CY Cergy Paris Université

L3 Physique
Méthodes Numériques

Projet 2b : Promenades aléatoires

Élèves :
Mizaan-abbas KATCHERA
Djilani TLIBA

Enseignant :
Christophe OGUEY

Mardi 04 Octobre

Table des matières

Introduction

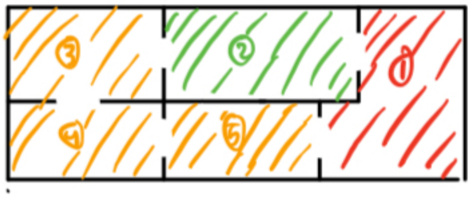

FIGURE 1 – Plan (Fn)

On se place dans le cadre où n = 5 pièces (n impair) et $(L_{12}, ...L_{51}) = (125, 100, 75, 75, 75)$

On dispose de plusieurs mouches qui suivent chacune un parcours aléatoire dans le plan (Fn) ci-dessus. Chaque portes séparent les pièces i et les pièces j d'une largeur de Lij. On considère que toutes les portes et salles sont assez grandes afin de négliger l'influence de chaque mouches entre elles. Le but est de décrire la matrice de transition du processus, de déterminer le taux de répartition des mouches selon le numéro des pièces en régime stationnaire ou lorsque les mouches sont toutes lâchées dans une même salle comment évolue cette dernière, si la dynamique dépend-elle des conditions initiales et quel est le comportement asymptotique à grand temps ?

Afin d'y parvenir, dans un premier temps nous allons calculer la matrice de transition associée puis mettre sous forme d'équation notre problème et traduire numériquement à l'aide de l'algorithme de la puissance appliquée à l'inverse et obtenir le vecteur de taux de répartition des mouches selon les différents paramètres en régime stationnaire. Par la suite, on modélisera l'asymptotique à grand temps à l'aide du même algorithme en faisant varier le vecteur au cours du temps.

Mise en équation théorique

Dans un premier temps, afin de calculer la matrice de transition on utilise le procédé d'une chaîne de Markov (la définition est disponible dans la bibliographie).

Soit une chaîne de Markov possédant un ensemble d'états E. Soit $P_{i,j}$ la probabilité d'une transition à l'état j à l'instant t+1 sachant qu'elle a été dans l'état i à l'instant t.

P est la matrice de ces probabilités ou matrice de transition suivante :

$$\begin{bmatrix} P_{1,1} & P_{1,2} & \dots & P_{1,j} & \dots & P_{1,\alpha} \\ P_{2,1} & P_{2,2} & \dots & P_{2,j} & \dots & P_{2,\alpha} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{i,1} & P_{i,2} & \dots & P_{i,j} & \dots & P_{i,\alpha} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{\alpha,1} & P_{\alpha,2} & \dots & P_{\alpha,j} & \dots & P_{\alpha,\alpha} \end{bmatrix} \quad \text{avec } \alpha \text{ la dimension de E.}$$

Cette matrice traduit les probabilités des transitions qui sont envisageables par le système considéré. Il s'agit d'une matrice stochastique (définition disponible en bibliographie.)

Dans notre cadre, la matrice de transition s'écrit ainsi : P = $\begin{bmatrix} P_{1,1} & P_{2,1} & 0 & 0 & P_{5,1} \\ P_{1,2} & P_{2,2} & P_{3,2} & 0 & 0 \\ 0 & P_{2,3} & P_{3,3} & P_{4,3} & 0 \\ 0 & 0 & P_{3,4} & P_{4,4} & P_{5,4} \\ P_{1,5} & 0 & 0 & P_{4,5} & P_{5,5} \end{bmatrix}$

et P $= \begin{bmatrix} 0 & \frac{L_{21}}{L_{21}+L_{23}} & 0 & 0 & \frac{L_{51}}{L_{51}+L_{54}} \\ \frac{L_{12}}{L_{12}+L_{15}} & 0 & \frac{L_{32}}{L_{23}+L_{34}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L_{23}}{L_{21}+L_{23}} & 0 & \frac{L_{43}}{L_{43}+L_{45}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L_{34}}{L_{34}+L_{32}} & 0 & \frac{L_{45}}{L_{54}+L_{51}} \\ \frac{L_{15}}{L_{12}+L_{15}} & 0 & 0 & \frac{L_{45}}{L_{45}+L_{34}} & 0 \end{bmatrix}$ avec $P_{i+1,i} = \frac{L_i}{L_i+L_{i-1}}$

et $P_{i-1,i} = \frac{L_{i-1}}{L_i+L_{i-1}}$ où $i = 1, ..5$.

On se place en régime stationnaire. Cela se traduit par le fait que les mouches se répartissent en en ne dépendant pas du temps ou autrement dit par l'équation de stationnarité suivante : $X(i, t+1) = PX(i, t) <=> X = PX$ où P est la matrice de transition et X le vecteur répartition des mouches.

L'équation se traduit sous forme du système suivant :

$$\begin{cases} x(1,t) &= P_{1,1}x(1,t+1) + P_{2,1}x(2,t+1) + P_{5,1}x(5,t+1) \\ x(2,t) &= P_{1,2}x(1,t+1) + P_{2,2}x(2,t+1) + P_{3_2}x(3,t+1) \\ x(3,t) &= P_{2,3}x(2,t+1) + P_{3,3}x(3,t+1) + P_{4,3}x(4,t+1) \\ x(4,t) &= P_{3,4}x_(3,t+1) + P_{4,4}x(4,t+1) + P_{5,4}x(5,t+1) \\ x(5,t) &= P_{1,5}x(1,t+1) + P_{4,5}x(4,t+1) + P_{5,5}x(5,t+1) \end{cases}$$

d'où en régime stationnaire : (t disparaît)

$$\begin{cases} x(1) &= P_{1_1}x(1) + P_{2,1}x(2) + P_{5,1}x(5) \\ x(2) &= P_{1_2}x(1) + P_{2,2}x(2) + P_{3_2}x(3) \\ x(3) &= P_{2,3}x(2) + P_{3,3}x(3) + P_{4,3}x(4) \\ x(4) &= P_{3,4}x_(3) + P_{4,4}x(4) + P_{5,4}x(5) \\ x(5) &= P_{1,5}x(1) + P_{4,5}x(4) + P_{5,5}x(5) \end{cases}$$

avec $x(1), .., x(5)$ la répartition des mouches selon la pièce $1, ..., 5$

L'étude du système s'effectuera numériquement dans la seconde partie.

Mise en équation numérique

Le programme ainsi que le compte-rendu sont disponibles à cette adresse : `https://github.com/Mizaan-Github/Projet_2b_Promenades_Al-atoires_TLIBA_KATCHERA`

Dans le but de résoudre l'équation de la partie précédente en régime stationnaire, on utilisera l'algorithme de la puissance appliquée à l'inverse.

L'algorithme de la puissance appliquée à l'inverse consiste à calculer la plus grande valeur propre la plus proche d'un z fixé (z étant la valeur propre) et de calculer le vecteur propre qui lui correspond. Dans notre problème, on fixe z = 0,99 (si z > 1 alors z est plafonné à 1 donc 1 est valeur propre) pour se rapprocher de la plus grande valeur propre qui est 1. Le vecteur propre qui en sort est traduit physiquement par la fonction numerise (def numerise(x)) autrement dit on multiplie la probabilité par le nombre de mouches ce qui nous permet d'obtenir la probabilité de présence ou le taux de répartition en régime stationnaire de nos mouches selon les différentes pièces.

Afin d'étudier le comportement des mouches en régime transitoire il est important de rappeler le théorème suivant :

<u>Théorème de Perron-Fobrienus :</u> Soit A une matrice primitive. Alors elle admet une valeur propre réelle strictement positive z > 0 telle que pour toute autre valeur propre s de A, on a |s| < z (où z est la valeur propre dominante), z est une valeur propre simple (son espace propre associé est de dimension 1) et il existe un unique vecteur $x\dagger+$ de norme 1 à coordonnées strictement positives tel que $Ax^{\dagger} = zx^{\dagger}$.

Notre matrice transitoire étant une matrice primitive car les probabilités sont strictement positives et les puissances de tous les termes le sont aussi alors on peut appliquer ce théorème. A l'aide de l'algorithme, on détermine que la seconde valeur propre est proche de 0,325. Or, la variation de celle-ci admet des valeurs négatifs ce qui est impossible. De ce fait, afin de rendre cohérent notre programme avec la réalité, on étudiera à partir de z = 0,69. On étudie alors avec plusieurs itérations la variation entre la plus grande valeur propre et z = 0,69 et on calcule ces derniers ainsi que les vecteurs propres correspondants. On modélise sous forme d'un graphe en fonction du temps le taux de répartition de la même manière que pour une valeur propre dans le régime stationnaire.

De surcroît, on modifie le vecteur propre de répartition initiale selon le nombre de mouches que l'on veut placer à l'initialisation et selon chaque pièces. (Vecteur M)

Ainsi, cela nous permet d'observer le comportement des mouches selon les conditions initiales que l'on fixe (nombre de mouches, placement des mouches) et de visualiser le comportement asymptotique à grand temps.

Résultats et conclusion

La matrice de transition du processus a été décrite dans la partie "mise en équation théorique du problème".

Le taux de répartition des mouches est représenté par le vecteur propre densité de probabilité de présence selon les numéro des pièces en régime stationnaire par l'équation de stationnarité vu dans la première partie et que l'on utilise dans notre programme.
On initialise la répartition des mouches ainsi : 50 mouches dans la première salle et les autres vides.

```
Regime stationaire :
 Vecteur propre correspondant à la valeur
propre la plus grande 0.999999746097 est :
 [ 0.49051232  0.55182672  0.42919721
0.36788198  0.36788251]
Taux de répartition des mouches en régime
stationnaire : [ 11.11113475  12.50003475
9.72221864   8.3332999    8.33331195]
```

FIGURE 2 – Cas du régime stationnaire

Dans l'affichage console ci-dessus, on a initialisé avec 50 mouches dans la première salle ainsi que 0 mouche dans les autres salles. En régime stationnaire, on obtient le vecteur propre ci-dessus ainsi que la distribution de probabilité de présence correspondante à chaque pièce. Dans la première pièce, il y a 11 mouches (on arrondi à la décimale inférieure), dans la salle 2 il y a 13 mouches, dans la salle 3 il y a 10 mouches, dans la salle 4 il y a 8 mouches et dans la dernière il y a 8 mouches.

```
Variation au cours du temps :
Le taux de répartition des mouches de départ correpondant à la valeur propre initial q
x est la taux de répartition des mouches correspondant à la valeur propre q l'appartenant
q = 0.69 => x = [ 50.   0.   0.   0.   0.]
q = 0.566276372558 => x = [ -8.10073111   9.17497332  19.93896242  19.36022045   9.62657492]
q = 0.700198486843 => x = [ 24.36248529  19.34515797   1.69023131  -2.50101925   7.10314469]
q = 0.758679088135 => x = [  0.51086413   4.79430262  15.72510189  18.48699299  10.48273838]
q = 0.769791587516 => x = [ 20.10124083  20.40110498   5.24950452  -1.14042616   5.38857582]
q = 0.822240934436 => x = [  3.25792651   4.62606452  13.09023183  17.20716002  11.81861711]
q = 0.804652069165 => x = [  1.81101009e+01   2.02428228e+01   7.14492564e+00  -1.76655326e-02
   4.51981612e+00]
q = 0.858376034228 => x = [  4.77515361   4.947468    11.73298056  16.22361337  12.32078447]
q = 0.828203657817 => x = [ 16.91928128  19.82663479   8.11920254   0.85526985   4.27961153]
q = 0.884035631289 => x = [  5.73323904   5.41996735  11.02983122  15.43732095  12.37964144]
q = 0.847453241614 => x = [ 16.12982504  19.32270669   8.63051641   1.57285036   4.34410149]
q = 0.90473135006 => x = [  6.39900344   5.93848225  10.65440247  14.77533622  12.23277562]
q = 0.864436029188 => x = [ 15.55596955  18.80105048   8.90954357   2.18886235   4.54457405]
q = 0.922183082055 => x = [  6.90353178   6.45556429  10.44391392  14.1982392   11.99875081]
q = 0.87972856176 => x = [ 15.10463344  18.29372324   9.0711339    2.73228021   4.79822922]
q = 0.937024085562 => x = [  7.31323156   6.94977405  10.31736722  13.68447547  11.7351517 ]
q = 0.89352052532 => x = [ 14.72828317  17.81470229   9.172432     3.21944561   5.06513693]
q = 0.949598679291 => x = [  7.66225835   7.41240633  10.23435739  13.22151728  11.46946065]
q = 0.905912606261 => x = [ 14.40215198  17.36906814   9.24204006   3.66014421   5.32659562]
q = 0.96017659953 => x = [  7.96876956   7.84084313  10.17468104  12.80149779  11.21420848]
q = 0.916993604773 => x = [ 14.11280739  16.95773124   9.29425998   4.06082784   5.57437356]
q = 0.969004062057 => x = [  8.24283175   8.23535727  10.12816691  12.41900384  10.97464023]
q = 0.926856924354 => x = [ 13.85258546  16.57963865   9.3363364    4.4261572    5.8052823 ]
q = 0.976311881928 => x = [  8.49036297   8.59751632  10.08963065  12.06997075  10.75251931]
q = 0.935601131818 => x = [ 13.61675925  16.23284833   9.37200878   4.75973382   6.01864981]
q = 0.982313875228 => x = [  8.71526175   8.92948903  10.05635334  11.75109318  10.5478027 ]
q = 0.94332694258 => x = [ 13.40214319  15.91516603   9.40323602   5.06457094   6.21488382]
q = 0.987204342024 => x = [  8.9202055    9.23345394  10.02691337  11.45962142  10.35980578]
q = 0.950133999287 => x = [ 13.20634893  15.62435599   9.4310922    5.3432984    6.39490448]
q = 0.991156649174 => x = [  9.10729953   9.51169081  10.00045729  11.19307531  10.18747705]
q = 0.956118290715 => x = [ 13.02751685  15.35818578   9.45625361   5.59819644   6.55984732]
q = 0.994323080199 => x = [  9.27826902   9.76627249   9.97650453  10.94930918  10.02964478]
q = 0.961370336357 => x = [ 12.8640574   15.11466308   9.4790863    5.83132391   6.71086932]
q = 0.996835662979 => x = [  9.43456146   9.99923013   9.9547164   10.72633252   9.88515949]
q = 0.965974055084 => x = [ 12.71461441  14.89184425   9.49989473   6.04456143   6.84908518]
q = 0.998807630491 => x = [  9.57748609  10.21232639   9.93483127  10.52239694   9.75295931]
q = 0.970006184732 => x = [ 12.57793019  14.68802547   9.51887948   6.23963163   6.97553323]
q = 1.0003352246 => x = [  9.70821549  10.40727323   9.91670011  10.33581707   9.6319941 ]
```

FIGURE 3 – Extrait des valeurs du taux de répartition des mouches avec toutes les mouches dans la même salle à l'initialisation : q est la valeur propre et x le vecteur densité de probabilité

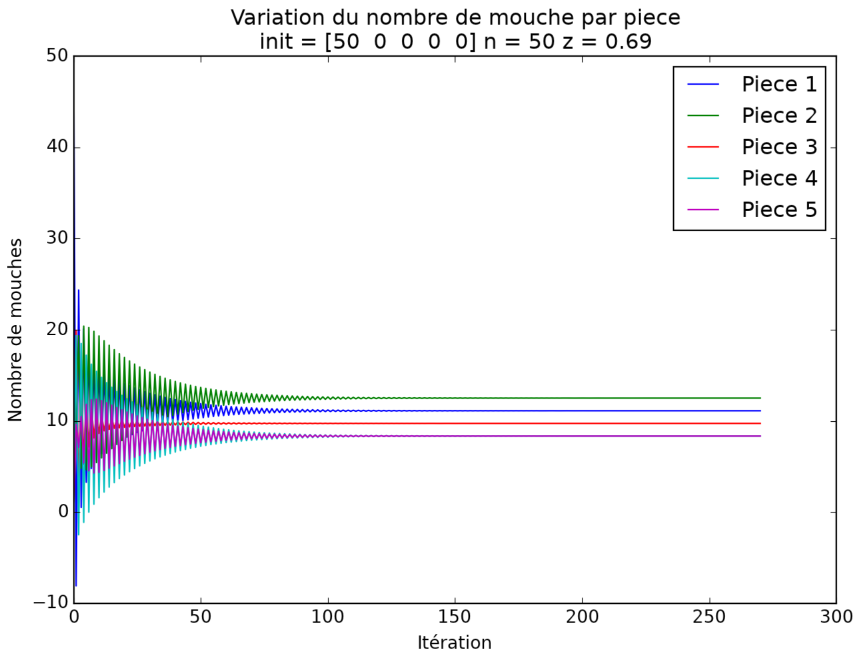

FIGURE 4 – Graphe de la probabilité de disposition des mouches selon les pièces au cours du temps avec toutes les mouches dans la même salle à l'initialisation

Dans le graphe ci-dessus on dispose encore une fois 50 mouches dans la même salle. La répartition au cours du temps des mouches tend vers la même probabilité de présence selon les pièces. De ce fait, cela tend vers un régime stationnaire.

On fait varier les conditions initiales tel que le nombre de mouches ainsi que le nombre de pièces dans lequel on lâche ces dernières. Par exemple, avec 50 mouches dans la première salle, 20 mouches dans la seconde et 10 mouches dans la troisième salle on obtient le graphe ainsi que les valeurs de la répartition des mouches au cours du temps suivant :

```
Variation au cours du temps :
Le taux de répartition des mouches de départ correpondant à la valeur propre initial q
x est la taux de répartition des mouches correspondant à la valeur propre q l'appartenant
q = 0.69 => x = [ 50.  20.  10.   0.   0.]
q = 0.75627047815 => x = [ -0.28104469   9.02649181  22.05688123  28.61494537  20.58272628]
q = 0.773861445362 => x = [ 31.62708958  33.0342433   10.19359851  -1.62135789   6.7664265 ]
q = 0.822979478411 => x = [  5.80984364   6.78568109  19.76027383  27.55747649  20.08672494]
q = 0.801981901095 => x = [ 28.55486345  32.95702202  12.24498011  -0.14573382   6.38886824]
q = 0.85434391520 8 => x = [  7.89480771   7.42490582  18.20984797  26.12152072  20.34891778]
q = 0.823876944584 => x = [ 26.94066802  32.14750953  13.37975916   1.17860778   6.35345552]
q = 0.879094010135 => x = [  9.21608087   8.29864888  17.38054753  24.90403688  20.20068584]
q = 0.842965072932 => x = [ 25.82458275  31.24976846  13.99048848   2.30527588   6.62988443]
q = 0.900003324555 => x = [ 10.18143698   9.1993788   16.92531014  23.85378127  19.84009281]
q = 0.860193551474 => x = [ 24.97279446  30.35895995  14.33507611   3.29032793   7.04284155]
q = 0.917966397476 => x = [ 10.94573157  10.07201016  16.65976333  22.92532565  19.39716928]
q = 0.875837247054 => x = [ 24.27724909  29.50981749  14.54393156   4.16870028   7.50030158]
q = 0.933371610577 => x = [ 11.58604037  10.89435471  16.49179788  22.0920186   18.93578845]
q = 0.889998322342 => x = [ 23.68247011  28.71610566  14.6821665    4.96089337   7.95836435]
q = 0.946486891484 => x = [ 12.14250894  11.65858007  16.37536252  21.33774493  18.48580355]
q = 0.902749621876 => x = [ 23.15895211  27.98159889  14.78241586   5.6799612    8.39707194]
q = 0.957556884529 => x = [ 12.63706762  12.36360718  16.28729213  20.6516799   18.06035316]
q = 0.914169627038 => x = [ 22.69027467  27.30548165  14.86114561   6.334953     8.80814507]
q = 0.96682030599 => x = [ 13.08226578  13.01151356  16.21589947  20.02603319  17.664288  ]
q = 0.924347337581 => x = [ 22.26663135  26.6849197   14.92669793   6.93273922   9.18901181]
q = 0.97450760885 => x = [ 13.48595319  13.6056666   16.1551324   19.45471315  17.29853466]
q = 0.933379483176 => x = [ 21.88156774  26.11624015  14.98345158   7.47890591   9.53983461]
q = 0.98083557807 => x = [ 13.85346349  14.14988653  16.10179749  18.93256727  16.96228522]
q = 0.941366390024 => x = [ 21.53063541  25.59548962  15.03376773   7.97814653   9.86196072]
q = 0.986003092096 => x = [ 14.18879235  14.64808473  16.05413756  18.4551442   16.65384116]
q = 0.948408258119 => x = [ 21.21018379  25.11886507  15.07900434   8.43472745  10.15721936]
q = 0.990188772924 => x = [ 14.49509068  15.10402348  16.01110804  18.01851967  16.37125813]
q = 0.954602271267 => x = [ 20.91735997  24.68275017  15.11999526   8.85228661  10.42760799]
q = 0.993550284175 => x = [ 14.77505583  15.5212038   15.97201049  17.6191626   16.11256728]
q = 0.960040554905 => x = [ 20.64961508  24.28373415  15.15732412   9.23421829  10.67510835]
q = 0.996224830344 => x = [ 15.03106964  15.90285484  15.9363754   17.25388376  15.87581636]
q = 0.964808870442 => x = [ 20.40482171  23.91868398  15.19135488   9.58355983  10.9015796 ]
q = 0.998330432873 => x = [ 15.26519515  16.25199692  15.90385082  16.91975725  15.65919987]
q = 0.968985902459 => x = [ 20.18088447  23.58474578  15.22244989   9.90313087  11.10878898]
q = 0.999967644 => x = [ 15.47936195  16.57139533  15.87414484  16.61409875  15.46099913]
q = 0.9726429979 => x = [ 19.97608431  23.27926064  15.2508617   10.19546764  11.29832571]
```

FIGURE 5 – Extrait des valeurs du taux de répartition des mouches avec variation des conditions initiales ainsi que les vecteurs propres de densité de probabilité : q est la valeur propre et x le vecteur densité de probabilité

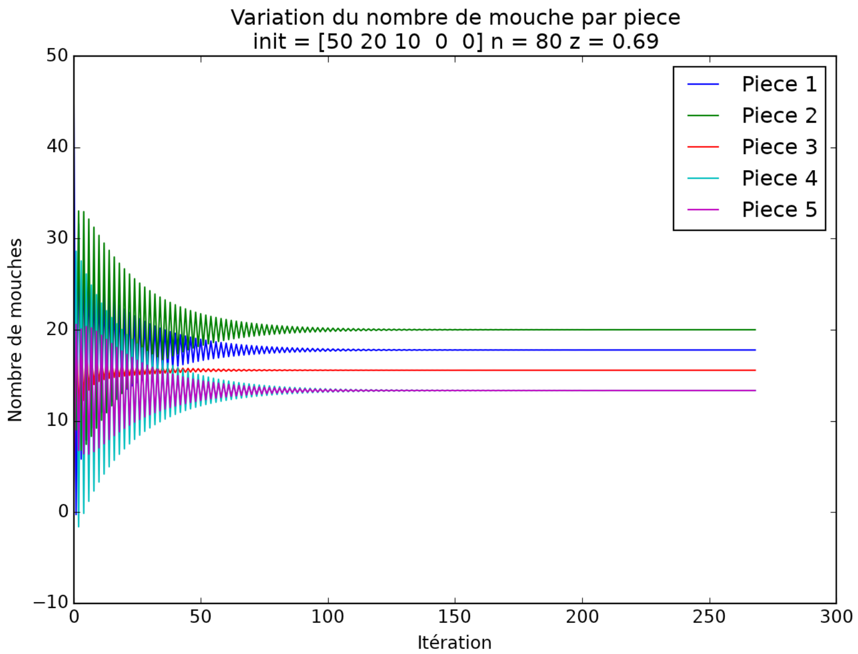

FIGURE 6 – Graphe de la probabilité de disposition des mouches selon les pièces au cours du temps avec variation des conditions initiales

Ainsi, la dynamique de dépend pas des valeurs initiales car elle tend de nouveau vers un régime stationnaire.

Enfin, d'après les différents cas précédents en faisant varier les conditions initiales ou non, on peut en conclure que à grand temps peu importe les paramètres on obtiendra au final toujours un taux de répartition similaire qui à grand temps converge vers le même état, un état de stationnarité.

Références

[Travis E. Oliphant] *Guide to Numpy, 2006* (Utilisation de Numpy) `https://archive.org/details/NumPyBook`

[Christophe Oguey] *Cours spectre de matrice - L3 Physique - Méthodes Numériques* (Utilisation de l'algorithme de la puissance appliquée à l'inverse)

[1] *Académie de versailles* (Outils tracé de graphique python) `https://phychim.ac-versailles.fr/IMG/pdf/tuto_python_matplotlib.pdf`

[Jean-Jacques Ruch-Marie-Line Chabanol] *Université de Bordeaux* (Cours de préparation à l'agrégation sur les chaînes de Markov) `https://www.math.u-bordeaux.fr/~mchabano/Agreg/ProbaAgreg1213-COURS5-CM.pdf`

[Mike Robson] *IUP Miage Bordeaux* (Définition d'une chaîne de Markov, d'un processus stochastique et matrice de transition) `https://dept-info.labri.fr/ENSEIGNEMENT/formation-a-distance/cibermiage-processus/c1.7/ch01/`

[2] *Bibmath.net* (Théorème de Perron-Frobenius) `https://www.bibmath.net/dico/index.php?action=affiche&quoi=./p/perron-frobenius.html`