



CY CERGY PARIS UNIVERSITÉ

L3 PHYSIQUE  
MÉTHODES NUMÉRIQUES

---

## Projet 3 : Introduction à l'attracteur de Lorenz

---

*Élèves :*

Mizaan-abbas KATCHERA  
Djilani TLIBA

*Enseignant :*

Christophe OGUEY

Mardi 25 Octobre 2022

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>L'équation de Lorenz</b>	<b>1</b>
<b>Mise en équation numérique</b>	<b>2</b>
La forme attracteur . . . . .	2
Variation des conditions initiales . . . . .	3
Variation de $x_0, y_0, z_0$ . . . . .	3
Variation de $\rho$ . . . . .	4
<b>Conclusion</b>	<b>6</b>
<b>Références</b>	<b>6</b>

## Introduction

En 1963, le scientifique météorologue et physicien Edward Lorenz s'intéresse au caractère chaotique de la météorologie. Du même nom que son fondateur, les équations de Lorenz découlent de la simplification des équations de Navier-Stokes basée sur la mécanique des fluides, difficile à résoudre à son époque celui-ci eut donc l'idée de chercher un modèle très simplifié de ces équations. Il aboutit alors à un système dynamique différentiel possédant seulement trois degrés de liberté qu'il énonce ainsi :

$$\begin{cases} x'(t) = \sigma (y(t) - x(t)) \\ y'(t) = \rho x(t) - y(t) - x(t) z(t) \\ z'(t) = x(t) y(t) - \beta z(t) \end{cases}$$

avec  $\sigma, \rho, \beta > 0$  et  $\beta < \sigma - 1$

Le but de ce projet est d'étudier le comportement général du système de l'équation de Lorenz et si la dynamique de celui-ci à travers la dépendance des conditions initiales.

Afin d'y parvenir, dans un premier temps nous définirons les termes du système puis nous verrons par la modélisation numérique que ce système est considéré comme chaotique à travers la mise en évidence des formes dites attracteurs et dans un second temps nous allons varier les conditions initiales de sorte à ce que toute légère modification des conditions initiales nous permette d'observer le chaos dans le système et des oscillations irrégulières et aperiodiques que nous exploiterons par la suite.

## L'équation de Lorenz

$$\begin{cases} x'(t) = \sigma (y(t) - x(t)) \\ y'(t) = \rho x(t) - y(t) - x(t) z(t) \\ z'(t) = x(t) y(t) - \beta z(t) \end{cases}$$

avec  $\rho, \beta, \sigma > 0$  et  $\beta < \sigma - 1$

On distingue trois variables :

- $x$  : intensité du mouvement de convection.
- $y$  : gradient horizontal de la température.
- $z$  : gradient vertical de la température.

$(x, y, z)$  décrit dans l'espace les conditions d'une atmosphère donnée.

On distingue aussi trois paramètres :

- $\sigma$  : nombre de Prandtl (le rapport entre la quantité de mouvement et la quantité de chaleur).
- $\rho$  : rapport entre le nombre de Rayleigh (transfert de chaleur au sein d'un fluide) et Rayleigh critique.
- $\beta$  : taille typique du système

D'après le théorème d'existence et d'unicité des équations différentielles, chaque variable possède une condition initiale qui est unique. Or dans notre cadre, la sensibilité aux valeurs initiales étant grande il est impossible d'obtenir des valeurs précises sur ces conditions initiales  $x_0, y_0, z_0$  ( $x, y, z$  à  $t = 0$ ) et cela dépasse même la modélisation des phénomènes réelles.

## Mise en équation numérique

La méthode de Runge-Kutta est la plus adaptée à notre équation. En effet, la méthode de Euler permet de résoudre de façon approximative des équations différentielles simples du premier ordre avec les conditions initiales alors que la méthode de Runge Kutta consiste à approcher la dérivée à l'ordre supérieur (à l'ordre 4 dans notre cas) avec un principe similaire à celui d'Euler.

### La forme attracteur

On pose  $\sigma = 10$ ,  $\rho = 28$  et  $\beta = 8/3$  comme conditions initiales en utilisant les deux méthodes. Ce sont les mêmes valeurs définies par Lorenz lors de son observation du chaos.<sup>1</sup>

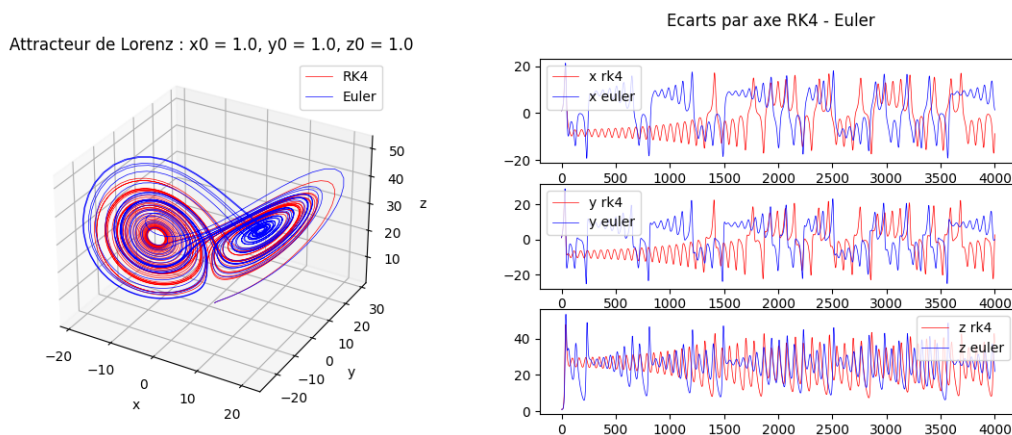


FIGURE 1 – Trajectoire de l'équation de Lorenz en 3D et par axe selon x,y et z avec  $\sigma = 10$ ,  $\rho = 28$  et  $\beta = 8/3$

On distingue ci-dessus une figure étrange que l'on appelle une forme d'attracteur semblable à deux ailes de papillons qui sont déployées et leurs trajectoires s'enroulent sur une aile puis l'autre et avec plusieurs itérations de manière instable. Dans ce cas on dit que c'est une fractale de dimension de Hausdorff comprise entre 2 et 3 (voir références bibliographiques). L'ensemble représente un système chaotique.

1. 50 itérations ont été réalisées sur la figure 1.

## Variation des conditions initiales

On conserve comme conditions initiales de départ les valeurs utilisées par Lorenz c'est-à-dire  $\sigma = 10$ ,  $\rho = 28$  et  $\beta = 8/3$ . L'objectif est de varier ces paramètres ainsi que les conditions initiales  $x_0, y_0, z_0$  et d'étudier le comportement des trajectoires.

### Variation de $x_0, y_0, z_0$

On pose les conditions initiales suivantes :  $x_0 = 10, y_0 = 10, z_0 = 20$  et on maintient les paramètres initiaux.<sup>2</sup>

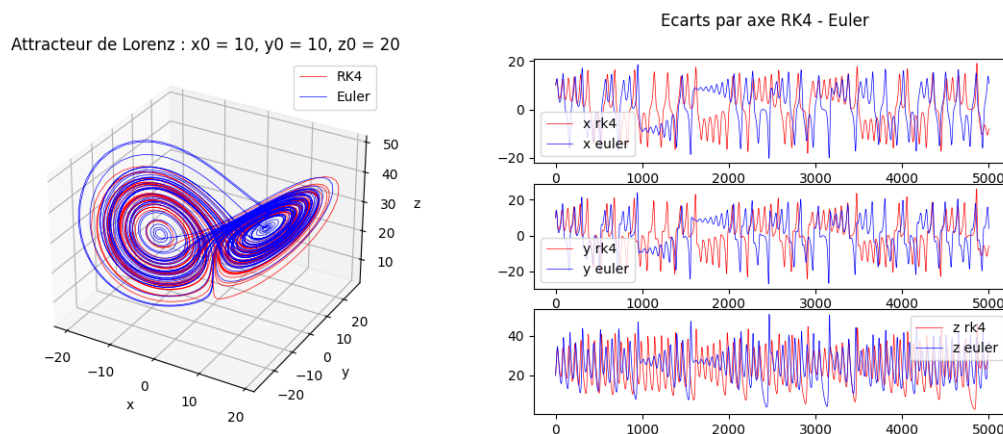


FIGURE 2 – Trajectoire de l'équation de Lorenz en 3D et par axe selon x,y et z avec  $\sigma = 10, \rho = 28$  et  $\beta = 8/3$

On varie légèrement les conditions initiales en posant les conditions initiales suivantes :  $x_0 = 10,0001, y_0 = 10,0001, z_0 = 20,001$  et conserve les paramètres initiaux.

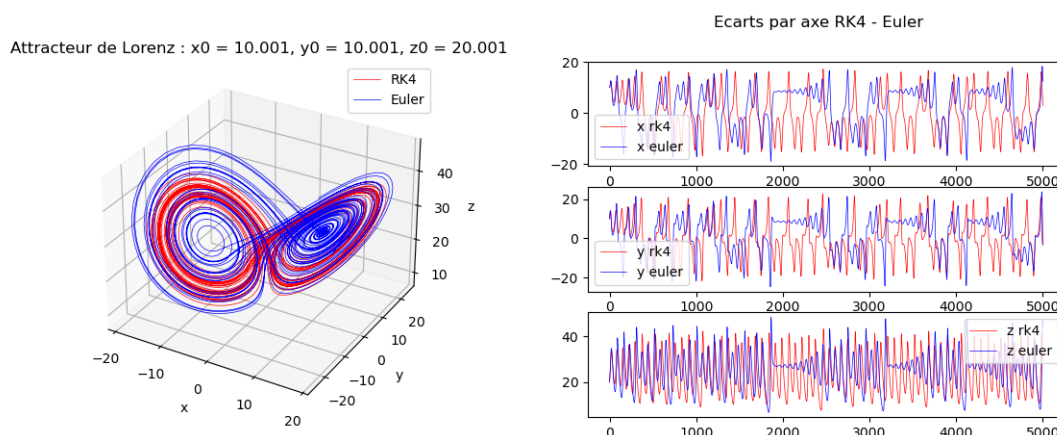


FIGURE 3 – Trajectoire de l'équation de Lorenz en 3D et par axe selon x,y et z avec  $\sigma = 10, \rho = 28$  et  $\beta = 8/3$

2. 50 itérations ont été réalisées sur la figure 2,3

On observe que l'on retrouve toujours la forme dite attracteur ou encore papillonnaire avec des trajectoires qui ne se croisent jamais entre elles et on remarque que les valeurs selon les différents axes semblent être disparates lorsque l'on modifie faiblement les conditions initiales.

Désormais on va établir une analyse paramétrique en étudiant qu'un seul paramètre qui est le plus important :  $\rho$  qui est rapport entre le nombre de Rayleigh (transfert de chaleur au sein d'un fluide) et Rayleigh critique.<sup>3</sup>

### Variation de $\rho$

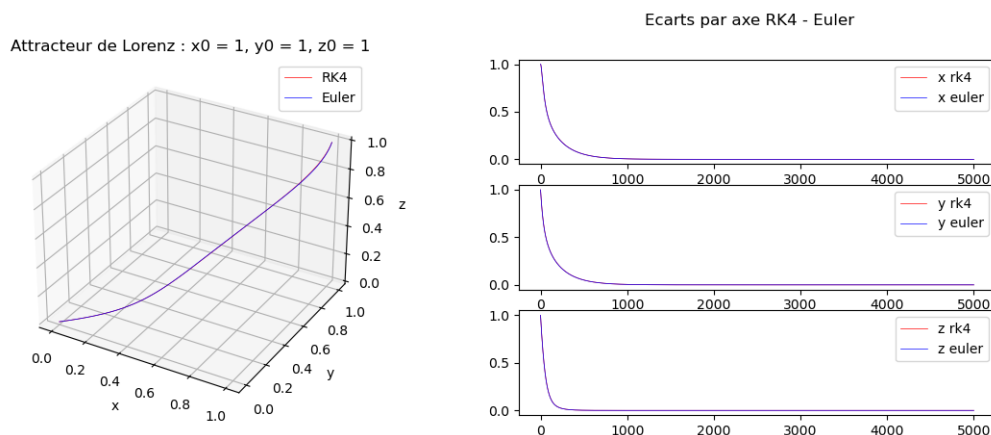


FIGURE 4 – Trajectoire de l'équation de Lorenz en 3D et par axe selon x,y et z avec  $\sigma = 10$ ,  $\rho = 0.5$  et  $\beta = 8/3$

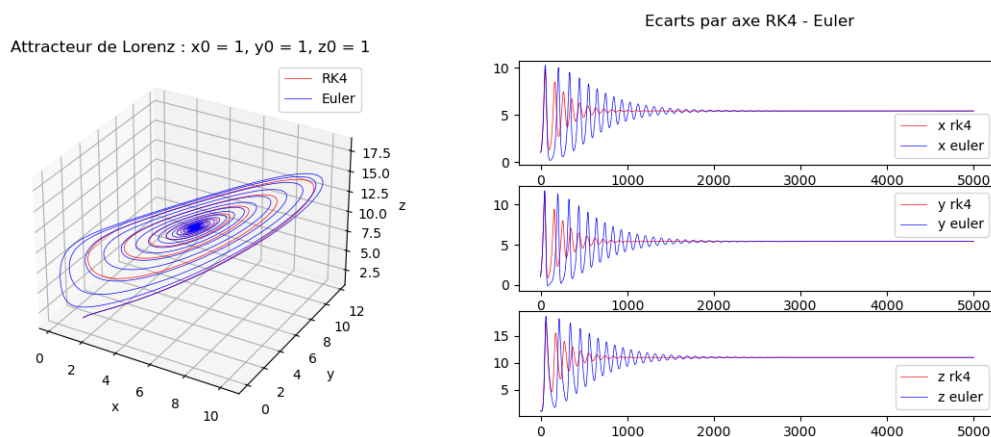


FIGURE 5 – Trajectoire de l'équation de Lorenz en 3D et par axe selon x,y et z avec  $\sigma = 10$ ,  $\rho = 12$  et  $\beta = 8/3$

3. 50 itérations ont été réalisées sur la figure 4,5

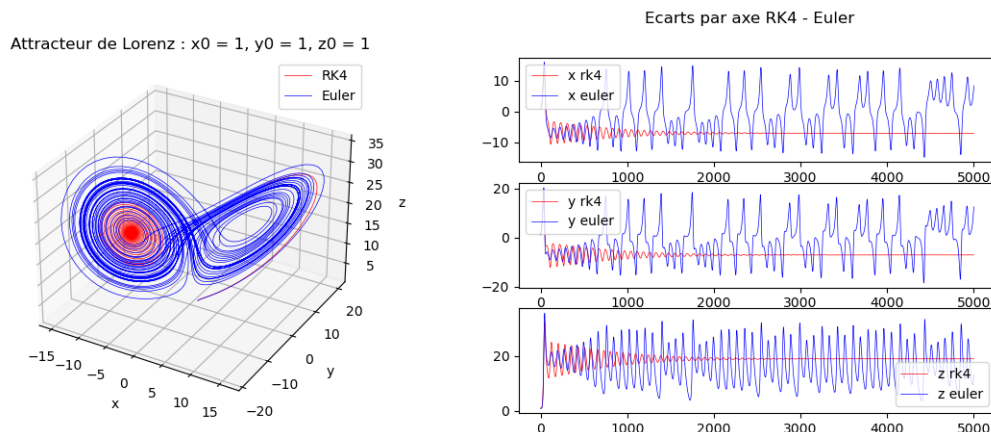


FIGURE 6 – Trajectoire de l'équation de Lorenz en 3D et par axe selon x,y et z avec  $\sigma = 10$ ,  $\rho = 20$  et  $\beta = 8/3$

Ci-dessus le tracé de la trajectoire de l'équation de Lorenz avec différentes valeurs de  $\rho$ . En effet, lorsque  $\rho = 0.5$  on obtient une trajectoire qui semble converger vers le point d'origine (0,0,0) que l'on appelle "point fixe" sous forme d'un "attracteur fixe". Pour  $\rho = 12$  on identifie que le système tourbillonne en convergeant vers un point centrale qui est variant selon la valeur de  $\rho$ , en réalité il s'agit d'un des points d'équilibre. (plus d'informations en bibliographie). En outre, lorsque  $\rho = 20$  on retrouve de nouveau l'aspect papillonnaire que l'on a qualifié d'attracteur étrange.<sup>4</sup>

On remarque que la méthode de Euler a ses limites, lorsque  $\rho$  est grand, il y a plus de courbure et une position initiale éloignée qui entraîne aussi plus de courbure ce qui rend Euler trop instable car accumulant des erreurs. (avec  $\rho$  grand). On va donc diminuer le pas de sorte à ce que Euler nous donne des valeurs cohérentes avec RK4 pour le prochain graphe.

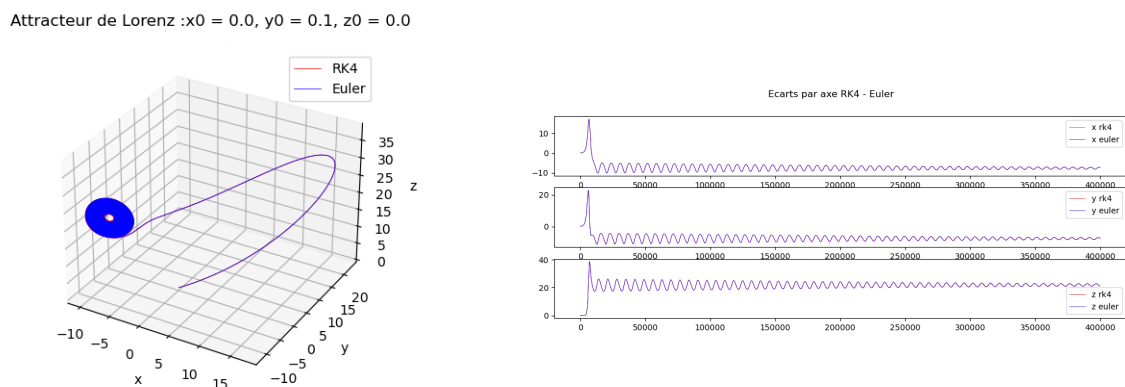


FIGURE 7 – Trajectoire de l'équation de Lorenz en 3D ou diagramme de bifurcation et par axe selon y avec  $\sigma = 10$ ,  $\rho = 25$  et  $\beta = 8/3$  et  $y0 = 0.1$

4. 50 itérations ont été réalisées sur la figure 6,7

Enfin, d'après le diagramme de bifurcation ci-dessus avec  $\rho = 25$  et en ne faisant varier celui-ci que selon l'abscisse on remarque de nouveau que le système converge vers un point fixe et on distingue une bifurcation caractéristique que l'on désigne par la bifurcation de Hopf autrement dit lorsque les coordonnées deviennent quelconques et la trajectoire converge autour d'un unique point. (plus d'informations disponibles en bibliographie)

En résumé, après analyse paramétrique de  $\rho$  on en déduit les cas suivants :

- si  $\rho < 1$  : le système converge vers un point fixe d'origine.
- si  $1 < \rho < 15$  : le système converge vers le premier point d'équilibre.
- si  $15 < \rho < 23$  : le système se converge différemment vers le second point d'équilibre. (de forme papillonnaire)
- si  $\rho > 23$  : le système se comporte de nouveau de manière aléatoire et on obtient une bifurcation de Hopf. (voir références bibliographiques)

## Conclusion

En conclusion, on a vu que le système de Lorenz est très complexe et difficile à exploiter dans la réalité physique, il s'agit d'un attracteur dit du chaos. Sans l'aide du numérique il aurait été impossible de résoudre ces équations. La dynamique de ce dernier résulte d'une grande sensibilité paramétrique et des conditions initiales. Enfin, ici on se limite à une introduction mais il est tout à fait possible d'étudier le système selon la dynamique de tous les paramètres et le temps, le pas etc.. ainsi en déduire d'autres caractéristiques de notre système, ses points d'équilibres et d'autres modèles assimilés à ce dernier pour une analyse plus approfondie.

## Références

- [Travis E. Oliphant] *Guide to Numpy, 2006* (Utilisation de Numpy)
- [Christophe Oguey] *Cours de résolutions d'équations différentielles - L3 Physique - Méthodes Numériques* (Utilisation de l'algorithme RK4 et Euler)
- [James Gleick] *La théorie du chaos, 1987*
- [1] <http://just.loic.free.fr/index.php?page=liens>
- [Julie Muhlke, Université Paris-Dauphine] [https://www.ceremade.dauphine.fr/~vigeral/Memoire\\_Muhlke\\_Julie.pdf](https://www.ceremade.dauphine.fr/~vigeral/Memoire_Muhlke_Julie.pdf)
- [2] [https://fr.wikipedia.org/wiki/Attracteur\\_de\\_Lorenz](https://fr.wikipedia.org/wiki/Attracteur_de_Lorenz)
- [3] [https://www.ceremade.dauphine.fr/~vigeral/memoire\\_hausdorff\\_bazin.pdf](https://www.ceremade.dauphine.fr/~vigeral/memoire_hausdorff_bazin.pdf) (dimension fractale de Hausdorff)
- [ENS Ulm - Chapitre 2 - Bifurcations] <http://www.lps.ens.fr/~vincent/ch2e.pdf> (bifurcation de Hopf)
- [Wikipédia - Attracteur de Lorenz] [https://fr.wikipedia.org/wiki/Attracteur\\_de\\_Lorenz](https://fr.wikipedia.org/wiki/Attracteur_de_Lorenz)