



CY CERGY PARIS UNIVERSITÉ

L3 PHYSIQUE
MÉTHODES NUMÉRIQUES

Projet 1 : Circuits Electriques

Élèves :

Mizaan-abbas KATCHERA
Djilani TLIBA

Enseignant :

Christophe OGUEY

Vendredi 16 Septembre 2022

Table des matières

Introduction	1
Résolution Théorique	1
Rappels sur la loi d'Ohm	2
Rappels sur les lois de Kirchhoff	2
Résolution	3
Résolution Numérique	4
Algorithme de Gauss-Jordan (avec optimisation partielle)	5
Algorithme de Rétro-Substitution	5
Calcul de l'inverse	5
Conclusion	6
Références	6

Introduction

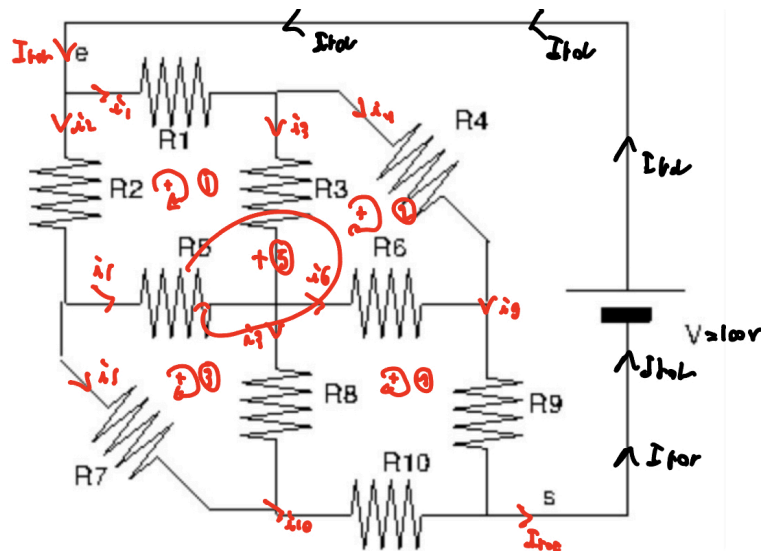


FIGURE 1 – Circuit Electrique

Tension appliquée : 100 V

Valeur des résistances :

$$(R_1, \dots, R_{10}) = (2.2, 9.7, 1.7, 4.3, 7.7, 0.9, 2.5, 9.3, 9.2, 3.2) \text{ k}\Omega$$

On dispose d'un circuit électrique composé de 10 résistances branchées en parallèle et en série et alimenté par une tension d'entrée et de sortie. L'objectif de projet est de déterminer le courant, le sens et l'intensité dans chaque résistance, le courant fourni par le générateur et la valeur de la résistance équivalente entre l'entrée et la sortie.

Au préalable, il s'agira de tenter de résoudre théoriquement le problème à travers l'utilisation des lois fondamentales de l'électricité et l'application à notre problème. Par la suite, l'objectif est de coder un programme sous langage python afin d'obtenir les résultats que l'on souhaite identifier notamment de par différents algorithmes spécifiques et en améliorant ces derniers en comparant avec d'autres logiciels prédéfinis et de se questionner sur les limites de la résolution.

Résolution Théorique

Afin de résoudre le problème, il est essentiel de rappeler les lois fondamentales de l'électricité à savoir les lois de Kirchhoff et la loi d'Ohm. Parmi les lois de Kirchhoff, les lois appliquées à l'intensité à savoir la loi des mailles et la loi des nœuds ainsi que la loi d'Ohm s'appliquant à la tension, ces dernières sont utiles à la résolution théorique du problème le circuit étant composé de résistances. Dès lors, il sera question de résoudre théoriquement le problème dans la mesure du possible.

Rappels sur la loi d'Ohm

La loi d'ohm est une des relations fondamentales de l'électricité. Elle met en relation 3 éléments : la tension aux bornes de la résistance, l'intensité traversant la résistance et la valeur de la résistance respectivement en Volts, Ohm et Ampère. La résistance électrique

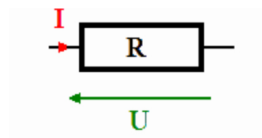


FIGURE 2 – Dipôle muni d'une résistance

(R) est le rectangle noir, le courant (I) est représenté en rouge et la différence de potentiel (U) est en vert. La formule de la loi d'Ohm s'énonce ainsi : $U = R.I$ ou encore $I = \frac{U}{R}$ et $R = \frac{U}{I}$

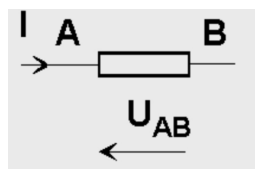


FIGURE 3 – Exemple

Le courant circule de la borne A à la borne B donc $U_A > U_B$ et d'après la loi d'Ohm on obtient : $U_A - U_B = RI$ et dans le cas contraire si $U_A < U_B$ alors $U_B - U_A = -RI$. Par convention, la différence de potentiel est arbitrairement désigné par une flèche dont le sens varie du potentiel le plus élevé au moins élevé.

Rappels sur les lois de Kirchhoff

Les lois de Kirchhoff partie intégrante des lois fondamentales de l'électricité sont composées de deux lois. La loi des noeuds et la loi des mailles (ou méthode des mailles). Ces lois ont été créées dans le but d'exprimer la conservation de l'énergie dans un circuit électrique mathématiquement.

Loi des noeuds

La loi des noeuds s'énonce ainsi : « la somme algébrique des intensités des courants qui entrent par un noeud est égale à la somme algébrique des intensités des courants qui en sortent »

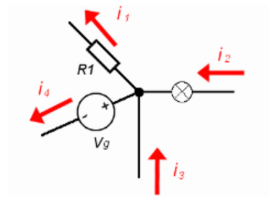


FIGURE 4 – Exemple

D'après le schéma ci-dessus, i_3 et i_4 sortent du noeud et i_1 et i_2 entrent dans le noeud. De la loi des noeuds, on obtient : $i_2 + i_3 = i_1 + i_4$

Loi des mailles (ou méthode des mailles)

La loi des mailles s'énonce ainsi : « dans une maille d'un réseau électrique, la somme des tensions le long de cette maille est toujours nulle ».

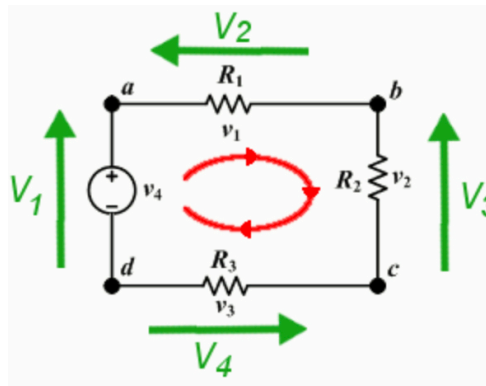


FIGURE 5 – Exemple

Le schéma ci-dessus illustre un circuit électrique fermé où est représenté en vert les tensions, en rouge le sens du courant. En appliquant la loi des mailles, on obtient : $V1 + V2 + V3 + V4 = 0$ si l'on suit le sens de la flèche rouge.

Dans le sens inverse, on aurait obtenu : $V1 - V2 - V3 - V4 = 0$

Résolution

On applique la loi des mailles et des noeuds afin d'obtenir un système d'équation que l'on résoudra par la suite afin de trouver les intensités de courant. On utilise le schéma du problème (p.1).

$$\text{D'après la loi des mailles on a : } \begin{cases} i_3 R_3 + i_1 R_1 + i_2 R_2 = 0 \\ -i_5 R_5 + i_3 R_3 + i_6 R_6 = 0 \\ -i_8 R_8 - i_5 R_5 + i_7 R_7 = 0 \\ -i_9 R_9 - i_6 R_6 + i_8 R_8 + i_{10} R_{10} = 0 \\ i_{10} R_{10} + i_7 R_7 + i_2 R_2 = 100 \end{cases}$$

D'après la loi des noeuds on a :

$$\begin{cases} i_1 - i_3 - i_4 = 0 \\ i_2 - i_5 - i_7 = 0 \\ i_8 - i_3 - i_5 + i_6 = 0 \\ i_9 - i_6 - i_4 = 0 \\ i_{10} - i_8 - i_7 = 0 \end{cases}$$

Il s'agit de 10 équations à 10 inconnus, on peut appliquer la méthode du pivot de gauss et identifier les différentes valeurs des intensités de courant à chaque résistance mais cela semble difficile de l'appliquer manuellement et beaucoup trop long. L'usage du numérique est requis pour notre problème.

Résolution Numérique

En conséquence de la partie théorique, il est donc évident de coder un algorithme nous permettant de parvenir à nos résultats afin de faciliter la résolution. L'algorithme de Gauss Jordan optimisée, de Rétro-Substitution et du calcul de l'inverse sera principalement utilisé concernant notre problème. De ce fait, on modélise notre problème sous forme d'une égalité de matrice 10 x 10 pour tout $x_i = \{i_1, \dots, i_{10}\} \in R$ où :

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -R1 & R2 & -R3 & 0 & R5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R3 & -R4 & 0 & R6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -R5 & 0 & R7 & -R8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -R6 & 0 & R8 & -R9 & R10 \\ 0 & R2 & 0 & 0 & 0 & 0 & R7 & 0 & 0 & R10 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ V \end{pmatrix}$$

et $x = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \\ i_7 \\ i_8 \\ i_9 \\ i_{10} \end{pmatrix}$ et l'équation à résoudre est $Rx = b$.

L'objectif étant d'inverser tout en ayant triangularisé la matrice R puis l'inverser et rétrosubstitué pour une résolution plus rapide et obtenir nos inconnus que l'on recherche et en déduire la résistance équivalente de par la loi d'Ohm ($U = RI$ donc $R = U/I$) et l'intensité de sortie de courant total vérifiant ($i_1 + i_2 = i_9 + i_{10}$).

Algorithme de Gauss-Jordan (avec optimisation partielle)

Le coût opératoire de notre algorithme de Gauss-Jordan optimisée est de $\frac{2}{3}n^3$ flop. Il consiste à transformer une matrice initiale A en matrice triangulaire supérieure $T = P A$. L'élément de matrice A_{kk} est ce que l'on appelle pivot. Il délimite le coin supérieur gauche de la sous-matrice où l'on procède étape par étape. Ci-joint l'algorithme appliquée à notre matrice (AlgoGaussJordan.py) : <https://github.com/Mizaan-Github/Projet-1-Circuits-lectriques-Mizaan-et-Djilani-/>

Algorithme de Rétro-Substitution

Le coût opératoire de notre algorithme de Rétro-Substitution est de n^2 flop. Il consiste à résoudre plus facilement les matrices triangulaires afin d'en trouver solution. Ci-joint l'algorithme appliquée à notre matrice (AlgoRetrosubstitution.py) : <https://github.com/Mizaan-Github/Projet-1-Circuits-lectriques-Mizaan-et-Djilani-/>

Calcul de l'inverse

Le coût opératoire de notre algorithme du calcul de l'inverse est de $3n^3$ flop. Il consiste à inverser la matrice que l'on souhaite à condition que celle-ci soit inversible c'est à dire de déterminant non nul ou dans le cas d'une matrice triangulaire le produit des coefficients diagonaux. (la démonstration est disponible dans la bibliographie.) Ci-joint l'algorithme appliquée à notre matrice (AlgoInverse.py) : <https://github.com/Mizaan-Github/Projet-1-Circuits-lectriques-Mizaan-et-Djilani-/>

L'entièreté du programme ainsi que les explications sont disponibles ci-joint ainsi que ce compte-rendu (Projet 1 circuits electriques.py) : <https://github.com/Mizaan-Github/Projet-1-Circuits-lectriques-Mizaan-et-Djilani-/>

Conclusion

De notre programme, il en résulte les valeurs suivantes :

- La valeur de l'intensité de courant i_1 dans R_1 est : 11,317 mA
- La valeur de l'intensité de courant i_2 dans R_2 est : 5,219 mA
- La valeur de l'intensité de courant i_3 dans R_3 est : 7,685 mA
- La valeur de l'intensité de courant i_4 dans R_4 est : 3,632 mA
- La valeur de l'intensité de courant i_5 dans R_5 est : - 1,644 mA
- La valeur de l'intensité de courant i_6 dans R_6 est : 2,835 mA
- La valeur de l'intensité de courant i_7 dans R_7 est : 6,863
- La valeur de l'intensité de courant i_8 dans R_8 est : 3,206 mA
- La valeur de l'intensité de courant i_9 dans R_9 est : 6,466 mA
- La valeur de l'intensité de courant i_{10} dans R_{10} est : 10,069 mA
- Le courant fourni par le générateur est de : 16,535 mA
- La valeur de la résistance équivalente R_{eq} est : 6,048 $k\Omega$

Afin de vérifier nos résultats, on utilise un logiciel nommé "Falstad".

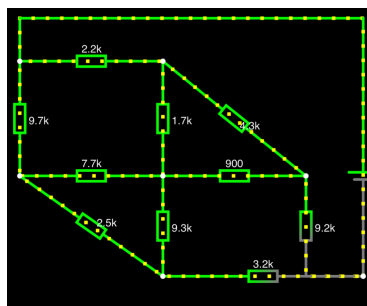


FIGURE 6 – Logiciel : Falstad

Ci-dessus le circuit électrique ainsi que les résistances. On obtient exactement les mêmes résultats. Ainsi cela confirme la fiabilité de notre programme python. De plus, il paraît évident de se questionner si notre programme fonctionne avec d'autres valeurs de résistances ou de tension ? La réponse est oui, il suffit juste de modifier ces valeurs dans le code " R_1, \dots, R_{10} " et la tension V .

Références

- [Travis E. Oliphant] *Guide to Numpy, 2006* (Utilisation de Numpy) <https://archive.org/details/NumPyBook>
- [1] 5 Septembre 2022 <https://uel.unisciel.fr/physique> (Lois d'Ohm)
- [2] 12 Septembre 2022 <https://www.falstad.com/circuit/> (Vérification)
- [3] 10 Septembre 2022 <http://www.elektronique.fr>
- [4] 12 Septembre 2022 https://www.unilim.fr/pages_perso/thomas.cluzeau/Enseignement/PolyAnalyseNum.pdf (Algorithme de Rétro-Substitution)
- [5] 12 Septembre 2022 <https://www.ljll.math.upmc.fr/~ledret/Math120/chapitre6.pdf> (démonstration du déterminant de l'inverse)
- [Christophe Oguey] *Cours méthodes numériques L3 Physique 2022-2023* (Utilisation des algorithmes)