par l'algorithme en fonction des niveaux.

(5) Modifier les codes pour dessiner l'arbre de récursion.

7.2. **Bit programming.** Pour manipuler des ensembles de petite taille, la représentation des ensembles par des mots de 64 bits donne des codes compacts. En langage C, les codes les plus courts sont souvent les plus efficaces ! Dans cette représentation, les entiers de 64 bits représentent des parties de $\{0, 1, \ldots, 63\}$. Il convient de définir le type :

```
typedef unsigned long long int ensemble;
```

L'entier 1777 représente l'ensemble $\{0, 4, 5, 6, 7, 9, 10\}$ car

```
bc <<< 'obase=2; 1777'
11011110001
```

Les entiers 0 et 1 représentent respectivement l'ensemble vide et le singleton de 0. La réunion de deux ensembles X et Y s'écrit $X|Y$, l'intersection devient $X\&Y$, et bien sûr, $\sim X$ le complémentaire de X. Comment écrire plus simplement :

$$(X|Y)\&(\sim(X\&Y)) =? \tag{1}$$

```
int mystibit( ensemble X )
{ int r;
  for ( r = 0; X & (X−1) ; r++);
  return r;
}
```

Exercice 30 (job)**.** *Une fois compris le résultat de la fonction* `mystibit`*, vous pourrez postuler sur des emplois de bit-programming !*

Exercice 31 (décryptage)**.** *Décrypter la source du* LIST. *(??).*

Exercice 32 (ctz)**.** *Il est possible de flirter davantage avec la machine en utilisant les opérations* CTZ *qui présentent sur la plupart des architectures. Étudier la question avec le manuel de* `gcc`*.*

7.3. Cycle Hamiltonien.

Exercice 33. *Implanter* `hamilton(int s, int k, ullong libre )` *pour compter le nombre de chemin hamiltonien dans un graphe.*

Pratique 11. *Écrire un programme pour trouver un tour de cavalier sur l'échiquier n par n. L'heuristique de la contrainte maximale permet d'éviter l'enlisement de la recherche ! Dessiner les plus beaux cycles !*

Exercice 34 (black & white)**.** *Montrer que si $n > 1$ est impair alors le graphe du cavalier sur un échiquier $n \times n$ n'est pas hamiltonien*

Exercice 35 (borderline)**.** *Montrer qu'il n'existe pas de cycle Hamiltonien dans le graphe du cavalier d'un échiquier $4 \times n$.*

```
1  #include <stdio.h>
2  #include <stdlib.h>
3  typedef unsigned long long int ullong;
4  int  n, count = 0;
5  void qbit( int pos, int left , int right , int row )
6  {
7  ullong x, y;
8  if ( ! row ){ count++; return; }
9  row--;
10 left  <<=1; right>>=1;
11 x = pos & (~left) & (~right);
12 while ( x ) {
13         y   = x;
14         x  &= (x - 1 );
15         y   = x ^ y;
16         qbit( pos & (~y), left | y, right | y , row );
17 }
18 }
19 int main( int argc, char* argv[] )
20 {
21 int n  = atoi( argv[1] );
22 ullong t = 1;
23 t = (t << n) - 1;
24 qbit ( t, 0, 0, n);
25 printf ( "\nQ(%d)=%d\n", n, count );
26 return 0;
27 }
```

7.4. **Stable-Clique-Domination.** Dans un graphe, un ensemble stable est une partie de l'ensemble des sommets composées de sommets deux à deux non adjacents. On fera attention au vocabulaire : la recherche d'un stable maximal est une opération aisée alors que la recherche d'un sensemble stable de taille maximale est un problème d'optimisation difficile. Le problème de décision associé est NP-complet. Les petites instances pourront être résolues par l'algorithme LIST. (**??**).

Exercice 36. *Montrer que le temps de calcul de l'algorithme est exponentiel dans le pire des cas.*

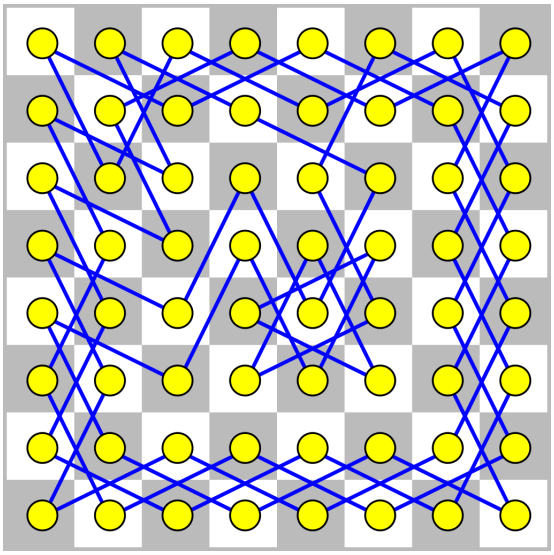


FIGURE 23 – Un remarquable tour de cavalier dû à Euler.

```
1  hamiltonien( s : sommet, k : entier )
2  si k = n alors
3   traitement()
4   retourner
5  pour chaque voisin t de  s
6     si libre[ t ] alors
7   libre[t]  ← faux
8   soluce[k] ← t
9   hamiltonien( t, k+1 )
10  libre[t]  ← vrai
```

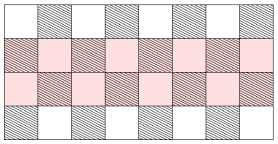


FIGURE 24 – Le graphe du cavalier dans l'échiquier $4 \times n$ n'est pas hamiltonien.

Exercice 37. *Implanter* `int maxstab( graphe g)` *pour déterminer la taille maximale d'un stable.*

```
maxStable( graphe G )
  si m(G) = 0 retourner n(G)
  s ← un sommet non isole de G
  I ← retirerSommet( {s}, G )
  i ← maxStable( I );
  V ← les voisins de s dans G
  J ← retirerSommet( V, I )
  j ← maxStable( J )
  retourner     ...
```

Exercice 38. *Une clique dans un graphe est un ensemble de sommets deux à deux adjacents. Comment réduire le problème de la recherche d'une clique à la recherche d'une partie stable ?*

8. Zoologie

8.1. Adjoint et complémentaire.

Définition 1 (graphe complémentaire)**.** *Le graphe complémentaire d'un graphe $G(X, U)$ est le graphe dont l'ensemble des sommets est X et dont l'ensemble des arêtes est précisément le complémentaire de U.*

Exercice 39. *Que peut-on dire du diamètre du complémentaire d'un graphe non connexe ?*

Pratique 12. *Ecrire une fonction* `graphe compl( graphe G )` *qui retourne le complémentaire du graphe G.*

Définition 2 (graphe adjoint)**.** *Le graphe adjoint (line graphe) d'un graphe $G(X, U)$ est le graphe d'incidence des arêtes de G. L'ensemble de ses sommets est U, une arête du graphe correspond à deux arêtes incidentes dans G.*

Exercice 40. *Exprimer le degré d'une arête rs dans $L(G)$ en fonction des degrés de ses extrémintés r et s dans G.*

Exercice 41. *Montrer que si G est connexe alors $L(G)$ est connexe.*

Exercice 42. *Montrer que si G est eulérien alors $L(G)$ est eulérien.*

Pratique 13. *Ecrire une fonction* `graphe adjoint( graphe G )` *qui retourne l'adjoint du graphe G.*

Exercice 43. *Montrer que l'adjoint d'un graphe eulerien est hamiltonien. La réciproque est fausse. Donner un contre-exemple.*

8.2. **Permutation.** On note $S(n)$ le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$. Les $n!$ éléments de $S(n)$ sont représentables par des tableaux de taille n. On dispose de la jolie formule de James Stirling pour approximer le nombre de pemutation :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} \quad \text{(Stirling)}$$

Etant donnés r éléments a_1, a_2, ..., a_r la permutation qui transforme a_1 en a_2, a_2 en a_3, ..., a_r en a_1 est un cycle de longueur r noté $(a_1 a_2 \ldots a_r)$. L'ensemble des a_i forme le support du cycle. Un cycle de longueur 2 est une transposition.

Exercice 44. *Ecrire le cycle $(abcde)$ en un produit de transpositions.*

Exercice 45. *Le groupe $S(n)$ n'est commutatif. Que peut on dire de deux cycles à supports disjoints ?*

On rappelle qu'une permutaion possède une décomposition en produit de cycles à support disjoints et que l'ordre de la permutation est égal au plus commun multiple des longueurs des cycle de la décomposition.

Exercice 46. *Observer le code et le script qui suivent. Commenter le résultat de ce script.*

```
1  #include <stdio.h>
2  #include <stdlib.h>
3
4  void doit( int t[], int n )
5  { int i;
6    for( i = 0 ; i < n; i++ )
7      printf ("%3d", t[i] );
8    putchar('\n');
9
10 }
11
12 int pi( int p, int t[], int
       n )
13 {
14 if ( p == n - 1 ) {
15     doit( t, n); return;
16 }
17 int i , tmp;
18 for( i = p ; i < n; i++ ) {
19   tmp = t[p] ;
20   t[p] = t[i] ;
21   t[i] = tmp ;
22             pi( p+1, t, n );
23   tmp = t[p] ;
24   t[p] = t[i] ;
25   t[i] = tmp ;
26 }
27 }
28
29 int main( int argc , char *
       argv[] )
30 {
31 int n = atoi( argv[1] );
32 int i, t[ 16 ];
33 for( i = 0; i < n; i++ ) t[
       i] = i;
34 pi( 0 , t, n );
35 return 0;
36 }
```

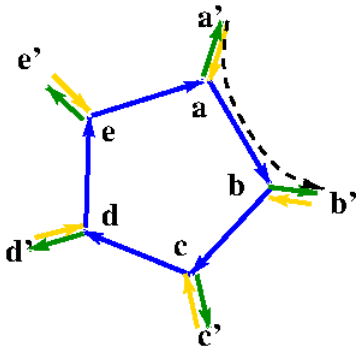


FIGURE 25 – conjugaison d'un cycle $f\sigma f^{-1}$.

```
::  gcc pi.c
::  for x in {1..10};
    do  /usr/bin/time --format="$x cpu=%U" ./a.out $x  \
              | grep 0  | sort | uniq -c | wc -l; done
```

```
1 cpu=0.00
1
2 cpu=0.00
2
3 cpu=0.00
6
4 cpu=0.00
24
5 cpu=0.00
120
6 cpu=0.00
720
7 cpu=0.00
5040
8 cpu=0.02
40320
9 cpu=0.20
362880
10 cpu=2.20
3628800
```

Exercice 47 (décomposition-ordre)**.** *Coder une fonction pour calculer l'ordre d'une permtuation. Préciser le mode d'emploi en fonction de n ...*

La conjugaison est une opération qui facilite l'analyse des groupes non commutatif. Rappelons que $f \circ s \circ f^{-1}$ est la permutation conjugué de s par la permutation f.

Lemme 3 (conjugaison)**.** *Le conjugé d'un cycle de longueur $r > 0$ est un cycle de longueur r. Plus précisément, le conjugué du cycle $(a_1 a_2 \dots a_r)$ par une permutation π est égal au cycle $(\pi(a_1)\pi(a_2)\dots\pi(a_r))$.*

Exercice 48. *Montrer que l'ensemble des transpositions est un sustème générateur de $S(n)$ permutations.*

Exercice 49. *Montrer que les transpositions de la forme $(i, i+1)$ engendrent toutes les permutations.*

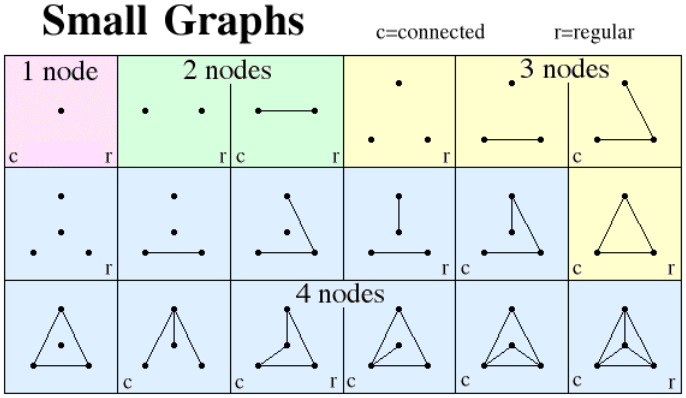


FIGURE 26 – Les petits graphes à isomorphisme près.

Exercice 50. *Montrer que le groupe des permutations peut être engendré par les deux éléments* $\tau : (12)$ *et* $\sigma : (12 \dots n)$.

8.3. **Isomorphisme de graphe.** Un isomorphisme du graphe $G(X, U)$ sur le graphe $G'(X', U')$ est une bijection $f : X \to X'$ qui conserve l'adjacence : toute arête $xy \in U$ est transformée en une arête $f(x)f(y) \in U'$. Le problème d'isomorphisme de graphe qui consiste à décider de l'existence d'un isomorphisme entre deux graphes est un des rares problèmes NP dont on ne sait pas (encore) dire s'il est polynomial ou bien NP-compmlet.

Les isomorphismes du graphe $G(X, U)$ sur lui même forment un sous groupe du groupe des permutations de l'ensemble des sommets X, on le note $\text{AUT}(G)$.

Lemme 4 (classe)**.** *Le nombre de graphes de sommets* X *qui sont isomorphes à* G *est égal au quotient de* $n!$ *par* $\text{AUT}(G)$.

Démonstration. □

Notons $\text{CLS}(n)$ le nombre de classes d'isomorphie de graphe d'ordre n. Pour une permutation π, on note $\text{FIX}(\pi)$ le nombre de graphes fixés par la permutation π. La célèbre formule de Burnside donne :

Lemme 5 (Burnside)**.**

$$\sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \text{FIX}(\pi) = n! \times \text{CLS}(n). \tag{2}$$

Exercice 51 (Burnside)**.** *Combien de graphes d'ordre* 3 *sont fixés par un cycle de longueur 3 ? Combien de graphe sont fixés par une transposition ? Appliquez la formule de Burnside pour* $n = 3$.

D'après la suite A000088 de l'encyclopédie OEIS, il y a 12345 classes d'isomorphie de graphe d'ordre 8 ayant au moins une arête.

```
A000088  Number of graphs on n unlabeled nodes.
(Formerly M1253 N0479)  217 1, 1, 2, 4, 11, 34, 156, 1044,
12346, 274668, 12005168, 1018997864, 165091172592...
```

Exercice 52 (complément isomorphe)**.** *Trouver un exemple de graphe isomorphe à son complémentaire.*

Exercice 53 (adjoint isomorphe)**.** *Trouver un exemple de graphe isomorphe à son adjoint.*

Pratique 14. *Comment énumérer les différentes classes de graphe pour une valeur de n raisonnablement petite ?*

8.4. **invariant.** Un invariant à valeur dans un ensemble X, est une application j vérifiant :

$$G \sim G' \Longrightarrow j(G) = j(G')$$

Exercice 54. *Donner une quelques exemples d'invariants.*

Par exemple, la distribution des degrés des sommets d'un graphe est un invariant. Il est discriminant pour les graphes d'ordre : 1, 2, 3 et 4.

Exercice 55 (invariant distribution)**.** *Il existe deux classes de graphes d'ordre 5 admettant la distribution : 1 sommet de degré 1, 3 sommets de degré 2 et 1 sommet de degré 3. Dessinez !*

La distribution des degrés d'un graphe d'ordre n ayant m arêtes forme une "partition" de l'entier $2m$ en n parts. Si n_k désigne le nombre de sommets de degré k alors

$$\sum_{k=0}^{n} n_k k = 2m, \quad n = \sum_{k=0}^{n} n_k.$$

Dans la littérature, une partition de n est une suite croissante de n entiers stricement positifs $(n_k)_{k=1}^{n}$ telle que :

$$\sum_{k=1}^{n} n_k k = n.$$

Pratique 15 (énumération de partition)**.** *Coder une fonction récursive* `int enumpart( n )` *pour énumérer toutes les partitions d'un entier n.*

On note $P(n,k)$ le nombre de partitions de n en k parties. Établir que $P(n,n) = P(n,1) = 1$, $P(n,k) = 0$ si $k > 0$ et dans les autres cas :

$$P(n,k) = P(n-1,k-1) + P(n-k,k)$$

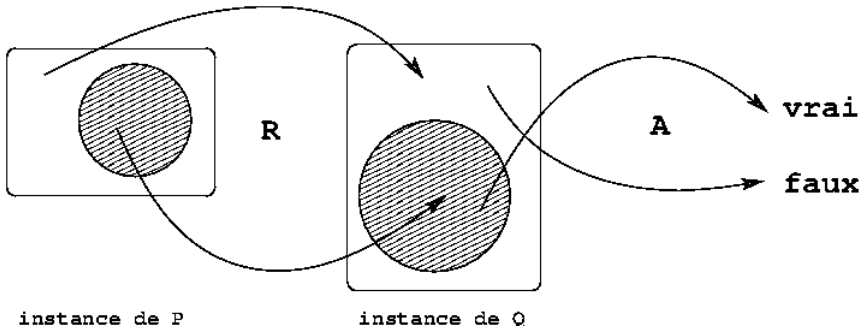


FIGURE 27 – schéma d'une réduction R de $\mathcal{P}$ vers $\mathcal{Q}$.

Pratique 16 (dénombrement de partition)**.** *Coder une fonction récursive* `int partcpt( n, k )` *pour calculer* $P(n,k)$.

8.5. **Classfication.**

Proposition 9. *Le groupe* $\mathfrak{S}_n$ *peut être engendré une transposition et un cycle.*

Démonstration. □

Pour une petite valeur de n, on peut représenter les graphes d'ordre n par des mots binaires. On peut utiliser la proposition précédente pour parcourir l'orbite d'un graphe G par un parcours en profondeur.

Pratique 17 (orbite)**.** *Écrire une fonction* `void repres(int n)` *qui énumère toutes les classes d'isomorphies en précisant la taille des orbites et les ordres des stabilisateurs.*

9. RÉDUCTION

Nous disposons d'un algorithme rapide pour décider de l'existence d'un cycle eulérien dans un graphe, et d'un algorithme exponentiel pour décider de son caractère hamiltonien ou pas. Comment prouver que le second problème est réellement plus dificile que le premier ?

9.1. **réduction polynomiale.** Un problème de désision $\mathcal{P}$ se réduit polynomialement à un problème de décision $\mathcal{Q}$ quand il existe un algorithme polynomial R qui transforme les instances positive de $\mathcal{P}$ en des instances positives de $\mathcal{Q}$, et les instances négatives de $\mathcal{P}$ en des instances négatives de $\mathcal{Q}$. Dans cette situation, par composition, d'un algorithme A de résolution du problème Q on déduit un algorithme de résolution du problème $\mathcal{P}$.

Remarque 4. *L'existence d'une réduction polynomiale de $\mathcal{P}$ vers $\mathcal{Q}$ permet de résoudre les instances de $\mathcal{P}$ au moyen d'un algorithme de résolution du problème $\mathcal{Q}$. Autrement dit, le problème $\mathcal{P}$ est théoriquement plus facile que le problème $\mathcal{Q}$.*

9.2. **Euler vs Hamilton.** Considérons le graphe de la figure FIG. (28) composé de 6 sommets de différentes couleurs reliés par 7 arêtes le graphe est semi-eulérien.

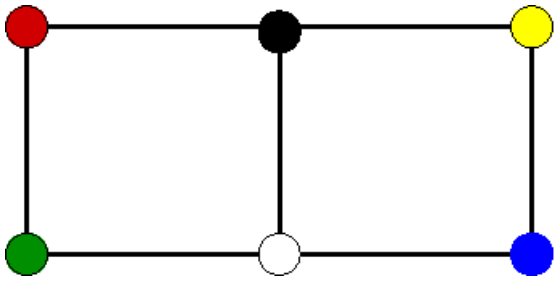


FIGURE 28

Par définition, un chemin dans un graphe est une suite de sommets, mais c'est aussi une suite d'arêtes. Ainsi, pour un chemin :

$$a - b - c - d - e - f - g - h$$

dans un graphe G peut être vu comme un chemin

$$a - ab - b - bc - c - cd - d - de - e - ef - f - fg - g - gh - h$$

dans un graphe G' dont les sommets sont à la fois des arêtes et des sommets de G.

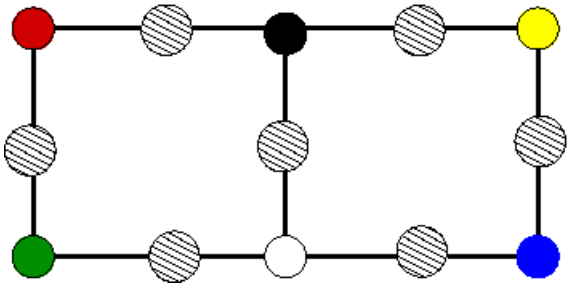


FIGURE 29

Considérons la transformation d'un graphe $G(S, A)$ en un graphe H dont les sommets sont obtenus à partir des sommets et des arêtes de G. Chaque arête de G est une arête de H. Á chaque sommet s de degré d

dans G est associée une clique C_s d'ordre d. On ajoute des arêtes dans H de sorte que chacune des arêtes incidentes à un sommet s dans G soit adjacente à un et un seul des sommets de la de c_s.

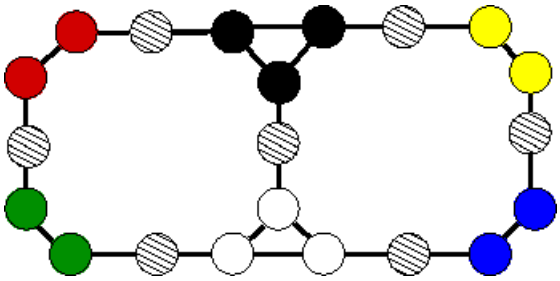


FIGURE 30

Remarque 5. *La théorie de la complexité montre que tout problème d'une classe plus large que la classe polynomiale se réduit au problème du cycle hamiltonien.*

Exercice 56. *Comment réduire le problème de la connexité au problème du cycle hamiltonien ?*

9.3. **Classe Non déterministe Polynomiale.** La classe **NP** est constituée des problèmes de décision dont on peut vérifier une solution en temps polynomial.

Le problème du cycle eulérien est dans la classe **P**. Comme tous les problèmes de la classe **P**, le problème est aussi dans la classe **NP**. Le problème du cycle hamiltonien est dans la classe **NP** car il est facile de vérifier quand un chemin est un cycle hamiltonien. Une des questions les plus importante posée par l'informatique théorique se résume à :

Existe-t-il un algorithme polynomial pour résoudre le problème du cycle hamiltonien ?

9.4. **Problème NP-complet.** Un problème $\mathcal{Q}$ de la classe **NP** est dit **NP**-complet si pour tout problème de la classe **NP**, il existe une réduction vers $\mathcal{Q}$. Le théorème de Cook est le point de départ de la théorie de la complexité en informatique théorique. La preuve est hors au programme, quelques conséquences concerne notre sujet.

Théorème 3 (Cook, 1972)**.** *Le problème* 3-SAT *est* **NP***-complet.*

Démonstration. Voir le cours de Jean-Pierre Zanotti. □

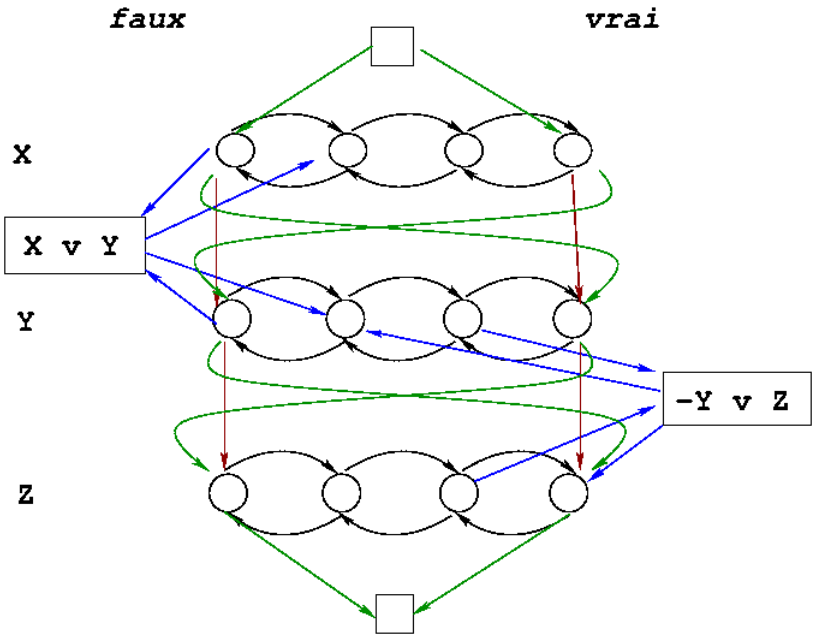


FIGURE 31 – gadget de réduction 3-SAT $\langle$ HAM†.

Il faut expliquer 3-SAT. Soient x_1, x_2, ..., x_n un ensemble de variables logiques. Les formules x_i et $\bar{x}_i$ sont des littéraux. Une clause est une disjonction de littéraux distincts. Le nombre de littéraux qui compose une clause est le poids. Une conjonction de clauses, est une forme normale conjonctive.

Problème 6 (k-SAT)**.** *Etant donné une forme normale conjonctive* Φ *dont toutes les clauses sont de poids inférieur ou égal à* k*. Existe-t-il une solution au problème* $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *?*

Remarque 6. *Le problème* 2-SAT *est dans la classe* **P***. Un des objectifs de ce cours est de vérifier ce point !*

9.5. **Gadget.**

Théorème 4. *Le problème du cycle Hamiltonien est* **NP***-complet.*

9.6. **Primalité.** L'histoire du problème de décision PREMIER mérite le détour. Tout d'abord le problème opposé i.e. le problème COMPOSÉ est trivialement dans la classe **NP**. En effet, pour vérifier qu'un nombre est composé, il suffit de fournir deux facteurs appropiéés.

Proposition 10 (V. Pratt, 1975)**.** *Le problème* PREMIER *est dans la classe* **NP***.*

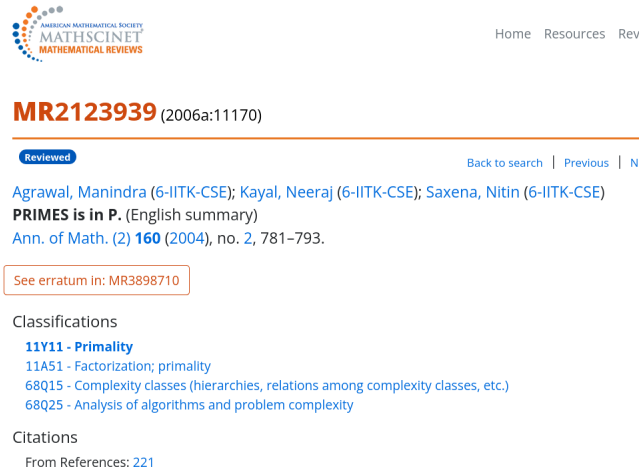


FIGURE 32 – PREMIER est dans la classe P !

Démonstration. Pour certifier qu'un entier n est premier, ll s'agit principalement de fournir un résidu d'ordre $n-1$. Je renvoie le lecteur vers un de mes livres favoris [18]. □

On déduit du résultat de Pratt que le problème PREMIER est dans à la fois dans la classe **NP** et dans la classe co-**NP**. Notons que c'est bien le cas de tous les problèmes polynoniaux. Une trentaine d'années plus tard, A. Manindra, K. Neeraj et S. Nitin recevront le prix Gödel pour avoir établi que ce problème de décision est bien dans la calsse P.

10. Arbre couvrant minimal

10.1. **Arborescence.** En théorie des graphes, un arbre est un graphe connexe acyclique c'est-à-dire sans cycle. Un ensemble d'arbre est une forêt...

Exercice 57 (détection de cycle)**.** *Modifier le parcours résursif en profondeur pour détecter la présence d'un cycle dans un graphe.*

Exercice 58 (coloration-cycle de longueur impair)**.** *Comment détecter la présence d'un cycle de longeur impair dans un graphe.*

Théorème 5 (Big Equivalence on Tree)**.** *Soit $G(S,A)$ un graphe d'ordre n à m arètes. Les 6 assertions qui suivent sont équivalentes :*

(1) G est connexe et acyclique ;

(2) G est acyclique et $m = n-1$;

(3) G est connexe et $m = n-1$;

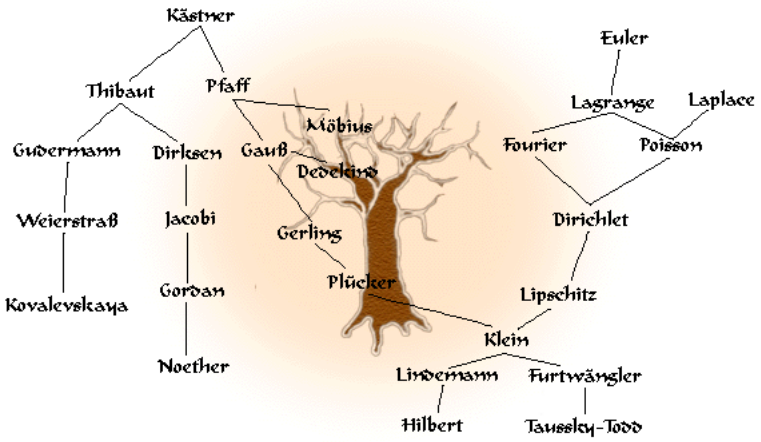


FIGURE 33 – La décoration de l'arbre *mathematics genealogy project* inspire le respect mais ce n'est pas un arbre au sens de la théorie des graphes.

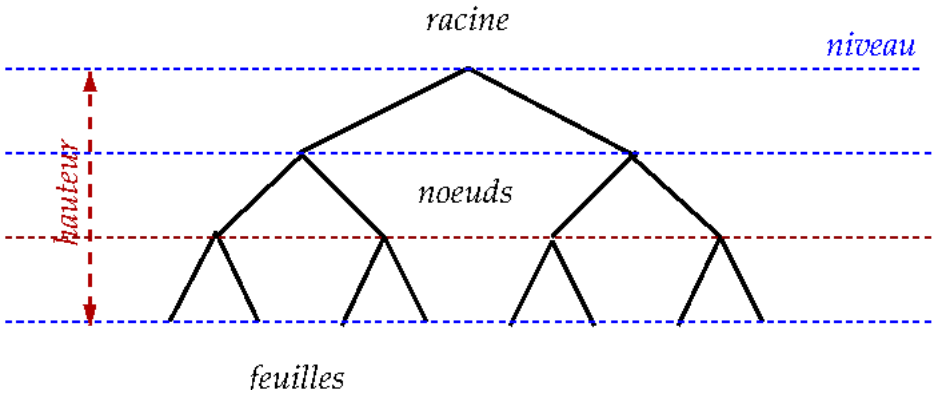


FIGURE 34 – Un arbre binaire parfait de hauteur 4 à 15 noeuds organisés sur 4 niveaux et 8 feuilles au niveau 3. Conformément à l'usage algorithmique, la racine est en l'air sur le niveau 0 !

(4) G est acyclique et l'ajout d'une arête définit un et un seul cycle ;

(5) G est connexe et la suppression d'une arête déconnecte le graphe ;

(6) deux sommets quelconques sont reliés par un et un seul chemin.

Démonstration. Les plus jolies preuves sont souvent les plus courtes ! Montrons par exemple, que (1) implique (3). On procède par induction sur le nombre n de sommets. Le graphe possède obligatoirement une

```
1  PPV( t : tableau )
2  objet  a, b, c, d
3  si ( t = 2 ) alors
4      si  t[0] > t[1]  alors t[0]⟷t[1]
5      retourner  (t[0], t[1] )
6      fsi
7  fsi
8  (a, b)  ← PPV ( gauche t )
9  (c, d)  ← PPV ( droite t )
10 si a < c alors
11  retourner c < b ? (a,c) : (a,b)
12 sinon
13  retourner a < d ? (c,a) : (c,d)
14
15 fsi
```

LISTING 23 – Diviser pour régner

feuille, c'est-à-dire un sommet de degré 1. Le graphe induit par suppression de ce sommet est un arbre d'ordre $n-1$ et possède (induction) $n-2$. □

Un arbre couvrant d'un graphe est un graphe partiel qui est lui même un arbre.

Proposition 11. *Un graphe possède un arbre couvrant si et seulement s'il est connexe.*

Exercice 59 (plus grandes valeurs)**.** *Tout le monde connaît l'algorithme de sélection qui procède en $n-1$ comparaisons pour déterminer la plus grande valeur d'un tableau de n objets.*

(1) Montrer qu'il est impossible de trouver le maximum en moins de $n-1$ comparaisons.

(2) Déduire qu'il faut au plus $2n-3$ comparaisons pour déterminer les deux plus grandes valeurs.

(3) L'algorithme `PGV( t )` fondé sur le principe algorithme "diviser pour régner" détermine les deux plus grandes valeurs de t. Combien de comparaisons sont réalisées pour une table de n objets ?

(4) En s'inspirant des tournois de tennis, il n'est pas si difficile de se convaincre que $c(n) := n-1+\lceil \log_2 n \rceil - 1$ suffisent pour résoudre le problème des deux plus grandes valeurs. Comment ?

Le logicien Charles Dodgson (Lewis Carroll) a pointé la difficulté de cette question en affirmant par une démonstration incomplète qu'il est impossible de déterminer les 2 plus grandes valeurs en moins de $c(n)$ comparaisons.

10.2. **Graphe pondéré.** Un graphe muni d'une application réelle définie sur ses arêtes est un graphe pondéré. Notons $w\colon A \to \mathbb{R}$ cette application, on dit que le graphe est pondéré par w. On définit alors le coût d'un chemin μ de longueur : x_0, x_1, ..., x_l par

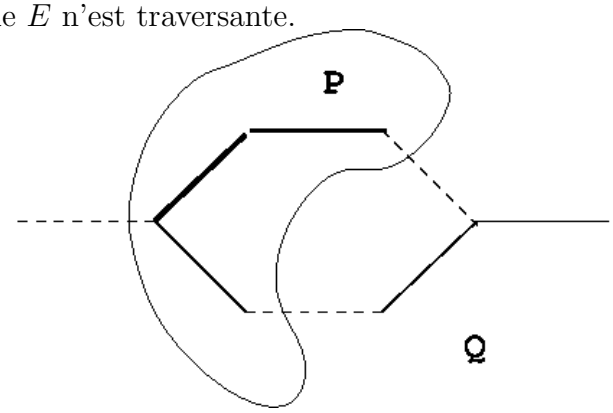
$$\mathrm{wt}(\mu) = \sum_{i=1}^{l} w(x_{i-1}x_i)$$

Plus généralement, le coût d'un graphe partiel est la somme des poids de ses arêtes.

Problème 7 (arbre couvrant minimal)**.** *Étant donné un graphe pondéré, déterminer le coût minimal de ses arbres couvrants.*

Il s'agit d'un problème d'optimisation de complexité polynomiale, parmi les solutions classiques, les algorithmes de Prim, Kruskal sont détaillés dans cette note.

10.3. **Stratégie glouton.** Une coupure d'un graphe est une partition de l'ensemble des sommets en deux ensembles P et Q. Une arête xy est dite traversante si les deux sommets x et y ne sont ni dans P ni dans Q. Une coupure respecte un ensemble d'arêtes E si aucune des arêtes de E n'est traversante.



Lemme 6. *(arête sûre) Soit E une partie de l'ensemble des arêtes d'un arbre couvrant minimal Y. Si xy est une arête traversante d'une coupure du graphe respectant E alors il existe un arbre couvrant minimal passant par xy et toutes les arêtes de E.*

```
KRUSKAL( G, w )
pour chaque sommet s
   singleton(s)
r ← 0
pour chaque arete xy par ordre croissant
     si representant(x) != representant(y)
 alors union(x, y )
     fsi
     r ← r + w(xy)
retourner r
```

LISTING 24 – algorithme de Kruskal

Démonstration. On considère une extension couvrante de l'arbre Y. Pour des raisons de connexité, il passe forcément par une arête traversante ab. L'ajout de l'arête xy produit un et un seul cycle qui passe par ab, arête que l'on peut supprimer en conservant un arbre couvrant, qui reste de poids minimal. □

Les algorithmes de Prim et Kruskal utilisent une stratégie glouton fondée sur le lemme l'arête sûre pour contruire un arbre couvrant minimal d'un graphe.

10.4. **Algorithme de Kruskal.** L'algorithme de Kruskal (1956) s'appuie sur la structure d'ensembles disjoints pour construire un arbre couvrant minimal. Les arêtes de l'arbre sont découvertes de proche en proche. Les arêtes sont parcourues par poids croissant. Dans cet ordre, une arête xy reliant deux classes distinctes est ajoutée à l'arbre couvrant. L'opération dominante est de trier les arêtes.

Théorème 6. *Le temps de calcul de l'algorithme de Kruskal sur un graphe connexe d'ordre n et m arêtes est* $\mathrm{O}(m \log m + m \log n)$.

Démonstration. L'algorithme commence par trier m arêtes, d'où le terme $m \log m$. Le second terme correspond au calcul d'au plus m de représentants d'une struture d'ensembles disjoints. □

10.5. **Algorithme de Jarnik-Prim.** L'algorithme de Prim s'appuie sur une file de priorité.

Théorème 7. *Le temps de calcul de l'algorithme de Prim sur un graphe connexe d'ordre n et m arêtes est* $\mathrm{O}(n \log n + m \log n)$.

```
JARNIK–PRIM( G, w )
r ← 0
initialiser une file de priorite
p ← ordre( G )
tant que  p > 1
 s = prioritaire()
 r ← r + cle [ s ]
 pour chaque t voisin de s
       misajour( s, t)
 p ← p−1
retourner r
```

LISTING 25 – algorithme de Jarnik-Prim

Démonstration. L'extraction d'un élément prioritaire, la mise à jour d'une file de priorité sont de complexité $O(\log n)$. Le second terme compte globalement la découverte et la mise à jour des priorités des voisins. □

Exercice 60. *On considère les instances de graphe d'ordre n avec $f(n)$ arêtes. Quel choix faire entre Prim ou Kruskal en fonction de f ? Attention aux pièges...*

$\log n$	λn	$n \log n$	$n\sqrt{n}$
?	*?*	*?*	*?*

Remarque 1 (Lathuile)**.** *La structure de tas de Fibonacci (hors programme) de Michael Fredman et Robert Tarjan publiée en 1987 permet de réaliser des mises à jour efficaces sur la file de priorité, pour obtenir une complexité arêtes est* $O(n \log n + m)$.

10.6. **algorithme de Diijstra.** L'algoritme de Diijstra un parfait analogue de l'algorithme de Prim permert de calculer les plus court chemins d'origine donnée pour une pondération positive.

Exercice 61. *Expliciter la fonction* `relacher( u, v, w ))` *de l'algorithme Diijstra.*

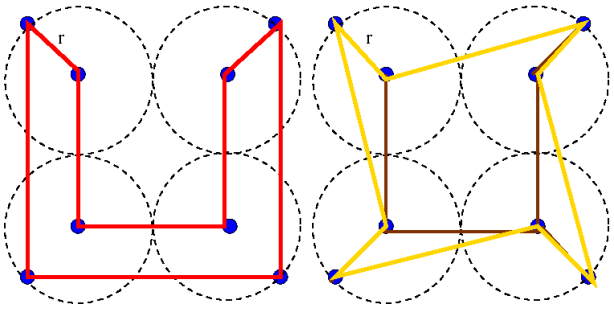
L'algorthme de Strassen utilise le principe "diviser pour régner" pour calaculer le produit de deux matrices carrées. Il est de complexité $\Theta(n^{n \ll \frac{7}{8}n})$ sur les matrices $n \times n$.

Exercice 62 (triangle)**.** *Comment compter le nombre de triangle d'un graphe ?*

```
1  DIJKSTRA( G, w, s )
2  E ← ensemble vide
3  F ← sommets de G
4  d ← [+inf, +inf, ..., +inf]
5  d [s] ← 0
6  tantque non vide ( F )
7   u ← extraire( E, F )
8   retirer u de F
9   ajouter u a  E
10  pour chaque voisin v de u
11        relacher( u, v, w)
```

LISTING 26 – algorithme de Dijkstra

10.7. **Approximation.** Le problème du voyageur de commerce est un problème d'optimistation qui consiste à déterminer une tournée optimale dans un graphe pondéré. Il s'agit donc de déterminer cycle hamiltonien de coût minimal. Notons $T^\star$ une tournée de optimale, de coût $\mathrm{wt}(T^*)$. Le problème est NP-dur et pour $\mathbb{R} \ni \alpha \geq 1$, on peut être satisfait de déterminer une α-approximation i.e. une tournée de coût au plus $\alpha\mathrm{wt}(T^*)$.



Théorème 8. *Le parcours raccourci d'un ACM d'un graphe métrique complet est une 2-approximation du problème du voyageur de commerce.*

Démonstration. □

Pratique 18. — *Implanter la 2-approximation du Théorème 8.*
— *Appliquer aux nuages de points.*

Exercice 63. *Comme améliorer une tournée dans le plan Euclidien quand deux de ses arêtes sont sécantes ?*

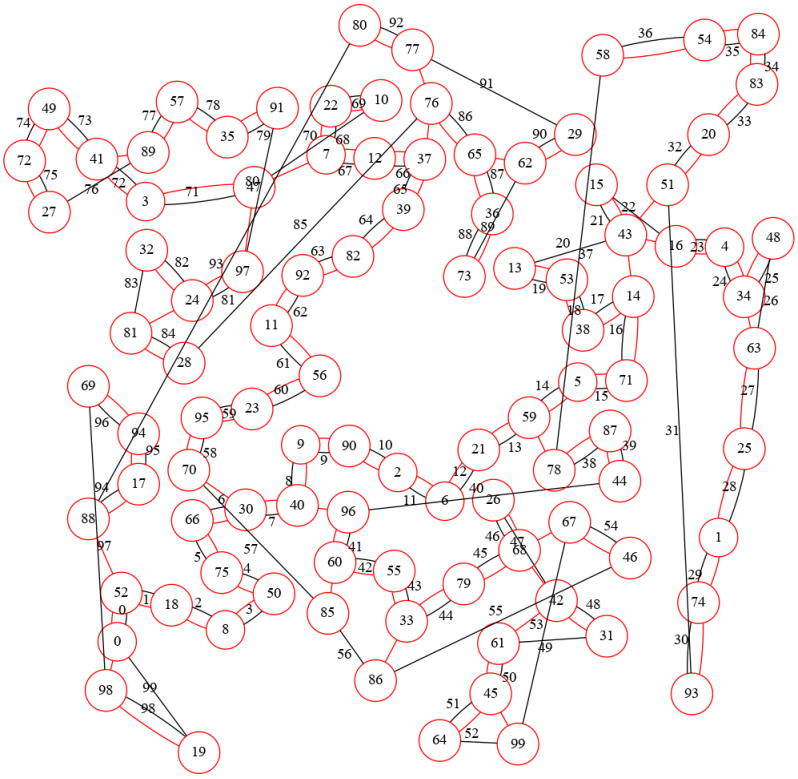


FIGURE 35 – Un exemple de 2-approximation sur un nuage de 100 points, les arêtes de l'ACM sont rouges, celles de la tournée sont en noire (Stéphane Rossi)

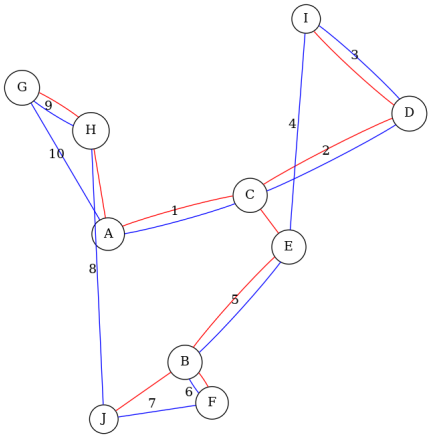


FIGURE 36 – Un exemple de 2-approximation sur une nuage de 10 points. En rouge, un arbre couvrant minimal, la tournée en bleue (Alexandre Jaillant).

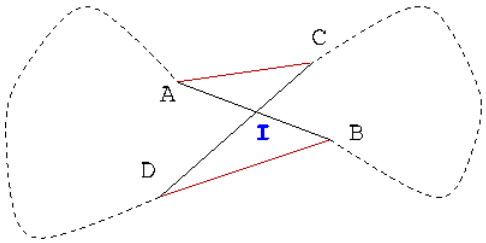


FIGURE 37 – Avec le croisement des segments $[AB]$ et $[CD]$, la tournée est améliorable... Exercice !

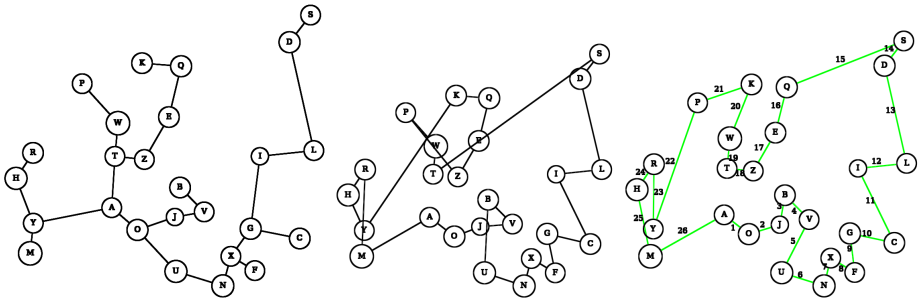


FIGURE 38 – Amélioration de la tournée par élimination des croisements (Alexandre Jaillant).

10.8. $\frac{3}{2}$**-approximation de Christophides.** Au milieu des années 70, Nicos Christophides a proposé un algorithme de $\frac{3}{2}$-approximation pour le graphe complet métrique. Un couplage d'un graphe est un ensemble d'arêtes deux à deux non incidentes. Un couplage de cardinal maximal est dit maximal. Il est parfait quand il recouvre tous les sommet. Un couplage optimal d'un graphe pondéré est un couplage maximal qui minimisant le coût. L'algorithme des fleurs et des pétales d'Edmonds (1965) est un algorithme polynomial (hors programme) qui détermine un couplage maximal dans un graphe qui peut être adapté pour déterminer un couplage optimal dans un graphe pondéré.

Exercice 64. *On considère la procédure suivante appliquée à un graphe complet métrique $G(S,U)$ dont une tournée optimale est notée T.*

(1) Déterminer les arêtes Y un arbre couvrant minimal G.

(2) Comparer $\mathrm{wt}(Y)$ *et* $\mathrm{wt}(T)$.

(3) L'ensemble I des sommets impairs de Y est pair. vrai ou faux ?

(4) On note G' le graphe induit sur I.

(5) G' possède un couplage parfait. Pourquoi ?

(6) *On note M un couplage parfait optimal de G'. Comparer* $\mathrm{wt}(M)$ *et* $\mathrm{wt}(T)$.

(7) *On note G'' le graphe partiel $G''(S, Y \cup M)$.*

(8) *Le graphe G'' est-il connexe ?*

(9) *Les sommets de G'' sont tous pairs. Pourquoi ?*

(10) *G'' possède un cycle eulérien E. Pourquoi ?*

(11) *Comparer* $\mathrm{wt}(M) + \mathrm{wt}(Y)$ *et* $\mathrm{wt}(E)$.

(12) *On* $\mathrm{wt}(E) \leq \frac{3}{2}\mathrm{wt}(Y)$. *Pourquoi ?*

(13) *Comment obtenir une tournée R à partir de E ?*

(14) *Comparer* $\mathrm{wt}(R)$, $\mathrm{wt}(E)$ *et* $\mathrm{wt}(T)$.

11. Coloriage des sommets

11.1. **Problème de coloration.** Une k-coloration des sommets d'un graphe est une application $f :: S \to \{1, 2, \ldots, k\}$ tel que :

$$\forall x, y \in S, \quad xy \in A \Longrightarrow f(x) \neq f(y).$$

On peut noter $\gamma_G(k)$ le nombre de colorations. Le plus petit entier k tel que $\gamma_G(k) > 0$ est le nombre chromatique du graphe G, souvent noté χ_G.

Il n'est pas difficile de voir qu'un arbre est 2-colorable. Le nombre chromatique du triangle est 3, celui du cycle de longueur 4 est 2. Plus généralement,

Proposition 12 (graphe bicolore)**.** *Un graphe est bicolore si et seulement s'il ne possède pas de cycle de longueur impair.*

Démonstration. Un bon exercice ! □

Problème 8 (K-coloriage)**.** *Etant donné un graphe, une constante $K > 2$. Le graphe est-il K-coloriable.*

Pour $K > 2$, le problème du K-coloriage est NP-complet.

11.2. **Coloriage glouton.**

Théorème 9 (Majoration)**.** *Pour tout graphe G, $\chi_G \leq \Delta_G + 1$.*

Démonstration. On construit une k-coloration avec $k \leq \Delta_G + 1$ en colorant les sommets dans un ordre arbitraire ave la plus petite couleur disponible. □

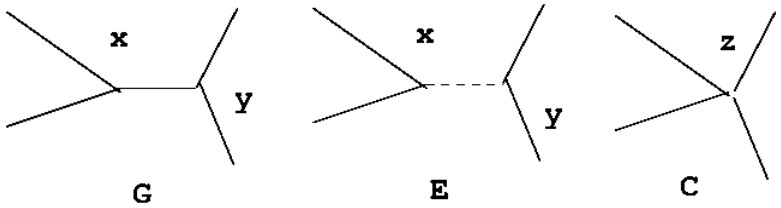


FIGURE 39 – La transformation de Birkhoff. De gauche à droite, les graphe G, E et C.

11.3. **Polynôme chromatique.**

Théorème 10 (Birkhoff)**.** *L'application $k \mapsto \gamma_G(k)$ est polynomiale de degré égale à l'ordre du graphe.*

Démonstration. On raisonne par induction. Partant d'une arête xy, on considère deux graphes. Le graphe E obtenu par suppression de l'arête xy, et le graphe C obtenu par contraction de l'arête xy en un sommet z. Toutes les k-colorations de G sont des k-colorations de E. Les colorations de E qui ne sont pas des colorations de G s'identifient aux colorations de C :

$$\gamma_G(t) = \gamma_E(t) - \gamma_C(t). \tag{3}$$

On remarque que pour un graphe sans arête d'ordre n, le nombre de k-colorations est k^n. □

Exercice 65. *Le polynôme chromatique d'un graphe d'ordre n est unitaire de coefficient constant nul, à coefficient entiers. Il se décompose*

$$\gamma_G(t) = t(t-1)\cdots(t-k+1)P(t)$$

où P est un polynôme sans racines entières et k le nombre chromatique de G.

Exercice 66. *Déterminer le polynôme chromatique d'un arbre d'ordre n, d'un cycle d'ordre n.*

11.4. **Coloriage.** L'algorithme de backtracking pour colorier les n sommets d'un graphe possède exactement la même structure que l'algorithme utilisé pour résoudre le problème des reines. Pour colorier les sommets avec k couleurs, on commence par marquer les sommets avec la couleur nulle, ils sont transparents. Ensuite, les sommets sont coloriés par ordre croissant. La fonction `accept(s,c)` vérifie s'il est possible de colorier le sommet s avec la couleur c.

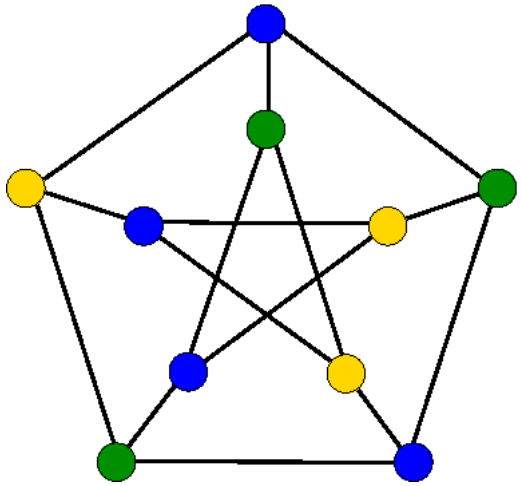


FIGURE 40 – Le polynôme chromatique du graphe de Petersen est : $t^{10}-15t^9+105t^8-455t^7+1353t^6-2861t^5+4275t^4-4305t^3+2606t^2-704t$

```
1  coloriage( s, k )
2  si s == nbs  alors
3     compteur += 1
4     retourner
5  fsi
6  pour chaque couleur c < k
7     si acceptable( s, c ) alors
8        clr[s] ← c
9          coloriage( s + 1 )
10       clr[s] ← 0
11    fsi
```

Exercice 67 (acceptable)**.** *Compléter l'algorithme de coloriage.*

Pratique 19. *On peut utiliser des piles d'ensembles pour suivre l'évolution des contraintes.*

(1) Implanter l'algorithme du calcul des colorations d'un graphe.

(2) Vérifier que le polynôme chromatique de la maison à 5 sommets est :

$$t^5 - 8t^4 + 23t^3 - 28t^2 + 12t.$$

11.5. **lien dansant.**

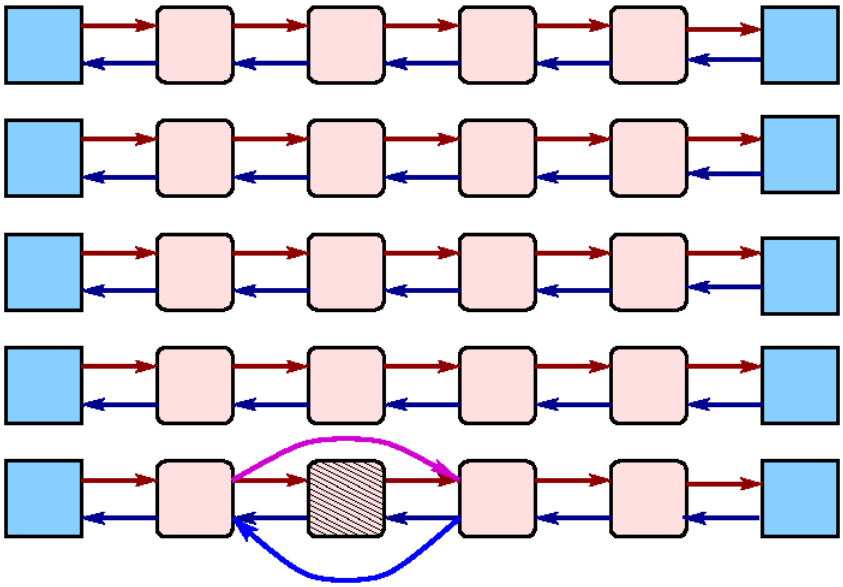


FIGURE 41 – Un réseau de liens dansant pour le coloriage du graphe maison.

```
1  typedef struct _dl_ {
2      struct _dl_ *prd, *svt;
3      int clr ;
4      int hit ;
5  } enrdl, *dl;
6
7  enrdl  ** infos ;
8
9  void initdl ( int n, int k );
10 void refroidir ( int s, int k );
11 void rechauffer( int s, int k );
```

LISTING 27 – structure pour les liens dansants

Exercice 68. *Comment coder simplement l'initiatisation du réseau de liens ?*

Pratique 20. *Utiliser la technique des liens dansants sur une liste doublement chaînée pour décider k-colorabilité d'un graphe.*

```
1  tps ← 0
2
3  PPROF( s : sommet, g : graphe )
4  d[ s ] ← tps ← tps + 1
5  clr[ s ] ← GRIS
6  pour chaque arc st
7   si clr[t] = BLANC
8    PPROF( t )
9  clr[ s ] ← NOIR
10 f[ s ] ← tps ← tps + 1
11
12
13 PARCOURS( G : graphe )
14 pour chaque sommet s
15  clr[ s ] ← BLANC
16 pour chaque sommet s
17  si clr[ s ] = BLANC
18   PPROF( s, g )
```

Listing 28 – Parcours en profondeur avec horodatage

12. Tri topologique

12.1. **Parcours en profondeur.** Le parcours en profondeur, horodaté et tricolore est trés utile pour réaliser des preuves algorithmiques.

A chaque sommet s, sont associées deux dates $d(s)$ et $f(s)$. Toutes les dates sont distinctes, $d(s)$ est la date de découverte du sommet s, $f(s)$ est la date de fin de traitement. Les sommets sont coloriés en trois couleurs : blanc, gris, noir. Les sommets sont initialisés à blanc, un sommet s devient gris à l'instant $d(s)$, noir à l'instant $f(s)$.

Exercice 69 (PP en action)**.** *Préciser les prochaines étapes du parcours horodaté en cours d'exécution sur le graphe* fig. *(42).*

Lemme 7 (des intervalles)**.** *Les intervalles* $[d(s), f(s)]$ *d'un parcours horodaté sont emboîtés ou disjoints.*

Démonstration. Considérons deux sommets s et t tels que $d[s] < d[t]$. A l'instant $d[t]$, le sommet s ne peut pas être blanc. Si s est noir alors les intervalles sont disjoints. Si s est gris alors t est un descendant de s et tous les voisins de t seront visités avant les voisins de s, autrement dit $f[t] < f[s]$, les intervalles sont emboîtés. □

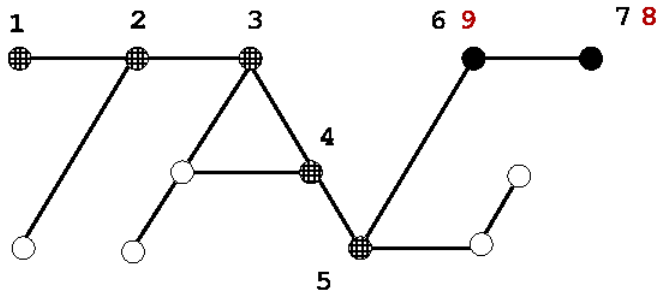
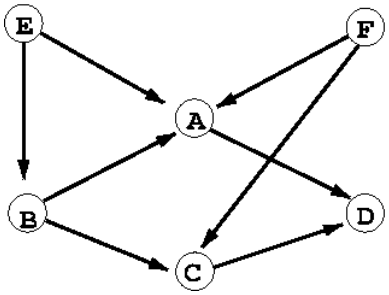


FIGURE 42 – Le parcours en profondeur horodaté en action sur le graphe TAG.

12.2. **Tri topologique.**



Effectuer un tri topologique d'un graphe acyclique orienté (DAG) c'est ordonner les sommets du graphe de sorte que si st est un arc alors s précède t. L'ordonancement des tâches est une application classique du tri topologique.

Proposition 13. *On obtient un tri topologique d'un graphe acyclique orienté en ordonnant les sommets un ordre de fin de traitement en profondeur.*

Démonstration. □

Exercice 70. *Quelle est la valeur maximale de fin de traitement pour un parcours en profondeur horodaté ? Préciser le temps de calcul de la procédure de tri topologique.*

Exercice 71. *Ecrire un algorithme pour détecter la présence d'un circuit dans un graphe orienté.*

Pratique 21. *Implanter la fonction* `int* triTopologique( graphe G)` *qui retourne un tableau de sommets du graphe orienté G dans un ordre topologique.*

12.3. **Fonction de Grundy.** Pour tout ensemble d'entiers naturels X, la plus petite valeur ne figurant pas dans X est notée $\operatorname{mex} X$.

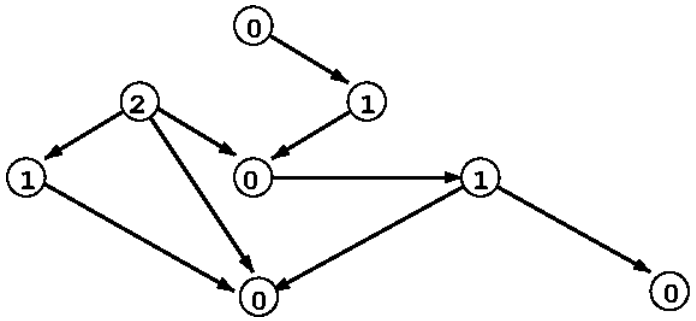


FIGURE 43 – Function de Grundy sur un graphe.

Une fonction de Grundy sur un graphe orienté est une application g sur l'ensemble des sommets tel que :

$$g(s) = \text{mex}\{g(t) \mid s \to t\}.$$

Proposition 14. *Un graphe orienté avec deux fonctions de Grundy possède un circuit.*

Démonstration. Supposons g et g' deux fonctions de Grundy différentes sur un même graphe. Il existe un sommet s tel que $g(s) \neq g'(s)$. Mézalor, la même chose pour un voisin de s et ainsi de suite. La finitude du nombre de sommets implique que ces sommets sont sur un cycle. □

Proposition 15. *Un graphe orienté acyclique possède une et une seule fonction de Grundy.*

Démonstration. La fonction de Grundy d'obtient de proche en proche, en parcourant les sommets dans l'ordre inverse d'un tri topologique. □

Pratique 22. *Implanter la fonction* `int* Grundy( graphe G)` *qui retourne le tableau des valeurs de Grundy des sommets du graphe G.*

12.4. **Jeu sur les graphes.** Sur un graphe orienté acyclique, on définit un jeu à deux joueurs, les sommets du graphe sont les positions du jeu. Chaque joueur joue à tour de rôle. Jouer un coup légal dans la position x c'est offrir à son adversaire une position y telle que xy est un arc du graphe. Le perdant est celui des joueurs ne pouvant plus jouer de de coup légal.

Proposition 16 (stratégie gagnante)**.** *Un joueur face à une position dont la valeur de Grundy n'est pas nulle joue un coup gagnant en plaçant son adversaire dans une position dont la valeur de Grundy est nulle.*

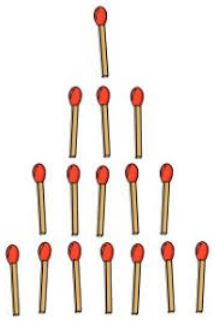


FIGURE 44 – Position initiale du célèbre jeu de nim.

Démonstration. Élémentaire ! □

Dans le jeu de nim classique, popularisé par "L'année dernière à Marienbad", un étrange et mystérieux film d'Alain Resnais, on place 4 rangées d'allumettes sur une table. Une rangée avec 1 allumette, une seconde avec 3 allumettes, une troisième avec 5, et 7 allumettes sur la dernière rangée. Chaque joueur joue à tour de rôle en enlevant au moins une allumette dans une seule rangée. Le joueur face à une table vide a perdu.

Exercice 72. *La position initiale est-elle perdante ou gagnante ?*

Exercice 73. *Dans le jeu de nim inverse, le joueur face à une table vide est gagnant. Quelle est la nature de la position initiale pour le jeu de nim inverse ?*

12.5. **Somme de graphe.** On considère deux graphes $\Gamma(X, A)$ et $\Gamma'(Y, B)$. La somme de ces deux graphes est un graphe dont les sommets sont des couples de $X \times Y$ reliés par des arcs de la forme :

$$(x, y) \to (a, y), \quad (x, y) \to (x, b),$$

où $x \to a \in A$ et $y \to b \in B$ sont des arcs des graphes.

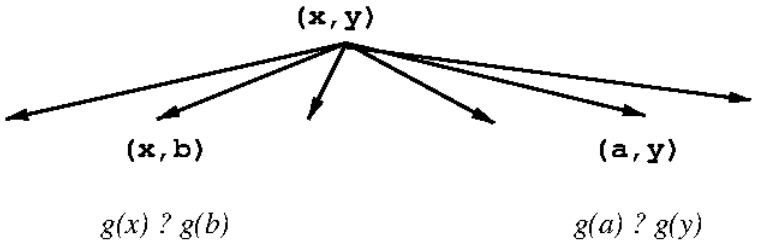


FIGURE 45 – Un nouvel opérateur ?

Lemme 8 (somme de graphe acyclique)**.** *La somme de deux graphes acyclique est un graphe acyclique.*

Démonstration. Exercice. □

Supposons l'acyclicité des graphes. Notons g_X et g_Y leur fonction de Grundy. Comment déterminer la fonction de Grundy g_S de la somme ? Anticipons, et supposons que la valeur de Grundy en (x, y) ne dépende que des valeurs $g_X(x)$ et $g_Y(y)$. Ainsi, $g_s(x, y) = g_X(x) \oplus g_Y(y)$ pour un mystérieux opérateur binaire $\oplus$ défini sur l'ensemble des entiers naturels vérifiant la formule de récurrence :

$$x \oplus y = \operatorname{mex}_{\substack{a<x \\ b<y}} \{a \oplus y, x \oplus b\}. \tag{4}$$

Exercice 74. *Montrer que pour tout entiers x et y, $x \oplus y \leq x + y$.*

Exercice 75. *Compléter la table* TAB. *(4) de la nim-addition.*

On remarque sur le champ que la loi de $\oplus$ est régulière

$$x \oplus y = x \oplus z \Longrightarrow y = z.$$

et que pour toute valeur $z < x \oplus y$ s'écrit sous la forme $z = x \oplus \beta$ avec $\beta < y$ ou $z = \alpha \oplus y$ avec $\alpha < x$.

Proposition 17. $(\mathbb{N}, \oplus)$ *est un groupe commutatif dont le neutre est 0 et dans lequel chaque élément est son propre opposé.*

Démonstration. L'associativité demande un peu de travail, prouvons par induction sur l'entier N que :

$$x + y + z = N \Longrightarrow (x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

Supposons par exemple que

$$(x \oplus y) \oplus z < x \oplus (y \oplus z),$$

TABLE 2 – Le remplissage de la table de la nim-addition se fait en partant du coin en bas à gauche. La valeur d'une case est égale à la plus petite valeur exclue de la rangée et de la colonne correspondante.

x	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$x \oplus b$	$\dots$	?
$\vdots$								$\vdots$
a								$a \oplus y$
$\vdots$								$\vdots$
3	3	2	1					$\vdots$
2	2	3	0					$\vdots$
1	1	0	3					$\vdots$
0	0	1	2	3				$\vdots$
$\oplus$	0	1	2	3	$\dots$	b	$\dots$	y

et donc $(x \oplus y) \oplus z = \alpha \oplus (y \oplus z)$ avec $\alpha < x$, ou $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus \sigma$ avec $\sigma < (y \oplus z)$. Dans le premier cas, nous en déduisons que

$$(x \oplus y) \oplus z = \alpha \oplus (y \oplus z) = (\alpha \oplus y) \oplus z$$

et par régularité $x \oplus y = \alpha \oplus y$ puis l'absurde $x = \alpha$. Le second cas se traite de façon similaire. □

Proposition 18. *La nim somme de x et y n'est rien d'autre que leur* XOR *bit-à-bit.*

Démonstration. Il suffit d'établir que pour $x = \sum_{i=0}^{r-1} x_i 2^i$:

$$x = x_0 2^0 \oplus x_1 2^1 \oplus \cdots \oplus x_{r-1} 2^{r-1}$$

□

Théorème 11 (Sprague-Grundy)**.** *La fonction de Grundy de la somme de deux graphes orientés acycliques est égale à la nim-somme de leur fonction de Grundy.*

Démonstration. Par la mex-définition. □

FIGURE 46 – ONAG.

12.6. **Nimber.** L'inventif mathématicien John Conway a mis en évidence un phénomène extraordinaire en osant une définition récursive pour une multiplication. Envisageons un produit $\otimes$ sur l'ensemble des entiers naturels qui soit distributif par rapport à la nim-addition.

Plus encore, imaginons, l'intégrité de cette loi : un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul. Pour tout entier $a < x$, pour tout entier b, le produit $(x \oplus a) \otimes (y \oplus b)$ n'est jamais nul, ce qui suggère la définition récursive pour une nim-multiplication :

$$x \otimes y = \operatorname{mex}_{\substack{a<x \\ b<y}} \{a \otimes y \oplus a \otimes b \oplus x \otimes b\}. \tag{5}$$

Curieusement cette loi vérifie toutes les propriétés algébriques usuelles : neutralité de 1, associativité, commutativité, distributivité sur la nim-addition.

Exercice 76. *Compléter la table de la nim-multiplication pour les entrées strictement inférieures à 4. Commenter !*

Exercice 77. *Calculer le nim produit de* $4 \otimes 4$ *!*

On peut alors démontrer que

Théorème 12 (corps de Conway)**.** $(\mathbb{N}, \oplus, \otimes)$ *est un corps commutatif.*

Démonstration. C'est l'objet du chapitre 6 du livre de Conway *On Numbers and Games* : the Curious Field On_2. La preuve est un petit peu délicate mais vous pouvez vous amuser à esquisser les étapes d'une démonstration. □

Exercice 78. *Établir deux propriétés au choix de la nim-multiplication.*

Pratique 23. *Mettre oeuvre la nim-multiplication.*

Références

[1] Claude Berge. *Graphes.* μ_B. Dunod, Paris, third edition, 1983.

[2] John H. Conway. *On Numbers and Games.* A. K. Peters, 2 edition, 2000.

[3] T. H. Cormen, C. Leiserson, R. Rivest, and X. Cazin. *Introduction à l'algorithmique.* Science informatique. Dunod, 1994.

[4] Lucas Édouard. Récréations mathématiques—tome 1—les traversées. les ponts. les labyrinthes, 1882. http://gallica.bnf.fr.

[5] Noam Elkies and Richard Stanley. The mathematical knight, 200x. http://www-math.mit.edu/~rstan/papers/knight.pdf.

[6] Donald E. Knuth. *Art of Computer Programming, Volume 1 : Fundamental Algorithms (3rd Edition) (Art of Computer Programming Volume 1).* Addison-Wesley Professional, 3 edition, November 1997.

[7] Donald E. Knuth. *Art of Computer Programming, Volume 2 : Seminumerical Algorithms (3rd Edition) (Art of Computer Programming Volume 2).* Addison-Wesley Professional, 3 edition, November 1997.

[8] Donald E. Knuth. *Art of Computer Programming, Volume 3 : Sorting and Searching (3rd Edition) (Art of Computer Programming Volume 3)*. Addison-Wesley Professional, 3 edition, November 1997.

[9] Donaldi E. Knuth. Dancing links, 2000. http://arxiv.org/abs/cs/0011047.

[10] Philippe Langevin. Le tournoi de nimbad à euphoria, 19xy. http://langevin.univ-tln.fr/problemes/NIMBAD/marienbad.html.

[11] Philippe Langevin. Une brève histoire des nombres, 2003. http://langevin.univ-tln.fr/notes/rsa/rsa.pdf.

[12] Harold. F. Mattson. *Discrete Mathematics with Applications*. Wiley international editions. Wiley, 1993.

[13] Herbert J. Ryser and Paul Camion. *Méthodes Combinatoires*. Monographie Dunod. Dunod, 1969.

[14] Robert Sedgewick. Permutation generation methods, x. https://www.cs.princeton.edu/~rs/talks/perms.pdf.

[15] Robert Sedgewick and Jean-Michel Moreau. *Algorithmes en langage C*. I.I.A. Informatique intelligence artificielle. Dunod, 1991.

[16] Neil. J. A. Sloane. On-line encyclopedia of integer sequences, 1964. https://oeis.org/?language=french.

[17] Peter Wegner. A technique for counting ones in a binary computer. *Communications of the ACM*, 3(5), 1960.

[18] Herbert S. Wilf. *Algorithms and complexity*. Prentice-Hall international editions. Prentice-Hall, 1986.

[19] Jacques Wolfmann and Michel Las Vergnas. Matériaux de mathématiques discrètes pour le musée de la villette, 19xy.